

Н. С. БЯРОЗКІНА, С. А. МІНЮК

**ДЫФЕРЭНЦЫЯЛЬНЫЯ
І ІНТЭГРАЛЬНЫЯ
ЎРАЎНЕННІ**



Міністэрства адукацыі Рэспублікі Беларусь

ГРОДЗЕНСКИ ДЗЯРЖАЎНЫ УНІВЕРСІТЭТ
ІМЯ ЯНКІ КУПАЛЫ

Н. С. БЯРОЗКІНА, С. А. МІНЮК

**ДЫФЕРЭНЦЫЯЛЬНЫЯ І ІНТЭГРАЛЬНЫЯ
ЎРАЎНЕННІ**

Дапушчана Міністэрствам адукацыі Рэспублікі Беларусь у якасці
вучэбнага дапаможніка для студэнтаў фізіка-матэматычных і
тэхнічных спецыяльнасцяў вышэйшых навучальных устаноў

У 2 тамах

~~Том 1~~

Гродна 2000

УДК 517.2(075.8)

ББК 22.161.6

Б 99

Рэцэнзенты:

каф. дыферэнц. ураўненняў мех.-мат.
фак. БДУ;
член-кар. Бел. акад. адукацыі, дац.
Ю. А. Быкадораў;
заг. каф. дыферэнц. ураўненняў ГДУ
імя Ф. Скарыны, праф. У. І. Міроненка.

Бярозкіна Н. С. , Мінюк С. А.

Дыферэнцыяльныя і інтэгральныя ўраўненні:

Б 99 Вуч. дапаможнік для студ. фіз.-мат. і тэхн. спец. выш. навуч.
устаноў. У 2 т. Т. 1. – Гродна: ГрДУ, 2000. – 436 с.

ISBN 985-4171-67-1.

Выкладзены асноўныя пытанні дыферэнцыяльных ураўненняў першага парадку, лінейных дыферэнцыяльных ураўненняў і сістэм, агульныя пытанні сістэм дыферэнцыяльных ураўненняў і тэорыя ўстойлівасці дынамічных сістэм.

Для студэнтаў фізіка-матэматычных і тэхнічных спецыяльнасцяў вышэйшых навучальных устаноў.

УДК 517.2(075.8)

ББК 22.161.6

ISBN 985-4171-67-1.

© Н. С. Бярозкіна, С. А. Мінюк, 2000.

ЗМЕСТ

ПРАДМОВА

6

ГЛАВА I. УРАЎНЕННІ ПЕРШАГА ПАРАДКУ

§ 1. Агульныя ўраўненні першага парадку	14
§ 2. Прынцыпы складання дыферэнцыяльных ураўненняў	20
§ 3. Прасцейшае дыферэнцыяльнае ўраўненне першага парадку	24
§ 4. Ураўненні ў поўных дыферэнцыялах	27
§ 5. Аднародныя дыферэнцыяльныя ўраўненні і ўраўненні, якія прыводзяцца да іх	33
§ 6. Інтэгруючы множнік	37
§ 7. Лінейныя ўраўненні	41
§ 8. Ураўненне Бернулі	45
§ 9. Ураўненне Рыкаці	47
§ 10. Ураўненні, не вырашаныя адносна вытворнай	49
§ 11. Асаблівыя рашэнні ўраўненняў, не вырашаных адносна вытворнай	56
§ 12. Існаванне і адзінасць рашэння	61
§ 13. Гладкасць і непарыўнасць рашэнняў	66
Варыянты заданняў для самастойнай працы	69

ГЛАВА II. ЛІНЕЙНЫЯ ДЫФЕРЭНЦЫЯЛЬНЫЯ ўРАЎНЕННІ

§ 1. Агульныя ўласцівасці лінейных ураўненняў	76
§ 2. Лінейныя аднародныя ўраўненні	78
§ 3. Лінейныя неаднародныя ўраўненні	85
§ 4. Лінейнае ўраўненне першага парадку з пастаяннымі каэфіцыентамі і правай часткай у выглядзе квазіпалінома	90
§ 5. Лінейныя аднародныя ўраўненні з пастаяннымі каэфіцыентамі	93
§ 6. Лінейныя неаднародныя ўраўненні з пастаяннымі	

казфіцыентамі	99
§ 7. Ураўненне Эйлера	105
§ 8. Лінейнае дыферэнцыяльнае ўраўненне другога парадку	107
§ 9. Інтэграванне лінейных дыферэнцыяльных ураўненняў пры дапамозе радоў	112
§ 10. Ураўненне Беселя	119
§ 11. Перыядычныя рашэнні лінейных дыферэнцыяльных ураўненняў	127
§ 12. Крайвыя задачы	130
Варыянты заданняў для самастойнай працы	136

ГЛАВА III. СІСТЭМЫ ЛІНЕЙНЫХ ДЫФЕРЭНЦЫАЛЬНЫХ УРАЎНЕННЯЎ

§ 1. Аднародныя нармальныя сістэмы дыферэнцыяльных ураўненняў	143
§ 2. Метад выключэння для рашэння лінейных сістэм	149
§ 3. Лінейныя аднародныя нармальныя сістэмы з пастаяннымі казфіцыентамі	153
§ 4. Лінейныя неаднародныя сістэмы	175
§ 5. Метады інтэгравання лінейных неаднародных сістэм з пастаяннымі казфіцыентамі	179
§ 6. Прымяненне пераўтварэння Лапласа да рашэння лінейных дыферэнцыяльных ураўненняў і сістэм (аперацыйны метада інтэгравання)	188
§ 7. Лінейныя сістэмы дыферэнцыяльных ураўненняў з перыядычнымі казфіцыентамі	203
§ 8. Траекторыі лінейных сістэм на плоскасці	207
§ 9. Лінейныя сістэмы са зменнымі казфіцыентамі, інтэгральныя ў замкнутай форме	218
§ 10. Матрыцант	226
Варыянты заданняў для самастойнай працы	229

ГЛАВА IV. АГУЛЬНЫЯ ПЫТАННІ СІСТЭМ ДЫФЕРЭНЦЫЯЛЬНЫХ УРАЎНЕННЯЎ

§ 1. Сістэмы дыферэнцыяльных ураўненняў. Асноўныя паняцці і азначэнні	237
§ 2. Тэарэма адзінасці	246
§ 3. Лакальныя тэарэмы існавання	248
§ 4. Працяг рашэнняў	254
§ 5. Непарыўная залежнасць рашэнняў ад пачатковых дадзеных і параметраў	258
§ 6. Дыферэнцавальнасць рашэнняў па пачатковых дадзеных і параметрах	262
§ 7. Перыядычныя рашэнні квазілінейных сістэм	268
§ 8. Аўтаномныя сістэмы і іх уласцівасці	275
§ 9. Першыя інтэгралы	281
§ 10. Метад нармальных формаў у тэорыі аўтаномных сістэм	290
Варыянты заданняў для самастойнай працы	301

ГЛАВА V. УСТОЙЛІВАСЦЬ ДЫНАМІЧНЫХ СІСТЭМ

§ 1. Асноўныя азначэнні тэорыі ўстойлівасці	311
§ 2. Устойлівасць лінейных стацыянарных сістэм з пастаяннымі каэфіцыентамі	318
§ 3. Другі метада Ляпунова	324
§ 4. Устойлівасць па першаму набліжэнню	332
§ 5. Фазавая плоскасць	336
§ 6. Прыклады даследавання сістэм дыферэнцыяльных ураўненняў як матэматычных мадэляў метадамі якаснай тэорыі	343
§ 7. Устойлівасць лінейных нестацыянарных сістэм	355
Варыянты заданняў для самастойнай працы	365

ДАДАТАК I. Доказы тэарэм, прыведзеных у главах I — V	374
ЛІТАРАТУРА	433

ПРАДМОВА

Прапанаваны вучэбны дапаможнік у двух тамах прызначаны для студэнтаў матэматычных і фізіка-тэхнічных спецыяльнасцяў і мае мэту азнаёміць чытача з тэорыямі дыферэнцыяльных і інтэгральных ураўненняў, варыяцыйным злічэннем, а таксама з ідэямі, якія ляжаць у аснове сучаснага аналізу і даюць некаторае ўяўленне аб падступах да сучаснай матэматыкі.

«Дыферэнцыяльныя і інтэгральныя ўраўненні» напісаны на падставе лекцый, чытаных аўтарамі на матэматычным і фізіка-тэхнічным факультэтах Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта. У кнізе знаходзіцца больш матэрыялу, чым выкарыстоўваецца на лекцыях. Гэта натуральна. Студэнт знойдзе тут дадатковы матэрыял для роздуму. Нягледзячы на прагрэс у выкладанні матэматыкі, усё яшчэ існуе значны разрыў паміж падрыхтоўкай выпускніка ВНУ і патрабаваннямі, з якімі яму прыходзіцца сустракацца на практыцы. Інфармацыя, што змяшчаецца ў навукова-тэхнічнай літаратуры, і тым больш творчая праца ў новых галінах даследаванняў непазбежна сутыкае спецыяліста з ідэямі, паняццямі і метадамі, якія не знаходзяць дастатковага адлюстравання ў і так ўжо насычаных праграмах ВНУ. Дадзены вучэбны дапаможнік з'яўляецца адным са шляхоў для асвятлення такіх ідэй і паняццяў без павелічэння адведзеных адпаведнаму курсу гадзін.

Прастата і даступнасць – асаблівасць матэматыкі, і гэтая кніга нацэлена на раскрыццё гэтай асаблівасці, на тое, каб вызваць праз дакладнасць, канкрэтнасць і даступнасць асноўных паняццяў і тэрэм цікавасць да курсу «Дыферэнцыяльныя і інтэгральныя ўраўненні» па магчымасці ва ўсіх студэнтаў.

Яшчэ адной адметнай рысай кнігі з'яўляецца імкненне не толькі даць студэнтам чыста матэматычны апарат даследавання, але і навучыць прымяняць яго да рашэння розных прыкладных задач, таму што веды без прымянення нельга лічыць паўнацэннымі ведамі, яны з цяжкасцю засвойваюцца і вельмі хутка забываюцца.

Усе пералічаныя вышэй асноўныя патрабаванні да вучэбнага дапаможніка падпарадкаваны галоўнай мэце – арганізацыі вучэбнага працэсу студэнта. Перапрацаваўшы ўвесь матэрыял і рашыўшы ўсе задачы, змешчаныя ў вучэбны дапаможніку, студэнт набудзе патрабуемыя веды па тэорыі і навыкі ў рашэнні прыкладаў і задач і ў выніку падрыхтуецца да вывучэння іншых дысцыплін, у якіх выкарыстоўваюцца дыферэнцыяльныя і інтэгральныя ўраўненні, элементы варыяцыйнага злічэння.

Структура вучэбнага дапаможніка такая: увесь матэрыял разбіты на асноўны і дадатковы (з-за розніцы ў вучэбных праграмах для матэматычных і фізіка-тэхнічных спецыяльнасцяў); асноўны раздзел змяшчае восем глаў, дадатковы – тры дадаткі, прычым дадатак III змяшчае дзве главы IX і X; главы разбіты на параграфы. Кожная глава заканчваецца заданнямі для самастойнай працы. Пытанне аб тым, якая частка матэрыялаў з гэтых глаў уключаецца ў лекцыйны курс, залежыць ад кантынгенту слухачоў і вырашаецца лектарам. Па гэтай прычыне і для зручнасці доказы ўсіх прыведзеных у вучэбны дапаможніку тэрэм змешчаны ў асобных дадатках для кожнага тома. Так, напрыклад, па курсу «Дыферэнцыяльныя ўраўненні» для спецыяльнасці «Матэматыка» выкарыстоўваецца толькі матэрыял глаў I – VI асноўнай часткі, дадаткаў I, II і главы X дадатку III; па курсу «Дыферэнцыяльныя і інтэгральныя ўраўненні» для спецыяльнасці «Фізіка» выкарыстоўваецца матэрыял глаў I – V, VII асноўнай часткі, главы IX дадатку III і прыводзіцца доказ некалькіх тэрэм (па выбары лектара), змешчаных у дадатках I, II. Для матэматычных і фізіка-тэхнічных спецыяльнасцяў, дзе адсутнічае курс «Лікавыя метады» альбо роднасны яму, пры падборы матэрыялу па дыферэнцыяльных і інтэгральных ураўненнях выкарыстоўваецца глава VIII.

Главы ў раздзелах вучэбнага дапаможніка маюць суцэльную нумарацыю, а параграфы нумаруюцца ў межах кожнай главы. Формулы, тэрэмы і лемы пранумараваны ў межах главы, а прыклады, практыкаванні і заўвагі – у межах параграфа. Спасылкі, як правіла, робяцца на формулы дадзенай главы. У выпадку ж

спасылак на формулы, што знаходзяцца ў іншых главах, указваецца нумар главы, нумар параграфа і нумар адпаведнай формулы. Напрыклад, формулу (5.2.8) трэба шукаць у главе V, § 2 пад нумарам (8). Пры спасылках на параграф, тэарэму або лему той жа главы ўказваецца толькі іх нумар, а калі яны змешчаны ў іншай главе, то перад гэтым нумарам указваецца і нумар главы. Спасылка на § 7.1 азначае, што § 1 трэба шукаць у главе VII.

У спасылках на прыклады, заўвагі або практыкаванні той жа главы ўказваецца і нумар параграфа. Калі ж яны змешчаны ў іншай главе, то перад іх асабістым нумарам і нумарам параграфа даецца нумар главы. Напрыклад, заўвага 5.4.3 змяшчаецца ў главе V, § 4 пад нумарам 3.

Тэарэмы, сцвярджэнні, лемы, прыклады і практыкаванні для большай лагічнай выразнасці выдзяляюцца.

Пяройдзем да агляду зместу першага тома кнігі. Першая глава прысвечана дыферэнцыяльным ураўненням першага парадку і ў значнай ступені адыгрывае ролю ўводзін у тэорыю дыферэнцыяльных ураўненняў, паслядоўна выкладзеную ў наступных главах. У гэтай главе разам з асноўнымі паняццямі, азначэннямі і метадамі інтэгравання прасцейшых дыферэнцыяльных ураўненняў першага парадку нададзена ўвага такім пытанням, як існаванне, адзінасць, працяг іх рашэнняў, залежнасць ад пачатковых дадзеных і параметраў.

У II і III главах, прысвечаных адпаведна тэорыі лінейных ураўненняў і сістэм, у дадатак да звычайнага матэрыялу разглядаюцца лінейныя сістэмы з перыядычнымі каэфіцыентамі, са зменнымі каэфіцыентамі, інтэгральныя ў замкнутай форме, функцыя Грына краёвай задачы, інтэграванне з дапамогай радоў – метады, які з'яўляюцца адным з асноўных метадаў даследавання дыферэнцыяльных ураўненняў у прыкладаннях.

Вучэбны дапаможнік павінен абавязкова змяшчаць матэрыял, блізкі да якіх-небудзь напрамкаў сучасных даследаванняў і да прыкладанняў. Таму ў IV главе разам з класічнымі пытаннямі агульнай тэорыі сістэм дыферэнцыяльных ураўненняў, такімі як

існаванне і адзінасць рашэнняў, дыферэнцавальнасць рашэнняў па пачатковых дадзеных і параметрах і непарыўная залежнасць ад іх, разглядаюцца пытанні тэорыі аўтаномных сістэм, іх уласцівасці, метады нармальных формаў.

У большасці выпадкаў задача знаходжання рашэнняў дыферэнцыяльных ураўненняў не прыводзіцца да вылічэння інтэгралаў ад вядомых функцый. Гэтыя абставіны прымушаюць вывучаць уласцівасці рашэнняў непасрэдна па дыферэнцыяльнаму ўраўненню. З геаметрычнага пункту гледжання рашэнне ўраўнення ўяўляе сабой некаторую лінію – інтэгральную крывую. Можна вывучаць агульныя ўласцівасці такіх інтэгральных крывых, іх асаблівыя пункты, агульнае размяшчэнне крывых сямейства і г.д. З гэтага пункту гледжання вывучэнне дыферэнцыяльных ураўненняў прыводзіцца ў так званай якаснай тэорыі, элементы якой змешчаны ў V главе «Устойлівасць дынамічных сістэм». У гэтай главе вывучаюцца ўстойлівасць па першаму набліжэнню, асновы першага і другога метадаў Ляпунова, праведзена даследаванне фазавога партрэта дынамічнай сістэмы дыферэнцыяльных ураўненняў другога парадку, метадамі якаснай тэорыі даследуюцца сістэмы дыферэнцыяльных ураўненняў, што з'яўляюцца матэматычнымі мадэлямі, напрыканцы главы разгледжана ўстойлівасць лінейных нестацыянарных сістэм.

У дадатку I прыведзены доказы ўсіх асноўных тэарэм першага тома кнігі. Яшчэ раз падкрэслім, што такая структура дазволіць даступна і зручна карыстацца вучэбным дапаможнікам шырокім колам чытачоў, у залежнасці ад іх спецыяльнасці і мэты карыстання. Кніга можа быць выкарыстана і студэнтамі універсітэтаў, і тэхнічных ВНУ ўсіх форм навучання для арганізацыі самастойнай працы, выкладчыкамі – пры падрыхтоўцы лекцыйных курсаў, практычных і лабараторных заняткаў. Інжынерам і навукова-тэхнічным працаўнікам дапаможа атрымаць неабходную інфармацыю па практычнаму прымяненню дыферэнцыяльных і інтэгральных ураўненняў.

Некаторыя асноўныя абазначэнні, што пастаянна выкарыстоўваюцца ў вучэбным дапаможніку:

R – мноства сапраўдных лікаў;

N – мноства натуральных лікаў;

Z – мноства цэлых лікаў;

R_+ – мноства дадатных сапраўдных лікаў;

R^n – n -мерная сапраўдная прастора;

C^n – n -мерная камплексная прастора;

$x = colon(x_1, \dots, x_n)$ вектар-функцыя n -мернай прасторы R^n ;

$A(t) = \begin{pmatrix} a_{ij}(t), & j = \overline{1, n} \\ i = \overline{1, n} \end{pmatrix}$ – матрыца, якая складаецца з n радкоў і n слупкоў;

$\det A$ або $|A|$ – дэтэрмінант матрыцы A ;

$Sp A$ – след матрыцы A ;

A^* – матрыца, спалучаная з матрыцай A ;

A' – матрыца, транспанаваная да A ;

$|x|$ – модуль ліку x ;

$[x]$ – цэлая частка ліку x ;

$\{x|A(x)\}$ або $\{x: A(x)\}$ – мноства элементаў x , якія адпавядаюць умове $A(x)$;

E – адзінкавая матрыца;

$(a; b)$ – інтэрвал;

$[a; b]$ – адрэзак;

$k = \overline{0, n-k}$ набывае цэлыя значэнні ад 0 да n ;

$x \in X$ – x ёсць элемент мноства X ;

$x \notin X$ – элемент x не належыць мноству X ;

$\forall x$ – для кожнага x ;

$\exists x$ – існуе x ;

$X \subset Y$ – мноства X ёсць падмноства мноства Y ;

$A \cup B$ – аб'яднанне мностваў A і B ;

$A \cap B$ – перасячэнне мностваў A і B ;

$Re z$ – сапраўдная частка камплекснага ліку z ;

$Im z$ – уяўная частка камплекснага ліку z ;

$\dot{x}(t) = x'(t) = \frac{dx}{dt}$ – вытворная па зменнай t (сімвал ' прымяняецца

толькі для абазначэння вытворнай скалярнай функцыі);

$x^{(n)} = \frac{dx^n}{dt^n}$ – вытворная парадку n ;

$\equiv$ – знак тоеснай роўнасці;

$\approx$ – знак набліжанай роўнасці;

def

$=$ – роўна паводле азначэння;

M_{ij} – мінор элемента a_{ij} ;

A_{ij} – алгебраічны дадатак элемента a_{ij} ;

$\Omega_{t_0}^t$ – матрыцант;

$A(t) = \text{diag}(a_{11}(t), a_{22}(t), \dots, a_{nn}(t))$ – дыяганальная матрыца;

$\|A(t)\|$ – норма матрыцы $A(t)$;

$|x(t)|$ – норма вектара $x(t)$;

$x'y \ ((x, y))$ – скалярны здабытак вектараў x і y ;

$(n \times n)$ – матрыца з n слупкоў і n радкоў;

$f(X)$ – мноства значэнняў функцыі f на X ;

$\sup_D f(M)$ – дакладная верхняя мяжа функцыі $f(M)$ на мностве D ;

$\inf_D f(M)$ – дакладная ніжняя мяжа функцыі $f(M)$ на мностве D ;

$\max_D f(M)$ – найбольшае значэнне функцыі $f(M)$ на мностве D ;

$\min_D f(M)$ – найменшае значэнне функцыі $f(M)$ на мностве D ;

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ – ліміт функцыі $f(x)$, калі x імкнецца да a ;

$f(x+0)$ – ліміт справа функцыі f у пункце x ;

$f(x-0)$ – ліміт злева функцыі f у пункце x ;

$\exp(f(x))$ – экспанентавы выраз $e^{f(x)}$;

$Oxyz$ – прамавугольная дэкартава сістэма каардынат у прасторы;

Ox , Oy , Oz – каардынатныя восі;

Oxy , Oyz , Oxz – каардынатныя плоскасці;

$o(\alpha)$ – бясконца малая велічыня больш высокага парадку малечыні, чым α ;

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – рад з элементаў a_n ;

$\prod_{j=1}^n p_j$ – здабытак n элементаў p_j .

У выпадку іншых абазначэнняў гл. спасылкі ў адпаведных главах або параграфах.

Адзначым, што пры выкладанні стандартных пытанняў тэорыі дыферэнцыяльных або інтэгральных ураўненняў былі выкарыстаны падручнікі і дапаможнікі розных аўтараў. Усе яны ўказаны ў спісе літаратуры. Задачы і прыклады, як правіла, узяты з вядомых зборнікаў задач па адпаведных раздзелах, яны падбіраліся так, каб дапоўніць тэарэтычную частку асноўнага тэксту і паказаць цесную сувязь з практыкай. Некаторыя практыкаванні, змешчаныя ў вучэбным дапаможніку, з'яўляюцца трывіяльнымі, а некаторыя з іх могуць служыць тэматыкай курсавых работ па дысцыпліне «Дыферэнцыяльныя ўраўненні» для спецыяльнасці «Матэматыка».

Аўтары выказваюць глыбокую падзяку прафесарам В.І.Громаку і В.І.Міроненка, член-карэспандэнту Беларускай акадэ-

мій адукацыі Ю.А.Быкадораву за цэнныя заўвагі, якія садзейнічалі паляпшэнню зместа кнігі. Асабліва ўдзячны аўтары калектыву кафедры дыферэнцыяльных ураўненняў Белдзяржуніверсітэта за вельмі карыснае абмеркаванне рукапісу кнігі.

У заключэнні хочацца выказаць упэўненасць, што дадзеная кніга будзе садзейнічаць павышэнню матэматычнай культуры чытачоў з рознымі запытамі да аб'ёму матэматычных ведаў па дыферэнцыяльных і інтэгральных ураўненнях. Спадзяёмся, што прапанаваная схема пастраення вучэбнага дапаможніка будзе цікавай і для выкладчыкаў, ужо знаёмых з прадметам.

ГЛАВА I

УРАЎНЕННІ ПЕРШАГА ПАРАДКУ

§ 1. Агульныя ўраўненні першага парадку

Дыферэнцыяльным ураўненнем называецца роўнасць, якая звязвае незалежныя зменныя, іх функцыю і вытворныя гэтай функцыі.

Найвышэйшы парадак вытворнай, што ўваходзіць ва ўраўненне, называецца парадкам гэтага ўраўнення. Дыферэнцыяльныя ўраўненні, у якіх невядомая функцыя залежыць толькі ад адной незалежнай зменнай, называюць звычайнымі дыферэнцыяльнымі ўраўненнямі.

Будзем разглядаць звычайныя дыферэнцыяльныя ўраўненні першага парадку, гэта значыць судачыненні, якія звязваюць шуканую функцыю, незалежную зменную і першую вытворную ад шуканай функцыі. Самае агульнае дыферэнцыяльнае ўраўненне першага парадку мае выгляд:

$$F(t, x, \dot{x}) = 0, \quad (1')$$

дзе F – зададзеная функцыя зменных $t, x, \dot{x}$; $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$. Напрыклад,

$\dot{x}^2 - 2x + t^2 = 0$ – дыферэнцыяльнае ўраўненне першага парадку.

Адзначым, што функцыя F можа задавацца не для ўсіх значэнняў яе аргументаў; таму будзем гаварыць пра абсяг задання гэтай функцыі B .

Калі разглядаемае ўраўненне вызначае $\dot{x}$ як няхай якую функцыю двух астатніх аргументаў, то яго можна запісаць у выглядзе, вырашаным адносна $\dot{x}$:

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (1)$$

дзе f – зададзеная функцыя зменных t, x .

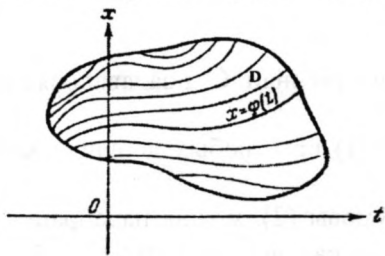
Рашэннем дыферэнцыяльнага ўраўнення (1') называецца такая функцыя $x = \varphi(t)$ незалежнай зменнай t , вызначаная на некаторым інтэрвале $I = (t_1; t_2)$ (выпадак $t_1 = -\infty, t_2 = +\infty$ не выключ

чаецца), што пры падстаноўцы $x = \varphi(t)$ у судаачыненне (1') атрымліваецца тоеснасць на ўсім інтэрвале I . Інтэрвал I называюць інтэрвалам вызначэння рашэння $\varphi(t)$.

Напрыклад, функцыя $x = e^{-t}$ з'яўляецца рашэннем дыферэнцыяльнага ўраўнення першага парадку $\dot{x} + x = 0$ на інтэрвале $(-\infty; +\infty)$. Пераканацца ў гэтым можна непасрэднай падстаноўкай у дадзенае ўраўненне x і $\dot{x} = -e^{-t}$.

Адзначым, што, па-першае, падстаноўка $x = \varphi(t)$ у (1') можа быць выканана толькі тады, калі функцыя $\varphi(t)$ на ўсім інтэрвале I мае першую вытворную, па-другое, пры адвольным значэнні $t \in I$ пункт з каардынатамі $(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t))$ павінен належаць мноству B , дзе вызначана функцыя F .

Для апісання геаметрычнага сэнсу рашэння $x = \varphi(t)$ ураўнення (1) разгледзім каардынатную плоскасць P зменных t і x , прычым t , як незалежную зменную, адкладваем па восі абсцыс, а x , як залежную зменную, па восі ардынаты. Функцыя f можа задавацца не для ўсіх значэнняў сваіх аргументаў t і x , гэта значыць не ва ўсіх пунктах плоскасці P , а толькі ў пунктах некаторага мноства D плоскасці P . Адносна D будзем меркаваць усюды далей, што гэтае мноства адкрытае. Будзем дапускаць таксама, што функцыя f і яе



Мал.1

частковая вытворная $\frac{\partial f}{\partial x}$ — непаруўныя функцыі зменных t, x на D . Рашэнне $x = \varphi(t)$ ураўнення (1) будзе геаметрычна ўяўляць у плоскасці P кривую з ураўненнем $x = \varphi(t)$ (мал. 1). Гэ-

тая кривая ў кожным пункце мае датычную і поўнаасцю змяшчаецца ў абсягу D . Яна называецца інтэгральнай крывой дыферэнцыяльнага ўраўнення (1). Іншымі словамі, інтэгральная кривая — графік рашэння $x = \varphi(t)$.

Задачай Кашы называюць задачу знаходжання рашэння $x = x(t)$ ураўнення (1), якое задавальняе ўмове

$$x(t_0) = x_0, (t_0, x_0) \in D. \quad (2)$$

Мае месца

Тэарэма 1. Калі функцыя $f(t, x)$ непарыўная і мае непарыўную вытворную $\frac{\partial f}{\partial x}$ у абсягу D , то рашэнне дыферэнцыяльнага ўраўнення (1) пры пачатковай умове (2) існуе, і яно адзінае, гэта значыць, праз пункт (t_0, x_0) праходзіць адзіная інтэгральная крывая дадзенага ўраўнення.

Абсяг D будзем называць абсягам адзінасці для ўраўнення (1).

Заўвага 1. Адзінасць тут разумеецца ў наступным сэнсе: функцыя $\varphi(t)$, вызначаная на інтэрвале $I = (t_1; t_2)$, супадае з функцыяй $\psi(t)$, вызначанай на інтэрвале $I_1 = (s_1; s_2)$, там, дзе яны абедзве вызначаюцца, але інтэрвалы іх вызначэння I і I_1 не абавязкова аднолькавыя.

Заўвага 2. Больш агульную фармулёўку тэарэмы існавання і адзінасці рашэння ўраўнення (1) пры ўмовах (2) гл. у § 12.

Няхай D – некаторы абсяг адзінасці для ўраўнення (1).

Агульным рашэннем дыферэнцыяльнага ўраўнення (1) у абсягу D называецца функцыя

$$x = \varphi(t, C),$$

якая залежыць ад адной адвольнай пастаяннай C і задавальняе наступным умовам:

1) яна задавальняе ўраўненню (1) пры любых дапушчальных значэннях пастаяннай C ;

2) якія б ні былі пачатковыя ўмовы (2), можна падабраць такое значэнне C_0 пастаяннай C , што рашэнне $x = \varphi(t, C_0)$ будзе задавальняць пачатковай умове (2).

Усякае рашэнне $x = \varphi(t, C_0)$, якое атрымліваецца з агульнага рашэння $x = \varphi(t, C)$ пры канкрэтным значэнні $C = C_0$, называ-

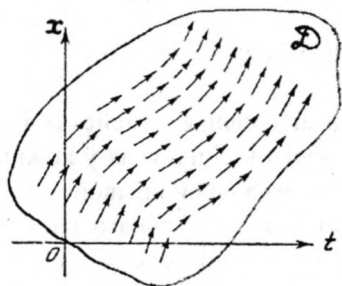
ваецца частковым рашэннем.

Судачыненне $\Phi(t, x, C) = 0$, якое няяўна вызначае агульнае рашэнне, называецца агульным інтэгралам дыферэнцыяльнага ўраўнення (1). Судачыненне, якое атрымліваецца з агульнага інтэграла пры канкрэтным значэнні пастаяннай C , называецца частковым інтэгралам ураўнення (1).

Працэс знаходжання рашэння дыферэнцыяльнага ўраўнення называецца інтэграваннем дыферэнцыяльнага ўраўнення.

Агульнаму рашэнню ўраўнення (1) $x = \varphi(t, C)$ адпавядае на плоскасці (t, x) сямейства інтэгральных крывых, якія залежаць ад адвольнага параметру C , у той час як частковаму рашэнню, што задавальняе пачатковай умове (2), адпавядае тая крывая сямейства, якая праходзіць праз зададзены пункт $M_0(t_0, x_0)$.

Дыферэнцыяльнае ўраўненне (1) устанаўлівае залежнасць паміж каардынатамі пункта і вуглавым каэфіцыентам датычнай $\frac{dx}{dt}$ да графіка рашэння ў гэтым жа пункце. Ураўненне (1) вызначае поле напрамкаў (мал. 2).



Мал. 2

$k = f(t, x)$, дзе k — пастаянная. З дапамогай ізаклін можна прыблізна будаваць рашэнні ўраўнення (1) (гл. [1], глава I, § 1, с. 16; [2], глава I, § 1, с. 13).

Вялікае значэнне для тэорыі дыферэнцыяльных ураўненняў мае пытанне аб існаванні рашэння задачы Кашы і адзінасць гэтага

Задача інтэгравання гэтага ўраўнення заключаецца ў тым, каб знайсці інтэгральныя крывыя, напрамак датычных да якіх у кожным пункце супадае з напрамкам поля.

Геаметрычнае месца пунктаў плоскасці (t, x) , у якіх нахіл датычных да рашэння ўраўненняў (1) адзін і той жа, называецца ізаклінай.

Ураўненне ізаклін мае выгляд

рашэння.

Так, напрыклад, для ўраўнення $\dot{x} = 2t$ задача Кашы з любымі пачатковымі дадзенымі (t_0, x_0) мае адзінае рашэнне. Сапраўды, усе рашэнні гэтага ўраўнення змяшчаюцца ў формуле $x = t^2 + C$. Падстаўляючы пачатковыя дадзеныя, знойдзем, што $C = x_0 - t_0^2$. Такім чынам, шуканае рашэнне мае выгляд $x = t^2 + x_0 - t_0^2$. Іншых рашэнняў з пачатковымі дадзенымі няма.

Калі правая частка ўраўнення (1) не вызначана ў пункце (t_0, x_0) , а вызначаецца толькі ў некаторым яго наваколлі, то ўзнікае пытанне аб існаванні інтэгральных крывых, якія прымыкаюць да гэтага пункта. Так, напрыклад, для ўраўненняў $\dot{x} = \frac{x}{t}$, $\dot{x} = -\frac{t}{x}$ такім

пунктам з'яўляецца пачатак каардынат.

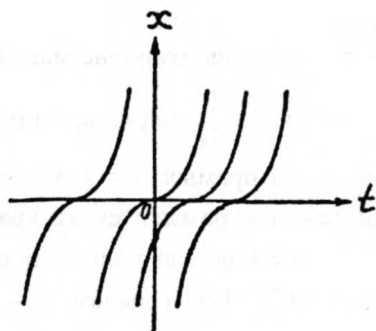
Рашэнне дыферэнцыяльнага ўраўнення (1), якое ва ўсіх сваіх пунктах не задавальняе ўласцівасці адзінасці (гэта значыць, што ў любым наваколлі кожнага пункта (t, x) існуюць, прынамсі, дзве розныя інтэгральныя крывыя, што праходзяць праз гэты пункт), будзем называць асаблівым.

Заўвага 3. Аб асаблівых рашэннях ураўнення $F(t, x, \dot{x}) = 0$ гл. § 11.

Асаблівым рашэннем з'яўляецца агінальная сямейства інтэгральных крывых (калі яна існуе), гэта значыць лінія, якая ў кожным сваім пункце датыкаецца хоць бы адной інтэгральнай крывой.

Асаблівыя рашэнні не атрымліваюцца з агульнага рашэння дыферэнцыяльнага ўраўнення ні пры якіх значэннях адвольнай пастаяннай C (у тым ліку і пры $C = \pm\infty$).

Для існавання асаблівага рашэння ўраўнення (1) неабходна, каб не выконваліся ўмовы тэарэмы 1. Так, напрыклад, калі правая частка ўраўнення (1) непарыўная ў разглядаемым абсягу D , то асаблівыя рашэнні могуць праходзіць толькі праз тыя пункты, дзе вытворная $\frac{df}{dx}$ становіцца бясконцай. У прыватнасці, для ўраўнення



Мал. 3

$x \equiv 0$ таксама з'яўляецца рашэннем. Але ў сілу таго, што праз кожны яго пункт праходзіць і кубічная парабала, і прамая $x = 0$, рашэнне $x \equiv 0$ з'яўляецца асаблівым.

Лёгка бачыць, што асаблівае рашэнне $x \equiv 0$ не атрымліваецца з рашэння $x = (t + C)^3$ ні пры якім лікавым значэнні параметра C , ні пры $C = \pm\infty$ (мал. 3).

Тэарэма 1 дае толькі неабходныя ўмовы для існавання асаблівага рашэння. Мноства пунктаў, дзе вытворная $\frac{\partial f}{\partial x}$ не абмежаваная, калі яно з'яўляецца крывой, можа і не быць асаблівым рашэннем ужо таму, што гэтая крывая не з'яўляецца інтэгральнай крывой ураўнення (1).

Для знаходжання асаблівага рашэння неабходна:

- 1) знайсці мноства пунктаў, дзе $\frac{\partial f}{\partial x}$ ператвараецца ў бясконцасць;
- 2) калі гэта мноства пунктаў утварае адну або некалькі крывых, праверыць, ці з'яўляюцца яны інтэгральнымі крывымі ўраўнення (1);
- 3) калі гэта інтэгральныя крывыя, праверыць, ці парушаецца ў кожным іх пункце ўласцівасць адзінасці, гэта значыць, ці з'яўля-

$$\dot{x} = 3x^{\frac{2}{3}} \quad (3)$$

функцыя $f = 3x^{\frac{2}{3}}$ усюды непарыўная. Аднак пры $x = 0$, гэта значыць на восі Ot , вытворная $\frac{\partial f}{\partial x}$ ператвараецца ў бясконцасць.

Ураўненне (3) мае агульнае рашэнне $x = (t + C)^3$ — сямейства кубічных парабал. Відавочна, што

юцца яны агінальнымі.

Так, для ўраўнення $\dot{x} = \pm\sqrt{1-x^2}$ агульнае рашэнне мае выгляд $x = \sin(t + C)$. Мноствамі пунктаў, у якіх $\frac{\partial f}{\partial x}$ ператвараецца ў бясконцасць, будуць пункты, якія ляжаць на прамых $x = 1$, $x = -1$. Лёгка бачыць, што $x = 1$, $x = -1$ ёсць рашэнні разглядаемага ўраўнення, прычым прамыя $x = 1$, $x = -1$ з'яўляюцца агінальнымі сямейства інтэгральных крывых $x = \sin(t + C)$. Такім чынам, $x = 1$, $x = -1$ з'яўляюцца асаблівымі рашэннямі.

§ 2. Прынцыпы складання дыферэнцыяльных ураўненняў

Да складання і інтэгравання дыферэнцыяльных ураўненняў прыводзяць шматлікія задачы матэматыкі, а таксама іншых навук – фізікі, біялогіі, хіміі і г.д.

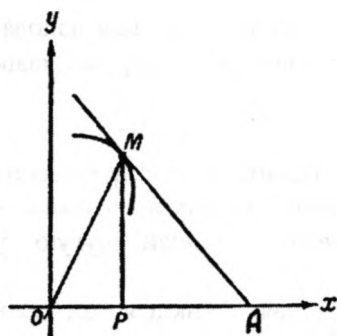
Пры рашэнні геаметрычных задач будуюцца чарцёж, а шуканая крывая абазначаецца праз $y = y(x)$ (пры рашэнні задачы ў прававугольных каардынатах). Усе названыя ў задачы велічыні выражаем праз x , y , y' . Тады дадзенае ва ўмове задачы судачыненне ператвараецца ў дыферэнцыяльнае ўраўненне, з якога і знаходзіцца шуканая функцыя $y(x)$.

Прыклад 1. Знайсці крывыя, датычныя да якіх у любым пункце ўтвараюць роўныя вуглы з палярным радыусам і палярнай воссю.

Рашэнне. Згодна з прапанаванай схемай, рашэнне задачы пачынаем са схематычнай пабудовы чарцяжа. Няхай $y = y(x)$ – шуканая крывая. Знайдзем каардынаты пункта A , які належыць і датычнай да шуканай крывой, і восі Ox (мал. 4). Калі Y , X – шуканыя каардынаты, то яны павінны задавальняць сістэме ўраўненняў

$$\begin{cases} Y - y = y'(X - x), \\ Y = 0. \end{cases}$$

Вырашаючи гэтую сістэму адносна X, Y , атрымліваем, што пункт A мае каардынаты $(x - \frac{y}{y'}, 0)$. З умовы задачы вынікае роўнасць



$|OM| = |OA|$, пры пераводзе якой на мову зменных x, y, y' будзем мець

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \left| x - \frac{y}{y'} \right|. \quad (4)$$

Ураўненне (4) з'яўляецца шуканым ураўненнем для знаходжання невядомай функцыі $y(x)$. Для рашэння ўраўнення (4) зручна перайсці да палярных каардынат $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Тады атрымліваем

Мал. 4

$$y' = \frac{r' \sin \varphi + r \cos \varphi}{r' \cos \varphi - r \sin \varphi} \quad \left(r' = \frac{dr}{d\varphi} \right). \quad (5)$$

Падстаўляючы x, y і y' , зададзенае формулай (5), у (4), будзем мець

$$\pm r' \sin \varphi = r \mp r \cos \varphi$$

або

$$\pm \frac{dr}{r} = \frac{1 \mp \cos \varphi}{\sin \varphi} d\varphi.$$

Інтэгруючы, атрымаем:

$$a) \frac{dr}{r} = \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} d\varphi, \quad \frac{dr}{r} = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} d\varphi,$$

$$\ln r = -2 \ln \cos \frac{\varphi}{2} + \ln \frac{C}{2}, \quad r \cos^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{C}{2}, \quad r(1 + \cos \varphi) = C.$$

$$b) -\frac{dr}{r} = \frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi} d\varphi, \quad -\frac{dr}{r} = \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} d\varphi,$$

$$-\ln r = 2 \ln \sin \frac{\varphi}{2} - \ln \frac{C}{2}, \quad r \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{C}{2},$$

$$r \frac{1 - \cos \varphi}{2} = \frac{C}{2}, \quad r(1 - \cos \varphi) = C.$$

Аб'ядноўваючы разам вынікі, атрымаем, што крывыя, якія валодаюць патрабуемай у задачы ўласцівасцю, задаюцца ў палярных каардынатах формулай

$$r(1 \pm \cos \varphi) = C.$$

Рашэнне фізічных задач, якія прыводзяць да дыферэнцыяльных ураўненняў першага парадку, разбіваецца на наступныя этапы:

1) адну з велічынь выбіраем у якасці незалежнай зменнай, другую – у якасці шуканай функцыі;

2) вырашаем, на колькі зменіцца шуканая функцыя x , калі незалежная зменная t атрымае прырост Δt , гэта значыць выражаем рознасць $x(t + \Delta t) - x(t)$ праз велічыні, аб якіх ідзе гаворка ў задачы;

3) падзяліўшы гэтую рознасць на Δt і перайшоўшы да ліміту пры $\Delta t \rightarrow 0$, атрымліваем дыферэнцыяльнае ўраўненне, з якога можна знайсці шуканую функцыю. Значэнні пастаянных, што ўваходзяць у агульнае рашэнне дыферэнцыяльнага ўраўнення, вызначаюцца пры дапамозе ўмоў, указаных у задачы.

Часам, карыстаючыся фізічным сэнсам вытворнай, калі незалежная зменная – час t , $\frac{dx}{dt}$ – скорасць змянення велічыні x , дыферэнцыяльнае ўраўненне можна скласці больш проста.

Прыклад 2. У паветры пакоя аб'ёмам 200 м^3 змяшчаецца $0,15 \%$ вуглякіслага газу (CO_2). Вентыляцыя падае ў мінуту 20 м^3 паветра, у якім змяшчаецца $0,04 \%$ CO_2 . Праз які час колькасць вуглякіслага газу ў паветры пакоя паменшыцца ўтрая? (Газ, які паступае, у выніку перамешвання размяркоўваецца раўнамерна).

Рашэнне. Няхай у момант часу t у паветры пакоя змяшчаецца $x(t)$ вуглякіслага газу. Знойдзем прырост функцыі $x(t)$ за перы-

яд часу Δt .

$$\Delta x = 20 \cdot \Delta t \cdot \frac{4}{10000} - 20 \cdot \Delta t \cdot \frac{x(t) + \alpha}{200}, \alpha \rightarrow 0, \text{ пры } \Delta t \rightarrow 0.$$

Лічым, што колькасць паветра ў пакоі будзе адной і той жа – сціску не адбываецца. Падзяліўшы апошняе ўраўненне на Δt і перайшоўшы да ліміту пры $\Delta t \rightarrow 0$, атрымаем

$$\dot{x} = \frac{1}{250}(2 - 25x) \quad (6)$$

або

$$250\dot{x} = 2 - 25x,$$

$$\frac{dx}{25x - 2} = -\frac{dt}{250}.$$

Інтэгруючы, будзем мець $\frac{1}{25} \ln(25x - 2) = -\frac{t}{250} + \frac{1}{25} \ln C_1$,

$$\ln(25x - 2) = -\frac{t}{10} + \ln C_1, \quad 25x - 2 = C_1 \cdot e^{-\frac{t}{10}},$$

$$x = 0,08 + C e^{-\frac{t}{10}}. \quad (7)$$

Формулай (7) даецца агульнае рашэнне ўраўнення (6). Карыстаючыся дадзенымі задачы, менавіта $x(0) = 200 \cdot \frac{15}{10000} = 0,3 \text{ (м}^3\text{)}$, знойдзем значэнне пастаяннай C :

$$0,3 = 0,08 + C, \quad C = 0,22.$$

Такім чынам, закон змянення CO_2 у паветры пакоя ў залежнасці ад часу апісваецца формулай (t – у мін, x – у м^3)

$$x(t) = 0,08 + 0,22 e^{-\frac{t}{10}}.$$

Калі T – невядомы час, праз які колькасць вуглякіслага газу паменшыцца ўтрая, тады $x(T) = 0,1$. Канчаткова атрымліваем

$$0,1 = 0,08 + 0,22e^{-\frac{T}{10}}; \quad \frac{1}{11} = e^{-\frac{T}{10}}; \quad T = 10 \ln 11 \approx 24 \text{ мин.}$$

Значыць, прыблізна праз 24 мин у паветры пакая ўтвая паменшыцца першапачатковая колькасць газу CO_2 .

Прыклад 3. За 30 дзён распалася 50% першапачатковай колькасці радыёактыўнага рэчыва. Праз колькі часу застанеца 1% ад першапачатковай колькасці?

Рашэнне. Няхай у момант часу t будзе $x(t)$ радыёактыўнага рэчыва. Згодна з законам радыёактыўнага распаду (колькасць радыёактыўнага рэчыва, што распадаецца за адзінку часу, прапарцыянальная колькасці гэтага рэчыва, якое ёсць у разглядаемы момант), дыферэнцыяльнае ўраўненне запішацца так: $\frac{dx}{dt} = -kx$.

Калі за першапачатковую колькасць рэчыва лічыць x_0 , то праз 30 дзён яго стане $\frac{x_0}{2}$. Такім чынам, маем краявыя ўмовы

$$x(0) = x_0, \quad x(30) = \frac{x_0}{2}.$$

Агульнае рашэнне атрыманага ўраўнення

мае выгляд $x = Ce^{-kt}$. Падстаўляючы краявыя ўмовы, знаходзім C і k . Пры гэтым $C = x_0$, $k = \frac{\ln 2}{30}$. Улічваючы гэтыя значэнні і патрабаванне задачы, з формулы агульнага рашэння атрымліваем

$$\frac{x_0}{100} = x_0 e^{-\frac{\ln 2}{30}t}; \quad \lg 100 = \frac{t}{30} \lg 2; \quad t = \frac{60}{\lg 2} \approx 200 \text{ (дзён)}.$$

Такім чынам, прыблізна праз 200 дзён застанеца 1% ад першапачатковай колькасці радыёактыўнага рэчыва.

§ 3. Прасцейшае дыферэнцыяльнае ўраўненне першага парадку

Самым простым дыферэнцыяльным ураўненнем першага па-

радку з'яўляецца ўраўненне выгляду

$$\dot{x} = f(t), \quad (8)$$

дзе $f(t)$ – зададзеная функцыя, непарыўная на некаторым інтэрвале $I = (a, b)$. У дадзеным выпадку задача знаходжання рашэння $x = x(t)$ ёсць класічная задача матэматычнага аналізу аб адшукванні функцыі па яе вытворнай. Як вядома, гэта задача рашаецца пры дапамозе паняцця першавобразнай

$$x = \int f(t) dt.$$

Паколькі ўсе першавобразныя адрозніваюцца адна ад другой на пастаянную, то любое рашэнне можна запісаць у выглядзе

$$x = C + \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau, \quad t_0 \in I, \quad (9)$$

дзе C ёсць значэнне $x(t)$ пры $t = t_0$. Рашэнне (9) вызначана на ўсім інтэрвале.

Выраз (9) дае ўсе першавобразныя функцыі для $f(t)$, таму формула (9) змяшчае ўсе рашэнні ўраўнення (8). У гэтым выпадку кажуць, што (9) ёсць агульнае рашэнне ўраўнення (8).

Прыклад 1. Знайсці агульнае рашэнне ўраўнення

$$\frac{dx}{dt} = 4t^3 \quad (10)$$

і выдзеліць рашэнне, якое задавальняе пачатковай умове $x = 1$ пры $t = 0$, гэта значыць выдзеліць інтэгральную крывую, што праходзіць праз пункт $(0, 1)$.

Рашэнне. Правая частка ўраўнення (10) непарыўная пры ўсіх t . Агульнае рашэнне мае выгляд

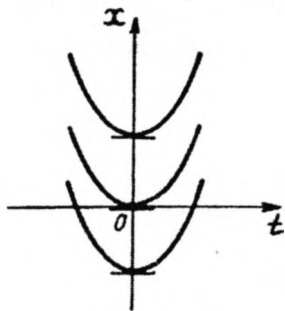
$$x = t^4 + C. \quad (11)$$

Усе інтэгральныя крывыя атрымліваюцца з любой з іх, напрыклад, з $x = t^4$ (мал. 5), зрухам, паралельным восі Ox . Падстаўляючы ў (11) $x = 1$, $t = 0$, атрымаем $C = 1$. Шуканае рашэнне запісацца ў выглядзе

$$x = t^4 + 1. \quad (12)$$

Іншых рашэнняў, задавальняючых зададзенай пачатковай умове, няма. Праз пункт $(0, 1)$ праходзіць адна інтэгральная крывая (12).

Рашэнне (12) мае мінімум пры $t = 0$. Гэтую ўласцівасць лёгка заўважыць па выглядзе самога дыферэнцыяльнага ўраўнення (10), таму што ў



Мал. 5

ім вытворная $\frac{dx}{dt}$ ператвараецца ў нуль

пры $t = 0$ і змяняе знак з «-» на «+» пры пераходзе t праз $t = 0$.

Такім чынам, вось x з'яўляецца лініяй мініумаў інтэгральных крывых. У сілу таго, што правая частка ўраўнення (10) ператвараецца ў нуль пры $t = 0$, да- тычная да інтэгральнай крывой у пунктах

перасячэння гэтай крывой з воссю x павінна быць паралельнай восі t .

Дапусцім, што правая частка ўраўнення (8) мае пункт разрыву $t = c$ унутры або на мяжы інтэрвала (a, b) пры ўмове, што ва ўсіх астатніх пунктах (a, b) яна непарыўная. Тады да ўраўнення (8) далучаецца перавернутае ўраўненне

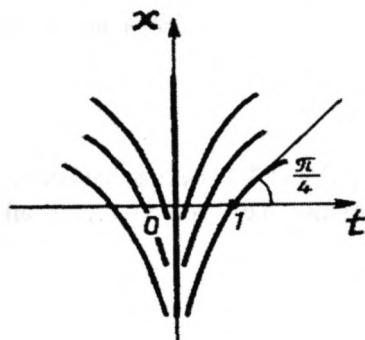
$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{f(t)}, \quad (13)$$

правая частка якога непарыўная пры $t = c$. Відавочна, што $t = c$ ёсць рашэнне ўраўнення (13).

Прыклад 2. Разгледзім ураўненне $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$, правая частка якога пры $t = 0$ ператвараецца ў бясконцасць.

Пры $t \neq 0$ рашэннямі будуць $x = \ln |t| + C$. Разглядаючы перавернутае ўраўненне $\frac{dt}{dx} = t$, лёгка бачыць, што вось x будзе інтэгральнай крывой, таму што абедзве часткі гэтага ўраўнення

ператвараюцца ў нуль пры $t \equiv 0$. Гэта частковае рашэнне. Яно з'яўляецца асімптотай рашэнняў $x = \ln |t| + C$ (мал. 6).



Мал. 6

у агульны інтэграл (15), і прамыя $x = a$, дзе a – карань ураўнення $f(x) = 0$.

Заўвага 1. Ураўненне віду

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (14)$$

там, дзе $f(x) \neq 0$, перапісваецца як

$$\frac{dx}{f(x)} = dt, \text{ адкуль}$$

$$t = \int \frac{dx}{f(x)} + C. \quad (15)$$

Інтэгральнымі крывымі ўраўнення (14) будуць крывыя, што ўваходзяць

§ 4. Ураўненні ў поўных дыферэнцыялах

Разгледзім ураўненне

$$\dot{x} = \frac{P(t, x)}{Q(t, x)}, \quad (16)$$

дзе функцыі $P(t, x)$ і $Q(t, x)$ вызначаныя і непарыўныя ў абсягу D плоскасці P зменных t, x , прычым назоўнік $Q(t, x)$ не ператвараецца ў нуль ні ў адным пункце.

Калі выраз $Q(t, x)dx - P(t, x)dt$ ёсць поўны дыферэнцыял некаторай функцыі на ўсім абсягу D , то ўраўненне (16) называюць ураўненнем у поўных дыферэнцыялах.

Заўвага 1. Напомнім, што поўным дыферэнцыялам некаторай функцыі $u = u(t, x)$ называецца выраз

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx.$$

А для того, щоб диференціальний вираз

$$Q(t, x)dx - P(t, x)dt$$

з'являється повним диференціалом деякої функції $u(t, x)$, необхідно і достатньо, щоб в усіх пунктах області D була виконана умова

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0.$$

(Доказ цього твердження гл. у [29], § 12.2, с. 58). Точніше виконання апошньої рівності з'являється необхідною і достатньою ознакою того, що функція $u(t, x)$ є повним диференціалом.

Символічно рівняння (16) будемо записувати у вигляді рівняння

$$Q(t, x)dx - P(t, x)dt = 0, \quad (17)$$

ліва частина якої з'являється повним диференціалом. Апошнє означає, що існує функція $u(t, x)$, визначена на D , яка задовольняє умовам

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = Q(t, x), \quad \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = -P(t, x). \quad (18)$$

Функція $u(t, x)$ може бути знайдена наступним чином. Інтегруючи першу з рівностей (18) по x при фіксованому t і зауважуючи, що правий бік рівності є функцією тільки t , маємо

$$u(t, x) = \int Q(t, x)dx + \phi(t). \quad (19)$$

Затем з рівності

$$\frac{\partial}{\partial t} \int Q(t, x)dx + \dot{\phi}(t) = -P(t, x)$$

знаходимо функцію $\phi(t)$, після підстановки якої у (19) отримаємо функцію $u(t, x)$.

Зауважимо, що функцію $u(t, x)$ можна визначити, інтегруючи другу з рівностей (18) по t при фіксованому x , адже правий бік рівності є функцією тільки x .

Няхай $x = \psi(t)$ – рашэнне дыферэнцыяльнага ўраўнення (16), вызначанае на інтэрвале $I = (t_1; t_2)$. Пакажам, што мае месца тое ж самае

$$u(t, \psi(t)) \equiv \text{const.}$$

Сапраўды, для ўсіх пунктаў інтэрвала маем

$$\dot{\psi}(t) = \frac{P(t, \psi(t))}{Q(t, \psi(t))}$$

або

$$Q(t, \psi(t)) \cdot \dot{\psi}(t) - P(t, \psi(t)) = 0.$$

Левая частка апошняй роўнасці, у сілу (18), ёсць поўная вытворная па t функцыі $u(t, \psi(t))$, так што

$$\frac{d}{dt} u(t, \psi(t)) = 0$$

на ўсім інтэрвале I . Адсюль вынікае (гл. [15], глава I, § 11, п. 2, с. 279), што функцыя $u(t, \psi(t))$ ёсць канстанта на ўсім гэтым інтэрвале.

Адваротна, кожная функцыя $x = \psi(t)$, зададзеная на некаторым інтэрвале I і азначаемая як няяўная функцыя з ураўнення

$$u(t, x) = C \quad (20)$$

(з адвольнай пастаяннай C), з'яўляецца рашэннем дыферэнцыяльнага ўраўнення (16).

Сапраўды, няхай $x = \psi(t)$ – рашэнне ўраўнення (20), разглядаемае на некаторым інтэрвале I , так што

$$u(t, \psi(t)) = C.$$

Дыферэнцуючы гэтую тое ж самае па t , у сілу (18) атрымаем

$$Q(t, \psi(t)) \cdot \dot{\psi}(t) - P(t, \psi(t)) = 0,$$

адкуль вынікае, што $x = \psi(t)$ – рашэнне ўраўнення (16).

Апошняму выніку дадзім геаметрычнае тлумачэнне: кожная інтэгральная крывая дыферэнцыяльнага ўраўнення (16) размяшчаецца цалкам на некаторай лініі ўзроўню функцыі $u(t, x)$, гэта значыць вызначаецца ўраўненнем (20).

Адваротна, кожная звязная частка лініі ўзроўню, гэта значыць графік рашэння ўраўнення (20), разглядаемага на некаторым інтэрвале $I = (t_1; t_2)$, уяўляе сабой інтэгральную крывую.

Прыклад 1. Праінтэграваць дыферэнцыяльнае ўраўненне

$$(2t - 3x)dt + (2x - 3t)dx = 0.$$

Рашэнне. Для дадзенага ўраўнення $P(t, x) = 2t - 3x$,

$Q(t, x) = 2x - 3t$, $\frac{\partial P}{\partial x} = -3$, $\frac{\partial Q}{\partial t} = -3$. Дадзенае ўраўненне з'яўляецца ўраўненнем у поўных дыферэнцыялах, таму

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2t - 3x, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 3t. \quad (21)$$

Інтэгруючы першае з гэтых двух ураўненняў (x пры гэтым лічыцца пастаянным), знаходзім

$$u(t, x) = t^2 - 3tx + \phi(x), \quad (22)$$

дзе $\phi(x)$ – функцыя, якую неабходна знайсці.

Дыферэнцуючы (22) па x і параўноўваючы з (21), атрымаем $-3t + \phi'(x) = 2x - 3t$, адкуль $\phi'(x) = 2x$, $\frac{d\phi}{dx} = 2x$, $\phi(x) = x^2 + C_1$.

Падставіўшы выраз для $\phi(x)$ у роўнасць (22), знойдзем $u(t, x) = t^2 - 3tx + x^2 + C_1$.

Агульны інтэграл дадзенага ўраўнення запішацца ў выглядзе $t^2 - 3tx + x^2 + C_1 = C_2$ або $t^2 - 3tx + x^2 = C$.

Прыклад 2. Разгледзім ураўненне $\dot{x} = f(t)g(x)$, азначанае як ураўненне з падзяляльнымі зменнымі. Будзем лічыць, што функцыя $f(t)$ вызначаная і непарыўная на інтэрвале $t_1 < t < t_2$, а функцыя $g(x)$ вызначаная, непарыўная і не ператвараецца ў нуль на інтэрвале $x_1 < x < x_2$.

Разглядаемае ўраўненне – ураўненне ў поўных дыферэнцыялах. Менавіта яно можа быць запісана сімвалічна ў выглядзе

$$\frac{dx}{g(x)} - f(t)dt = 0.$$

Адпаведная функцыя $u(t, x)$ задаецца формулай

$$u(t, x) = \int_{x_0}^x \frac{d\zeta}{g(\zeta)} - \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau.$$

Тут $x_0 \in (x_1; x_2)$, а x змяняецца на тым жа інтэрвале; $t_0 \in (t_1; t_2)$, а t змяняецца на тым жа інтэрвале.

У сілу сказанага вышэй усе рашэнні разглядаемага ўраўнення атрымліваюцца як няхўныя функцыі з судачынення

$$\int_{x_0}^x \frac{d\zeta}{g(\zeta)} = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau + C.$$

Заўвага 2. Калі лінія ўзроўню функцыі $u(t, x)$ можа складацца з некалькіх асобных кавалкаў, то ў гэтым выпадку цэлая лінія ўзроўню не з'яўляецца адной інтэгральнай крывой, а распадаецца на некалькі інтэгральных крывых. Іншымі словамі, адна канстанта C можа ў сілу няхўнага ўраўнення (20) вызначаць некалькі і нават бясконцае мноства рашэнняў.

Прыклад 3. Рашым ураўненне

$$\dot{x} = x^2 \cos t \tag{23}$$

з падзяляльнымі зменнымі. Мноствам D для яго з'яўляецца ўся плоскасць P . Пры $x > 0$ і пры $x < 0$ ураўненне можна рашыць спосабам, разгледжаным у прыкладзе 2. Для кожнай з паўплоскасцяў маем

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int \cos t dt$$

або

$$-\frac{1}{x} = \sin t - C.$$

Такім чынам, атрымліваем

$$x = \frac{I}{C - \sin t}. \quad (24)$$

Акрамя рашэнняў, апісаных формулай (24), маем відавочнае рашэнне

$$x = 0. \quad (25)$$

Пакажам, што формулы (24) і (25) ахопліваюць сукупнасць усіх рашэнняў ураўнення (23). Няхай (t_0, x_0) – адвольнае пачатковае значэнне. Калі $x_0 = 0$, то ўказаныя пачатковыя значэнні рашэнне (24)

мае пры $C = \sin t_0 + \frac{I}{x_0}$, пры $x_0 = 0$ маем рашэнне (25).

Рашэнне (25) вызначана на інтэрвале $(-\infty; +\infty)$. Пры $|C| > I$ формула (24) вызначае таксама адно рашэнне, зададзенае на інтэрвале $(-\infty; +\infty)$. Пры фіксаваным C , $|C| \leq I$, формула (24) задае не адно рашэнне, а бясконцае мноства рашэнняў. Кожнае асобнае рашэнне ў гэтым выпадку вызначаецца на інтэрвале $I = (t_1; t_2)$, дзе t_1, t_2 – два суседніх нулі функцыі $\sin t - C$ (мал. 7).

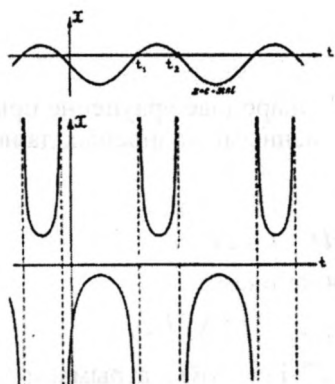
Заўвага 3. Некаторыя дыферэнцыяльныя ўраўненні шляхам замены зменных могуць быць прыведзены да ўраўненняў з падзяляльнымі зменнымі. Напрыклад, ураўненне выгляду

$$\frac{dx}{dt} = f(at + bx + c), \quad (26)$$

дзе $f(z)$ – непарыўная функцыя свайго аргумента, a, b, c – пастаянныя лікі, падстаноўкай $z = at + bx + c$ ператвараецца ў дыферэнцыяльнае ўраўненне з падзяляльнымі зменнымі

$$\frac{dz}{dt} = a + b \frac{dx}{dt} = a + b f(z),$$

адкуль $\frac{dz}{a + b f(z)} = dt$, калі $a + b f(z) \neq 0$. Пасля інтэгравання



Мал. 7

приводзіцца да ўраўнення з падзяляльнымі зменнымі $\frac{dz}{dt} - 2 = z$. Ураўненне $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t-x} + 1$ прыводзіцца да ўраўнення з падзяляльнымі зменнымі $\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{z}$, дзе $z = t - x$.

атрымаем
$$\int \frac{dz}{a + b f(z)} = t + C.$$

(Адзначым, што карані ўраўнення $a + b f(z) = 0$ могуць быць рашэннямі (26), якія не ўваходзяць у атрыманы агульны інтэграл.) Замяняючы ў апошнім судачыненні z на $a t + b x + c$, знойдзем агульны інтэграл ураўнення (26).

Напрыклад, ураўненне

$$\frac{dx}{dt} = 2t + x \text{ падстаноўкай } z = 2t + x$$

прыводзіцца да ўраўнення з падзя-

§ 5. Аднародныя дыферэнцыяльныя ўраўненні і ўраўненні, якія прыводзяцца да іх

Ураўненне віду

$$M(t, x) dt + N(t, x) dx = 0 \quad (27)$$

назваецца аднародным, калі $M(t, x)$ і $N(t, x)$ — аднародныя функцыі адной і той жа ступені m . Функцыя $f(t, x)$ называецца аднароднай функцыяй ступені m , калі

$$f(\lambda t, \lambda x) = \lambda^m f(t, x).$$

Аднароднае ўраўненне (27) можа быць прыведзена да выгляду

$$\dot{x} = f\left(\frac{x}{t}\right).$$

Пры дапамозе падстаноўкі $x = zt$ аднароднае ўраўненне прыводзіцца да ўраўнення з падзяляльнымі зменнымі ў адносінах да новай невядомай функцыі z .

Сапраўды, маем

$$M(t, zt)dt + N(t, zt)(z dt + t dz) = 0.$$

У сілу азначэння аднароднага ўраўнення запішам

$$M(t, zt) = t^m M(1, z), \quad N(t, zt) = t^m N(1, z).$$

Таму, пасля падстаноўкі, скарачэння на t^m і групойкі, атрымаем

$$[M(1, z) + N(1, z)z] dt + t N(1, z) dz = 0.$$

Дзялячы зменныя і інтэгруючы, будзем мець $t = Ce^{-\int \frac{N(1, z) dz}{M(1, z) + N(1, z)z}}$.

Замяняючы ў апошнім судачыненні z на $\frac{x}{t}$, знойдзем агульны інтэграл ураўнення (27).

Заўвага 1. Пры дзяленні зменных маглі быць згублены рашэнні віду $z = a$, дзе a – карань ураўнення

$$M(1, z) + N(1, z)z = 0.$$

Прыклад 1. Рашыць ураўненне $2txdt + (x^2 - t^2)dx = 0$.

Рашэнне. Тут $M = 2tx$, $N = x^2 - t^2$. Абедзве функцыі – аднародныя, другой ступені аднароднасці. Мяркуючы, што $x = zt$, маем $dx = t dz + z dt$, так што зыходнае ўраўненне прыме від

$$2t^2 z dt + (z^2 t^2 - t^2)(t dz + z dt) = 0.$$

Пасля скарачэння на t^2 і групойкі членаў з множнікамі dt і dz атрымаем

$$(z^3 + z) dt + (z^2 - 1) t dz = 0 \quad (t^2 = 0?).$$

Падзелім зменныя

$$\frac{dt}{t} + \frac{z^2 - 1}{z^3 + z} dz = 0 \quad (z^3 + z = 0 ?) .$$

Інтэгруючы, знаходзім

$$\frac{t}{z}(z^2 + 1) = C . .$$

Вяртаючыся да шуканай функцыі $x \quad \left(z = \frac{x}{t} \right)$, атрымаем

$t^2 + x^2 - Cx = 0$. Гэта і ёсць агульны інтэграл дадзенага ўраўнення, бо $t = 0$ не з'яўляецца рашэннем.

Разгледзім ураўненні $t^2 = 0$, $z^3 + z = 0$. Першае ўраўненне дае $t = 0$. Паўвосі восі $x \quad (t = 0, (x \neq 0))$ не з'яўляюцца рашэннямі зыходнага дыферэнцыяльнага ўраўнення. З другога ўраўнення знаходзім $z = 0$, а значыць $x = 0 \quad (t \neq 0)$. Гэтыя паўвосі восі t з'яўляюцца рашэннямі дадзенага ўраўнення. Рашэнні гэтыя частковыя, таму што ва ўсіх пунктах мае месца адзінасць рашэння задачы Кашы.

Ураўненні выгляду

$$\dot{x} = f \left(\frac{a_1 t + b_1 x + c_1}{a_2 t + b_2 x + c_2} \right)$$

пры $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ прыводзяцца да аднародных падстаноўкай $t = u + \alpha$, $x = v + \beta$, дзе (α, β) – пункт перасячэння прамых $a_1 t + b_1 x + c_1 = 0$ і $a_2 t + b_2 x + c_2 = 0$.

Калі ж $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, то падстаноўка $a_1 t + b_1 x = z$ пры $a_1 b_1 \neq 0$ ці $a_2 t + b_2 x = y$ пры $a_1 b_1 = 0$, $a_2 b_2 \neq 0$ прыводзіць дадзенае ўраўненне да ўраўнення з падзяляльнымі зменнымі.

Прыклад 2. Прывесці ўраўненне $\frac{dx}{dt} = \frac{t - x + 1}{t + x - 3}$ да ўраўнення з падзяляльнымі зменнымі.

Рашэнне. Падлічым $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Сістэма ўраўненняў $\alpha - \beta + 1 = 0$, $\alpha + \beta - 3 = 0$ мае рашэнне $\alpha = 1$, $\beta = 2$. Дапускаючы $t = u + 1$, $x = v + 2$, будзем мець $\frac{dv}{du} = \frac{u-v}{u+v}$ — аднароднае

ўраўненне. Замена зменных $z = \frac{v}{u}$ ці $v = zu$ прыводзіць да ўраўнення з падзяляльнымі зменнымі

$$z + u \frac{dz}{du} = \frac{1-z}{1+z}, \quad \frac{(1+z) dz}{1-2z-z^2} = \frac{du}{u}.$$

Прыклад 3. Прывесці ўраўненне

$$(t+x+2)dt + (2t+2x-1)dx = 0$$

да ўраўнення з падзяляльнымі зменнымі.

Рашэнне. Для гэтага ўраўнення $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$. Таму ўвядзём падстаноўку $x+t=z$, $dx = dz - dt$. Дадзенае ўраўненне прыме выгляд

$$(z+2)dt + (2z-1)(dz-dt) = 0, \\ (3-z)dt + (2z-1)dz = 0.$$

Падзяліўшы зменныя, атрымаем $\frac{2z-1}{3-z}dz + dt = 0$.

Ураўненне

$$M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0$$

называецца абагульненым аднародным, калі ўдаецца падабраць такі лік k , што левая частка гэтага ўраўнення становіцца аднароднай функцыяй некаторай ступені m адносна t, x, dt, dx пры ўмове, што t лічыцца велічынёй першага вымярэння, x — k -га вымярэння, dt і dx — адпаведна нулявога і $k-1$ вымярэнняў. Абагульненае аднароднае ўраўненне прыводзіцца да ўраўнення з падзяляльнымі змен-

ними падстаноўкай $x = z \cdot t^k$, дзе z — новая невядомая функцыя.

Прыклад 4. Рашыць ураўненне $(t^2 x^2 - 1)dx + 2tx^3 dt = 0$.

Рашэнне. Пры зробленым у азначэнні меркаванні адносна вымярэнняў t, x, dt, dx члены левай часткі $t^2 x^2 dx, -dx, 2tx^3 dt$ будуць мець адпаведна вымярэнні $3k + 1, k - 1, 3k + 1$. Параўноўваючы іх, атрымаем умову, якой павінен задавальняць шуканы лік k . Гэтая ўмова выконваецца пры $k = -1$ (пры такім k усе члены левай часткі зыходнага ўраўнення будуць мець вымярэнне -2). У выніку гэтага ўраўненне з'яўляецца абагульненым аднародным.

Уводзім падстаноўку $x = z \cdot t^{-1}$. Тады зыходнае ўраўненне прыме выгляд

$$z(z^2 + 1)dt + t(z^2 - 1)dz = 0.$$

Апошняе ўраўненне з'яўляецца ўраўненнем з падзяляльнымі зменнымі.

§ 6. Інтэгруючы множнік

Разгледзім ураўненне віду

$$P(t, x)dt + Q(t, x)dx = 0, \quad (28)$$

дзе функцыі $P(t, x)$ і $Q(t, x)$ і іх частковыя вытворныя $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial t}$

вызначаныя і непарыўныя ў абсягу D .

У некаторых выпадках, калі ўраўненне (28) не з'яўляецца ўраўненнем у поўных дыферэнцыялах, удаецца падабраць функцыю $\mu(t, x)$, непарыўную разам са сваімі частковымі вытворнымі ў абсягу D , пасля множання на якую левая частка (28) ператвараецца ў поўны дыферэнцыял. Такая функцыя $\mu(t, x)$ называецца інтэгруючым множнікам. Пры гэтым неабходна памятаць, што крывыя, у пунктах якіх інтэгруючы множнік ператвараецца ў нуль або ў бясконцасць, могуць аказацца пабочнымі або асаблівымі рашэннямі дыферэнцыяльнага ўраўнення (28). Згодна з прыметай

ураўнення ў поўных дыферэнцыялах (гл. заўвагу 4.1) і азначэннем інтэгруючага множніка, маем $\frac{\partial}{\partial x}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial t}(\mu Q)$ або

$$Q \frac{\partial \mu}{\partial t} - P \frac{\partial \mu}{\partial x} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t} \right) \mu,$$

адкуль

$$Q \frac{\partial \ln|\mu|}{\partial t} - P \frac{\partial \ln|\mu|}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t}. \quad (29)$$

Ураўненне (29) з'яўляецца ўраўненнем з частковымі вытворнымі. Рашэнне гэтага ўраўнення, наогул кажучы, задача больш цяжкая, чым рашэнне зыходнага ўраўнення, але нам патрабуецца знайсці толькі адно з рашэнняў.

Адзначым некаторыя частковыя выпадкі, калі ўдаецца параўнальна лёгка знайсці адно з рашэнняў ураўнення (29), гэта значыць знайсці інтэгруючы множнік.

Калі $\mu = \mu(t)$, то $\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$ і ўраўненне (29) прыме выгляд

$$\frac{d \ln|\mu|}{dt} = \frac{\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t}}{Q}. \text{ Вырашаючы яго адносна } \mu, \text{ атрымаем}$$

$$\mu = C e^{\int \frac{\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t}}{Q} dt}. \quad (30)$$

Можна лічыць $C = 1$, таму што дастаткова мець толькі адзін інтэгруючы множнік.

Калі $\frac{\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t}}{Q}$ з'яўляецца функцыяй толькі ад t , то

інтэгруючы множнік, які залежыць толькі ад t , існуе і вызначаецца па формуле (30), у процілеглым выпадку інтэгруючага множніка віду $\mu(t)$ не існуе.

Зусім аналогічна могуць быць знойдзены ўмовы існавання інтэгруючых множнікаў віду $\mu(x)$, $\mu(t \pm x)$, $\mu(t^2 \pm x^2)$, $\mu(t \cdot x)$, $\mu\left(\frac{x}{t}\right)$ і г.д.

Прыклад 1. Рашыць ураўненне

$$2tx \ln x \, dt + (t^2 + x^2 \sqrt{x^2 + 1}) \, dx = 0.$$

Рашэнне. Тут $P = 2tx \ln x$, $Q = t^2 + x^2 \sqrt{x^2 + 1}$. Лёгка правесці, што ўраўненне не з'яўляецца ўраўненнем у поўных дыферэнцыялах і ўмова для існавання інтэгруючага множніка, які залежыць толькі ад t , не выконваецца.

Праверым магчымасць існавання інтэгруючага множніка, які залежыць толькі ад x . Такі інтэгруючы множнік будзе існаваць, калі

выраз $\frac{\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial x}}{P}$ залежыць толькі ад x (гл. ураўненне (29)).

Сапраўды, $\frac{\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial x}}{P} = \frac{2t - 2t(\ln x + 1)}{2tx \ln x} = -\frac{1}{x}$. Значыць, $\frac{d \ln |\mu|}{dx} = -\frac{1}{x}$,

$\mu = \frac{1}{x}$. Ураўненне $\frac{2tx \ln x \, dt}{x} + \frac{t^2 + x^2 \sqrt{x^2 + 1}}{x} \, dx = 0$ з'яўляецца ўраўненнем у поўных дыферэнцыялах. Яго можна запісаць у выглядзе

$$d(t^2 \ln x) + x \sqrt{x^2 + 1} \, dx = 0, \text{ адкуль } t^2 \ln x + \frac{1}{3}(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} = C.$$

Знойдем цяпер умову, пры якой ураўненне (29) мае рашэнне віду $\mu = \mu(z)$, дзе $z = z(t, x)$ – зададзеная функцыя ад t і x .

Падстаўляючы функцыю $\mu = \mu(z)$ ва ўраўненне (29) і ўлічваючы, што $\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{d\mu}{dz} \frac{\partial z}{\partial t}$, $\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dz} \frac{\partial z}{\partial x}$, атрымаем

$$\left(Q \frac{\partial z}{\partial t} - P \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{d\mu}{dz} = \mu \left(\frac{\partial P}{\partial x} - P \frac{\partial Q}{\partial t} \right).$$

Адкуль відаць, што калі $\frac{\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t}}{Q \frac{\partial z}{\partial t} - P \frac{\partial z}{\partial x}} \equiv \varphi(z)$, гэта значыць левая

частка з'яўляецца функцыяй толькі ад z , то існуе інтэгруючы множнік $\mu = \mu(z)$, які знаходзіцца з ураўнення $\frac{d\mu}{dz} = \varphi(z) \mu$ і,

значыць, мае выгляд $\mu = e^{\int \varphi(z) dz}$ ($C = 1$).

Прыклад 2. Прывесці ўраўненне

$$(3t + 2x + x^2) dt + (t + 4tx + 5x^2) dx = 0$$

да ўраўнення ў поўных дыферэнцыялах, калі яго інтэгруючы множнік мае від $\mu = \varphi(t + x^2)$.

Рашэнне. Няхай $z = t + x^2$, тады $\mu = \varphi(z)$, значыць,

$$\frac{\partial \ln |\mu|}{\partial t} = \frac{d \ln |\mu|}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{d \ln |\mu|}{dz},$$

$$\frac{\partial \ln |\mu|}{\partial x} = \frac{d \ln |\mu|}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d \ln |\mu|}{dz} \cdot 2x.$$

Ураўненне (29) для знаходжання інтэгруючага множніка будзе мець від

$$(Q - 2Px) \frac{d \ln |\mu|}{dz} = \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t} \text{ або } \frac{d \ln |\mu|}{dz} = \frac{\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t}}{Q - 2Px}.$$

Падстаўляючы P і Q з дадзенага ўраўнення, $P = 3t + 2x + x^2$,

$$Q = t + 4tx + 5x^2, \quad \text{знаходзім} \quad \frac{\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t}}{Q - 2Px} = \frac{1}{t + x^2} = \frac{1}{z}. \quad \text{Тады}$$

$$\frac{d \ln |\mu|}{dz} = \frac{1}{z}, \quad \text{адкуль} \quad \mu = z. \quad \text{Гэта значыць,} \quad \mu = t + x^2. \quad \text{Памножыў-}$$

шы дадзенае ўраўненне на $\mu = t + x^2$, атрымаем ураўненне ў поўных дыферэнцыялах.

§ 7. Лінейныя ўраўненні

Ураўненне віду

$$\dot{x} = a(t)x + g(t) \quad (31)$$

называецца лінейным ураўненнем, а ўраўненне

$$\dot{y} = a(t)y \quad (32)$$

аднародным лінейным ураўненнем, якое адпавядае ўраўненню (31). Функцыі $a(t)$ і $g(t)$ вызначаюцца і непарыўныя на некаторым інтэрвале $I = (t_1; t_2)$. Такім чынам, адкрытае мноства D у плоскасці P вызначаецца ўмовамі $t_1 < t < t_2$, што накладваюцца на t пры адвольным x . Гэтае мноства ўяўляе сабой паласу, калі t_1 і t_2 канечныя, паўплоскасць, калі канечная толькі адна з велічынь t_1 , t_2 , і плоскасць, калі бесканечныя абедзве велічыні t_1 , t_2 . Правая частка ўраўнення (31) непарыўная разам са сваёй частковай вытворнай па x на ўсім мностве D , так што для ўраўнення (31) выкананы ўмовы тэарэмы 1.1.

Няхай $t_0 \in I$. Дапусцім

$$A(t) = \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau.$$

Функцыя $A(t)$ вызначана на ўсім інтэрвале I . Аказваецца, што суккупнасць усіх рашэнняў ураўнення (31) запісваецца формулай

$$x = \left(x_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(\tau)} \cdot g(\tau) d\tau \right) e^{A(t)}, \quad (33)$$

дзе x_0 — адвольная канстанта. Кожнае з гэтых рашэнняў вызначана на ўсім інтэрвале I , а за межамі гэтага інтэрвалу не вызначанай з'яўляецца правая частка ўраўнення (31).

Прывядзём вывад формулы (33), які дасць магчымасць не запамінаць гэтую формулу, а ў кожным асобным выпадку паўтарыць разважанні, што будуць прыведзены ніжэй.

Разгледзім спачатку ўраўненне (32). Гэта ўраўненне ў поўных дыферэнцыялах. Сапраўды, сімвалічна яго можна запісаць у выглядзе

$$\frac{dy}{y} - a(t)dt = 0.$$

Адпаведная функцыя $u(t, y)$ задаецца формулай $u(t, y) = \ln|y| - A(t)$, а значыць, рашэнні аднароднага ўраўнення (32) вызначаюцца як нязлучныя функцыі з судачынення $\ln|y| - A(t) = C_1$. Адкуль атрымліваем $|y| = e^{A(t)+C_1}$ або, інакш,

$$y = Ce^{A(t)}, \quad (34)$$

дзе C можа прымаць любыя сапраўдныя значэнні. (Адзначым, што гэты вывад мае недакладнасць, таму што функцыя y можа ператварацца ў нуль; недакладнасць можна лёгка скасаваць, бо $y = 0$ відавочна — рашэнне разглядаемага ўраўнення.) Каб атрымаць з дапамогай формулы (34) рашэнні неаднароднага ўраўнення, прыменім так званы метад варыяцыі адвольнай пастаяннай. Менавіта рашэнне ўраўнення (31) адшукваем у выглядзе (34), дзе C ужо не канстанта, а некаторая невядомая функцыя зменнай t , гэта значыць

$$x(t) = C(t) e^{A(t)}. \quad (34')$$

Падстаўляючы гэтае дапускаемае рашэнне ва ўраўненне (31), атры-

маем $\dot{C}e^{A(t)} + Ca(t)e^{A(t)} = a(t)Ce^{A(t)} + g(t)$ або $\dot{C}e^{A(t)} = g(t)$.

Адкуль знаходзім $C(t) = \int e^{-A(t)} g(t) dt = x_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(\tau)} g(\tau) d\tau$, дзе

x_0 — канстанта інтэгравання. Падстаўляючы апошні выраз у (34'), атрымліваем формулу (33).

Прыклад 1. Рашыць ураўненне

$$\dot{x} + 2tx = 2te^{-t^2}. \quad (35)$$

Рашэнне. Прыменім апісаны вышэй метады варыяцыі пастаянай. Разгледзім адпаведнае аднароднае ўраўненне $\dot{x} + 2tx = 0$. Інтэгруючы яго як ураўненне з падзяляльнымі зменнымі (або як ураўненне ў поўных дыферэнцыялах), атрымліваем агульнае рашэнне $x = Ce^{-t^2}$.

Агульнае рашэнне неаднароднага ўраўнення шукаем у выглядзе

$$x = C(t) e^{-t^2}, \quad (36)$$

дзе $C(t)$ — невядомая функцыя ад t .

Падстаўляючы (36) у (35), атрымліваем $\dot{C}(t) = 2t$, адкуль $C(t) = t^2 + C_1$. Такім чынам, агульнае рашэнне неаднароднага ўраўнення будзе $x = (t^2 + C_1) e^{-t^2}$, дзе C_1 — пастаянная інтэгравання.

Лінейныя ўраўненні першага парадку можна інтэграваць таксама метадам, які заключаецца ў наступным: пры дапамозе падстаноўкі $x = u \cdot v$, дзе u і v — дзве невядомыя функцыі, зыходнае ўраўненне прыводзіцца да выгляду

$$\dot{u}v + u\dot{v} = a(t)uv + g(t)$$

або

$$u(\dot{v} - a(t)v) + \dot{u}v = g(t).$$

Карыстаючыся тым, што адна з невядомых функцый, напрыклад v , можа быць выбрана зусім адвольна (таму што толькі здабытак $u \cdot v$ павінен задавальняць зыходнаму ўраўненню), за v прыма-

юць любое частковае рашэнне ўраўнення $\dot{v} - a(t)v = 0$ (напрыклад, $v = e^{\int a(t)dt}$), якое ператварае, вядома, у нуль каэфіцыент пры u у апошнім ураўненні. Тады гэтакі ўраўненне прыме выгляд $\dot{u}v = g(t)$ або $\dot{u} = \frac{g(t)}{v}$. Гэта значыць $\dot{u} = g(t)e^{-\int a(t)dt}$, адкуль $u = C + \int g(t)e^{-\int a(t)dt} dt$. Агульнае рашэнне зыходнага ўраўнення знаходзіцца множаннем u на v :

$$x = e^{\int a(t)dt} \left[\int g(t)e^{-\int a(t)dt} dt + C \right].$$

Прыклад 2. Праінтэгруем апісаным вышэй метадам лінейнае ўраўненне

$$\dot{x} - x \operatorname{th} t = ch^2 t.$$

Дапусцім $x = u \cdot v$. Тады $\dot{u}v + \dot{v}u - uv \operatorname{th} t = ch^2 t$ або $u(\dot{v} - v \operatorname{th} t) + \dot{u}v = ch^2 t$. Няхай $\dot{v} - v \operatorname{th} t = 0$, адкуль $\frac{dv}{v} = \operatorname{th} t dt$.

Праінтэграваўшы, атрымаем $\ln|v| = \ln|ch t|$ або $v = ch t$. У сілу таго, што дастаткова знайсці якое-небудзь частковае рашэнне дапаможнага ўраўнення, пастаянную інтэгравання не ўводзім.

Для вызначэння u маем ураўненне $\dot{u}v = ch^2 t$ або $\dot{u} ch t = ch^2 t$. Адкуль $u = sh t + C$. Агульнае рашэнне зыходнага ўраўнення атрымаем множаннем u на v

$$x = ch t (sh t + C).$$

Заўвага 1. Некаторыя ўраўненні становяцца лінейнымі, калі памяняць месцамі шуканую функцыю і незалежнае зменнае. Нармальны выгляд такіх ураўненняў $\frac{dt}{dx} = a(x)t + g(x)$. Так, напрыклад,

ураўненне $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t \cos x + \sin 2x}$ з'яўляецца лінейным, калі раз-

глядаць t як функцыю ад x : $\frac{dt}{dx} = t \cos x + \sin 2x$. Гэтае ўраўненне рашаецца аналагічна ўраўненню (35).

Заўвага 2. Для лінейнага ўраўнення $\frac{dx}{dt} + a(t)x = g(t)$ або $[a(t)x - g(t)]dt + dx = 0$ выконваецца ўмова існавання інтэгруючага множніка, які залежыць толькі ад t . Сапраўды, $\frac{\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t}}{Q} = a(t)$ і, значыць, $\mu = e^{\int a(t)dt}$ (гл. формулу (30)).

Прыклад 3. Рашыць ураўненне

$$\dot{x} - \frac{2}{t}x = t.$$

Рашэнне. Згодна з заўвагай 2, маем:

$$\mu(t) = e^{-\int \frac{2}{t} dt} = \frac{1}{t^2}.$$

Памнажаючы зыходнае ўраўненне на $\frac{1}{t^2}$, прывядзём яго да віду

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{t^2} \cdot x \right) = \frac{1}{t}.$$

Адкуль $x = t^2 \left(C + \ln |t| \right)$.

§ 8. Ураўненне Бернулі

Ураўненне Бернулі мае выгляд

$$\dot{x} = f(t)x + g(t)x^n \quad (n \neq 1, n \neq 0),$$

дзе $f(t)$ і $g(t)$ – непарыўныя функцыі на некаторым інтэрвале $t_1 < t < t_2$. Дзяленнем абедзвюх частак на x^n і заменай невядомай

функцыі $x^{1-n} = z$ ураўненне Бернулі заўсёды прыводзіцца да лінейнага ўраўнення адносна z

$$\frac{1}{1-n} \dot{z} = f(t)z + g(t).$$

Адзначым, што пры дзяленні на x^n можа быць згублена рашэнне $x = 0$, калі $n > 0$. Гэтае рашэнне з'яўляецца частковым, калі $n > 1$, і асаблівым, калі $0 < n < 1$. (Вынікае з формулы агульнага рашэння ўраўнення Бернулі.)

Пры інтэграванні канкрэтных ураўненняў Бернулі іх не трэба папярэдне ператвараць у лінейныя, а адразу прымяняць да іх метады рашэння, апісаныя ў папярэднім параграфі.

Прыклад 1. Рашыць ураўненне $\dot{x} + \frac{x}{t} = t^2 x^4$.

Рашэнне. Праінтэгруем гэтае ўраўненне Бернулі метадам варыяцыі адвольнай пастаяннай. Рашэнне адпаведнага аднароднага ўраўнення мае выгляд $x = \frac{C}{t}$. Рашэнне дадзенага ўраўнення будзем

адшукваць у выглядзе $x = \frac{Q(t)}{t}$. Падстаноўка x і $\dot{x} = \frac{\dot{Q}(t)}{t} - \frac{Q(t)}{t^2}$ у

зыходнае ўраўненне дае $\frac{\dot{Q}(t)}{t} - \frac{Q(t)}{t^2} + \frac{Q(t)}{t^2} = t^2 \left(\frac{Q(t)}{t} \right)^4$ або

$\frac{\dot{Q}(t)}{t} = \frac{[C(t)]^4}{t^2}$. Інтэгруючы атрыманае ўраўненне, будзем мець

$$\frac{dC(t)}{[C(t)]^4} = \frac{dt}{t}; \quad -\frac{1}{3[C(t)]^3} = \ln t + \ln C_1; \quad C(t) = \frac{1}{-\sqrt[3]{3 \ln(C_1 t)}}.$$

Агульнае рашэнне зыходнага ўраўнення мае выгляд $x = \frac{C(t)}{t} =$

$$= \frac{1}{-t \sqrt[3]{3 \ln(C_1 t)}}.$$

Прыклад 2. Рашыць ураўненне $\dot{x}t^3 \sin x = t\dot{x} - 2x$.

Рашэнне. Дадзенае ўраўненне з'яўляецца ўраўненнем Бернулі адносна t як функцыі x . Прыменім да яго другі метада рашэння, які заключаецца ў замене функцыі здабыткам двох новых (гл. § 6). Для прыведзенага ўраўнення гэта будзе замена $t = u \cdot v$. Будзем мець

$$u^3 v^3 \sin x = uv - 2\dot{u}vx - 2u\dot{v}x \quad (37)$$

або $u(v - 2\dot{v}x) = u^3 v^3 \sin x + 2\dot{u}vx$. Выберам v так, каб выраз у

дужках ператварыўся ў нуль: $v - 2\dot{v}x = 0$, $\frac{dv}{v} = \frac{1}{2} \frac{dx}{x}$, $v = x^{\frac{1}{2}}$.

Падставіўшы v у (37), атрымаем ураўненне для знаходжання u :

$$u^3 x^{\frac{3}{2}} \sin x = -2x^{\frac{3}{2}} \dot{u}, \text{ адкуль } -2 \frac{du}{u^3} = \sin x dx \text{ або } u^{-2} = C - \cos x,$$

$$u = \pm \frac{1}{\sqrt{C - \cos x}}. \text{ Тады } t = u \cdot v = \pm \sqrt{\frac{x}{C - \cos x}} \text{ або } x = t^2 (C - \cos x).$$

Адзначым, што пры дзяленні зменных магло быць згублена рашэнне $x = 0$.

§ 9. Ураўненне Рыкаці

Ураўненне

$$\frac{dx}{dt} + p(t)x + q(t)x^2 = f(t), \quad (38)$$

дзе p, q, f — непарыўныя функцыі ад t пры змяненні t у інтэрвале $t_1 < t < t_2$, называюць ураўненнем Рыкаці. Ураўненне (38) у агульным выглядзе не інтэгруецца ў квадратурах, але можа быць заменай зменных ператворана ва ўраўненне Бернулі, калі вядома адно частковае рашэнне $x_1(t)$ гэтага ўраўнення. Сапраўды, дапускаючы $x = x_1 + z$, атрымаем, з улікам, што $\dot{x}_1 + p(t)x_1 + q(t)x_1^2 \equiv f(t)$, ураўненне Бернулі адносна новай функцыі z

$$\dot{z} + [p(t) + 2q(t)x_1]z + q(t)z^2 = 0, \quad (39)$$

якое інтэгруецца дзвюма квадратурамі.

Прыклад 1. Прывесці ўраўненне $\frac{dx}{dt} = x^2 - \frac{2}{t^2}$ да ўраўнення

Бернулі.

Рашэнне. У гэтым прыкладзе няцяжка падабраць частковае рашэнне $x_1 = \frac{1}{t}$. Увядзём падстаноўку $x = z + \frac{1}{t}$, атрымаем

$$\dot{z} - \frac{1}{t^2} = \left(z + \frac{1}{t}\right) - \frac{2}{t^2} \text{ або } \dot{z} = 2\frac{z}{t} + z^2 - \text{ ураўненне Бернулі, якое}$$

інтэгруецца апісанымі ў § 8 метадамі.

Калі вядомы два частковыя рашэнні ўраўнення Рыкаці, то агульнае рашэнне знаходзіцца пры дапамозе адной квадратуры. Сапраўды, калі, акрамя рашэння $x = x_1$, вядома другое рашэнне x_2 , то

функцыя $u = \frac{1}{x_2 - x_1}$ будзе з'яўляцца частковым рашэннем лінейнага ўраўнення

$$\frac{du}{dt} - (2q(t)x_1 + p(t))u = q(t), \quad (40)$$

атрыманага з (39) падстаноўкай $z = \frac{1}{u}$, а ў такім выпадку яго рашэнне патрабуе адной квадратуры.

Калі вядомы тры частковыя рашэнні ўраўнення (38), то агульнае рашэнне знаходзіцца без квадратур. Ураўненне (40) у гэтым выпадку мае два частковыя рашэнні $\frac{1}{x_2 - x_1}$ і $\frac{1}{x_3 - x_1}$, агульны інтэграл ураўнення (38) запішацца так:

$$\frac{x - x_2}{x - x_1} \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} = C, \text{ дзе } x_1, x_2, x_3 - \text{ частковыя рашэнні ўраўнення (38).}$$

Частковым выпадкам ураўнення (38) з'яўляецца спецыяльнае

ўраўненне Рыкаці

$$\frac{dx}{dt} + ax^2 = bt^\alpha, \quad t > 0, \quad (41)$$

дзе a, b, α – пастаянныя.

Пры $\alpha = 0$ маем $\frac{dx}{dt} = b - ax^2$, і ўраўненне інтэгруецца падзелам зменных.

Пры $\alpha = -2$ атрымліваем $\frac{dx}{dt} + ax^2 = \frac{b}{t^2}$. Дапускаючы $x = \frac{1}{z}$,

дзе z – новая невядомая функцыя, знаходзім $-\frac{1}{z^2} \frac{dz}{dt} + \frac{a}{z^2} = \frac{b}{t^2}$,

адкуль $\frac{dz}{dt} = a - b\left(\frac{z}{t}\right)^2$. Гэтае ўраўненне аднароднае адносна t, z ; яно інтэгруецца ў квадратурах.

Акрамя $\alpha = 0$ і $\alpha = -2$, існуе яшчэ бясконцае мноства іншых значэнняў α , пры якіх ураўненне (41) інтэгруецца ў квадратурах.

Гэтыя значэнні задаюцца формулай $\alpha = \frac{4k}{-2k+1}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$.

Пры ўсіх іншых значэннях α рашэнне ўраўнення Рыкаці (41) не выражаецца праз квадратуры. Калі ж у ім дапусціць $x = \frac{\dot{u}}{au}$, дзе

$u(t)$ – новая невядомая функцыя, то атрымаем ураўненне другога парадку $\frac{d^2 u}{dt^2} - abt^2 u = 0$, рашэнне якога можа быць выражана праз функцыі Беселя.

Больш падрабязна гл. [2], глава I, § 6, п. 3, с. 50.

§ 10. Ураўненні, не вырашаныя адносна вытворнай

Разгледзім агульны выпадак ураўнення першага парадку

$$F(t, x, \dot{x}) = 0, \quad (42)$$

дзе F – зададзеная сапраўдная функцыя ад $t, x, \dot{x}$. Калі ўраўненне (42) удаецца вырашыць адносна $\dot{x}$, то атрымліваюцца ўраўненні віду $\dot{x} = f_i(t, x)$, якія часам могуць быць праінтэграваны апісанымі вышэй метадамі.

Прыклад 1. Праінтэграваць ураўненне $(\dot{x})^2 - (t + x)\dot{x} + tx = 0$.

Рашэнне. Вырашаючы гэтае квадратнае ўраўненне адносна $\dot{x}$, будзем мець $\dot{x} = t$ і $\dot{x} = x$. Інтэгруючы кожнае з атрыманых ураўненняў, знаходзім $x = \frac{t^2}{2} + C$, $x = \tilde{C}e^t$. Абодва сямействы рашэнняў задавальняюць зыходнаму ўраўненню.

Апрача гэтага ўраўненне (42) мае свае асаблівасці. Напрыклад, ураўненне $\dot{x}^2 + 1 = 0$ наогул не мае сапраўдных рашэнняў. Для ўраўнення $\dot{x}^2 = 1$ рашэннямі з'яўляюцца сямействы прамых $x = \pm t + C$, так што праз кожны пункт плоскасці Otx праходзяць дзве ўзаемна перпендыкулярныя інтэгральныя лініі.

Дапусцім, што ўраўненне (42) у наваколлі пункта (t_0, x_0) можа быць вырашана адносна вытворнай, гэта значыць распадаецца на ўраўненні

$$\dot{x} = f_i(t, x), \quad i = \overline{1, m},$$

і няхай кожнае з гэтых ураўненняў мае агульнае рашэнне

$$x = \varphi_i(t, C), \quad i = \overline{1, m} \quad (43)$$

або агульны інтэграл

$$\psi_i(t, x, C) = 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (44)$$

Сукупнасць агульных рашэнняў (43) (або агульных інтэгралаў (44)) будзем называць агульным рашэннем (агульным інтэгралам) ураўнення (42).

Аднак не заўсёды ўраўненне (42) лёгка вырашаецца адносна $\dot{x}$, і яшчэ радзей атрыманыя пасля гэтага ўраўненні $\dot{x} = f_i(t, x)$ інтэгруюцца ў квадратурах.

Разгледзім некаторыя метады інтэгравання ўраўнення (42).

I. Няхай ураўненне (42) мае від

$$F(\dot{x}) = 0,$$

прычым існуе хаця б адзін сапраўдны карань $\dot{x} = k$ гэтага ўраўнення, а калі існуюць іншыя карані, то ўсе яны ізаляваныя. У сілу таго, што гэтае ўраўненне не мае ні t , ні x , то k – пастаянная. Інтэгруючы

ўраўненне $\dot{x} = k$, атрымліваем $x = kt + C$ або $k = \frac{x - C}{t}$. Але k

з'яўляецца каранем разглядаемага ўраўнення, значыць,

$$F\left(\frac{x - C}{t}\right) = 0 \text{ – яго агульны інтэграл.}$$

Прыклад 2. $\dot{x}^3 + \dot{x}^2 - \dot{x} + 1 = 0$.

Агульны інтэграл ураўнення мае выгляд

$$\left(\frac{x - C}{t}\right)^3 + \left(\frac{x - C}{t}\right)^2 - \frac{x - C}{t} + 1 = 0.$$

II. Дапусцім, што ўраўненне (42) мае від

$$F(x, \dot{x}) = 0. \quad (45)$$

Калі гэтае ўраўненне цяжка вырашыць адносна $\dot{x}$, то бывае мэтазгодна ўвесці параметр p і замяніць ураўненне (45) двума $x = \phi(p)$,

$\dot{x} = \psi(p)$, $p_0 < p < p_1$, такімі, што $F(\phi(p), \psi(p)) \equiv 0$, $p \in (p_0; p_1)$.

Маем $dx = \dot{x}dt$, $dt = \frac{dx}{\dot{x}} = \frac{\phi'(p)}{\psi(p)} dp$. Адкуль $t = \int \frac{\phi'(p)}{\psi(p)} dp + C$.

Значыць, інтэгральныя крывыя вызначаюцца ўраўненнямі ў параметрычнай форме

$$t = \int \frac{\phi'(p)}{\psi(p)} dp + C, \quad x = \phi(p).$$

Прыклад 3. Праінтэграваць ураўненне

$$x^{\frac{2}{3}} + (\dot{x})^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Рашэнне. Дапусцім, $x = \cos^3 p$, $\dot{x} = \sin^3 p$, тады

$$dt = \frac{dx}{\dot{x}} = \frac{-3 \cos^2 p \sin p}{\sin^3 p} dp = -3 \frac{\cos^2 p}{\sin^2 p} dp.$$

Знаходзім $t = -3 \int \frac{\cos^2 p}{\sin^2 p} dp = 3p + 3 \operatorname{ctg} p + C$. Тады параметрычныя ўраўненні шуканых інтэгральных крывых

$$t = 3p + 3 \operatorname{ctg} p + C, \quad x = \cos^3 p.$$

Калі ўраўненне (45) лёгка вырашаецца адносна x , то звычайна за параметр бяруць $\dot{x}$. Сапраўды, калі $x = \varphi(\dot{x})$, то дапускаючы $\dot{x} = p$, атрымліваем $x = \varphi(p)$, так што

$$dt = \frac{dx}{\dot{x}} = \frac{\dot{\varphi}(p)}{p} dp, \quad t = \int \frac{\dot{\varphi}(p)}{p} dp + C.$$

Ураўненні інтэгральных крывых у параметрычнай форме маюць выгляд $t = \int \frac{\dot{\varphi}(p)}{p} dp + C, \quad x = \varphi(p)$.

Вылучыўшы параметр p , калі гэта магчыма, атрымаем агульны інтэграл ураўнення (45).

Прыклад 4. Праінтэграваць ураўненне

$$x = \dot{x}^5 + \dot{x}^3 + \dot{x} + 5.$$

Рашэнне. Дапусцім, $\dot{x} = p$, тады

$$x = p^5 + p^3 + p + 5, \quad (46)$$

$$dt = \frac{dx}{\dot{x}} = \frac{(5p^4 + 3p^2 + 1)dp}{p} = \left(5p^3 + 3p + \frac{1}{p} \right) dp,$$

$$t = \frac{5}{4} p^4 + \frac{3}{2} p^2 + \ln|p| + C. \quad (47)$$

Ураўненні (46) і (47) з'яўляюцца параметрычнымі ўраўненнямі сямейства інтэгральных крывых.

III. Няхай ураўненне (42) мае выгляд

$$F(t, \dot{x}) = 0. \quad (48)$$

Калі гэтае ўраўненне цяжка вырашыць адносна $\dot{x}$, то, як і ў папярэднім выпадку, мэтазгодна ўвесці параметр p і замяніць ураўненне (48) двума: $t = \varphi(p)$, $\dot{x} = \psi(p)$, $p_0 < p < p_1$. Тады

$$dx = \dot{x}dt = \psi(p)\dot{\varphi}(p)dp, \quad x = \int \psi(p)\dot{\varphi}(p)dp + C.$$

Значыць, інтэгральныя крывыя ўраўнення (48) вызначаюцца ў параметрычнай форме ўраўненнямі

$$t = \varphi(p), \quad x = \int \psi(p)\dot{\varphi}(p)dp + C.$$

Калі ўраўненне (48) лёгка вырашаецца адносна t , $t = \varphi(\dot{x})$, то ў якасці параметра зручна выбраць $\dot{x} = p$. Тады $t = \varphi(p)$,

$$dx = \dot{x}dt = p\dot{\varphi}(p)dp. \text{ Адкуль } x = \int p\dot{\varphi}(p)dp + C.$$

Прыклад 5. $t\sqrt{1+\dot{x}^2} = \dot{x}$.

Дапускаем $\dot{x} = tg p$, $-\frac{\pi}{2} < p < \frac{\pi}{2}$. Тады

$$t = \sin p, \quad (49)$$

$$dx = \dot{x}dt = tg p \cdot \cos p dp = \sin p dp,$$

$$x = -\cos p + C. \quad (50)$$

Вылучыўшы p з ураўненняў (49) і (50), атрымаем $t^2 + (x - C)^2 = 1$ — сямейства акружнасцяў.

Прыклад 6. Праінтэграваць ураўненне $t - \cos \dot{x} = \dot{x} \sin x$.

Дапусцім, $\dot{x} = p$. Тады $t = p \sin p + \cos p$. Прадыферэнцуем гэтую роўнасць

$$dt = (\sin p + p \cos p - \sin p)dp = p \cos p dp$$

і падставім гэтае значэнне ў судачыненне $dx = p dt$, атрымаем $dx = p^2 \cos p dp$, гэта значыць,

$$x = \int p^2 \cos p dp = (p^2 - 2) \sin p + 2p \cos p + C.$$

Такім чынам, агульнае рашэнне ў параметрычнай форме мае від

$$t = p \sin p + \cos p, \quad x = (p^2 - 2) \sin p + 2p \cos p + C.$$

IV. Ураўненнем Лагранжа называецца дыферэнцыяльнае ўраўненне віду

$$x = t \varphi(\dot{x}) + \psi(\dot{x}), \quad \psi(\dot{x}) \neq \dot{x}, \quad (51)$$

лінейнае адносна t і x . Тут φ і ψ вядомыя функцыі ад $\dot{x}$.

Увёўшы параметр $\frac{dx}{dt} = p$, атрымаем

$$x = t \varphi(p) + \psi(p), \quad (52)$$

судачыненне, якое звязвае зменныя t , x і параметр p .

Каб атрымаць другое судачыненне, неабходнае для вызначэння t і x як функцый параметра p , прадыверэнцуем (52) па t

$$p = \varphi(p) + t\dot{\varphi}(p) + \dot{\psi}(p) \frac{dp}{dt}.$$

Адкуль

$$p - \varphi(p) = \left[t\dot{\varphi}(p) + \dot{\psi}(p) \right] \frac{dp}{dt} \quad (53)$$

або

$$\left[p - \varphi(p) \right] \frac{dt}{dp} = t\dot{\varphi}(p) + \dot{\psi}(p). \quad (54)$$

Ураўненне (54) лінейнае адносна t і $\frac{dt}{dp}$. Атрымаўшы яго агульнае

рашэнне, напрыклад, метадам варыяцыі адвольнай пастаяннай і далучыўшы да яго ўраўненне (52), атрымаем ураўненні, якія вызначаюць шуканыя інтэгральныя крывыя. Пры пераходзе ад ураўнення

(53) да (54) дзялілі на $\frac{dp}{dt}$. Тут маглі страціць рашэнні, для якіх $p -$

пастаянная, а значыць $\frac{dp}{dt} = 0$. Ураўненне (53) задавальняецца пры

пастаянным p толькі ў тым выпадку, калі p з'яўляецца каранем ураўнення $p - \varphi(p) = 0$. Такім чынам, калі ўраўненне $p - \varphi(p) = 0$ мае сапраўдныя карані $p = p_i$, то да знойдзеных рашэнняў ураў-

нення (51) далучаюцца яшчэ рашэнні $x = t\varphi(p_i) + \psi(p_i)$ – гэта прамыя лініі.

Прыклад 7. Праінтэграваць ураўненне $x = t\dot{x}^2 + \dot{x}^2$.

Рашэнне. Гэта ўраўненне Лагранжа. Дапусцім, $\dot{x} = p$, тады $x = tp^2 + p^2$. Прадыферэнцуем апошняю роўнасць $dx = p^2 dt + 2ptdp + 2pdp$. Зрабіўшы замену $dx = pdt$, прыходзім да ўраўнення $pdt = p^2 dt + 2ptdp + 2pdp$. Адсюль, скараціўшы на p , атрымліваем ураўненне з падзяляльнымі зменнымі $(1-p)dt = 2(t+1)dp$ або $\frac{dt}{t+1} = \frac{2dp}{1-p}$. Інтэгруючы яго, знаходзім

$$\ln|t+1| = -2\ln|1-p| + \ln|C|; \quad t+1 = \frac{C}{(1-p)^2}.$$

Выкарыстоўваючы дадзенае ўраўненне $x = p^2(t+1)$, атрымаем $x = \frac{Cp^2}{(1-p)^2}$. Пра-

ведзенае скарачэнне на p магло прывесці да страты рашэння. Дапускаючы $p = 0$, знаходзім з дадзенага ўраўнення $x = 0$, гэта –

асаблівае рашэнне (гл. § 11). У агульным рашэнні $t+1 = \frac{C}{(1-p)^2}$,

$x = Cp^2(1-p)^{-2}$ можна вылучыць параметр p і прывесці яго да віду $(\sqrt{x} + \sqrt{t+1})^2 = C$.

V. Ураўненнем Клеро называецца дыферэнцыяльнае ўраўненне віду $x = t\dot{x} + \psi(\dot{x})$. (55)

Дапускаючы $\dot{x} = p$, атрымаем з (55) $x = tp + \psi(p)$. Дыферэнцую-

чы па t , маем $p = p + t \frac{dp}{dt} + \psi(p) \frac{dp}{dt}$ або $[t + \psi(p)] \frac{dp}{dt} = 0$. Ад-

куль або $\frac{dp}{dt} = 0$ і, значыць, $p = C$, або $t + \psi(p) = 0$. У першым

выпадку, вылучыўшы p , знойдзем сямейства прамых $x = Ct + \psi(C)$ –

агульнае рашэнне ўраўнення Клеро. Яно знаходзіцца без квадратур і ўяўляе сабой аднапараметрычнае сямейства прамых.

У другім выпадку рашэнне вызначаецца з ураўненняў $x = tp + \psi(p)$, $t = -\psi'(p)$. Гэтае рашэнне будзе, вядома, асаблівым, калі функцыя $\psi(p)$ двойчы непарыўна дыферэнцавальная і $\psi''(p)$ не змяняе знака (больш падрабязна гл. [3], глава II, § 3, п. 78, с. 138).

Прыклад 8. Рашыць ураўненне $\dot{x}^2 - t\dot{x} + x = 0$.

Рашэнне. Гэта ўраўненне Клеро (хоць яго можна разглядаць і як квадратнае ўраўненне адносна $\dot{x}$). Агульным рашэннем гэтага ўраўнення будзе $x = Ct - C^2$. Увядзём параметр $\dot{x} = p$.

Атрымаем

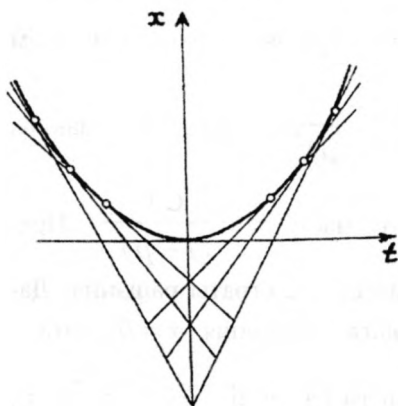
$$p^2 - tp + x = 0.$$

Дыферэнцуючы па t , маем $t - 2p = 0$. Вылучыўшы параметр

$$p, \text{ знаходзім } x = \frac{t^2}{4} - \text{асаблівае}$$

рашэнне зыходнага ўраўнення;

$$x = \frac{t^2}{4} - \text{агінальная прамых}$$



Мал. 8

$$x = Ct - C^2 \text{ (мал. 8).}$$

§ 11. Асаблівыя рашэнні ўраўненняў, не вырашаных адносна вытворнай

Вырашаючы ўраўненне

$$F(t, x, \dot{x}) = 0 \quad (56)$$

адносна $\dot{x}$, як правіла, атрымліваем не адно, а некалькі сапраўдных значэнняў

$$\dot{x} = f_i(t, x), \quad i = \overline{1, m}. \quad (57)$$

Калі кожнае з ураўненняў (57) у наваколлі пункта (t_0, x_0) задавальняе ўмовам тэарэмы існавання і адзінасці (тэарэма 1.1.), то для кожнага з гэтых ураўненняў знойдзецца адзінае рашэнне, якое будзе задавальняць умове $x(t_0) = x_0$. Таму ўласцівасць адзінасці рашэння ўраўнення (56), якое задавальняе ўмове $x(t_0) = x_0$, звычайна разумеецца ў тым сэнсе, што праз дадзены пункт (t_0, x_0) па дадзенаму напрамку праходзіць не больш як адна інтэгральная крывая ўраўнення (56). Напрыклад, для рашэнняў ураўнення $\dot{x}^2 - 1 = 0$ умова адзінасці выканана ўсюды, таму што праз кожны пункт (t_0, x_0) праходзяць дзве інтэгральныя крывыя, але па розных напрамках. Сапраўды,

$$\dot{x} = \pm 1, \quad x = t + C, \quad x = -t + C.$$

Для ўраўнення $\dot{x}^2 - t\dot{x} + x = 0$ (гл. прыклад 10.8) у пунктах крывой $x = \frac{t^2}{4}$ — уласцівасць адзінасці парушаецца, таму што праз кожны яе пункт у тым жа напрамку праходзіць яшчэ адна інтэгральная прамая (мал. 8). Мноства пунктаў (t, x) , у якіх парушаецца адзінасць рашэнняў ураўнення (56), называецца асаблівым мноствам.

Асаблівым рашэннем дыферэнцыяльнага ўраўнення (56) будзем называць такое рашэнне $x = \psi(t)$, якое ва ўсіх сваіх пунктах не задавальняе ўласцівасці адзінасці, гэта значыць, што праз кожны яго пункт, акрамя гэтага рашэння, праходзіць і іншае рашэнне, якое мае ў гэтым пункце тую ж датычную, што і рашэнне $x = \psi(t)$, але не супадае з ім у як патрэбна малым наваколлі гэтага пункта (гл. [2], глава III, § 4, с. 114).

Існуе два спосабы знаходжання асаблівых рашэнняў ураўнення (56).

I. Знаходжанне асаблівага рашэння пры дапамозе дыскрымінантнай крывой:

а) складаем ураўненне

$$\frac{\partial F(t, x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} = 0; \quad (58)$$

б) вылучаем $\dot{x}$ з ураўненняў (56) і (58), атрымліваем ураўненне $\Phi(t, x) = 0$, якое вызначае так званую дыскрымінантную крывую;

в) правяраем, ці з'яўляецца якая-небудзь галіна дыскрымінантнай крывой рашэннем ураўнення (56);

г) калі з'яўляецца рашэннем (56), правяраем, ці будзе гэтае рашэнне асаблівым, гэта значыць, ці датыкаюцца да яго ў кожным пункце іншыя рашэнні. Для гэтага можна выкарыстаць умову дотыку крывых $x = x_1(t)$ і $x = x_2(t)$ у пункце з абсцысай t_0 :

$$\begin{cases} x_1(t_0) = x_2(t_0), \\ \dot{x}_1(t_0) = \dot{x}_2(t_0). \end{cases} \quad (59)$$

Прыклад 1. Знайсці асаблівыя рашэнні ўраўнення

$$\dot{x}^2 + x^2 - 1 = 0.$$

Рашэнне. Вылучыўшы $\dot{x}$ з абодвух ураўненняў, атрымаем $x^2 = 1$ або $x = \pm 1$ (гл. пункты а, б). Лёгка пераканацца, што абедзве гэтыя функцыі задавальняюць зададзенаму ўраўненню, гэта значыць, яны – рашэнні.

Выявім, ці з'яўляюцца яны асаблівымі. Вырашыўшы зыходнае ўраўненне адносна $\dot{x}$, знойдзем агульны інтэграл

$$t = \pm \arcsin x + C \text{ або } x = \sin(t - C).$$

Складзём сістэму (59) для адной прамой, напрыклад, $x = 1$.

Атрымаем

$$\begin{cases} 1 = \sin(t_0 - C), \\ 0 = \cos(t_0 - C). \end{cases}$$

З сістэмы вынікае, што $t_0 - C = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ або $C = t_0 - \frac{\pi}{2} - 2\pi k$. Гэта значыць, пры кожным t_0 рашэнне $x = 1$ у пункце з абсцысай t_0 датыкаецца адной з крывых сямейства $x = \sin(t - C)$, менавіта той

кривой, для якої $C = t_0 - \frac{\pi}{2}$, і таму ў кожным пункце прамой парушаецца адзінасць. Значыць, $x = 1$ ёсць асаблівае рашэнне. Аналагічна можна паказаць, што і $x = -1$ з'яўляецца асаблівым рашэннем дадзенага ўраўнення.

II. Другі метада знаходжання асаблівых рашэнняў патрабуе ведання агульнага інтэграла дыферэнцыяльнага ўраўнення (56) і заключаецца ў наступным:

а) няхай агульны інтэграл ураўнення (56) мае выгляд

$$\Phi(t, x, C) = 0. \quad (60)$$

Дыферэнцуем (60) па параметру C :

$$\frac{\partial \Phi(t, x, C)}{\partial C} = 0; \quad (61)$$

б) з ураўненняў (60) і (61), вылучыўшы C , атрымліваем судачыненне

$$\varphi(t, x) = 0, \quad (62)$$

в) правяраем, ці з'яўляецца атрыманая крывая (62) або яе частка агінальнай, гэта значыць, ці датыкаюцца да яе ў кожным пункце крывыя сямейства (правярку можна правесці метадам, апісаным у пункце г) спосабу I).

Прыклад 2. Разгледзім ураўненне

$$\dot{x}^2[(t-x)^2 - 1] - 2\dot{x} + [(t-x)^2 - 1] = 0.$$

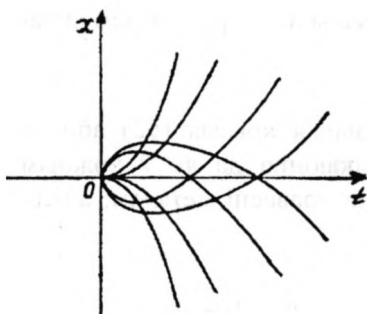
Рашэнне. Вырашыўшы яго адносна $\dot{x}$ як квадратнае, знаходзім агульнае рашэнне $(t-C)^2 + (x-C)^2 = 1$. Дыферэнцуючы апошняю роўнасць па C , атрымваем $t-C+x-C=0$ або $C = \frac{t+x}{2}$.

Падставіўшы ў агульнае рашэнне, знаходзім $(t-x)^2 = 2$.

Пакажам, што атрыманыя дзве прамыя $x = t \mp \sqrt{2}$ з'яўляюцца агінальнымі. Падстаўляючы непасрэдна ў зыходнае ўраўненне, пераконваемся, што гэта рашэнне. Запішам умовы дотыку дзвюх крывых у пункце з абсцысай t_0 , гэта значыць сістэму (59):

$$\begin{cases} t_0 \mp \sqrt{2} = \pm \sqrt{1 - (t_0 - C)^2} + C, \\ I = \pm \frac{1}{2} \frac{(-2)(t_0 - C)}{\sqrt{1 - (t_0 - C)^2}}. \end{cases}$$

Роўнасці будуць выкананы пры $C = t_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}$, гэта значыць, пры кожным t_0 рашэнне $(t - x)^2 = 2$ у пункце з абсцысай t_0 датыкаецца адной з крывых сямейства $(t - C)^2 + (x - C)^2 = 1$, менавіта той крывой, для якой $C = t_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}$.



Мал. 9

Прыклад 3. Знайсці ўсе рашэнні ўраўнення $(2\dot{x}t - x)^2 = 4t^3$.

Рашэнне. Вырашаючы адносна $\dot{x}$, атрымаем лінейнае ўраўненне

$$\dot{x} = \frac{x}{2t} + t^{\frac{1}{2}},$$

агульнае рашэнне якога мае від $x^2 = t(t - C)^2$. Дыферэнцуючы па C , знаходзім $t(t - C) = 0$.

Падстаўляючы значэнне C у агульнае рашэнне, маем $x^2 = 0$.

Пры праверцы лёгка бачыць, што $x = 0$ з'яўляецца рашэннем толькі пры пастаянным $t = C$. Атрымана не асаблівае рашэнне, а ізаляваныя вузлавыя асаблівыя пункты $t = C$, $x = 0$ пры $C \geq 0$ (ураўненне ў паўплоскасці $t < 0$ не вызначана, гл. мал. 9).

Прыклад 4. Знайсці асаблівае рашэнне ўраўнення

$$\dot{x}^2 = 4x^3.$$

Рашэнне. Агульны інтэграл мае выгляд $(t + C)^2 x = 1$. Дыферэнцуючы апошнюю роўнасць па C і падстаўляючы значэнне C у зыходнае ўраўненне, атрымаем, што агінальнай няма. Пры дзялен-

ні зменных страчана рашэнне $x = 0$, якое не з'яўляецца асаблівым.

Прыклад 5. Разгледзім ураўненне $\dot{x}^2 - x^2 = 0$.

Гэтае ўраўненне мае два сямействы інтэгральных крывых $x = Ce^t$, $x = Ce^{-t}$. З сістэмы

$$\begin{cases} x - Ce^{\pm t} = 0, \\ -e^{\pm t} = 0 \end{cases}$$

бачым, што агінальнай няма. Страчанае рашэнне $x = 0$ не з'яўляецца асаблівым.

§ 12. Існаванне і адзінасць рашэння

Асноўнай тэарэмай, якая забяспечвае не толькі існаванне, але і адзінасць рашэння задачы Кашы, з'яўляецца тэарэма Пікара. Больш спрошчаная фармулёўка яе была дадзена ў § 1. Сфармулюем цяпер фундаментальную тэарэму аб існаванні і адзінасці рашэння ўраўнення $\dot{x} = f(t, x)$ з пачатковай умовай $x(t_0) = x_0$ пры агульных дастатковых умовах, што накладваюцца на функцыю $f(t, x)$.

Тэарэма 2. Калі правая частка ўраўнення

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (63)$$

функцыя $f(t, x)$, непарыўная ў замкнутым абсягу D ($|t - t_0| \leq a$, $|x - x_0| \leq b$), а, значыць, абмежаваная $|f(t, x)| \leq M$ і задавальняе ў D умове Ліпшыца $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$, дзе L — пастаянны дадатны лік (канстанта Ліпшыца); а (t, x_1) і (t, x_2) — любыя два пункты з абсягу D , то існуе адзінае рашэнне ўраўнення (63), што задавальняе пачатковай умове $x(t_0) = x_0$, і гэтае рашэнне вызначана і непарыўна дыферэнцавальнае ў інтэрвале $|t - t_0| \leq \delta$, дзе

$\delta = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ і не выходзіць пры гэтых значэннях t з абсягу D .

Заўвага 1. Доказ гэтай тэарэмы, як і ўсіх наступных тэарэм, змяшчаецца ў дадатку гэтага вучэбнага дапаможніка. Тэарэма мае лакальны характар, таму што яна гарантуе існаванне адзінага рашэння $x(t)$ ураўнення (63) толькі ў дастаткова малым наваколлі пункта t_0 . З дадзенай тэарэмы вынікае, што ўраўненне (63) мае бясконцае мноства рашэнняў, кожнае з якіх праходзіць праз розныя пункты (t_0, x_0) , (t_1, x_1) і г.д.

Прыклад 1. Разгледзім ураўненне $\dot{x} = 2t + x$.

Рашэнне. Функцыя $f(t, x) = 2t + x$ вызначаная і непарыўная ва ўсіх пунктах плоскасці Otx .

Можна паказаць з дапамогай формулы канечных прыростаў (гл. [3], п. 119, с. 228), што ўмова Ліпшыца будзе, у прыватнасці, выконвацца, калі функцыя $f(t, x)$ мае абмежаваную ў абсягу D

вытворную $\frac{\partial f}{\partial x}$. Разглядаемая функцыя $f(t, x) = 2t + x$ мае ўсюды

$\frac{\partial f}{\partial x} = 1$. Згодна з тэарэмай 2, праз кожны пункт (t_0, x_0) будзе праходзіць адзіная інтэгральная крывая гэтага ўраўнення.

Умова Ліпшыца не абавязкова дапускае існаванне адпаведных частковых вытворных, таму яна з'яўляецца больш агульнай.

Прыклад 2. Разгледзім ураўненне $\frac{dx}{dt} = |x|$.

Рашэнне. Частковая вытворная $\frac{\partial f}{\partial x}$ у пунктах восі Ot ($x=0$) не існуе. Аднак, карыстаючыся ўласцівасцю абсалютнай велічыні рознасці, маем

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| = ||x_1| - |x_2|| \leq |x_1 - x_2|.$$

Значыць, умова Ліпшыца выканана пры ўсіх x_1 і x_2 з R , прычым

$L = 1$. Ураўненне мае адзінае рашэнне, якое праходзіць праз любы пункт (t_0, x_0) , і гэтае рашэнне вызначанае і непарыўнае пры ўсіх значэннях t .

Другая ўмова тэарэмы 2 - умова Ліпшыца або больш грубая ўмова, якая патрабуе існавання абмежаванай вытворнай $\frac{\partial f}{\partial x}$, часцей за ўсё парушаецца ў пунктах, пры прыбліжэнні да якіх $\frac{\partial f}{\partial x}$ неабмежавана ўзрастае, гэта значыць у пунктах, дзе $\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x}} = 0$.

Прыклад 3. Разгледзім ураўненне $\dot{x} - (x - t)^{\frac{2}{3}} = 1$.

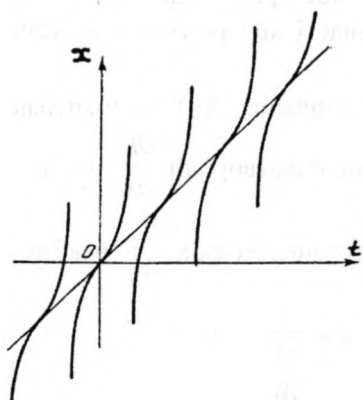
Ураўненне $\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x}} = 0$ мае выгляд $x = t$, прычым функцыя $x = t$ задавальняе дадзенаму ўраўненню. Увёўшы замену $y = x - t$ і падзяліўшы зменныя, атрымаем агульны інтэграл $x - t = \frac{(x - C)^3}{27}$.

Можна паказаць (гл., напрыклад, (11.59)), што $x = t$ з'яўляецца агульнай гэтага сямейства, а значыць, асаблівым рашэннем (мал. 10). Прывядзём прыклад парушэння адзінасці рашэння задачы Кашы.

Прыклад 4. Разгледзім дыферэнцыяльнае ўраўненне

$$\dot{x} = 2\sqrt{|x|}.$$

Яго правая частка $f(t, x) = f(x) = 2\sqrt{|x|}$ вызначаная і непарыўная пры ўсіх t і x . Аднак умова Ліпшыца парушаецца ў прамавугольніках, што змяшчаюць пункты восі Ot . Сапраўды, калі б умова Ліпшыца выконвалася, мы атрымалі б пры $x_1 \neq x_2$ няроўнасць



Мал. 10

$$\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|} = \frac{2(\sqrt{|x_1|} - \sqrt{|x_2|})}{|x_1 - x_2|} \leq K$$

тады як пры $x_2 = 0$ і $x_1 \rightarrow 0$

$$\frac{|f(x_1) - f(0)|}{|x_1|} = \frac{2}{\sqrt{|x_1|}} \rightarrow +\infty.$$

Непасрэднай падстаноўкай у дадзенае ўраўненне правяраем, што наступныя два рашэнні задавальняюць пачатковай умове $x(t_0) = 0$:

$$x^1(t) = \begin{cases} (t - t_0)^2, & t \geq t_0, \\ -(t - t_0)^2, & t < t_0, \end{cases} \quad \text{і} \quad x^2(t) \equiv 0.$$

Такім чынам, адной непарыўнасці правых частак разглядаемага ўраўнення недастаткова для таго, каб задача Кашы мела адзінае рашэнне.

Заўвага 2. Калі правая частка $f(t, x)$ ураўнення (63) непарыўная ў абсягу R , але ўмове Ліпшыца не задавальняе, то кожная задача Кашы пры $(t_0, x_0) \in R^2$ мае рашэнне (тэарэма Пеано). Доказ прыведзены, напрыклад, у [27], глава I, § 2, с. 16 – 20). Аднак прыведзены прыклад 4 паказвае, што ў гэтым выпадку рашэнне, наогул кажучы, не адзінае. Ёсць нават прыклады дыферэнцыяльных ураўненняў, для якіх праз кожны пункт $(t_0, x_0) \in R^2$ праходзіць бясконцае мноства рашэнняў (гл. [44]).

Доказ тэарэмы 2 дае і метад набліжанага знаходжання рашэння, што яшчэ больш павялічвае значэнне гэтай тэарэмы. Разгледзім метад паслядоўных набліжэнняў.

Няхай патрабуецца знайсці рашэнне ўраўнення

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (64)$$

што задавальняе пачатковай умове

$$x(t_0) = x_0. \quad (65)$$

Дапусцім, што ў абсягу D ($|t - t_0| \leq a$, $|x - x_0| \leq b$) для ўраўнення (64) выкананы ўмовы тэарэмы 2. Метад паслядоўных набліжэнняў заключаецца ў наступным. Будзем паслядоўнасць $x_n(t)$ функцый, вызначаных рэкурэнтным судачыненнем

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f[\tau, x_{n-1}(\tau)] d\tau, \quad n = 1, 2, \dots$$

У якасці нулявога набліжэння $x_0(t)$ можна ўзяць любую функцыю, непарыўна дыферэнцавальную ў наваколлі пункта $t = t_0$, у прыватнасці, $x_0(t) \equiv x_0$ — пачатковае значэнне з (65). Пры дапушчальных умовах адносна ўраўнення (64) паслядоўныя набліжэнні $\{x_n(t)\}$ збягаюцца да дакладнага рашэння ўраўнення (64), якое задавальняе ўмове (65) у некаторым інтэрвале $|t - t_0| \leq \delta$, дзе $\delta =$

$$= \min(a, \frac{b}{M}), \quad M = \max_{(t,x) \in D} |f(t,x)|.$$

Ацэнка хібнасці, якая атрымліваецца пры замене дакладнага рашэння $x(t)$ n -набліжэннем $x_n(t)$, даецца няроўнасцю (калі існуе непарыўная $\frac{\partial f}{\partial x}$).

$$|x(t) - x_n(t)| \leq \frac{Mk^n}{(n+1)!} \cdot \delta^{n+1}, \quad \text{пры } |t - t_0| \leq \delta, \quad k = \max_{(t,x) \in D} \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|$$

(больш падрабязна гл. [5], глава V, § 1, с. 157).

Прымяняючы метад паслядоўных набліжэнняў, неабходна спыніцца на такім n , для якога $|x - x_n|$ не перавышае дапусцімай хібнасці.

Прыклад 5. Знайсці набліжанае рашэнне ўраўнення $\dot{x} = t^2 + x^2$, якое задавальняе пачатковай умове $x(0) = 0$ у прама-

вугольніку $-1 \leq t \leq 1, -1 \leq x \leq 1$.

Рашэнне. Будзем знаходзіць набліжанае рашэнне ўраўнення $\dot{x} = t^2 + x^2$, якое задавальняе пачатковай умове $x(0) = 0$ метадам паслядоўных набліжэнняў. Маём $|f(t, x)| \leq 2$, гэта значыць $M=2$. За δ бярем меншы з лікаў $a=1, \frac{b}{M} = \frac{1}{2}$, гэта значыць $\delta = \frac{1}{2}$. Складаем паслядоўныя набліжэнні, якія, згодна з выкладзенай вышэй тэорыяй, будуць збягацца ў інтэрвале $-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$.

$$x_0(t) = 0,$$

$$x_1(t) = \int_0^t (\tau^2 + x_0^2) d\tau = \frac{t^3}{3},$$

$$x_2(t) = \int_0^t [\tau^2 + x_1^2(\tau)] d\tau = \int_0^t \left(\tau^2 + \frac{\tau^6}{9} \right) d\tau = \frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{63},$$

$$x_3(t) = \int_0^t [\tau^2 + x_2^2(\tau)] d\tau = \int_0^t \left(\tau^2 + \frac{\tau^6}{9} + \frac{2\tau^{10}}{3 \cdot 63} + \frac{\tau^{14}}{63^2} \right) d\tau = \frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{63} + \frac{2t^{11}}{2079} + \frac{t^{15}}{59535}.$$

Абсалютная хібнасць трэцяга набліжэння не перавышае велічыні

$$|x_3(t) - x(t)| \leq \frac{2}{4!} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^4 \cdot 2^3 = \frac{1}{24}, \text{ тут } k = \max_D \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| = \max_D |2x| = 2.$$

§ 13. Гладкасць і непарыўнасць рашэнняў

Сфармулюем тэарэму аб гладкасці рашэнняў ураўнення першага парадку (гладкасць – уласцівасць функцыі, якая заключаецца ў

тым, што гэтая функцыя адпаведны лік разоў дыферэнцавальная (гл. [7], с. 159)).

Тэарэма 3. Калі ў наваколлі пункта (t_0, x_0) функцыя $f(t, x)$ мае непарыўныя вытворныя па t, x да $k \geq 1$ парадку ўключна, то рашэнне ўраўнення

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (66)$$

якое задавальняе пачатковай умове $x(t_0) = x_0$, у некаторым наваколлі пункта (t_0, x_0) мае непарыўныя вытворныя да $(k + 1)$ -га парадку ўключна.

Гэта азначае, што чым больш гладкая правая частка ўраўнення (66), тым больш гладкае яго рашэнне.

У правыя часткі дыферэнцыяльных ураўненняў могуць уваходзіць якія-небудзь параметры, якія характарызуюць фізічную прыроду вывучаемай сістэмы (масы, зарады, пругкія характарыстыкі і г.д.), і значэнні гэтых параметраў вызначаюцца прыблізна. Так што самі дыферэнцыяльныя ўраўненні задаюцца толькі з некаторай ступенню дакладнасці. Таму, каб ураўненні маглі апісваць рэальныя працэсы, звычайна неабходна, каб іх рашэнні непарыўна залежалі ад параметраў, гэта значыць, каб яны мала змяняліся пры малых змяненнях параметраў.

Тэарэма 4. Няхай у задачы

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \mu), \quad x(t_0, \mu) = x_0, \quad (67)$$

дзе μ — параметр, функцыя $f(t, x, \mu)$ вызначаная і непарыўная ў некаторым абсягу D прасторы зменных (t, x, μ) і задавальняе ўмове Ліпшыца па x : $|f(t, x_1, \mu) - f(t, x_2, \mu)| \leq L|x_1 - x_2|$, дзе L — пастаянная Ліпшыца, якая не залежыць ад μ . Тады рашэнне $x(t, \mu)$ задачы (67), вызначанае на інтэрвале $|t - t_0| \leq \delta$, будзе непарыўным па μ з некаторага інтэрвалу $|\mu - \mu_0| \leq \bar{\delta}$.

Заўважым, што калі рашэнне $x(t, \mu_0)$ існуе на $|t - t_0| \leq \delta$, то рашэнне $x(t, \mu)$ таксама будзе існаваць пры $|t - t_0| \leq \delta$.

Геаметрычны сэнс тэарэмы заключаецца ў тым, што інтэгральныя крывыя, адпаведныя блізкім значэнням параметра μ , блізкія.

У рэальных задачах, якія звязаны з рашэннем дыферэнцыяльных ураўненняў, пачатковыя дадзеныя звычайна вядомы толькі з некаторым прыбліжэннем, таму што яны вызначаюцца эксперыментальна або вылічваюцца, а гэта непазбежна звязана з паяўленнем хібнасцяў. У сувязі з гэтым узнікае пытанне аб тым, як змяняецца рашэнне пачатковай задачы пры невялікіх змяненнях пачатковых дадзеных і ці залежыць яно ад гэтых велічынь непарыўна. Пытанне аб залежнасці рашэння ад пачатковых значэнняў можна прывесці да пытання аб залежнасці рашэння ад параметраў пры да-

памозе замены зменных. Сапраўды, ураўненне $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ з пачатковай умовай $x(t_0) = x_0$ з дапамогай замены $z(t) = x(t) - x_0$, $y = t - t_0$ прывядзём да ўраўнення

$\frac{dz}{dy} = f(y + t_0, z + x_0)$, з пачатковай умовай $z(0) = 0$. У апошняй задачы можна прымяніць прыведзеную тэарэму 4 аб непарыўнай залежнасці рашэння ад параметраў t_0 і x_0 , калі функцыя f непарыўная і задавальняе ўмове Ліпшыца па x . (Тэарэма 4 мае месца і калі ў (67) правая частка залежыць ад некалькіх параметраў, гл. [26], глава IV, § 23, с. 178.)

Мае месца таксама тэарэма аб дыферэнцавальнасці рашэнняў па параметру

Тэарэма 5. Разгледзім задачу (67). Няхай у некаторым абсягу D прасторы зменных (t, x, μ) функцыя f мае непарыўныя вытворныя да парадку $k \geq 1$ уключна па зменных t, x, μ . Тады ра-

шэнне задачы Кашы (67) $x(t, \mu)$ мае k непарыўных вытворных адносна зменных t, μ .

3 тэарэмы 5 вынікае тэарэма аб дыферэнцавальнасці рашэнняў па пачатковых дадзеных

Тэарэма 6. Калі функцыя $f(t, x)$ мае непарыўныя вытворныя да парадку $k \geq 1$ уключна, то рашэнне $x(t, t_0, x_0)$ задачы Кашы

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

мае непарыўныя вытворныя да парадку $k \geq 1$ уключна па сукупнасці зменных t, t_0, x_0 .

Сапраўды, пачатковыя дадзеныя можна разглядаць як параметры і заменай, указанай вышэй, перайсці да ўраўнення, правая частка якога залежыць ад пачатковых дадзеных, як ад параметраў, а пачатковыя дадзеныя не залежаць ад параметраў.

Варыянты заданняў для самастойнай працы

- I. 1. Рашыць задачу Кашы $2\dot{x}\sqrt{t} + x = 0, \quad x(4) = 1$.
2. Знайсці артаганальныя траекторыі сямейства гіпербал $xy = C$.
3. Рашыць дыферэнцыяльнае ўраўненне
$$x \cos t \, dt + \sin t \, dx = \cos 2t \, dt.$$
4. Знайсці інтэгруючы множнік і рашыць ураўненне
$$x^2 dt + (xt - 1)dx = 0.$$
5. Знайсці агульны і асаблівыя інтэгралы ўраўнення $x = t\dot{x}^2 + \dot{x}^2$.

II. 1. Знайсці інтэгральную крывую ўраўнення $\dot{x} = \sin(tx)$, якая праходзіць праз пункт $O(0,0)$.

1. Знайсці асаблівыя рашэнні ўраўнення $\dot{x} = \sqrt{1 - x^2}$. Зрабіць малюнак.

1. Визначыць кривую, якая праходзіць праз пункт $A(a, a)$, калі адлегласць ад пачатку каардынат да датычнай у любым пункце крывой роўна абсцысе гэтага пункта.
2. Праінтэграваць ураўненне $tx\dot{x} = 2x^2 - 3t^2$.
3. Праінтэграваць ураўненне $x + \sqrt{t^2 + x^2} - t\dot{x} = 0$.

III. 1. Знайсці рашэнне задачы Кашы $\frac{dx}{dt} = \operatorname{sgn} x$, $x(t_0) = x_0$.

2. Праінтэграваць дыферэнцыяльнае ўраўненне $\dot{x} = \frac{t+x-2}{x-t-4}$.
3. Знайсці кривую, датычныя да якой утвараюць з восьямі каардынат трохвугольнік пастаяннай плошчы, роўнай $2a^2$.
4. Знайсці агульнае рашэнне лінейнага ўраўнення $\dot{x} - \frac{1}{2}x = e^{\frac{t}{2}} - 1$.
5. Праінтэграваць дыферэнцыяльнае ўраўненне $2x = t\dot{x} + \dot{x} \ln x$.

IV. 1. Метадам паслядоўных набліжэнняў рашыць задачу Кашы $\dot{x} = 2tx$, $x(0) = 1$.

2. Сіла току i у ланцугу з супраціўленнем R , самаіндукцыяй L электрарухальнай сілай E задавальняе дыферэнцыяльнаму ўраўненню $L \frac{di}{dt} + Ri = E$. Рашыць гэтае ўраўненне, лічачы R , L пастаяннымі, а электрарухальную сілу E лінейна нарастальнай, $E = kt$. Пачатковыя ўмовы: $i = 0$ пры $t = 0$.
3. Знайсці агульны і асаблівыя інтэгралы ўраўнення $2x = \frac{t\dot{x}^2}{\dot{x} + 2}$.

Праінтэграваць дыферэнцыяльныя ўраўненні:

4. $\dot{x} = e^{t-x}$.
5. $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t+x^3}$.

V. 1. Ці мае дыферэнцыяльнае ўраўненне $x = 5t\dot{x} - (\dot{x})^2$ асаблівае рашэнне?

Праінтэграваць дыферэнцыяльныя ўраўненні:

2. $\dot{x} = \frac{t+x-3}{1-t+x}$.

3. $tx - x^2 \ln t + \dot{x} = 0$.

4. Цыліндрычны рэзервуар даўжынёй 6 м і дыяметрам 4 м размешчаны гарызантальна і напоўнены вадой. Праз які час уся вада вы-

цеча з рэзервуара, калі адтуліна радыуса $\frac{1}{12}$ м знаходзіцца на ўзроўні самай ніжняй з утваральных цыліндра?

5. Знайскі тры першыя паслядоўныя набліжэнні задачы Кашы

$\dot{x} = 2x - 2t^2 - 3, \quad x(0) = 2$.

VI. 1. Ці мае асаблівая рашэнні ўраўненне $\dot{x} = \sqrt[3]{t-5x} + 2$?

2. Знайскі час, на працягу якога ўся вада выцеча з канічнай варонкі, калі вядома, што палавіна вады выцякае за 2 мін.

Праінтэграваць ураўненні:

3. $(x^2 - t^2)\dot{x} = x - t^2$.

4. $x = t\dot{x} + \frac{1}{x}$.

5. Знайскі рашэнне ўраўнення $\dot{x}t^3 - \sin t = 1$, якое задавальняе ўмовы $x \rightarrow 5\pi, \quad t \rightarrow \infty$.

VII. 1. Знайскі час t , за які вада, што запаўняе канічную варонку вышынёй H см, з вуглом 2α пры вяршыні, выцякае з яе праз малую адтуліну плошчай S см², выразаную ў вяршыні конуса, калі вядома, што скорасць v вызначаецца формулай $v = k\sqrt{2gh}$, дзе

$k = 0,6$, $g = 9,8 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$, h см – вышыня слупа вады над адтулінай.

2. Рашыць задачу Кашы $t\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+t^2} \frac{dx}{dt} = 0, x(0) = 1.$

Праінтэграваць ураўненні:

3. $\frac{dx}{dt} = 2\left(\frac{x+2}{t+x-1}\right)^2.$

4. $t\dot{x} + x = tx^2 \ln t.$

5. Знайсці агульнае і асаблівае рашэнні ўраўнення
 $t\dot{x}^2 - 2x\dot{x} + 4t = 0.$

VIII. 1. Знайсці дыферэнцыяльнае ўраўненне ўсіх прамых на плоскасці і праінтэграваць яго.

2. Знайсці метадам паслядоўных набліжэнняў набліжаныя рашэнні ўраўнення $\dot{x} = x^2 - t^2$ (знайсці тры набліжэнні, не лічачы x_0), калі $x(0) = 0.$

Праінтэграваць ураўненні:

3. $\dot{x} + 3x \operatorname{tg} 3t = \sin 6t.$

4. $x = t\dot{x} + \sqrt{b^2 + a^2 \dot{x}^2}.$

5. Рашыць задачу Кашы

$$\sec^2 t \cdot \operatorname{tg} x \, dt + \sec^2 x \cdot \operatorname{tg} t \, dx = 0, \quad x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

IX. 1. Кандэнсатар, ёмістасць якога роўна Q , уключаецца ў ланцуг з напружаннем U і супраціўленнем R . Вызначыць зарад з кандэнсатара ў момант t пасля ўключэння.

2. Знайсці агульнае і асаблівае рашэнні дыферэнцыяльнага ўраўнення $\dot{x}^2 - x\dot{x} + e^t = 0.$

Праінтэграваць ураўненні:

3. $(t^2 + 2xt)dt + tx dx = 0.$

$$4. (2txe^{t^2} + \ln x)dt + \left(e^{t^2} + \frac{t}{x}\right)dx = 0.$$

5. Устано́віць від частковага рашэння ўраўнення

$$\dot{x} - 10x = e^t - te^t + t.$$

Х. 1. Пункт масы m рухаецца прамалінейна. На яго дзейнічае сіла, прапарцыянальная часу (каэфіцыент прапарцыянальнасці k_1).

Акрамя таго, пункт адчувае супраціўленне асяроддзя, прапарцыянальнае скорасці (каэфіцыент прапарцыянальнасці k_2). Знайсці залежнасць скорасці ад часу, лічачы, што ў пачатковы момант скорасць роўна нулю.

2. Знайсці рашэнне ўраўнення $\dot{x} - \dot{x} \ln 2 = 2^{\sin t} (\cos t - 1) \ln 2$ пры ўмове, што x абмежаваная пры $t \rightarrow +\infty$.

Праінтэграваць ураўненні:

$$3. (\arcsin t + 2tx)dt + (t^2 + 1 + \arctg x)dx = 0.$$

$$4. x = \dot{x} \ln \dot{x}.$$

5. Праінтэграваць ураўненне, якое мае інтэгруючы множнік, што залежыць толькі ад t : $(t^2 \cos t - x)dt + tdx = 0$.

XI. 1. Закон распаду радыю заключаецца ў тым, што скорасць распаду прапарцыянальная наяўнай колькасці R радыю. Знайсці залежнасць R ад t , скласці дыферэнцыяльнае ўраўненне і вызначыць каэфіцыент прапарцыянальнасці з доследных дадзеных, якія сцвярджаюць, што праз 1600 гадоў застаецца палавіна пачатковай колькасці радыю.

Рашыць дыферэнцыяльныя ўраўненні:

$$2. t = \frac{x}{\dot{x}} + \frac{1}{\dot{x}^2}.$$

$$3. (2t + e^{\frac{t}{x}})dt + \left(1 - \frac{t}{x}\right)e^{\frac{t}{x}}dx = 0.$$

$$4. (1+t^2)\dot{x} = 2tx + (1+t^2)^2.$$

5. Знайсці агульнае рашэнне ўраўнення $\dot{x} = x^2 - tx - t$, якое мае частковае рашэнне віду $x=at+b$.

ХІІ. 1. Складзі дыферэнцыяльнае ўраўненне сямейства крывых, у якіх плошча, заключаная паміж восямі каардынат, гэтай крывой і зменнай ардынатай, прапарцыянальная чацвёртай ступені гэтай ардынаты.

Праінтэграваць ураўненні:

$$2. \dot{x} = \sin(x-t).$$

$$3. \sqrt{t^2 - x^2} = \frac{2t^2}{x - 3t + t\dot{x}}.$$

$$4. \text{Рашыць задачу Кашы } (x^4 e^x + 2t)\dot{x} = x, \quad x(0) = 1.$$

5. Знайсці па агульнаму рашэнню крывыя, падазроныя на асаблівыя рашэнні, і праверыць, ці будуць яны асаблівымі рашэннямі:

$$\dot{x} = 4t\sqrt{x-1}, \quad x = (t^2 + c)^2 + 1.$$

ХІІІ. 1. За які час вада, што запаўняе сферычную чашу дыяметрам 2 м, выцеча з яе праз круглую адтуліну дыяметрам 0,2 м, выразаную ў дне чашы, калі скорасць выцякання вады $v = 0,6\sqrt{2gh}$ (см/сек), h – вышыня слупа вады над адтулінай?

Праінтэграваць ураўненні:

$$2. (x^4 - 3t^2)dx + txdt = 0.$$

$$3. \dot{x} - \sin t \cos t = x \sin t.$$

4. Знайсці агульнае рашэнне ўраўнення пры дапамозе інтэгруючага множніка $\dot{x} + 2tx - 2te^{-t^2} = 0$.

$$5. \text{Рашыць задачу Кашы } \dot{x}^3 - t\dot{x}^2 - 4x\dot{x} + 4tx = 0, \quad x(0) = 1.$$

ХІV. 1. Знайсці ўраўненне крывой, якая праходзіць праз пункт

$\left(1, \frac{1}{2}\right)$, калі для любога адрэзка $[1; t]$ плошча крывалінейнай

трапецыі, абмежаванай адпаведнай дугой гэтай крывой, роўна адносінам абсцысы t канцавога пункта да ардынаты.

2. Знайсці па віду ўраўнення крывыя, падазроныя на асаблівыя рашэнні, і праверыць, ці будуць яны асаблівымі рашэннямі ўраўнення $\dot{x}^2 - 4x = 0$.

Знайсці агульны інтэграл дыферэнцыяльных ураўненняў:

3. $3t^2 e^x dt + (t^3 e^x - 1) dx = 0$.

4. $t\dot{x} + x = x^2 \ln t$.

5. Вызначыць від частковага рашэння ўраўнення

$\dot{x} + x = e^{-t} + t^2 - 1$.

XV. 1. Некаторае рэчыва ператвараецца ў іншае рэчыва са скорасцю, прапарцыянальнай масе непратворанага рэчыва. Калі маса першага ёсць $31,4$ г праз адну гадзіну і $9,7$ г праз тры гадзіны, то вызначыць: а) масу рэчыва ў пачатку працэсу; б) праз колькі часу пасля пачатку працэсу застанецца толькі 1% першапачатковай масы зыходнага рэчыва?

2. Даказаць па віду ўраўнення, што яно не мае асаблівых рашэнняў $\dot{x} = t\sqrt{1+x^2}$.

Знайсці агульны інтэграл дыферэнцыяльных ураўненняў:

3. $\frac{(t-x)dt + (t+x)dx}{t^2 + x^2} = 0$.

4. $2x(\dot{x} + 1) = t\dot{x}^2$.

5. Знайсці тры першыя паслядоўныя набліжэнні задачы Кашы

$\dot{x} = 2x - 2t^2 - 3, x(0) = 2$.

ГЛАВА II

ЛІНЕЙНЫЯ ДЫФЕРЭНЦЫЯЛЬНЫЯ ЎРАЎНЕННІ

§ 1. Агульныя ўласцівасці лінейных ураўненняў

Лінейным дыферэнцыяльным ураўненнем n -га парадку называецца ўраўненне віду

$$a_0(t)x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + a_2(t)x^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(t)\dot{x} + a_n(t)x = f(t), \quad (1)$$

дзе $a_0(t), a_1(t), \dots, a_n(t), f(t)$ — зададзеныя на некаторым інтэрвале $(a; b)$ сапраўдныя функцыі.

Калі правая частка $f(t) \equiv 0$, то ўраўненне будзем называць аднародным.

Няхай зададзена лінейнае аднароднае ўраўненне

$$a_0(t)x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = 0.$$

Калі $a_0(t) \neq 0$ на інтэрвале $(a; b)$, то, падзяліўшы ўсе члены дадзенага ўраўнення на каэфіцыент $a_0(t)$, атрымаем

$$x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = 0. \quad (2)$$

Задача Кашы для ўраўнення (1) фармулюецца так: знайсці рашэнне $x = x(t)$ ураўнення (1), якое задавальняе пачатковым умовам

$$x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}, \quad (3)$$

дзе $x_0, \dot{x}_0, \dots, x_0^{(n-1)}$ — зададзеныя лікі, $t_0 \in (a; b)$. Тэарэма існавання і адзінасці рашэння ўраўнення (1) пры ўмовах (3) фармулюецца так:

Тэарэма 1. Няхай на інтэрвале $I = (a; b)$ каэфіцыенты $a_i(t)$ $i = \overline{0, n}$ і правая частка $f(t)$ ураўнення (1) непарыўныя, прычым $a_0(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$. Тады:

- 1) рашэнне задачы Кашы (1), (3) існуе на ўсім інтэрвале $(a; b)$;
- 2) калі два рашэнні $x_1(t)$ і $x_2(t)$ ураўнення (1) задавальняюць адным і тым жа пачатковым умовам (3), то $x_1(t) = x_2(t) \quad \forall t \in (a; b)$.

Практыкаванне 1. Даказаць тэарэму 1, карыстаючыся доказам агульнай тэарэмы існавання і адзінасці рашэнняў (гл. канец § 4.3).

Заўвага 1. Рашэнне ўраўнення (2) з пачатковымі ўмовамі $x(t_0)=0$, $\dot{x}(t_0)=0$, ..., $x^{(n-1)}(t_0)=0$ адзінае і $x(t)=0$ для $\forall t \in (a; b)$. Гэтае сцвярдженне вынікае з тэарэмы 1.

Калі $\exists t_0 \in I$ такое, што $a_0(t_0)=0$, то тэарэма 1 не мае месца. Напрыклад, задача Кашы

$$t^2 \ddot{x}(t) + t\dot{x}(t) - 4x(t) = 0, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0, \quad t \in I = (-1; 1)$$

мае два рашэнні $x(t) = t^2, t \in I$ і $x(t) \equiv 0, t \in I$.

Для скарачэння запісу ўвядзём у разгляд наступны лінейны дыферэнцыяльны аператар

$$L(x) = x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + p_2(t)x^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(t)\dot{x} + p_n(t)x.$$

Відавочны тры ўласцівасці аператара $L(x)$:

$$1^0. L(Cx) = C L(x),$$

$$2^0. L(x_1 + x_2) = L(x_1) + L(x_2),$$

$$3^0. L(C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_mx_m) = C_1L(x_1) + \dots + C_mL(x_m).$$

Тут $C, C_1, \dots, C_m$ – адвольныя пастаянныя.

З дапамогай уведзенага аператара неаднародныя ўраўненні будзем запісваць у выглядзе

$$L(x) = f(t),$$

а аднародныя – у выглядзе

$$L(x) = 0.$$

Непасрэднай праверкай можна ўпэўніцца, што маюць месца наступныя ўласцівасці:

а) лінейнае ўраўненне застаецца лінейным пры любой замене незалежнай зменнай $t = \varphi(\tau)$, дзе $\varphi(\tau)$ – любая функцыя ад τ , вызначаная і непарыўная разам са сваімі вытворнымі да парадку n уключна ў інтэрвале $(\tau_0; \tau_1)$, прычым $a = \varphi(\tau_0), b = \varphi(\tau_1), \varphi'(\tau) \neq 0 \forall \tau \in (\tau_0; \tau_1)$;

б) лінейнае ўраўненне застаецца лінейным пры любой лінейнай за-

мене шуканай функцыі: $x = \alpha(t)y + \beta(t)$, дзе y – новая невядомая функцыя, $\alpha(t)$ і $\beta(t)$ – адвольныя n раз непарыўна дыферэнцавальныя функцыі ад t , прычым $\alpha(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$.

Заўвага 2. Відавочна, што, выконваючы падстаноўку $x = \alpha(t)y$ у аднародным лінейным ураўненні, атрымаем таксама лінейнае аднароднае ўраўненне.

Заўвага 3. Падстаноўкай $x = \alpha(t)y$ ва ўраўненнях (1) і (2) можна знішчыць член, што змяшчае вытворную $(n-1)$ -га парадку.

§ 2. Лінейныя аднародныя ўраўненні

Будзем разглядаць ураўненне

$$L(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(t)\dot{x} + p_n(t)x = 0. \quad (4)$$

З уласцівасцяў 1.1⁰ – 1.3⁰ лінейнага аператара непасрэдна вынікае, што калі $x_1(t)$ і $x_2(t)$ з'яўляюцца рашэннямі ўраўнення (4), то маюць месца сцвярджэнні:

1⁰. Сума $x_1(t) + x_2(t)$ ёсць рашэнне гэтага ўраўнення.

2⁰. Для любой пастаяннай C і любога рашэння $x(t)$ ураўнення (4) здабытак $Cx(t)$ таксама рашэнне (4).

3⁰. Калі маем частковыя рашэнні $x_1, x_2, \dots, x_n$ ураўнення (4), то выраз $C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n$ – таксама рашэнне гэтага ўраўнення ($C_1, \dots, C_n$ – адвольныя пастаянныя).

4⁰. Калі $x_1(t)$ і $x_2(t)$ – рашэнні неаднароднага ўраўнення $L(x) = f(t)$, то іх рознасць $x_1(t) - x_2(t)$ – ёсць рашэнне аднароднага ўраўнення $L(x) = 0$.

5⁰. Калі комплексназначная функцыя $x = u(t) + iv(t)$, дзе $u(t), v(t)$ – сапраўдныя функцыі ад сапраўднай зменнай t , а $i = \sqrt{-1}$ (гл. [15], глава III, § 8, п. 23.3, с. 518), з'яўляецца рашэннем аднароднага ўраўнення $L(x) = 0$, то сапраўдная частка гэтага

рашэння $u(t)$ і яго ўяўная частка $v(t)$ паасобку – рашэнні ўраўнення $L(x) = 0$.

Практыкаванне 1. Даказаць уласцівасці $1^0 - 5^0$.

З уласцівасцяў $1^0, 2^0$ вынікае, што мноства рашэнняў ураўнення (4) утварае лінейную прастору. І для знаходжання любога рашэння ў гэтай прасторы неабходна вызначыць яе базіс, калі ён існуе, гэта значыць знайсці лінейна незалежныя рашэнні, праз якія лінейным чынам выразіцца любое рашэнне ўраўнення (4).

Напомнім, што функцыі $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ называюць лінейна залежнымі ў прамежку $(a; b)$, калі існуюць пастаянныя лікі $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, не ўсе з якіх роўныя нулю, такія, што

$$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \dots + \alpha_n x_n(t) \equiv 0, \quad t \in (a; b). \quad (5)$$

Калі ж роўнасць (5) мае месца толькі пры $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, то функцыі $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ называюцца лінейна незалежнымі на $(a; b)$.

Дастатковай умовай лінейнай незалежнасці n функцый, непарыўных разам са сваімі вытворнымі да $(n-1)$ -га парадку ў прамежку $(a; b)$, з'яўляецца тое, што дэтэрмінант Вронскага (вранскіян) $W[x_1, x_2, \dots, x_n]$ гэтых функцый не роўны нулю хоць у адным пункце прамежку $(a; b)$, гэта значыць

$$W[x_1, x_2, \dots, x_n] = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) & \dots & \dot{x}_n(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} \neq 0, \\ t \in (a; b)$$

(гл. [2], глава V, § 2, с. 178).

Практыкаванне 2. Даказаць сфармуляванае вышэй сцвярджэнне.

Калі зададзеныя n функцый з'яўляюцца частковымі рашэннямі лінейнага аднароднага дыферэнцыяльнага ўраўнення n -га

парадку, умова неператварэння вранскіяна ў нуль хоць у адным пункце з'яўляецца не толькі дастатковай, але і неабходнай умовай лінейнай незалежнасці гэтых рашэнняў (гл. [10], глава I, § 10, с. 44).

Тэарэма 2 (аб структуры агульнага рашэння аднароднага ўраўнення). Усякае лінейнае аднароднае дыферэнцыяльнае ўраўненне (2) парадку n мае роўна n лінейна незалежных рашэнняў $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, $t \in (a; b)$. Агульнае рашэнне гэтага ўраўнення мае від

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + \dots + C_n x_n(t) = \sum_{i=1}^n C_i x_i(t), \quad (6)$$

дзе $C_1, C_2, \dots, C_n$ – адвольныя пастаянныя.

Сістэму n лінейна незалежных рашэнняў $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ (далей будзем абазначаць $x_1, x_2, \dots, x_n$) лінейнага аднароднага дыферэнцыяльнага ўраўнення (2) называюць фундаментальнай сістэмай рашэнняў гэтага ўраўнення.

Фундаментальная сістэма рашэнняў $x_1, x_2, \dots, x_n$ цалкам вызначае лінейнае аднароднае ўраўненне (2), і таму можна паставіць задачу аб знаходжанні ўраўнення (2), якое мае зададзеную фундаментальную сістэму рашэнняў $x_1, x_2, \dots, x_n$. У сілу таго, што ўсякае рашэнне x шуканага ўраўнення (2) павінна быць лінейна залежным ад рашэнняў $x_1, x_2, \dots, x_n$, дэтэрмінант Вронскага $W[x_1, x_2, \dots, x_n, x] = 0$, або ў разгорнутым выглядзе

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & x \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \dots & \dot{x}_n & \dot{x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} & x^{(n-1)} \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} & x^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

або, раскладаючы па элементах апошняга слупка,

$$\begin{aligned}
W[x_1, x_2, \dots, x_n] x^{(n)} - & \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \dots & \dot{x}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-2)} & x_2^{(n-2)} & \dots & x_n^{(n-2)} \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} \end{vmatrix} x^{(n-1)} + \dots + \\
+ (-1)^{(n+2)} & \begin{vmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \dots & \dot{x}_n \\ \ddot{x}_1 & \ddot{x}_2 & \dots & \ddot{x}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} \end{vmatrix} x = 0
\end{aligned} \quad (7)$$

Ураўненне (7) і з'яўляецца шуканым ураўненнем.

Параўноўваючы (4) і (7), адзначаем, што

$$p_1(t) = - \begin{vmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ \dot{x}_1 & \dots & \dot{x}_n \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-2)} & \dots & x_n^{(n-2)} \\ x_1^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{W[x_1, \dots, x_n]}.$$

Лёгка бачыць, што дэтэрмінант з гэтага ўраўнення роўны вытворнай ад дэтэрмінанта Вронскага (правіла дыферэнцавання дэтэрмінанта гл. [11], глава 8, п. 8.6, с. 67).

Значыць, $p_1(t) = -\frac{W'}{W}$. Інтэгруючы гэтае ўраўненне, будзем

$$-\int_{t_0}^t p_1(t) dt$$

мець $W = Ce^{-\int_{t_0}^t p_1(t) dt}$. Пры $t = t_0$ атрымаем $C = W(t_0)$, адкуль

$$W(t) = W(t_0) e^{-\int_{t_0}^t p_1(t) dt} \quad (8)$$

Формулу (8) называють формулой Астроградського-Ліувіля.

Формула (8) може бути використана для розв'язання лінійного однорідного рівняння другого порядку

$$\ddot{x} + p_1(t)\dot{x} + p_2(t)x = 0. \quad (9)$$

Згідно з формулою (8) маємо $\begin{vmatrix} x_1 & x \\ \dot{x}_1 & \dot{x} \end{vmatrix} = C_1 e^{-\int p_1(t) dt}$, де x_1 – будь-яке нетривіальне розв'язання рівняння (9).

Розкриваючи детермінант, отримуємо лінійне рівняння першого порядку $x_1 \dot{x} - \dot{x}_1 x = C_1 e^{-\int p_1(t) dt}$, яке можна розв'язати способами, описаними в § 1.7.

Наприклад, коли $x_1(t) \neq 0 \quad \forall t \in (a; b)$, то ділячи отримане рівняння на x_1^2 , знаходимо $\frac{d}{dt} \left(\frac{x}{x_1} \right) = \frac{1}{x_1^2} C_1 e^{-\int p_1(t) dt}$, адкуль

$$x = C_2 x_1 + C_1 x_1 \int \frac{e^{-\int p_1(t) dt}}{x_1^2} dt. \quad (10)$$

Приклад 1. Функції $x_1 = 1$, $x_2 = e^t$, $x_3 = e^{2t}$ задавальняють некоторому диференціальному рівнянню третього порядку. Перевіримо, що вони утворюють лінійно незалежну систему, і складемо її рівняння.

Розв'язання. Складемо детермінант Вронського

$$W[x_1, x_2, x_3] = \begin{vmatrix} 1 & e^t & e^{2t} \\ 0 & e^t & 2e^{2t} \\ 0 & e^t & 4e^{2t} \end{vmatrix} = 2e^{3t} \neq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Значить, функції лінійно незалежні. Агульне розв'язання шуканого диференціального рівняння має вид $x = C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{2t}$.

Цяпер ясна, што чатыры функцыі $x, 1, e^t, e^{2t}$ утвараюць ужо лінейна незалежную сістэму (функцыя x лінейна выражаецца праз астатнія), таму дэтэрмінант Вронскага роўны нулю, гэта значыць

$$W[x, 1, e^t, e^{2t}] = \begin{vmatrix} x & 1 & e^t & e^{2t} \\ \dot{x} & 0 & e^t & 2e^{2t} \\ \ddot{x} & 0 & e^t & 4e^{2t} \\ \ddot{\ddot{x}} & 0 & e^t & 8e^{2t} \end{vmatrix} = -2e^{3t} (\ddot{\ddot{x}} - 3\ddot{x} + 2\dot{x}) = 0.$$

Адсюль $\ddot{\ddot{x}} - 3\ddot{x} + 2\dot{x} = 0$ – шуканае дыферэнцыяльнае ўраўненне.

Прыклад 2. Паказаць, што функцыя $x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t}$ з'яўляецца агульным рашэннем ураўнення $\ddot{x} - 9x = 0$.

Рашэнне. Непасрэднай падстаноўкай x у дадзенае ўраўненне лёгка пераканацца ў тым, што функцыі $x_1 = e^{3t}$ і $x_2 = e^{-3t}$ з'яўляюцца яго рашэннямі. У выпадку дзвюх функцый крытэры лінейнай залежнасці спрошчваецца. Менавіта непарыўныя функцыі $x_1(t)$ і $x_2(t)$ будуць лінейна незалежнымі ў прамежку $(a; b)$, калі іх статуснак не ровен тоесна пастаяннай $\left(\frac{x_1(t)}{x_2(t)} \neq \text{const}, x_2(t) \neq 0, t \in (a; b) \right)$ у гэтым прамежку, калі ж $\frac{x_1(t)}{x_2(t)} \equiv \text{const}$, то функцыі лінейна залежныя.

У дадзеным прыкладзе $\frac{x_1}{x_2} = e^{6t} \neq \text{const}$. Таму x_1 і x_2 складаюць фундаментальную сістэму рашэнняў. Адкуль $x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t}$ – агульнае рашэнне.

Прыклад 3. Ураўненне $(2t - t^2)\ddot{x} + (t^2 - 2)\dot{x} + 2(1 - t)x = 0$ мае частковае рашэнне $x_1 = e^t$. Знайсці рашэнне задачы Кашы для гэтага ўраўнення з пачатковай умовай $x(3) = 1, \dot{x}(3) = 0$.

Рашэнне. Запісаўшы дадзенае ўраўненне ў кананічнай форме

$$\ddot{x} + \frac{t^2 - 2}{2t - t^2} \dot{x} + \frac{2(1-t)}{2t - t^2} x = 0, \quad (t \neq 0, t \neq 2), \text{ маем } p_1(t) = \frac{t^2 - 2}{2t - t^2}. \text{ Будзем разглядаць прамежак } I = (2; +\infty). \text{ Знаходзім:}$$

$$-\int p_1(t) dt = \int \frac{t^2 - 2}{2t - t^2} dt = \int \left(1 + 2 \frac{t-1}{t^2 - 2t} \right) dt = t + \int \frac{d(t-1)^2}{(t-1)^2 - 1} = t + \ln |t^2 - 2t|.$$

Значыць, згодна з формулай (10),

$$x = C_2 e^t + C_1 e^t \int \frac{e^{t + \ln |t^2 - 2t|}}{e^{2t}} dt = C_2 e^t + C_1 e^t \int e^{-t} (t^2 - 2t) dt = C_2 e^t + C_1 t^2.$$

Значэнне C_1, C_2 знойдзем, выкарыстоўваючы зададзеную пачатковую ўмову:

$$C_2 e^3 + 9C_1 = 1, \quad C_2 e^3 + 6C_1 = 0, \quad C_1 = \frac{1}{3}, \quad C_2 = -2e^{-3}.$$

Рашэнне зыходнай задачы Кашы мае выгляд

$$x = -2e^{-3} \cdot e^t + \frac{1}{3} t^2 = -2e^{t-3} + \frac{1}{3} t^2.$$

Непасрэднай падстаноўкай можна ўпэўніцца, што, ведаючы частковае рашэнне x_1 лінейнага аднароднага ўраўнення, з дапамогай лінейнай замены шуканай функцыі $x = x_1 \int z dt$ паніжаецца парадак гэтага ўраўнення, а значыць, і парадак неаднароднага ўраўнення на адзінку. Атрыманае ўраўненне $(n-1)$ -га парадку адносна новай зменнай z таксама з'яўляецца лінейным.

Кожнае з вядомых лінейна незалежных частковых рашэнняў лінейнага аднароднага ўраўнення дазваляе панізіць яго парадак на адзінку (гл. падрабязна ў [2], глава V, § 2, с. 187).

Практыкаванне 3. З дапамогай падстаноўкі $x = x_1 \int z dt$ панізіць парадак лінейнага дыферэнцыяльнага ўраўнення n -га парадку на адзінку.

Прыклад 4. Вядомы два частковыя рашэнні $x_1 = t^2$, $x_2 = t^3$ ураўнення $t^3 \ddot{x} - 3t^2 \dot{x} + 6tx - 6x = 0$ ($t > 0$). Знайсці агульнае рашэнне гэтага ўраўнення.

Рашэнне. Маём $W[x_1, x_2] = \begin{vmatrix} t^2 & t^3 \\ 2t & 3t^2 \end{vmatrix} = t^4 \neq 0$ пры $t \neq 0$. Таму x_1, x_2 – лінейна незалежныя. Для паніжэння парадку выкарыстаем падстаноўку $x = x_1 \int z dt = t^2 \int z dt$, $\left(z = \frac{d}{dt} \left(\frac{x}{t^2} \right), t \neq 0 \right)$, z – новая невядомая функцыя. Будзем мець $\dot{x} = 2t \int z dt + t^2 z$, $\ddot{x} = 2 \int z dt + 4tz + t^2 \dot{z}$, $\ddot{x} = 6z + 6tz + t^2 \dot{z}$. Пасля падстаноўкі $x, \dot{x}, \ddot{x}$ у зададзенае ўраўненне адносна функцыі z атрымаем лінейнае аднароднае ўраўненне віду $\ddot{z} + \frac{3}{t} \dot{z} = 0$. Раз гэтае ўраўненне мае рашэнне

не $z_1 = \frac{d}{dt} \left(\frac{t^3}{t^2} \right) = 1$, то па формуле (10) яго агульнае рашэнне

$z = C_2 + C_1 \int e^{-\int \frac{3}{t} dt} dt = C_2 + \frac{C_1}{2} t^{-2}$. Зыходнае ўраўненне мае агульнае рашэнне $x = C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^3$.

§ 3. Лінейныя неаднародныя ўраўненні

Структура агульнага рашэння лінейнага неаднароднага ўраўнення

$$x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + p_2(t)x^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(t)\dot{x} + p_n(t)x = f(t) \quad (11)$$
 вызначаецца наступнай тэарэмай.

Тэарэма 3. Агульнае рашэнне ўраўнення (11) ёсць сума некагара яго частковага рашэння $x^*(t)$ і агульнага рашэння $x^0(t)$ адпаведнага аднароднага дыферэнцыяльнага ўраўнення (2), гэта значыць $x = x^*(t) + C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n = x^*(t) + x^0(t)$, дзе $x_1, \dots, x_n$ — фундаментальная сістэма рашэнняў ураўнення (2).

Такім чынам, калі вядома агульнае рашэнне адпаведнага аднароднага ўраўнення, то для пабудовы агульнага рашэння неаднароднага ўраўнення неабходна знайсці адно яго частковае рашэнне.

Разгледзім ураўненні $L(x) = f_1(t)$ і $L(x) = f_2(t)$. Калі $x^1(t)$ ёсць рашэнне першага з гэтых ураўненняў, а $x^2(t)$ — другога, то сума $x^1(t) + x^2(t)$ ёсць рашэнне ўраўнення $L(x) = f_1(t) + f_2(t)$. Гэтая ўласцівасць распаўсюджваецца на любы канечны лік рашэнняў і складае сутнасць так званага прынцыпу суперпазіцыі. Справядлівасць гэтага прынцыпу вынікае з лінейнасці апэратара $L(x)$.

Практыкаванне 1. Праверыць прынцып суперпазіцыі. Няхай маем ураўненне $L(x) = f(t)$, дзе $f(t) = \sum_{i=1}^k f_i(t)$. Даказаць, што рашэнне гэтага ўраўнення запішацца $x(t) = \sum_{i=1}^k x^i(t)$, дзе $x^i(t)$ — рашэнне ўраўнення $L(x) = f_i(t)$.

Апішам спосаб рашэння неаднароднага ўраўнення, які належыць Лагранжу і называецца метадам варыяцый адвольных пастаянных.

Дапусцім, што $x_1, x_2, \dots, x_n$ — фундаментальная сістэма рашэнняў аднароднага ўраўнення (2), тады агульнае рашэнне гэтага ўраўнення мае выгляд

$$x^0 = C_1 x_1 + \dots + C_n x_n, \quad (12)$$

дзе $C_1, \dots, C_n$ – адвольныя пастаянныя.

Рашэнне ўраўнення (11) будзем адшукваць у выглядзе (12), лічачы, што $C_1, C_2, \dots, C_n$ з’яўляюцца ўжо не пастаяннымі, а функцыямі ад t , гэта значыць у выглядзе

$$x = C_1(t)x_1 + \dots + C_n(t)x_n = \sum_{i=1}^n C_i(t)x_n(t), \quad (13)$$

дзе $C_i(t)$ – гладкія функцыі, $i = \overline{1, n}$.

Такім чынам, атрымана n новых невядомых функцый. Для іх вызначэння патрэбна мець n ураўненняў – адно з іх атрымаецца з умовы, што выраз (13) задавальняе (11), астатнія $n-1$ ураўненняў можна задаваць адвольна, у прыватнасці, так, каб вытворныя функцыі (13) мелі па магчымасці той жа выгляд, які яны маюць пры пастаянных C_i . Дыферэнцуючы (13), маем

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^n C_i(t)\dot{x}_i(t) + \sum_{i=1}^n \dot{C}_i(t)x_i(t).$$

Каб выканалася ўстаноўленая ўмова, дапусцім

$$\sum_{i=1}^n \dot{C}_i(t)x_i(t) = 0. \quad (14)$$

Тады

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^n C_i(t)\dot{x}_i(t). \quad (15)$$

Дыферэнцуючы (15) і выконваючы адзначаныя вышэй умовы, атрымаем

$$\sum_{i=1}^n \dot{C}_i(t)\dot{x}_i(t) = 0 \quad (16)$$

і г.д. Аб’яднаем умовы (14), (16) і г.д. і выкарыстаем, што выраз (13) ёсць рашэнне (11). Тады ўраўненні для знаходжання n невядомых $C_1(t), \dots, C_n(t)$ будуць мець выгляд

$$\begin{aligned}\dot{C}_1(t)x_1^{(i)} + \dot{C}_2(t)x_2^{(i)} + \dots + \dot{C}_n(t)x_n^{(i)} &= 0, \quad i = \overline{0, n-2}, \\ \dot{C}_1(t)x_1^{(n-1)} + \dot{C}_2(t)x_2^{(n-1)} + \dots + \dot{C}_n(t)x_n^{(n-1)} &= f(t).\end{aligned}$$

(Пад вытворнай нулявога парадку разумеем саму функцыю.) З-за таго, што $x_1, \dots, x_n$ — фундаментальная сістэма рашэнняў аднароднага ўраўнення (2), дэтэрмінант атрыманай лінейнай аднароднай алгебраічнай сістэмы, вранскіян $W[x_1, \dots, x_n]$, не роўны нулю. Таму гэта сістэма мае адзінае рашэнне $\dot{C}_i(t), i = \overline{1, n}$.

Прыклад 1. Знайсці агульнае рашэнне ўраўнення $\ddot{x} + \dot{x} = \frac{1}{\cos t}$,

калі фундаментальная сістэма рашэнняў адпаведнага аднароднага ўраўнення мае від $x_1 = 1, x_2 = \cos t, x_3 = \sin t$.

Рашэнне. Агульнае рашэнне зыходнага ўраўнення будзем адшукваць у выглядзе

$$x(t) = C_1(t) + C_2(t)\cos t + C_3(t)\sin t,$$

дзе $C_1(t), C_2(t), C_3(t)$ вызначаюцца сістэмай

$$\begin{cases} \dot{C}_1(t) + \dot{C}_2(t)\cos t + \dot{C}_3(t)\sin t = 0, \\ -\dot{C}_2(t)\sin t + \dot{C}_3(t)\cos t = 0, \\ -\dot{C}_2(t)\cos t - \dot{C}_3(t)\sin t = \frac{1}{\cos t}. \end{cases}$$

Вырашыўшы сістэму, атрымаем

$$\dot{C}_1(t) = \frac{1}{\cos t}, \quad \dot{C}_2(t) = -1, \quad \dot{C}_3(t) = -\operatorname{tg} t, \quad \text{адкуль}$$

$$C_1(t) = \ln \left| \frac{1 + \sin t}{\cos t} \right| + C_1, \quad C_2(t) = -t + C_2, \quad C_3(t) = \ln |\cos t| + C_3.$$

Агульнае рашэнне зыходнага ўраўнення мае выгляд

$$x = C_1 + C_2 \cos t + C_3 \sin t + \ln \left| \frac{1 + \sin t}{\cos t} \right| - t \cos t + \sin t \cdot \ln |\cos t|.$$

Заўвага 1. Для ўраўнення другога парадку

$$\ddot{x} + p_1(t)\dot{x} + p_2(t)x = f(t)$$

сістэма для знаходжання $C_1(t)$ і $C_2(t)$ мае від

$$\dot{C}_1(t)x_1(t) + \dot{C}_2(t)x_2(t) = 0,$$

$$\dot{C}_1(t)\dot{x}_1(t) + \dot{C}_2(t)\dot{x}_2(t) = f(t).$$

Вырашаючы яе па формулах Крамера (гл. [12], п. 4.7, с. 63), маем

$$\dot{C}_1(t) = \begin{vmatrix} 0 & x_2(t) \\ f(t) & \dot{x}_2(t) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{vmatrix}^{-1} = -\frac{f(t) \cdot x_2(t)}{W[x_1(t), x_2(t)]},$$

$$\dot{C}_2(t) = \frac{f(t) \cdot x_1(t)}{W[x_1(t), x_2(t)]}. \text{ Таму}$$

$$C_1(t) = -\int \frac{f(t)x_2(t)}{W[x_1, x_2]} dt + C_1, \quad C_2(t) = \int \frac{f(t)x_1(t)}{W[x_1, x_2]} dt + C_2.$$

Прыклад 2. Праінтэграваць ураўненне $\ddot{x} + \frac{2}{t}\dot{x} + x = \frac{\operatorname{ctg} t}{t}$,

пры ўмове, што вядома частковае рашэнне $x_1 = \frac{\sin t}{t}$ адпаведнага аднароднага ўраўнення.

Рашэнне. Патрэбна знайсці другое частковае рашэнне аднароднага ўраўнення. Выканаем у ім замену (гл. § 2) $x = \frac{\sin t}{t} \int z dt$, тады

$$\dot{x} = \frac{t \cos t - \sin t}{t^2} \int z dt + \frac{\sin t}{t} z,$$

$$\ddot{x} = \frac{\sin t}{t} \dot{z} + \frac{2(t \cos t - \sin t)}{t^2} z - \frac{(t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t}{t^3} \int z dt.$$

Пасля падстаноўкі $x, \dot{x}, \ddot{x}$ у адпаведнае аднароднае ўраўненне атрымаем $\sin t \cdot \dot{z} + 2 \cos t \cdot z = 0$. Інтэгруючы, будзем мець

$$z = \frac{C_1}{\sin^2 t}. \text{ Таму}$$

$$x = \frac{\sin t}{t} \cdot \int C_1 \frac{dt}{\sin^2 t} = \frac{\sin t}{t} (C_2 - C_1 \operatorname{ctg} t) = C_2 \frac{\sin t}{t} - C_1 \frac{\cos t}{t} -$$

агульнае рашэнне аднароднага ўраўнення $\ddot{x} + \frac{2}{t}\dot{x} + x = 0$. Вранскі-

ян, складзены з частковых рашэнняў $x_1 = \frac{\sin t}{t}$, $x_2 = \frac{\cos t}{t}$ і іх вы-

творных, $W[x_1, x_2] = -\frac{1}{t^2}$. Згодна са сказаным у заўвазе 1, частко-

вае рашэнне зыходнага ўраўнення знаходзіцца так:

$$x^*(t) = -x_1 \int \frac{x_2 f(t) dt}{W[x_1, x_2]} + x_2 \int \frac{x_1 f(t) dt}{W[x_1, x_2]} = \frac{\sin t}{t} \int \frac{\cos^2 t}{\sin t} dt -$$

$$- \frac{\cos t}{t} \int \cos t dt = \frac{\sin t}{t} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right|. \text{ Агульнае рашэнне мае выгляд}$$

$$x = C_1 \frac{\sin t}{t} + C_2 \frac{\cos t}{t} + \frac{\sin t}{t} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right|.$$

§ 4. Лінейнае ўраўненне першага парадку з пастаяннымі каэфіцыентамі і правай часткай у выглядзе квазіпалінома

Разгледзім лінейнае неаднароднае ўраўненне першага парадку са спецыяльнай правай часткай

$$\dot{x} - \lambda x = P_m(t) e^{\mu t}, \quad (17)$$

дзе λ, μ – пастаянныя, $P_m(t)$ – паліном ступені m , гэта значыць

$$P_m(t) = a_0 t^m + a_1 t^{m-1} + \dots + a_m, \quad a_0 \neq 0.$$

Пакажам, што калі $\mu \neq \lambda$, то ўраўненне (17) будзе мець частковае рашэнне віду

$$x = Q_m(t) e^{\mu t}, \quad (18)$$

калі ж $\mu = \lambda$, то віду

$$x = t Q_m(t) e^{\mu t}, \quad (19)$$

дзе $Q_m(t)$ – поліном ступені m .

Будзем шукаць рашэнне ўраўнення (17) у выглядзе

$$x = e^{\mu t} \cdot z.$$

Падставіўшы яго ў (17), атрымаем для z ураўненне

$$\dot{z} + (\mu - \lambda) z = P_m(t). \quad (20)$$

Калі ў (20) $\mu = \lambda$, то $z = \int_0^t P_m(\tau) d\tau = t \left(a_0 \frac{t^m}{m+1} + \dots + a_m \right)$, так

што (19) мае месца.

Калі $\mu \neq \lambda$, будзем $z(t)$ адшукваць у выглядзе полінома

$$z = Q_m(t) = b_0 t^m + b_1 t^{m-1} + \dots + b_m$$

з нявызначанымі каэфіцыентамі.

Пасля падстаноўкі ў (20) атрымаем

$$(\mu - \lambda) b_0 t^m + [(\mu - \lambda) b_1 + m b_0] t^{m-1} + \dots = a_0 t^m + a_1 t^{m-1} + \dots$$

Параўноўваючы злева і справа каэфіцыенты пры аднолькавых ступенях t , паслядоўна знаходзім $b_0 = \frac{a_0}{\mu - \lambda}$, $b_1 = \frac{a_1 - m b_0}{\mu - \lambda}$, ...

Усякае рашэнне адпаведнага аднароднага ўраўнення $\dot{x} - \lambda x = 0$ мае рашэнне $x = C e^{\lambda t}$, C – адвольная пастаянная.

Такім чынам, знойдзены ўсе рашэнні ўраўнення (17) (гл. тэарэму 3). І, значыць, можна, выкарыстоўваючы прынцып суперпазіцыі (гл. § 3), знайсці ўсе рашэнні ўраўнення

$$\dot{x} - \lambda x = f(t),$$

дзе $f(t) = e^{\lambda_1 t} P_1(t) + e^{\lambda_2 t} P_2(t) + \dots + e^{\lambda_k t} P_k(t)$ – функцыя, якую называюць квазіполіномам.

Такім жа спосабам можна паказаць, што калі ў (17) λ і μ – камплексныя лікі, а $P_m(t)$ – поліном з камплекснымі каэфіцыентамі,

то гэтае ўраўненне таксама мае частковае рашэнне (18) пры $\mu \neq \lambda$ і (19) пры $\mu = \lambda$.

Заўвага 1. Рашэнне ўраўнення $\dot{x} - \lambda x = 0$ пры комплексным ліку λ будзе комплексназначнай функцыяй сапраўднага аргумента.

Вызначым экспаненту $e^{\lambda t}$ пры комплексных значэннях λ . Калі $\lambda = \alpha + i\beta$, дзе α, β – сапраўдныя лікі, то маем $e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t)$ – формулу Эйлера (гл. [13], глава III, п. 11, с. 87).

Усе ўласцівасці, характэрныя для функцыі $e^{\lambda t}$ пры сапраўдных λ , маюць месца і для функцыі $e^{\lambda t}$ з комплексным λ (гл. [14], глава I, § 4, с. 42).

Практыкаванне 1. Даказаць наступныя ўласцівасці функцыі $e^{\lambda t}$ пры комплексных значэннях λ .

$$1^0. e^{\lambda_1 t} e^{\lambda_2 t} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}.$$

$$2^0. e^{\lambda t} e^{-\lambda t} = 1.$$

$$3^0. \frac{d}{dt} e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}.$$

$$4^0. \int_{t_0}^t e^{\lambda \tau} d\tau = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t} \Big|_{t_0}^t \quad (\lambda \neq 0).$$

Прыклад 1. Рашыць ураўненне $\dot{x} - 4x = (t^2 - 1)e^{2t}$.

Рашэнне. Адпаведнае аднароднае ўраўненне мае рашэнне $x_0 = Ce^{4t}$. Частковае рашэнне ў сілу формулы (18), пры $\mu \neq \lambda$, мае выгляд $x^* = (at^2 + bt + c)e^{2t}$. Знойдзем каэфіцыенты a, b, c . Для гэтага прадэферэнцуем x^* па t і падставім у зыходнае ўраўненне. Скараціўшы на e^{2t} атрыманае судачыненне, будзем мець $2at + b + 2at^2 + 2bt + 2c - 4at^2 - 4bt - 4c = t^2 - 1$. Параўноўваючы каэфіцыенты пры аднолькавых ступенях t злева і справа, атрымаем сіс-

тэму для знаходжання каэфіцыентаў: $2a - 4a = 1$, $2a + 2b - 4b = 0$,
 $b + 2c - 4c = -1$, адкуль $a = -\frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{4}$.

Такім чынам, частковае рашэнне разглядаемага ўраўнення роўна $x^* = (-\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4})e^{2t}$, а яго агульнае рашэнне $x = Ce^{4t} + e^{2t}(-\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4})$.

Прыклад 2. Напісаць від частковага рашэння для ўраўнення $\dot{x} - 2x = e^{2t} + 2te^t + 1$.

Рашэнне. Згодна з прынцыпам суперпазіцыі будзем шукаць частковыя рашэнні ўраўненняў $\dot{x} - 2x = e^{2t}$, $\dot{x} - 2x = 2te^t$, $\dot{x} - 2x = 1$. Сума адпаведных частковых рашэнняў x_1^* , x_2^* , x_3^* будзе частковым рашэннем зыходнага ўраўнення. Згодна з формулай (19) $x_1^* = ate^{2t}$, а па формуле (18) $x_2^* = (bt+c)e^t$, $x_3^* = d$. Тады $x^* = ate^{2t} + (bt+c)e^t + d$.

§ 5. Лінейныя аднародныя ўраўненні з пастаяннымі каэфіцыентамі

Разгледзім лінейнае аднароднае ўраўненне

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = 0, \quad (21)$$

дзе ўсе каэфіцыенты $a_1, a_2, \dots, a_n$ — пастаянныя сапраўдныя лікі.

У сілу агульных уласцівасцяў лінейных ураўненняў, дастаткова знайсці n частковых рашэнняў разглядаемага ўраўнення, якія ўтвараюць фундаментальную сістэму. Будзем адшукваць гэтыя частковыя рашэнні ў выглядзе (гл. папярэдні параграф)

$$x = e^{\lambda t}. \quad (22)$$

Падстаўляючы функцыю (22) і яе вытворныя ва ўраўненне (21) пасля скарачэння на множнік $e^{\lambda t}$, атрымаем

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \quad (23)$$

Паліном $L(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$ называюць характарыстычным паліномам, што адпавядае дыферэнцыяльнаму аператару $L(x)$.

Такім чынам, функцыя (22) будзе задавальняць ураўненню (21), калі лік λ будзе задавальняць ураўненню (23) – характарыстычнаму ўраўненню для лінейнага аднароднага ўраўнення (21).

Будзем разглядаць наступныя выпадкі:

1⁰. Характарыстычнае ўраўненне (23) мае розныя сапраўдныя карані $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Згодна з (22) гэтым караням будуць адпавядаць рашэнні

$$x_1 = e^{\lambda_1 t}, x_2 = e^{\lambda_2 t}, \dots, x_n = e^{\lambda_n t}.$$

Склаўшы дэтэрмінант Вронскага з гэтых функцый, лёгка праверыць, што яны лінейна незалежныя (гл. § 2). Значыць, згодна з тэарэмай 2, агульнае рашэнне ў гэтым выпадку мае выгляд

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t},$$

дзе $C_1, C_2, \dots, C_n$ – адвольныя пастаянныя.

Практыкаванне 1. Няхай $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ папарна розныя ў агульным выпадку камплексныя лікі. Паказаць, што функцыі $x_1 = e^{\lambda_1 t}, x_2 = e^{\lambda_2 t}, \dots, x_n = e^{\lambda_n t}$ будуць лінейна незалежнымі.

2⁰. Няхай сярод розных каранёў ураўнення (23) ёсць камплексны карань $\lambda = \alpha + i\beta, \beta \neq 0$. Паколькі каэфіцыенты ўраўнення (23) – сапраўдныя, то спалучаны камплексны лік $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ таксама будзе яго каранем (гл. [14], глава I, § 2, с. 18).

Корань $\lambda = \alpha + i\beta$ будзе адпавядаць рашэнню $x = e^{(\alpha + i\beta)t}$, або з улікам формулы Эйлера (гл. заўвагу 4.1)

$$x = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t) = e^{\alpha t} \cos \beta t + i e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

Аналагічна для $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ маем рашэнне

$$\bar{x} = e^{\alpha t} \cos \beta t - i e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

Карыстаючыся ўласцівасцю 5° з § 2, адзначаем, што рашэннямі ўраўнення (21) будуць сапраўдныя функцыі

$$x_1 = e^{\alpha t} \cos \beta t, \quad x_2 = e^{\alpha t} \sin \beta t,$$

якія з'яўляюцца лінейна незалежнымі. Такім чынам, пары камплексна спалучаных каранёў $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ адпавядае пара сапраўдных рашэнняў.

3°. Няхай цяпер λ – карань ураўнення (23) кратнасці k . Пакажам, што гэтаму караню будзе адпавядаць k лінейна незалежных рашэнняў $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{k-1}e^{\lambda t}$ ураўнення (21). Функцыю (22) будзем разглядаць як функцыю двух аргументаў t і λ . Яна мае непарыўныя вытворныя па t і λ усіх парадкаў, прычым $\frac{\partial^m}{\partial \lambda^m}(e^{\lambda t}) = t^m e^{\lambda t}$. Таму частковыя вытворныя функцыі (22) па t і па λ не залежаць ад парадку дыферэнцавання, так што

$$L\left(\frac{\partial^m x}{\partial \lambda^m}\right) = \frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} L(x).$$

Карыстаючыся гэтай перастановачнасцю, формулай Лейбніца

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + \dots + uv^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)},$$

дзе C_n^k – бінаміяльныя каэфіцыенты (гл. [15], § 10, п. 10.2, с. 267), і роўнасцю $L(e^{\lambda t}) = e^{\lambda t} L(\lambda)$, будзем мець

$$L(t^m e^{\lambda t}) = t^m e^{\lambda t} L(\lambda) + C_1^m t^{m-1} e^{\lambda t} L'(\lambda) + C_2^m t^{m-2} e^{\lambda t} L''(\lambda) + \dots + e^{\lambda t} L^{(m)}(\lambda), \quad (24)$$

дзе $L(\lambda), L'(\lambda), \dots, L^{(m)}(\lambda)$ – адпаведныя вытворныя $L(\lambda)$.

У сілу таго, што λ – карань кратнасці k , то, як вядома з алгебры (гл. тэарэму 4.2 з [17], с. 20), маем

$$L(\lambda) = L'(\lambda) = \dots = L^{(k-1)}(\lambda) = 0.$$

Значыць, правая частка роўнасці (24) ператвараецца ў нуль пры $m = \overline{0, k-1}$, а гэта значыць $L(t^m e^{\lambda t}) = 0$ пры $m = \overline{0, k-1}$. Сапраўды, функцыі $te^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}, \dots, t^{k-1} e^{\lambda t}$ з'яўляюцца рашэннямі $L(x) = 0$. Лёгка паказаць, што сістэма гэтых функцый лінейна незалежная (даказ гл., напрыклад, [16], глава IV, § 1, с. 232).

Практыкаванне 2. Паказаць, што сістэма функцый $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}, \dots, t^{k-1} e^{\lambda t}$ лінейна незалежная.

Практыкаванне 3. Няхай $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ папарна розныя камплексныя лікі, $P_i(t), i = \overline{1, k}$ – паліномы зменнай t . Паказаць, што функцыі $x_1 = P_1(t)e^{\lambda_1 t}, \dots, x_k = P_k(t)e^{\lambda_k t}$ будуць лінейна незалежнымі.

Абагульняючы сказанае вышэй, прывядзём схему рашэння ўраўнення (21).

1. Складаем характарыстычнае ўраўненне (23).
2. Знаходзім карані $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ураўнення (23).
3. Па характару каранёў ураўнення (23) выпісваем частковыя лінейна незалежныя рашэнні ўраўнення (21), кіруючыся тым, што
 - а) кожнаму сапраўднаму аднакратнаму караню λ характарыстычнага ўраўнення (23) адпавядае частковае рашэнне $e^{\lambda t}$ ураўнення (21);
 - б) кожнай пары аднакратных камплексна спалучаных каранёў $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ адпавядаюць два лінейна незалежныя рашэнні $e^{\alpha t} \cos \beta t$ і $e^{\alpha t} \sin \beta t$;
 - в) кожнаму сапраўднаму караню λ кратнасці k адпавядае k лінейна незалежных частковых рашэнняў: $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{k-1} e^{\lambda t}$;
 - г) кожнай камплексна спалучанай пары каранёў $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ кратнасці r адпавядае $2r$ частковых рашэнняў ураўнення (21): $e^{\alpha t} \cos \beta t, te^{\alpha t} \cos \beta t, \dots, t^{r-1} e^{\alpha t} \cos \beta t, e^{\alpha t} \sin \beta t, te^{\alpha t} \sin \beta t, \dots, t^{r-1} e^{\alpha t} \sin \beta t$.

4. Маючы n лінейна незалежных частковых рашэнняў $x_1(t)$, $x_2(t), \dots, x_n(t)$ ураўнення (21), атрымліваем агульнае рашэнне гэтага ўраўнення

$$x = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + \dots + C_n x_n(t),$$

дзе $C_1, C_2, \dots, C_n$ – адвольныя пастаянныя.

Прыклад 1. Знайсці агульнае рашэнні ўраўненняў

$$\begin{aligned} \text{а) } \ddot{x} - 5\ddot{x} + 6\dot{x} &= 0, & \text{б) } x^{IV} + 2\ddot{x} + \ddot{x} &= 0, & \text{в) } x^V + 2x &= 0, \\ \text{г) } x^{VI} + 2x^{IV} + \ddot{x} &= 0, & \text{д) } x^{VI} - 4x^V + 8x^{IV} - 8\ddot{x} + 4\ddot{x} &= 0. \end{aligned}$$

Рашэнне. а) Запісваем адпаведнае характарыстычнае ўраўненне $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda = 0$. Гэтае ўраўненне мае розныя сапраўдныя карані $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$, таму сукупнасць функцый $x_1 = 1, x_2 = e^{2t}, x_3 = e^{3t}$ будзе яго фундаментальнай сістэмай рашэнняў, а

$$x = C_1 + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}$$

з'яўляецца агульным рашэннем зыходнага ўраўнення.

б) Карані характарыстычнага ўраўнення $\lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2 = 0$ наступныя: $\lambda_{1,2} = 0, \lambda_{3,4} = -1$. Яны сапраўдныя, двухкратныя, таму агульнае рашэнне гэтага ўраўнення

$$x = C_1 + C_2 t + (C_3 + C_4 t) e^{-t}.$$

в) Карані характарыстычнага ўраўнення $\lambda^5 + 2 = 0$ знаходзім па формуле (гл. [14], глава I, § 1, с. 17)

$$\lambda = \sqrt[5]{-2} = \sqrt[5]{2(\cos \pi + i \sin \pi)} = \sqrt[5]{2} \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{5} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{5} \right),$$

дзе $k = \overline{0, 4}$. Будзем мець:

$$\lambda_1 = \sqrt[5]{2} \left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right) \quad (k = 0),$$

$$\lambda_2 = \sqrt[5]{2} \left(\cos \frac{3\pi}{5} + i \sin \frac{3\pi}{5} \right) \quad (k = 1),$$

$$\lambda_3 = \sqrt[5]{2} (\cos \pi + i \sin \pi) = -\sqrt[5]{2} \quad (k = 2),$$

$$\lambda_4 = \sqrt[5]{2} \left(\cos \frac{3\pi}{5} - i \sin \frac{3\pi}{5} \right) \quad (k=3),$$

$$\lambda_5 = \sqrt[5]{2} \left(\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5} \right) \quad (k=4).$$

Фундаментальную систему рашэнняў ствараюць функцыі $e^{-\sqrt[5]{2}t}$,

$$e^{\sqrt[5]{2}t \cos \frac{\pi}{5}} \cos(\sqrt[5]{2} \sin \frac{\pi}{5} t), \quad e^{\sqrt[5]{2}t \cos \frac{\pi}{5}} \sin(\sqrt[5]{2} \sin \frac{\pi}{5} t),$$

$$e^{\sqrt[5]{2}t \cos \frac{3\pi}{5}} \cos(\sqrt[5]{2} \sin \frac{3\pi}{5} t), \quad e^{\sqrt[5]{2}t \cos \frac{3\pi}{5}} \sin(\sqrt[5]{2} \sin \frac{3\pi}{5} t).$$

Таму агульнае рашэнне мае выгляд

$$x = C_1 e^{-\sqrt[5]{2}t} + e^{\sqrt[5]{2}t \cos \frac{\pi}{5}} \left[C_2 \cos(\sqrt[5]{2} \sin \frac{\pi}{5} t) + C_3 \sin(\sqrt[5]{2} \sin \frac{\pi}{5} t) \right] + \\ + e^{\sqrt[5]{2}t \cos \frac{3\pi}{5}} \left[C_4 \cos(\sqrt[5]{2} \sin \frac{3\pi}{5} t) + C_5 \sin(\sqrt[5]{2} \sin \frac{3\pi}{5} t) \right].$$

г) Характарыстычнае ўраўненне $\lambda^6 + 2\lambda^4 + \lambda^2 = 0$, або $\lambda^2(\lambda^2 + 1)^2 = 0$ мае карані $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_{3,4} = i$, $\lambda_{5,6} = -i$. Таму агульнае рашэнне запісваецца ў выглядзе

$$x = C_1 + C_2 t + (C_3 + C_4 t) \cos t + (C_5 + C_6 t) \sin t.$$

д) Складаем характарыстычнае ўраўненне $\lambda^6 - 4\lambda^5 + 8\lambda^4 - 8\lambda^3 + 4\lambda^2 = 0$ і знаходзім яго карані.

Маем

$$\lambda^2(\lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 4) = 0,$$

$$\lambda^2(\lambda^4 + 4\lambda^2 + 4 - 4\lambda^3 + 4\lambda^2 - 8\lambda) = 0,$$

$$\lambda^2(\lambda^2 - 2\lambda + 2)^2 = 0.$$

Адкуль $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_{3,4} = 1 + i$, $\lambda_{5,6} = 1 - i$. Агульнае рашэнне запісваецца так:

$$x = C_1 + C_2 t + e^t [(C_3 + C_4 t) \cos t + (C_5 + C_6 t) \sin t].$$

§ 6. Лінейныя неаднародныя ўраўненні з пастаяннымі каэфіцыентамі

Разгледзім лінейнае неаднароднае ўраўненне n -га парадку з пастаяннымі каэфіцыентамі

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + a_2 x^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} \dot{x} + a_n x = f(t). \quad (25)$$

Згодна з тэарэмай 3 (гл. § 3) агульнае рашэнне такога ўраўнення вызначаецца формулай $x = x^* + C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_n x_n$, дзе x^* — частковае рашэнне (25), $x_1, \dots, x_n$ — фундаментальная сістэма рашэнняў адпаведнага аднароднага ўраўнення (21). Частковае рашэнне ўраўнення (25) можна знаходзіць метадам варыяцыі адвольных пастаянных (гл. § 3).

У прасцейшых выпадках, калі правая частка (25) мае спецыяльны від, частковыя рашэнні знаходзяць метадам нявызначаных каэфіцыентаў (метадам падбору). Разгледзім такія выпадкі.

1⁰. Няхай правая частка ўраўнення (25) з'яўляецца найпрасцейшым квазіпаліномам, гэта значыць

$$f(t) = P_l(t) e^{\alpha t} = (A_0 t^l + A_1 t^{l-1} + \dots + A_{l-1} t + A_l) e^{\alpha t}. \quad (26)$$

Будзем адшукваць частковае рашэнне x^* ураўнення (25) у выглядзе, падобным да яго правай часткі (26), гэта значыць будзем меркаваць (гл. § 4)

$$x^* = e^{\alpha t} Q_l(t) = e^{\alpha t} (B_0 t^l + B_1 t^{l-1} + \dots + B_{l-1} t + B_l),$$

дзе $B_0, B_1, \dots, B_l$ — пакуль невядомыя пастаянныя.

Падставім x^* ва ўраўненне (25) з правай часткай (26). Прымяніўшы формулу Лейбніца (гл. § 5), атрымаем

$$L(x^*) = L(B_0 t^l e^{\alpha t} + B_1 t^{l-1} e^{\alpha t} + \dots + B_{l-1} t e^{\alpha t} + B_l e^{\alpha t}) = B_0 L(t^l e^{\alpha t}) + B_1 L(t^{l-1} e^{\alpha t}) + \dots + B_{l-1} L(t e^{\alpha t}) + B_l L(e^{\alpha t}) =$$

$$\begin{aligned}
&= B_0 e^{\alpha t} \sum_{m=0}^l C_l^m L^{(m)}(\alpha) t^{l-m} + B_1 e^{\alpha t} \sum_{m=0}^{l-1} C_{l-1}^m L^{(m)}(\alpha) t^{l-1-m} + \dots + \\
&+ B_{l-1} e^{\alpha t} \sum_{m=0}^1 C_1^m L^{(m)}(\alpha) t^{1-m} + B_l e^{\alpha t} L(\alpha) = e^{\alpha t} (A_0 t^l + A_1 t^{l-1} + \dots + \\
&+ A_{l-1} t + A_l), \text{ дзе } C_i^m - \text{ бінаміяльныя каэфіцыенты, } i = \overline{1, l}.
\end{aligned}$$

Параўноўваючы ў абедзвюх частках атрыманай пасля скарачэння на $e^{\alpha t}$ роўнасці каэфіцыенты пры аднолькавых ступенях t , атрымваем сістэму для адшуквання каэфіцыентаў $B_0, B_1, \dots, B_l$.

$$\begin{cases} B_0 L(\alpha) = A_0, \\ B_0 C_l^1 L'(\alpha) + B_1 L(\alpha) = A_1, \\ B_0 C_l^2 L''(\alpha) + B_1 C_{l-1}^1 L'(\alpha) + B_2 L(\alpha) = A_2, \\ \dots \dots \dots \\ B_0 L^{(l)}(\alpha) + B_1 L^{(l-1)}(\alpha) + \dots + B_{l-1} L'(\alpha) + B_l L(\alpha) = A_l. \end{cases}$$

З гэтай сістэмы знайдуцца ўсе каэфіцыенты $B_0, B_1, \dots, B_l$ і пры гэтым адзіным чынам толькі ў выпадку, калі $L(\alpha) \neq 0$, гэта значыць, што калі α не з'яўляецца каранем характарыстычнага ўраўнення $L(\lambda) = 0$.

У тым выпадку, калі α – карань кратнасці k характарыстычнага ўраўнення $L(\lambda) = 0$, частковае рашэнне ўраўнення (25) адшукваецца ў выглядзе

$$x^* = t^k e^{\alpha t} (B_0 t^l + B_1 t^{l-1} + \dots + B_{l-1} t + B_l).$$

Сапраўды, падставіўшы такое x^* у (25), аналагічна атрымваем

$$\begin{aligned}
&B_0 \sum_{m=0}^{l+k} C_{l+k}^m L^{(m)}(\alpha) t^{l+k-m} + B_1 \sum_{m=0}^{l+k-1} C_{l+k-1}^m L^{(m)}(\alpha) t^{l+k-1-m} + \dots + \\
&+ B_{l-1} \sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^m L^{(m)}(\alpha) t^{k+1-m} + B_l \sum_{m=0}^k C_k^m L^{(m)}(\alpha) t^{k-m} = A_0 t^l + \dots + A_l.
\end{aligned}$$

Казфіценты $B_0, B_1, \dots, B_l$ адназначна будуць знаходзіцца з сістэмы

$$\begin{cases} B_0 C_{l+k}^k L^{(k)}(\alpha) = A_0, \\ B_0 C_{l+k}^{k+1} L^{(k+1)}(\alpha) + B_1 C_{l+k-1}^k L^{(k)}(\alpha) = A_1, \\ \dots\dots\dots \\ B_k L^{(l)}(\alpha) + B_k L^{(l-1)}(\alpha) + \dots + B_l L^{(k)}(\alpha) = A_l. \end{cases}$$

2⁰. Прыведзеныя вышэй разважанні будуць справядлівымі і пры камплексным α . Дапусцім, што правая частка ўраўнення (25) мае выгляд

$$f(t) = e^{\alpha t} [P_l(t) \cos \beta t + Q_m(t) \sin \beta t], \quad (27)$$

дзе $P_l(t)$ і $Q_m(t)$ – паліномы ступеняў l і m адпаведна.

Падстаўляючы ў (27) па формулах Эйлера,

$$\cos \beta t = \frac{e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}}{2}, \quad \sin \beta t = \frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2i}, \quad \text{атрымаем}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{\alpha t} P_l(t) \frac{e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}}{2} + e^{\alpha t} Q_m(t) \frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2i} = \\ &= \left[\frac{1}{2} P_l(t) + \frac{1}{2i} Q_m(t) \right] e^{(\alpha+i\beta)t} + \left[\frac{1}{2} P_l(t) - \frac{1}{2i} Q_m(t) \right] e^{(\alpha-i\beta)t}. \end{aligned}$$

У квадратных дужках стаяць паліномы, якія маюць ступень, роўную найбольшай ступені паліномаў $P_l(t)$ і $Q_m(t)$, $s = \max(l, m)$.

Абзначыўшы гэтыя паліномы $M_s(t)$ і $N_s(t)$, атрымаем у правай частцы ўраўнення (25) выраз

$$M_s(t) e^{(\alpha+i\beta)t} + N_s(t) e^{(\alpha-i\beta)t}.$$

Для кожнага складніка можна прымяніць прыведзеныя вышэй правілы.

Аб'ядноўваючы ўсе вынікі гэтага параграфа, складзём табліцу частковых рашэнняў для розных відаў правай часткі ўраўнення (25).

№№	$f(t)$	Карані характарыстычнага ўраўнення	Віды частковага рашэння
1 ⁰ .	$P_l(t)$	а) лік 0 – не карань	$Q_l(t)$
		б) лік 0 – карань кратнасці k	$t^k Q_l(t)$
2 ⁰ .	$P_l(t)e^{\alpha t}$	а) лік α – не карань	$Q_l(t) e^{\alpha t}$
		б) лік α – карань кратнасці k	$t^k Q_l(t) e^{\alpha t}$
3 ⁰ .	$P_l(t) \cos \beta t + Q_m(t) \sin \beta t$	а) лікі $\pm i\beta$ – не карані	$M_s(t) \cos \beta t + N_s(t) \sin \beta t$
		б) лікі $\pm i\beta$ – карані кратнасці k	$t^k (M_s(t) \cos \beta t + N_s(t) \sin \beta t);$ $s = \max(l, m)$
4 ⁰ .	$e^{\alpha t} [P_l(t) \cos \beta t + Q_m(t) \sin \beta t]$	а) лікі $\alpha \pm i\beta$ – не карані	$(M_s(t) \cos \beta t + N_s(t) \sin \beta t) e^{\alpha t}$
		б) лікі $\alpha \pm i\beta$ – карані кратнасці k	$t^k (M_s(t) \cos \beta t + N_s(t) \sin \beta t) e^{\alpha t};$ $s = \max(l, m).$

Выпадкі 1⁰ – 3⁰ можна разглядаць як частковыя выпадку 4⁰.

Прыклад 1. Рашыць ураўненні

а) $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 2 \cos 3t + 4 \sin 3t.$

б) $\ddot{x} + 10\dot{x} + 25x = 4e^{-5t}.$

в) $\ddot{x} + \dot{x} = t^4.$

г) $\ddot{x} + x = t \sin t$.

д) $x^{IV} - x = e^{\alpha t} + e^{-\alpha t} + \cos \beta t$.

Рашэнні.

а) Карані характарыстычнага ўраўнення $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1$. Агульнае рашэнне аднароднага ўраўнення $x_0 = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t}$. Лік $\alpha \pm i\beta = \pm 3i$ не з'яўляецца каранем характарыстычнага ўраўнення (выпадак 3⁰ а)), таму $x^* = A \cos 3t + B \sin 3t$. Прадыферэнцуем x^* двойчы і, падставіўшы выразы для $x^*, \dot{x}^*, \ddot{x}^*$ у зыходнае ўраўненне, атрымаем $(-9A - 7B) \sin 3t + (9B - 7A) \cos 3t = 2 \cos 3t + 4 \sin 3t$. Параўнаўшы адпаведныя каэфіцыенты пры $\cos 3t$ і $\sin 3t$ злева і

справа, знайдзем $A = -\frac{5}{13}, B = -\frac{1}{13}$. Тады

$$x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t} - \frac{5}{13} \cos 3t - \frac{1}{13} \sin 3t.$$

б) Характарыстычнае ўраўненне $\lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0$ мае двухкратны карань $\lambda_1 = \lambda_2 = -5$, таму агульнае рашэнне аднароднага ўраўнення $x_0 = (C_1 + C_2 t) e^{-5t}$. У сілу таго, што $\alpha = -5$ з'яўляецца каранем характарыстычнага ўраўнення кратнасці $k = 2$, поліном $P_1(t)$ мае нулявую ступень (гл. выпадак 2⁰ б)), частковае рашэнне x^* адшукваем у выглядзе $x^* = At^2 e^{-5t}$. Падстаўляючы $x^*, \dot{x}^* = A(2t - 5t^2) e^{-5t}$ і $\ddot{x}^* = A(2 - 20t + 25t^2) e^{-5t}$ у зыходнае ўраўненне, атрымліваем $2Ae^{-5t} = 4e^{-5t}$, адкуль $A = 2$. Агульнае рашэнне дадзенага ўраўнення

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-5t} + 2t^2 e^{-5t}.$$

в) Правая частка ўраўнення мае выгляд 1⁰. Характарыстычнае ўраўненне $\lambda(\lambda^2 + 1) = 0$ мае карані $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \pm i$, таму $x_0 = C_1 + C_2 \cos t + C_3 \sin t$. Лік $\alpha = 0$ з'яўляецца простым каранем характарыстычнага ўраўнення (выпадак 1⁰, б)). Частковае рашэнне

адшукваем у выглядзе $x^* = t(At^4 + Bt^3 + Ct^2 + Dt + E)$. Падстаўляючы x^* , $\dot{x}^* = 5At^4 + 4Bt^3 + 3Ct^2 + 2Dt + E$, $\ddot{x}^* = 60At^2 + 24Bt + 6C$ у зададзенае ўраўненне, атрымаем

$$5At^4 + 4Bt^3 + (60A + 3C)t^2 + (24B + 2D)t + 6C + E = t^4.$$

Адсюль $A = \frac{1}{5}$, $B = 0$, $C = -4$, $D = 0$, $E = 24$. Такім чынам,

$$x = C_1 + C_2 \cos t + C_3 \sin t + \frac{t^5}{5} - 4t^3 + 24t.$$

г) Карані характарыстычнага ўраўнення $\lambda_{1,2} = \pm i$, адкуль $x_0 = C_1 \cos t + C_2 \sin t$. Лік $\alpha \pm i\beta = \pm i$ аднакратны карань характарыстычнага ўраўнення (выпадак 3⁰, б)). Такім чынам,

$$x^* = t((At + B)\cos t + (Ct + D)\sin t).$$

Пасля адпаведных дзеянняў атрымаем (гл. прыклад а)) чатыры ўраўненні для знаходжання каэфіцыентаў: $2A + 2D = 0$, $4C = 0$,

$$-2B + 2C = 0, -4A = 1, \quad \text{адкуль} \quad A = -\frac{1}{4}, B = 0, C = 0, D = \frac{1}{4}.$$

Такім чынам, $x^* = -\frac{t^2}{4}\cos t + \frac{t}{4}\sin t$. Агульнае рашэнне дадзенага ўраўнення

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t - \frac{t^2}{4}\cos t + \frac{t}{4}\sin t.$$

д) Характарыстычнае ўраўненне $\lambda^4 - 1 = 0$ мае карані $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_{3,4} = \pm i$, таму $x_0 = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t$. У

адпаведнасці з прынцыпам суперпазіцыі (гл. § 3) адшукваем частковае рашэнне $x^* = x_1^* + x_2^* + x_3^*$, дзе $x_1^* = Ae^{\alpha t}$ (выпадак 2⁰, а)), $x_2^* = Be^{-\alpha t}$ (выпадак 2⁰, а)), $x_3^* = C \sin \beta t + D \cos \beta t$ (выпадак 3⁰, а))

для $\alpha \neq \beta \neq 1$. Знаходзячы вытворныя x_1^{*IV} , x_2^{*IV} , x_3^{*IV} і падстаўля-

ючы іх выразы і x_1^*, x_2^*, x_3^* у зададзенае ўраўненне, апісаным вышэй метадам знаходзім $A = \frac{1}{\alpha^4 - 1}, B = \frac{1}{\alpha^4 - 1}, C = 0, D = \frac{1}{\beta^4 - 1}$.

Агульнае рашэнне мае выгляд

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \sin t + C_4 \cos t + \frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{\alpha^4 - 1} + \frac{\cos \beta t}{\beta^4 - 1}.$$

У выпадку, калі $\alpha = \beta = 1$ (2^0 б), 3^0 б)), частковыя рашэнні адшукваюцца так: $x_1^* = Ate^t, x_2^* = Bte^{-t}, x_3^* = t(C \sin t + D \cos t)$. Агульнае рашэнне будзе мець выгляд

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \sin t + C_4 \cos t + \frac{t}{4}(e^t - e^{-t}) + \frac{t \sin t}{4}.$$

§ 7. Ураўненне Эйлера

Ураўненне віду

$$t^n x^{(n)} + a_1 t^{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} t \dot{x} + a_n x = 0,$$

дзе $a_j = \text{const}$ ($j = \overline{1, n}$), называецца аднародным ураўненнем Эйлера.

Заменай $t = e^\tau$ (пры $t > 0$) ураўненне прыводзіцца да лінейнага аднароднага ўраўнення з пастаяннымі каэфіцыентамі. На практыцы рашэнне ўраўнення Эйлера адшукваюць у выглядзе $x = e^{\lambda \tau} = (e^\tau)^\lambda = t^\lambda$. Для знаходжання λ атрымліваюць алгебраічнае ўраўненне n -ай ступені. У сілу таго, што

$$t^k \frac{d^k (t^\lambda)}{dt^k} = \lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - k + 1) t^\lambda, k \leq \lambda,$$

маем

$$\lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 1) + a_1 \lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 2) + \dots + a_{n-2} \lambda(\lambda - 1) + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \quad (28)$$

Відавочна, што ўраўненне (28) супадае з характарыстычным ураўненнем для дыферэнцыяльнага ўраўнення па зменнаму t .

Простаму караню λ_1 ураўнення (28) адпавядае рашэнне t^{λ_1} , а k -кратнаму караню $\lambda_1 - k$ лінейна незалежных рашэнняў віду t^{λ_1} , $t^{\lambda_1} \ln t$, $t^{\lambda_1} (\ln t)^2$, ..., $t^{\lambda_1} (\ln t)^{k-1}$. Калі каэфіцыенты ўраўнення сапраўдныя лікі, а характарыстычнае ўраўненне мае камплексна-спалучаныя карані $\lambda_0 = \alpha_0 \pm i\beta_0$ кратнасці k , то ўраўненне Эйлера мае $2k$ лінейна незалежных рашэнняў віду

$$t^{\alpha_0} \cos(\beta_0 \ln t), t^{\alpha_0} \ln t \cos(\beta_0 \ln t), \dots, t^{\alpha_0} (\ln t)^{k-1} \cos(\beta_0 \ln t), \\ t^{\alpha_0} \sin(\beta_0 \ln t), t^{\alpha_0} \ln t \sin(\beta_0 \ln t), \dots, t^{\alpha_0} (\ln t)^{k-1} \sin(\beta_0 \ln t).$$

Неаднароднае ўраўненне Эйлера

$$t^n x^{(n)} + a_1 t^{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} t \dot{x} + a_n x = f(t)$$

таксама ўказанай вышэй падстаноўкай прыводзіцца да неаднароднага ўраўнення з пастаяннымі каэфіцыентамі. Пры гэтым, калі $f(t) = P_m(\ln t) t^\alpha$, дзе P_m — паліном, то частковае рашэнне атрыманага ўраўнення можна знайсці метадам нявызначаных каэфіцыентаў па аналогіі з рашэннем неаднароднага лінейнага дыферэнцыяльнага ўраўнення з пастаяннымі каэфіцыентамі і правай часткай віду $e^{\alpha t} P_m(t)$, у выніку чаго адпаведнае ўраўненне Эйлера заўсёды інтэгруецца ў элементарных функцыях.

Прыклад 1. Рашыць ураўненне Эйлера $t^2 \ddot{x} + 6t \dot{x} + 4x = 0$.

Рашэнне. Будзем шукаць рашэнне ў выглядзе $x = t^\lambda$. Тады атрымаем пасля падстаноўкі x , $\dot{x} = \lambda t^{\lambda-1}$, $\ddot{x} = \lambda(\lambda-1)t^{\lambda-2}$ у зыходнае ўраўненне: $t^2 \lambda(\lambda-1)t^{\lambda-2} + 6t \lambda t^{\lambda-1} + 4t^\lambda = 0$, адкуль $\lambda(\lambda-1) + 6\lambda + 4 = 0$. Маём $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -4$. Таму агульнае рашэнне запішацца так: $x = C_1 t^{-1} + C_2 t^{-4}$.

Прыклад 2. $t^2 \ddot{x} + 5t \dot{x} + 4x = 0$.

Рашэнне. Будзем мець, калі $x = t^\lambda$, $t^2\lambda(\lambda-1)t^{\lambda-2} + 5t\lambda t^{\lambda-1} + 4t^\lambda = 0$, $\lambda(\lambda-1) + 5\lambda + 4 = 0$, адкуль $\lambda_{1,2} = -2$. Агульнае рашэнне, што адпавядае двухкратнаму караню $\lambda_{1,2} = -2$, мае выгляд $x = C_1 t^{-2} + C_2 t^{-2} \ln t$.

Прыклад 3. $t^2 \ddot{x} - t\dot{x} + 2x = t \ln t$.

Рашэнне. Характарыстычнае ўраўненне $(\lambda-1)\lambda - \lambda + 2 = 0$ ці $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ мае карані $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. Таму агульнае рашэнне адпаведнага аднароднага ўраўнення будзе мець выгляд

$$x_0 = t[C_1 \cos(\ln t) + C_2 \sin(\ln t)].$$

Частковае рашэнне адшукваецца ў выглядзе $x^* = t(A \ln t + B)$. Маём

$\dot{x}^* = A \ln t + B + A$, $\ddot{x}^* = \frac{A}{t}$. Падстаўляючы ў дадзенае ўраўненне, атрымліваем

$$At - t(A \ln t + A + B) + 2t(A \ln t + B) = t \ln t$$

або $At \ln t + Bt = t \ln t$, адкуль $A = 1$, $B = 0$. Такім чынам, $x^* = t \ln t$. Агульным рашэннем будзе

$$x = t[C_1 \cos(\ln t) + C_2 \sin(\ln t)] + t \ln t.$$

§ 8. Лінейнае дыферэнцыяльнае ўраўненне другога парадку

Разгледзім больш падрабязна ўласцівасці рашэнняў дыферэнцыяльнага ўраўнення другога парадку

$$a(t)\ddot{x} + b(t)\dot{x} + c(t)x = f(t). \quad (29)$$

Ураўненні віду (29) прымяняюцца пры апісанні і вывучэнні многіх з'яў у фізіцы, механіцы, тэхніцы. Так, напрыклад, калі a, b, c – сапраўдныя пастаянныя ў (29), прычым $a > 0, b \geq 0, c \geq 0$, гэта ўраўненне апісвае прамалінейны рух матэрыяльнага пункта з масай a уздоўж восі x пад уздзеяннем пругкай сілы $(-cx)$, сілы трэння $(-b\dot{x})$

і знешняй сілы $f(t)$. Сапраўды, ураўненне (29), перапісанае ў выглядзе $a\ddot{x} = -b\dot{x} - cx + f(t)$, уяўляе сабой запіс другога закона Ньютана, пры гэтым $x(t)$ – каардыната матэрыяльнага пункта ў момант часу t , $\dot{x}(t)$ – скорасць пункта, $\ddot{x}(t)$ – яго паскарэнне, b – каэфіцыент трэння, c – каэфіцыент пругкасці.

Рухі матэрыяльнага пункта, якія апісваюцца ўраўненнем ваганняў (29), без знешняй сілы ($f(t) \equiv 0$) называюцца свабоднымі ваганнямі, а пры знешняй сіле – вымушанымі ваганнямі. Падрабязны аналіз паводзін рашэнняў ураўнення ваганняў (29) у залежнасці ад яго каэфіцыентаў можна знайсці ў [3], глава VI, § 3, с. 417, у [18], глава II, § 10, с. 66.

Дапусцім, што ў (29) $a(t), b(t), c(t)$ – непарыўныя функцыі і $f(t) \equiv 0$, $t \in I = (a; b)$. Па тэарэме 1 задача Кашы для гэтага ўраўнення, калі $a(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$, мае адзінае рашэнне, вызначанае на прамежку I . Згодна з заўвагай 1.2, калі рашэнне ператвараецца ў нуль разам са сваёй вытворнай у некаторым пункце з I , то гэтае рашэнне нулявое. Далей у гэтым параграфе пад рашэннем будзем разумець толькі ненулявое рашэнне. Таму, калі рашэнне x ператвараецца ў нуль у пункце $t_0 \in I$, то $\dot{x}(t_0) \neq 0$, і, значыць, для ўнутранага пункта t_0 рашэнне x мяняе знак пры пераходзе праз t_0 , а графік рашэння перасякае вось t .

Разгледзім цяпер ураўненне

$$\ddot{x} + Q(t)x = 0, \quad (30)$$

дзе $Q(t)$ – непарыўная функцыя на інтэрвале I .

Да ўраўнення віду (30) можна прывесці любое ўраўненне віду $\ddot{x} + b(t)\dot{x} + c(t)x = 0$, дзе $b(t), c(t)$ – непарыўныя на некаторым інтэрвале I , а $b(t)$ мае тут непарыўную вытворную, з дапамогай падстаноўкі $x = ze^{-\frac{1}{2} \int b(t) dt}$. Сапраўды, адносна z атрымаем

$$\ddot{z} + \left(c(t) - \frac{1}{4}b^2(t) - \frac{1}{2}\dot{b}(t) \right) z = 0.$$

Разглядаючы ўраўненні віду (30) з пастаяннымі каэфіцыентамі $\ddot{x} - a^2 x = 0$ і $\ddot{x} + a^2 x = 0$, можна паказаць вялікую розніцу паміж характарам функцый, якія з'яўляюцца іх частковымі рашэннямі. Непасрэдным вылічэннем можна паказаць, што кожнае рашэнне ўраўнення $\ddot{x} - a^2 x = 0$ на інтэрвале $(-\infty, +\infty)$ можа ператварыцца ў нуль не больш аднаго разу. А вось рашэнне ўраўнення $\ddot{x} + a^2 x = 0$ мае бясконцае мноства нулёў, адлегласць паміж якімі роўна $\frac{\pi}{a}$, прычым кожны інтэрвал даўжыні, большай за $\frac{\pi}{a}$, змяшчае, прынамсі, адзін нуль любога рашэння гэтага ўраўнення, а інтэрвал даўжыні, большай за $\frac{2\pi}{a}$, прынамсі, два нулі.

Калі рашэнне дыферэнцыяльнага ўраўнення мае ў дадзеным інтэрвале не больш за адзін нуль, яно называецца няхісткім у гэтым інтэрвале, у процілеглым выпадку – хісткім.

Тэарэма 4 (прызнак няхісткасці рашэнняў). Усякае рашэнне ўраўнення (30) з'яўляецца няхісткім на прамежку $I_1 \subset I$, калі на гэтым прамежку $Q(t) \leq 0$.

Такім чынам, хісткія рашэнні могуць існаваць толькі ў такіх інтэрвалах I , дзе пры некаторым $t \in I$ будзе $Q(t) > 0$. Мае месца

Тэарэма 5 (тэарэма Штурма). Калі t_0 і t_1 – два паслядоўныя нулі рашэння $x_1(t)$ дыферэнцыяльнага ўраўнення другога парадку, то ўсякае іншае лінейна незалежнае рашэнне $x_2(t)$ гэтага ж ураўнення мае дакладна адзін нуль паміж t_0 і t_1 .

Гэтая тэарэма можа быць сфармулявана і так: нулі двух лінейна незалежных рашэнняў узаемна раздзяляюць адзін аднаго. Так, напрыклад, два лінейна незалежныя рашэнні $\sin t$ і $\cos t$ ураўнення

$\ddot{x} + x = 0$ маюць нулі, якія ўзаемна раздзяляюць адзін аднаго. Гэтая тэарэма ўстанаўлівае, што ўсе рашэнні аднаго і таго ж ураўнення, наогул кажучы, маюць аднолькавы характар вагання.

Каб параўнаць характар ваганняў рашэнняў двух розных ураўненняў, карыстаюцца тэарэмай параўнання.

Тэарэма 6. Калі маем два ўраўненні

$$\ddot{x} + Q_1(t)x = 0, \quad \ddot{y} + Q_2(t)y = 0 \quad (31)$$

і калі $Q_2(t) \geq Q_1(t)$ у прамежку $I_1 \subset I$, то паміж кожнымі двума нулямі любога рашэння $x(t)$ першага ўраўнення знаходзіцца, прынамсі, адзін нуль кожнага рашэння $y(t)$ другога ўраўнення.

Можна сказаць, згодна з тэарэмай, што рашэнні другога з ураўненняў (31) больш вагаюцца, чым рашэнні першага ўраўнення.

Калі, захоўваючы ўмовы тэарэмы 6, дапусціць дадаткова, што $Q_2(t) > Q_1(t)$ хоць для некаторых значэнняў t інтэрвала $(t_0; t_1)$ і што $y(t_0) = 0$, то наступны ўправа нуль $y(t)$ будзе ляжаць лявей за t_1 .

Прыведзеныя вышэй сцвярджэнні дапамагаюць даць ацэнку зверху і знізу адлегласці паміж нулямі хісткіх рашэнняў дыферэнцыяльных ураўненняў.

Тэарэму 6 часцей за ўсё прымяняюць, карыстаючыся ўраўненнямі (31), дзе $Q_2(t) = a^2$ — пастаянны лік. Калі ва ўраўненні $\ddot{x} + Q(t)x = 0$, $Q(t) > 0$ на некаторым $[A; B]$, $M = \max_{[A; B]} Q$,

$m = \min_{[A; B]} Q$ і $M > m$, то, параўноўваючы $\ddot{x} + mx = 0$ і $\ddot{x} + Q(t)x = 0$,

атрымаем: адлегласць паміж двума паслядоўнымі нулямі ўраўнення

$\ddot{x} + Q(t)x = 0$ менш, чым $\frac{\pi}{\sqrt{m}}$. Параўноўваючы ўраўненні $\ddot{x} +$

$Q(t)x = 0$ і $\ddot{x} + Mx = 0$, атрымліваем, што адлегласць паміж дву-

ма паслядоўнымі нулямі ўраўнення $\ddot{x} + Q(t)x = 0$ большая за $\frac{\pi}{\sqrt{m}}$.

Прыклад 1. Разгледзім ураўненне $\ddot{x} + tx = 0$ пры $t > 0$.

Няхай лік $a > 0$. Калі ўзяць $t > \frac{\pi^2}{a^2}$ у дадзеным ураўненні, то,

параўноўваючы з ураўненнем $\ddot{y} + \frac{\pi^2}{a^2} y = 0$, знаходзім, што пры разглядаемых значэннях t нулі рашэнняў зыходнага ўраўнення знаходзяцца на адлегласці, меншай за a . Такім чынам, пры неабмежаваным узростанні t паслядоўныя нулі ўсякага рашэння неабмежавана набліжаюцца.

Прыклад 2. Разгледзім ураўненне Эйлера (для $t > 0$)

$$\ddot{x} + \frac{a^2}{t^2} x = 0.$$

Яго рашэнні маюць выгляд t^λ , дзе λ карань ураўнення $\lambda(\lambda - 1) + a^2 = 0$ (гл. ураўненне (7.28)). Рашыўшы гэтае ўраўненне,

атрымаем $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - a^2}$. Калі $a^2 > \frac{1}{4}$, то карані λ_1, λ_2 — камплексныя і рашэнні

$$x_1 = t^{\frac{1}{2}} \cos\left(\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}} \ln t\right), \quad x_2 = t^{\frac{1}{2}} \sin\left(\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}} \ln t\right)$$

маюць незлічонае мноства нулёў у інтэрвале $(0, \infty)$. Калі $a^2 < \frac{1}{4}$,

маем няхісткія рашэнні $x_1 = t^{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - a^2}}$, $x_2 = t^{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - a^2}}$. Такія ж яны і калі $a^2 = \frac{1}{4}$, тады $x_1 = t^{\frac{1}{2}}$, $x_2 = t^{\frac{1}{2}} \ln t$.

Параўноўваючы з разгледжаным ураўненнем Эйлера ўраўненне $\ddot{x} + Q(t)x = 0$, можна сцвярджаць: калі, пачынаючы з некаторага t , пастаянна маем $0 < Q(t) \leq \frac{1}{4t^2}$, то рашэнне ўраўнення

$\ddot{x} + Q(t)x = 0$ не можа мець бясконцага ліку нулёў; калі, пачынаючы з некаторага значэння t , маем $Q(t) > \frac{1}{4t^2}$, рашэнне ўраўнення $\ddot{x} + Q(t)x = 0$ мае незлічонае мноства нулёў. Гэтае сцвярджэнне не вырашае пытання аб ваганнях, калі $Q(t)$ пры вялікіх значэннях t то больш, то менш за $\frac{1}{4t^2}$.

Разгледжаныя прыклады паказваюць, што вывучэнне вагальнага характару рашэнняў аднароднага лінейнага дыферэнцыяльнага ўраўнення другога парадку нават без ведання аналітычнай структуры рашэнняў дае некаторае ўяўленне аб паводзінах гэтых рашэнняў.

§ 9. Інтэграванне лінейных дыферэнцыяльных ураўненняў пры дапамозе радоў

У некаторых выпадках, калі інтэграванне дыферэнцыяльнага ўраўнення ў элементарных функцыях немагчыма, рашэнне такога ўраўнення адшукваюць у выглядзе ступеннага рада

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (t - t_0)^n. \quad (32)$$

Указаны ступенны рад знаходзяць метадам нявызначаных каэфіцыентаў ці метадам, заснаваным на прымяненні рада Тэйлара (рада Макларэна).

Метад нявызначаных каэфіцыентаў асабліва зручна прымяняецца да лінейных ураўненняў, гэта значыць ураўненняў віду (11), і заключаецца ў наступным: калі ўсе каэфіцыенты $p_k(t)$, $k = \overline{1, n}$ гэтага ўраўнення і свабодны член $f(t)$ раскладаюцца ў рады па ступенях $t - t_0$, якія збягаюцца ў прамежку $(t_0 - h; t_0 + h)$, то шуканае рашэнне $x = x(t)$ таксама выяўляецца ступенным радам (32), які збягаецца ў гэтым прамежку. Падстаўляючы ва ўраўненне функцыю (32) і яе вытворныя, параўноўваюць каэфіцыенты пры

аднолькавых ступенях $t - t_0$. З атрыманых пры гэтым ураўненняў пры зададзеных пачатковых умовах знаходзяць каэфіцыенты $C_0, C_1, C_2, \dots$.

Метад, заснаваны на прымяненні рада Тэйлара (рада Макларэна), заключаецца ў паслядоўным дыферэнцаванні дадзенага ўраўнення. Гэта дае магчымасць знайсці значэнні вытворных, якія ўваходзяць у выразы для каэфіцыентаў рада

$$x(t) = x(t_0) + \dot{x}(t_0)(t - t_0) + \frac{\ddot{x}(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \dots + \frac{x^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n + \dots,$$

які з'яўляецца рашэннем ураўнення.

Разгледзім больш падрабязна прымяненне радоў да рашэння дыферэнцыяльных ураўненняў другога парадку

$$\ddot{x} + p_1(t)\dot{x} + p_2(t)x = f(t). \quad (33)$$

Калі ўраўненне (33) у наваколлі пункта t_0 задавальняе ўмовам тэарэмы існавання і адзінасці рашэнняў, то яго частковае рашэнне (ці агульнае) можна адшукваць у выглядзе рада (32). Калі ж пункт t_0 з'яўляецца асаблівым для ўраўнення (33), гэта значыць у ім хоць бы адна з функцый p_1, p_2, f не вызначаная, то яго частковае (або агульнае) рашэнне патрэбна адшукваць у выглядзе абагульненага ступеннага рада

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (t - t_0)^{n+p}, \quad (34)$$

дзе p патрэбна вызначыць разам з каэфіцыентамі рада (дадатковыя звесткі можна знайсці ў [10], глава II, § 16, с. 66; [1], глава I, § 7, с. 137; [3], глава VIII, § 3, с. 438; [19], глава III, § 10, с. 207).

Для вызначэння каэфіцыентаў C_n радоў (32) або (34) на практыцы паступаюць наступным чынам:

- 1) двойчы дыферэнцуюць рад з невядомымі каэфіцыентамі і знаходзяць, такім чынам, $\dot{x}$ і $\ddot{x}$;
- 2) падстаўляюць $x, \dot{x}, \ddot{x}$ у выглядзе ступенных радоў у зыходнае ўраўненне (33);

- 3) функцыі $p_1(t)$, $p_2(t)$, $f(t)$ замяняюць радамі па ступенях $t - t_0$, пасля чаго дыферэнцыяльнае ўраўненне $\ddot{x} + p_1(t)\dot{x} + p_2(t)x = f(t)$ ператвараецца ў роўнасць двух ступенных радоў;
- 4) параўноўваючы каэфіцыенты ў атрыманых радах пры аднолькавых ступенях $t - t_0$, атрымліваюць ураўненні для знаходжання невядомых каэфіцыентаў C_n ; калі ж рашэнне ўраўнення адшукваецца ў выглядзе абагульненага ступеннага рада, то, параўноўваючы каэфіцыенты пры найменшай ступені $t - t_0$, атрымліваюць так званае вызначальнае ўраўненне, з якога знаходзяцца ўсе магчымыя значэнні параметра ρ ;
- 5) знойдзеныя невядомыя каэфіцыенты C_n падстаўляюць у шуканы

рад $x = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (t - t_0)^n$; у выпадку абагульненага ступеннага

рада каэфіцыенты C_n знаходзяць для кожнага значэння ρ і тым самым атрымліваюць столькі частковых рашэнняў, колькі значэнняў мае параметр ρ .

Атрыманае рашэнне ў выглядзе рада даследуецца на збежнасць вядомымі прыметамі, прычым сума рада з'яўляецца рашэннем дыферэнцыяльнага ўраўнення ў абсягу збежнасці гэтага рада.

Прыклад 1. Рашыць ураўненне $\ddot{x} + t\dot{x} + x = 0$.

Рашэнне. Каэфіцыенты $p_1(t) = t$, $p_2(t) = 1$ з'яўляюцца аналітычнымі функцыямі пры ўсіх t . Адшукваем частковае рашэнне дадзенага ўраўнення ў выглядзе рада

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n.$$

Падстаўляючы гэты выраз ва ўраўненне, папярэдне знайшоўшы $\dot{x}$, $\ddot{x}$, атрымаем

$$\sum_{n=2}^{\infty} C_n n(n-1)t^{n-2} + t \sum_{n=1}^{\infty} C_n n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n = 0.$$

Параўноўваючы каэфіцыенты пры аднолькавых ступенях t , атрымліваем ураўненне для вызначэння каэфіцыентаў C_n :

$$(n+1)(n+2)C_{n+2} + (n+1)C_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Далускаючы $C_0 = 1, C_1 = 0$, знаходзім

$$C_{2m} = \frac{(-1)^m}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot (2m)}, \quad m = 1, 2, \dots; \quad C_{2m+1} = 0, \quad m = 0, 1, \dots$$

Таму

$$x_1(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2 \cdot 4} - \frac{t^6}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots + \frac{(-1)^m \cdot t^{2m}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2m)} + \dots = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Другое рашэнне, лінейна незалежнае з $x_1(t)$, знойдзем, калі будзем меркаваць $C_0 = 0, C_1 = 1$. Будзем мець $C_{2m} = 0, C_{2m+1} =$

$$= \frac{(-1)^m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2m+1)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad \text{У выніку гэтага } x_2(t) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot t^{2m+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2m+1)}, \quad \text{значыць, агульнае рашэнне дадзенага ўраў-$$

нення $x = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$, дзе C_1, C_2 – адвольныя пастаянныя.

Прыклад 2. Рашыць ураўненне

$$2t^2 \ddot{x} + (3t - 2t^2) \dot{x} - (t+1)x = 0.$$

Рашэнне. Пункт $t = 0$ з'яўляецца асаблівым для каэфіцыентаў ураўнення

$$\ddot{x} + \frac{3t - 2t^2}{2t^2} \dot{x} - \frac{t+1}{2t^2} x = 0.$$

Рашэнне будзем адшукваць у выглядзе абагульненага ступеннага рада (34). Прадыферэнцаваўшы (34) два разы, пасля падстаноўкі ва ўраўненне параўноўваем каэфіцыенты пры найменшай ступені t , атрымваем вызначальнае ўраўненне $2\rho(\rho-1) + 3\rho - 1 = 0$. Каранямі

яго будуць $\rho_1 = \frac{1}{2}, \rho_2 = -1$. Рашэнне зыходнага ўраўнення, што

адпавядае коранню $\rho_I = \frac{1}{2}$, адшукваем у выглядзе

$$x_I = t^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n, \quad C_0 \neq 0, \quad t > 0.$$

Тады

$$\dot{x}_I = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) C_n t^{n-\frac{1}{2}}, \quad \ddot{x}_I = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{1}{2}\right) C_n t^{n-\frac{3}{2}}.$$

Пасля падстаноўкі $x_I(t)$, $\dot{x}_I(t)$, $\ddot{x}_I(t)$ у зыходнае ўраўненне атрымаем

$$2t^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(n^2 - \frac{1}{4}\right) C_n t^{n-\frac{3}{2}} + (3t - 2t^2) \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) C_n t^{n-\frac{1}{2}} - \\ - (t+1) \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^{n+\frac{1}{2}} = 0$$

або

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(2n+3) C_n t^{n+\frac{1}{2}} - \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1) C_n t^{n+\frac{3}{2}} = 0.$$

Адкуль, падзяліўшы на $t^{\frac{1}{2}}$, будзем мець

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(2n+3) C_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1) C_n t^{n+1} = 0.$$

Параўноўваючы каэфіцыенты пры аднолькавых ступенях t , маем ураўненні для вызначэння C_n :

$$n(2n+3) C_n = 2^n C_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Дапусціўшы $C_0 = 1$, знаходзім

$$C_n = \frac{2^n}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (2n+3)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Такім чынам,

$$x_1(t) = t^{\frac{1}{2}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2t)^n}{5 \cdot 7 \cdot 9 \dots (2n+3)} \right).$$

Рашэнне зыходнага ўраўнення, што адпавядае караню $\rho_2 = -1$, будзем адшукваць у выглядзе

$$x_2(t) = \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n.$$

Пасля падстаноўкі гэтага выразу ў зыходнае ўраўненне, параўнаўшы каэфіцыенты пры аднолькавых ступенях t , атрымаем

$$2(n-1)(n-2)C_n + 3(n-1)C_n - 2(n-2)C_{n-1} - C_{n-1} - C_n = 0$$

або

$$n(2n-3)C_n = (2n-3)C_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Дапусцім, $C_0 = 1$, тады знаходзім

$$C_1 = 1, C_2 = \frac{1}{2!}, C_3 = \frac{1}{3!}, \dots, C_n = \frac{1}{n!}, \dots$$

гэта значыць

$$x_2(t) = \frac{1}{t} \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots \right) = \frac{e^t}{t}.$$

Агульнае рашэнне зыходнага ўраўнення запішам у выглядзе $x = \overline{C}_1 x_1(t) + \overline{C}_2 x_2(t)$, дзе $\overline{C}_1$ і $\overline{C}_2$ – адвольныя пастаянныя.

Прыклад 3. Знайсці першыя шэсць членаў раскладання ў ступенны рад рашэння дыферэнцыяльнага ўраўнення

$27t^3 \ddot{x} - 10x = 0$, якое задавальняе пачатковым умовам $x_0 = 1$,

$$\dot{x}_0 = \frac{1}{3}, \ddot{x}_0 = -\frac{2}{9} \text{ пры } t_0 = 1.$$

У сілу таго, што $t_0 = 1$, рашэнне будзем шукаць у выглядзе рада па ступенях $(t-1)$:

$$x(t) = x(1) + \frac{\dot{x}(1)}{1!}(t-1) + \frac{\ddot{x}(1)}{2!}(t-1)^2 + \frac{\ddot{\ddot{x}}(1)}{3!}(t-1)^3 +$$

$$+ \frac{x^{IV}(1)}{4!}(t-1)^4 + \frac{x^V(1)}{5!}(t-1)^5 + \dots$$

Першыя тры каэфіцыенты вызначаюцца пачатковымі ўмовамі: $x_0 = x(1) = 1$, $\dot{x}_0 = \dot{x}(1) = \frac{1}{3}$, $\ddot{x}_0 = \ddot{x}(1) = -\frac{2}{9}$. Пры $t = 1$ з ураўнення $27t^3\ddot{x} - 10x = 0$ знаходзім $27 \cdot 1^3\ddot{x}(1) - 10 \cdot 1 = 0$, гэта

значыць $\ddot{x}(1) = \frac{10}{27} = \frac{10}{3^3}$. Каб знайсці $x^{IV}(1)$ і $x^V(1)$,

прадыферэнцуем зыходнае ўраўненне

$$27 \cdot 3t^2\ddot{x} + 27t^3x^{IV} - 10\dot{x} = 0,$$

$$27 \cdot 3 \cdot 2t\ddot{x} + 2 \cdot 27 \cdot 3t^2x^{IV} + 27t^3x^V - 10\ddot{x} = 0.$$

З першага ўраўнення пры $t = 1$ атрымліваем

$$27 \cdot 3 \cdot \frac{10}{3^3} + 27x^{IV} - 10 \cdot \frac{1}{3} = 0, \quad x^{IV}(1) = -\frac{80}{3^4}.$$

Другое ўраўненне дае магчымасць знайсці $x^V(1)$:

$$27 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{10}{3^3} + 2 \cdot 27 \cdot 3 \left(-\frac{80}{3^4}\right) + 27x^V(1) - 10 \cdot \left(-\frac{2}{9}\right) = 0,$$

$$x^V(1) = \frac{880}{3^5}.$$

Падстаўляючы значэнні функцыі і яе вытворных у раскладанне, атрымліваем шэсць членаў шуканага рашэння

$$x = 1 + \frac{1}{3}(t-1) - \frac{1}{3^2}(t-1)^2 + \frac{5}{3^4}(t-1)^3 - \frac{10}{3^5}(t-1)^4 + \frac{22}{3^6}(t-1)^5 + \dots$$

§ 10. Ураўненне Беселя

Лінейнае дыферэнцыяльнае ўраўненне са зменнымі каэфіцыентамі віду

$$t^2 \ddot{x} + t\dot{x} + (t^2 - \lambda^2)x = 0 \quad (\lambda = \text{const}) \quad (35)$$

назваецца ўраўненнем Беселя.

Рашэнне ўраўнення (35) будзем шукаць у выглядзе абагульненага ступеннага рада (34). Падстаўляючы (34) у (35), атрымаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (n + \rho)(n + \rho - 1) t^{n+\rho} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n + \rho) t^{n+\rho} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^{n+\rho+2} - \\ - \lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^{n+\rho} = 0$$

або

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n [(\rho + n)^2 + t^2 - \lambda^2] t^{n+\rho} = 0.$$

Прыраўняўшы да нуля каэфіцыенты пры кожнай ступені t у левай частцы ўраўнення, атрымаем сістэму

$$\begin{aligned} t^{\rho} | C_0 (\rho^2 - \lambda^2) &= 0, \\ t^{\rho+1} | C_1 [(\rho+1)^2 - \lambda^2] &= 0, \\ t^{\rho+2} | C_2 [(\rho+2)^2 - \lambda^2] + C_0 &= 0, \\ t^{\rho+3} | C_3 [(\rho+3)^2 - \lambda^2] + C_1 &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ t^{\rho+n} | C_n [(\rho+n)^2 - \lambda^2] + C_{n-2} &= 0, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Дапусціўшы, што $C_0 \neq 0$, з дадзенай сістэмы знаходзім $\rho_{1,2} = \pm \lambda$.
Няхай $\rho_1 = \lambda$. Тады каэфіцыенты з няцотнымі індэксамі роўны нулю, а для каэфіцыентаў з цотнымі індэксамі будзем мець

$$C_2 = -\frac{C_0}{1 \cdot 2^2(\lambda+1)}, C_4 = -\frac{C_2}{(2\lambda+4) \cdot 4} = \frac{C_0}{2!2^4(\lambda+1)(\lambda+2)},$$

$$C_6 = -\frac{C_4}{(6+\lambda)^2 - \lambda^2} = -\frac{C_0}{3!2^6(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)};$$

$$C_{2n} = \frac{(-1)^n C_0}{2 \cdot 4 \dots (2n) \cdot 2^n (1+\lambda)(2+\lambda) \dots (n+\lambda)} =$$

$$= \frac{(-1)^n C_0}{n! 2^{2n} (\lambda+1)(\lambda+2) \dots (\lambda+n)},$$

дзе каэфіцыент C_0 застаецца пастаянным. Падстаўляючы знойдзеныя каэфіцыенты ў рад (34), атрымаем рашэнне

$$x_1(t) = C_0 t^\lambda \left[1 - \frac{t^2}{2(2\lambda+2)} + \frac{t^4}{2 \cdot 4(2\lambda+2)(2\lambda+4)} - \frac{t^6}{2 \cdot 4 \cdot 6(2\lambda+2)(2\lambda+4)(2\lambda+6)} + \dots \right] = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{\lambda+2n}}{4^n n! (\lambda+1)(\lambda+2) \dots (\lambda+n)}.$$

Пры $\rho_2 = -\lambda$ усе каэфіцыенты C_n аналагічна вызначаюцца толькі ў выпадку, калі λ не роўны цэламу ліку. Тады рашэнне $x_2(t)$ можна атрымаць, замяніўшы ў рашэнні $x_1(t)$ велічыню λ на $-\lambda$:

$$x_2(t) = C_0 t^{-\lambda} \left[1 - \frac{t^2}{2(-2\lambda+2)} + \frac{t^4}{2 \cdot 4(-2\lambda+2)(-2\lambda+4)} - \frac{t^6}{2 \cdot 4 \cdot 6(-2\lambda+2)(-2\lambda+4)(-2\lambda+6)} + \dots \right] = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{-\lambda+2n}}{4^n n! (-\lambda+1)(-\lambda+2) \dots (-\lambda+n)}.$$

Атрыманыя ступенныя рады збягаюцца для ўсіх значэнняў t , што лёгка ўстанавіць, выкарыстаўшы прымету Даламбера. Рашэнні $x_1(t)$ і $x_2(t)$ лінейна незалежныя, таму што іх стасунак не з'яўляецца пастаянным (гл. прыклад 2.2).

Практыкаванне 1. Даказаць збегнасць атрыманых радоў і лінейную незалежнасць рашэнняў $x_1(t)$ і $x_2(t)$.

Рашэнне $x_1(t)$, памножанае на пастаянную $C_0 = \frac{1}{2^\lambda \Gamma(\lambda+1)}$,

дзе $\Gamma(\lambda+1)$ – гама-функцыя, якая вызначаецца няўласным інтэгралам

$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\lambda-1} dt$, ($\lambda > 0$) (падрабязна аб гама-функцыі гл. [20], глава VI, § 54, п. 54.5, с. 544), называецца функцыяй Беселя (або цыліндрычнай функцыяй парадку λ першага роду) і абазначаецца

сімвалам $J_\lambda(t)$. Рашэнне $x_2(t)$ пры $C_0 = \frac{1}{2^{-\lambda} \Gamma(-\lambda+1)}$

абазначаюць

$$J_{-\lambda}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n-\lambda)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n-\lambda+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-\lambda}.$$

Адзначым, што пры $n-\lambda+1 \leq 0$ функцыя $\Gamma(n-\lambda+1)$ ператвараецца ў бясконцасць, гэта азначае, што адпаведныя члены рада для $J_{-\lambda}(t)$ роўны нулю.

Такім чынам, агульнае рашэнне ўраўнення (35) пры λ , не роўным цэламу ліку, мае выгляд $x(t) = C_1 J_\lambda(t) + C_2 J_{-\lambda}(t)$, дзе C_1, C_2 – адвольныя пастаянныя.

Можна паказаць, што пры λ , роўным палавіне няцотнага ліку, функцыя Беселя выражаецца праз элементарныя функцыі, таму што ў гэтым выпадку

$$\begin{aligned} J_\lambda(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^\lambda \Gamma(\lambda+1)} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{\lambda+2n}}{4^\lambda n! (\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+n)} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\lambda+n+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{\lambda+2n}. \end{aligned}$$

$\Gamma(\lambda)$ – функцыя, якая ўваходзіць у азначэнне функцыі Беселя, прымае наступныя значэнні:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi}, \dots$$

Функцыю Беселя пры $\lambda = n$, дзе n – натуральны, можна запісаць

$$J_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(n+k+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+n}.$$

Для адмоўнага цэлага λ частковае рашэнне не выражаецца функцыяй Беселя першага роду, і яго патрэбна адшукваць у выглядзе

$$N_n(t) = \lim_{\lambda \rightarrow n} \frac{J_\lambda(t) \cos(\pi\lambda) - J_{-\lambda}(t)}{\sin(\pi\lambda)}, \quad \lambda - \text{няцэлае}.$$

Функцыя $N_n(t)$ называецца функцыяй Беселя другога роду або функцыяй Нэймана (гл. [21], с. 927). У гэтым выпадку агульнае рашэнне ўраўнення (35) мае выгляд

$$x = C_1 J_n(t) + C_2 N_n(t).$$

Даследуем вагальны характар рашэнняў ураўнення (35) у інтэрвале $0 < t < +\infty$ (гл. § 8). Прывядзём гэтае ўраўненне да віду (30)

з дапамогай падстаноўкі $x = z \cdot t^{-\frac{1}{2}}$. Будзем мець

$$\ddot{z} + \left(1 - \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{t^2} \right) z = 0.$$

Параўноўваючы яго з ураўненнем $\ddot{y} + y = 0$ (гл. (31)), заключаем: адлегласць паміж паслядоўнымі нулямі ўсякага рашэння ўраўнення (35) больш за π пры $\lambda > \frac{1}{2}$ і $\lambda < -\frac{1}{2}$ і менш за π пры $-\frac{1}{2} < \lambda < \frac{1}{2}$

(коэффициент при z будет больше за 1 при $\lambda^2 < \frac{1}{4}$ и меньше за 1

при $\lambda^2 > \frac{1}{4}$). При $\lambda = \pm \frac{1}{2}$ адлегасць паміж паслядоўнымі нулямі

функцый Беселя дакладна роўна π . Гэта відавочна, таму што

адпаведнымі функцыямі Беселя з'яўляюцца $J_{\frac{1}{2}}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sin t$,

$$J_{-\frac{1}{2}}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos t.$$

Заўважаючы, што пры дастаткова вялікім t выраз

$1 - \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{t^2}$ імкнецца да 1 , можна сцвярджаць, што адлегласць

паміж паслядоўнымі нулямі любой функцыі Беселя імкнецца да π , калі t неабмежавана ўзрастае, гэта значыць, што вагальны характар функцый $J_{\lambda}(t)$ і $J_{-\lambda}(t)$ набліжаецца да вагальнага характару функцый $\sin t$ і $\cos t$.

Прыклад 1. Разгледзім на інтэрвале $0 < t < +\infty$ ураўненне

Беселя $\ddot{x} + \frac{1}{t} \dot{x} + x = 0$. Увёўшы падстаноўку

$$x(t) = z(t) \cdot e^{-\frac{1}{2} \int_1^t \frac{d\tau}{\tau}} = \frac{y(t)}{\sqrt{t}}$$

(гл. § 8), для $y(t)$ атрымаем дыферэнцыяльнае ўраўненне

$$\ddot{z} + \left(1 + \frac{1}{4t^2}\right)z = 0. \quad (36)$$

Адным з рашэнняў зададзенага ўраўнення з'яўляецца функцыя ну-

лявога парадку $x = J_0(t) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{2^{2k} [k!]^2}$. Адапаведнае рашэнне ўраўнення (36) мае выгляд

$$z(t) = \sqrt{t} J_0(t).$$

Ураўненне (36) параўнаем з ураўненнем $\ddot{y} + y = 0$. Рашэнне $y = \sin t$ гэтага ўраўнення мае на інтэрвале $(0; +\infty)$ бясконцае мноства нулёў $t_k = k\pi$ ($k = 1, 2, \dots$). Па тэарэме 8.6 рашэнне $z(t)$ ураўнення (36), а значыць, і функцыя $J_0(t)$ маюць на кожным з адрэзкаў $[k\pi; (k+1)\pi]$ ($k = 1, 2, \dots$), прынамсі, адзін нуль.

Заўвага 1. Да ўраўнення Беселя прыводзяцца ўраўненні віды

$$t^2 \ddot{x} + t\dot{x} + (k^2 t^2 - \lambda^2)x = 0, \quad (37)$$

дзе k – некаторая пастаянная ($k \neq 0$). Падстаноўка $\zeta = kt$ прыводзіць ураўненне (37) да ўраўнення

$$\zeta^2 \frac{d^2 x}{d\zeta^2} + \zeta \frac{dx}{d\zeta} + (\zeta^2 - \lambda^2)x = 0. \quad (38)$$

Агульнае рашэнне ўраўнення (38) (пры λ , не роўным цэламу ліку) будзе $x = C_1 J_\lambda(\zeta) + C_2 J_{-\lambda}(\zeta)$, тады агульнае рашэнне (37) прыме выгляд

$$x = C_1 J_\lambda(kt) + C_2 J_{-\lambda}(kt).$$

Пры λ цэлым: $x = C_1 J_n(kt) + C_2 N_n(kt)$.

Заўвага 2. Ураўненне віды

$$t^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + at \frac{dx}{dt} + (b + ct^m)x = 0,$$

дзе a, b, c, m – пастаянныя ($c > 0, m \neq 0$), прыводзіцца з дапамогай новай незалежнай зменнай τ і новай функцыі u па формулах

$$x = \left(\frac{\tau}{\gamma}\right)^{-\frac{\alpha}{\beta}} u, \quad t = \left(\frac{\tau}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\beta}}, \quad \text{дзе} \quad \alpha = \frac{a-1}{2}, \quad \beta = \frac{m}{2}, \quad \gamma = \frac{2\sqrt{c}}{m} \quad \text{да}$$

ўраўнення Беселя

$$\tau^2 \frac{d^2 u}{d\tau^2} + \tau \frac{du}{d\tau} + (\tau^2 - \lambda^2) u = 0, \quad \lambda^2 = \frac{(a-1)^2 - 4b}{m^2}.$$

Практыкаванне 2. Даказаць сцвярджэнне, сфармуляванае ў заўвазе 2.

Прыклад 2. Рашыць ураўненне $t^2 \ddot{x} + t\dot{x} + \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)x = 0$.

Рашэнне. Тут $\lambda = \frac{1}{2}$, таму агульнае рашэнне ўраўнення мае выгляд $x = C_1 J_{\frac{1}{2}} + C_2 J_{-\frac{1}{2}}$, дзе

$$J_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \cdot t^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{t^2}{2 \cdot 3} + \frac{t^4}{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{t^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots \right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin t}{\sqrt{t}}.$$

Такім жа чынам атрымліваем $J_{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\cos t}{\sqrt{t}}$. Таму агульнае рашэнне запішацца так:

$$x = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} (C_1 \sin t + C_2 \cos t).$$

Прыклад 3. Знайсці агульнае рашэнне ўраўнення

$$t^2 \ddot{x} + t\dot{x} + \left(4t^2 - \frac{1}{4}\right)x = 0.$$

Рашэнне. Увядзём замену $\zeta = 2t$ (заўвага 1). Тады

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dt} = 2 \frac{dx}{d\zeta}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 4 \frac{d^2x}{d\zeta^2}.$$

У выніку атрымліваем ураўненне Беселя

$$\zeta^2 x''_{\zeta\zeta} + \zeta x'_{\zeta} + \left(\zeta^2 - \frac{1}{4} \right) x = 0,$$

якое мае пры няцэлым $\lambda = \frac{1}{2}$ рашэнне

$$x = C_1 J_{\frac{1}{2}}(\zeta) + C_2 J_{-\frac{1}{2}}(\zeta) = C_1 J_{\frac{1}{2}}(2t) + C_2 J_{-\frac{1}{2}}(2t).$$

Прыклад 4. Знайсці агульнае рашэнне ўраўнення

$$t^2 \ddot{x} - 3t \dot{x} + (t^4 - 12)x = 0.$$

Рашэнне. У гэтым выпадку (гл. заўвагу 2) маем каэфіцыенты:

$$a = -3, \quad b = -12, \quad c = 1, \quad m = 4, \quad \text{таму } \alpha = \frac{a-1}{2} = -2, \quad \beta = \frac{m}{2} = 2,$$

$$-\frac{\alpha}{\beta} = 1, \quad \frac{1}{\beta} = \frac{1}{2}, \quad \gamma = \frac{2\sqrt{c}}{m} = \frac{1}{2}, \quad \lambda^2 = \frac{(a-1)^2 - 4b}{m^2} = 4.$$

Уводзім новую незалежную зменную τ і функцыю u па формулах

$$x = \left(\frac{\tau}{\gamma} \right)^{-\frac{\alpha}{\beta}} u, \quad \text{або } x = 2u\tau, \quad \text{дзе } u = u(\tau),$$

$$t = \left(\frac{\tau}{\gamma} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{або } t = \sqrt{2\tau}.$$

Тады

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{d}{d\tau}(2u\tau)}{\frac{dt}{d\tau}} = \sqrt{2\tau} \frac{d}{d\tau}(2u\tau) = 2\sqrt{2} \left(\tau^{\frac{3}{2}} \frac{du}{d\tau} + \tau^{\frac{1}{2}} u \right).$$

Аналагічна знаходзім

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 4\tau^2 \frac{d^2u}{d\tau^2} + 10\tau \frac{du}{d\tau} + 2u. \quad \text{Падставіўшы ў}$$

зыходнае ўраўненне замест $t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}$ іх выразы праз τ і u ,

атрымліваем ураўненне Беселя $\tau^2 \frac{d^2u}{d\tau^2} + \tau \frac{du}{d\tau} + (\tau^2 - 4)u = 0$, агуль-

нае рашэнне якога $u = C_1 J_2(\tau) + C_2 N_2(\tau)$. Пасля пераходу да змен-

ных t і x па формулах $\tau = \frac{t^2}{2}, u = \frac{x}{t^2}$ атрымліваем рашэнне дадзе-

нага ўраўнення $x = t^2 \left(C_1 J_2 \left(\frac{t^2}{2} \right) + C_2 N_2 \left(\frac{t^2}{2} \right) \right)$.

§ 11. Перыядычныя рашэнні лінейных дыферэнцыяльных ураўненняў

Часта ў прыкладных задачах патрабуецца знайсці перыядычныя рашэнні тых ці іншых дыферэнцыяльных ураўненняў. У гэтых выпадках часам мэтазгодна адшукваць такія рашэнні ў выглядзе сумы некаторага рада Фур'е:

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi}{l} t \right).$$

Няхай, напрыклад, патрабуецца знайсці перыядычнае рашэнне лінейнага ўраўнення другога парадку з пастаяннымі каэфіцыентамі

$$\ddot{x} + p_1 \dot{x} + p_2 x = f(t). \quad (39)$$

Для існавання перыядычнага рашэння гэтага ўраўнення неабходна патрабаваць, каб $f(t)$ была перыядычнай функцыяй. Будзем лічыць, што $f(t)$ мае перыяд 2π (калі яна мае перыяд T , то,

уводзячы замену незалежнай зменнай $t_1 = \frac{2\pi}{T} t$, па t_1 яна будзе мець перыяд 2π) і раскладаецца ў рад Фур'е

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt).$$

Перыядычнае рашэнне адшукваем у выглядзе

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kt + B_k \sin kt). \quad (40)$$

Прадыферэнцуем рад (40) пачленна два разы і падставім у (39). Будзем падбіраць каэфіцыенты рада (40) так, каб роўнасць (39) выконвалася фармальна. Параўноўваючы свабодныя члены і каэфіцыенты пры $\cos kt$ і $\sin kt$ у левых і правых частках атрыманай роўнасці, фармальна знаходзім

$$A_0 = \frac{a_0}{p_2}; \quad A_k = \frac{(p_2 - k^2)a_k - p_1 k b_k}{(p_2 - k^2)^2 + p_1^2 k^2}, \quad (41)$$

$$B_k = \frac{(p_2 - k^2)b_k + p_1 k a_k}{(p_2 - k^2)^2 + p_1^2 k^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Такім чынам, каб існавала рашэнне віды (40), неабходна, каб $p_2 \neq 0$

пры $a_0 \neq 0$. Рашэнне $x(t)$ запішацца $x(t) = \frac{a_0}{2p_2} +$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{((p_2 - k^2)a_k - p_1 k b_k) \cos kt + ((p_2 - k^2)b_k + p_1 k a_k) \sin kt}{(p_2 - k^2)^2 + p_1^2 k^2}.$$

Калі $p_1 = 0$ і $p_2 = k^2$, $k = 1, 2, \dots$, то перыядычнае рашэнне будзе існаваць у выпадку адсутнасці ў правай частцы членаў $a_k \cos kt$, $b_k \sin kt$, якія прыводзяць да з'явы рэзананса. Гэта значыць, згодна з азначэннем рада Фур'е (гл. [22], глава VII, § 55, п. 55.1, с. 9), што, толькі калі выконваюцца ўмовы

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt \, dt = 0, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt \, dt = 0, \quad (42)$$

перыядычныя рашэнні існуюць. Пры гэтым каэфіцыенты A_k і B_k

при $k \neq n$ знаходзяцца па формулах (41), а каэфіцыенты A_n і B_n при $k = n$ ($p_1 = 0, p_2 = n^2$) застаюцца адвольнымі, таму што выраз $A_n \cos nt + B_n \sin nt$ з'яўляецца агульным рашэннем адпаведнага аднароднага ўраўнення.

Калі ўмовы (42) не выконваюцца, ураўненне не мае перыядычных рашэнняў, наступае рэзананс і складніку, які прыводзіць да гэтай з'явы, $a_k \cos kt + b_k \sin kt$ у правай частцы будзе адпавядаць неперыядычны складнік віду $t(A_k \cos kt + B_k \sin kt)$ у той час, калі астатнія складнікі ў агульным рашэнні будуць перыядычнымі функцыямі.

Пры $p_2 = 0$ і $a_0 = 0$ каэфіцыент A_0 застаецца нявызначаным і ўраўненне (39) мае бясконцае мноства перыядычных рашэнняў, якія адрозніваюцца адно ад другога пастаянным складнікам.

Прыклад 1. Знайсці перыядычныя рашэнні ўраўнення

$$\ddot{x} + 2x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k^4}.$$

Рашэнне. Падстаўляючы ў рад (40) каэфіцыенты A_k, B_k , вызначаныя па формулах (41), будзем мець

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k^2(2 - k^2)}.$$

Прыклад 2. Знайсці перыядычныя рашэнні ўраўнення

$$\ddot{x} + 4x = \sin^2 t.$$

Рашэнне. Умовы (42) існавання перыядычнага рашэння запішуцца $\int_0^{2\pi} \sin^2 t \cdot \sin 2t \, dt = 0$, але $\int_0^{2\pi} \sin^2 t \cdot \cos 2t \, dt \neq 0$. Таму перыядычнага рашэння не існуе.

Прыклад 3. Знайсці перыядычнае рашэнне ўраўнення

$$\ddot{x} - x = |\sin t|.$$

Рашэнне. Функцыя $f(t) = |\sin t|$ – перыядычная з перыядам π . Раскладваем яе ў рад Фур’е ў прамежку $(-\pi; \pi)$

$$|\sin t| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kt}{4k^2 - 1}.$$

Рашэнне дадзенага ўраўнення адшукваем у выглядзе (40). Згодна з умовай задачы і раскладаннем правай часткі ў рад Фур’е (гл. (39)),

$$\text{маем } p_1 = 0, p_2 = -1, \quad a_0 = \frac{4}{\pi}, \quad a_{2k-1} = 0, \quad a_{2k} = -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{4k^2 - 1},$$

$$b_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots). \quad \text{Формулы (41) даюць } A_0 = -\frac{4}{\pi}, \quad A_{2k-1} = 0,$$

$$A_{2k} = -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{16k^2 - 1}, \quad B_k = 0. \quad \text{Перыядычнае рашэнне мае від}$$

$$x(t) = -\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kt}{16k^2 - 1}.$$

§ 12. Крайовыя задачы

Акрамя задачы Кашы, для звычайнага дыферэнцыяльнага ўраўнення часта даводзіцца рашаць так званыя крайовыя або гранічныя задачы. У гэтых задачах значэнне шуканай функцыі і яе вытворных задаецца не ў адным, а ў двух пунктах, што абмяжоўваюць адрэзак, на якім патрабуецца вызначыць рашэнне.

Разгледзім падрабязна крайовыя задачы для лінейных ураўненняў другога парадку

$$l(x) = a_0(t)\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_2(t)x = f(t), \quad a \leq t \leq b. \quad (43)$$

Каб рашыць крайовую задачу для ўраўнення (43), можна знайсці агульнае рашэнне гэтага ўраўнення і падабраць значэнні адвольных пастаянных, што ўваходзяць у формулу агульнага рашэння так, каб задавальняліся крайовыя ўмовы

$$\alpha x(a) + \beta \dot{x}(a) = 0, \quad \gamma x(b) + \delta \dot{x}(b) = 0. \quad (44)$$

Адзначым, што крайвая задача не заўсёды вырашальная, а калі вырашальная, то не абавязкова адзіным чынам. Напрыклад, як лёгка бачыць, крайвая задача

$$\ddot{x} + x = 1, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

не мае рашэння.

Функцыяй Грына крайвой задачы (43), (44), $a_0(t) \neq 0$ $\forall t \in (a, b)$, называецца функцыя $G(t, s)$, вызначаная пры $t \in [a, b]$, $s \in (a, b)$ і такая, што пры кожным фіксаваным $s \in (a, b)$ валодае ўласцівасцямі:

- 1) пры $t \neq s$ функцыя $G(t, s)$ задавальняе адпаведнаму аднароднаму ўраўненню;
- 2) пры $t = a$ і $t = b$ функцыя задавальняе крайвым умовам (44);
- 3) пры $t = s$ функцыя $G(t, s)$ непарыўная па t , а вытворная яе па t мае скачок, роўны $\frac{1}{a_0(s)}$, гэта значыць

$$G(s+0, s) = G(s-0, s), \quad \dot{G}_t \Big|_{t=s+0} = \dot{G}_t \Big|_{t=s-0} + \frac{1}{a_0(s)}.$$

Для таго, каб знайсці функцыю Грына крайвой задачы (43), (44) неабходна знайсці два частковыя рашэнні $x_1(t)$ і $x_2(t)$ адпаведнага аднароднага ўраўнення

$$a_0(t)\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_2(t)x = 0,$$

якія адрозніваюцца ад $x \equiv 0$ і задавальняюць адпаведна першай і другой з крайвых умоў (44), прычым $x_1(t)$ не задавальняе адначасова абедзвюм крайвым умовам.

Пры гэтым функцыю Грына адшукваем у выглядзе

$$G(t, s) = \begin{cases} \varphi(s)x_1(t) & \text{пры } a \leq t \leq s, \\ \psi(s)x_2(t) & \text{пры } s \leq t \leq b, \end{cases} \quad (45)$$

дзе функцыі $\varphi(s)$ і $\psi(s)$ выбіраем так, каб выконваліся сфармуляваныя ўласцівасці для функцыі $G(t,s)$, гэта значыць, каб

$$\psi(s)x_2(s) = \varphi(s)x_1(s), \quad \psi(s)\dot{x}_2(s) - \varphi(s)\dot{x}_1(s) = \frac{1}{a_0(s)} \quad (46)$$

(гл. уласцівасць 3)).

Калі функцыя Грына знойдзена, то рашэнне краёвай задачы (43), (44) адшукваецца па формуле

$$x(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)ds.$$

Гэтая формула правяраецца непасрэднай падстаноўкай у задачу (43), (44). (Аб умовах вырашальнасці краёвых задач гл. [23], глава IV, § 2, с. 114.)

Уласным значэннем краёвай задачы

$$a_0(t)\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_2(t)x = \lambda x, \\ \alpha x(a) + \beta \dot{x}(a) = 0, \quad \gamma x(b) + \delta \dot{x}(b) = 0$$

называецца такі лік $\lambda = \lambda_0$, пры якім гэта задача мае нетрывіяльнае рашэнне $x = \varphi(t)$. Гэтае рашэнне называецца ўласнай функцыяй (падрабязна гл. [23], глава IV, § 3, с. 123).

Заўвага 1. Часта пры рашэнні краёвых задач выкарыстоўваюць наступны прыём. Няхай зададзена лінейнае дыферэнцыяльнае ўраўненне (43) з краёвымі ўмовамі (44), тады рашэнне гэтай задачы шукаем у выглядзе

$$x(t) = x_0(t) + \alpha u(t) + \beta v(t), \quad (47)$$

дзе функцыі $x_0(t)$, $u(t)$, $v(t)$ знаходзяцца адпаведна з трох задач Кашы:

- 1) $l(x) = f(t)$, $x(a) = \dot{x}(a) = 0$;
- 2) $l(x) = 0$, $x(a) = 1$, $\dot{x}(a) = 0$;
- 3) $l(x) = 0$, $x(a) = 0$, $\dot{x}(a) = 1$.

Падстаўляючы зададзеныя краёвыя ўмовы ў (47), атрымаем сістэму двух ураўненняў для знаходжання каэфіцыентаў α і β .

Заўвага 2. Дэтэрмінант сістэмы (46), які з'яўляецца дэтэрмінантам Вронскага $W[x_1(t), x_2(t)] = W(t)$ у пункце $t = s$, не роўны нулю, і функцыі $\varphi(s)$ і $\psi(s)$, што задавальняюць сістэме (46), лёгка знаходзяцца $\varphi(s) = \frac{x_2(s)}{W(s) \cdot a_0(s)}$, $\psi(s) = \frac{x_1(s)}{W(s) \cdot a_0(s)}$.

Адсюль

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{x_2(s)x_1(t)}{W(s) \cdot a_0(s)} & \text{пры } a \leq x \leq s, \\ \frac{x_1(s)x_2(t)}{W(s) \cdot a_0(s)} & \text{пры } s \leq x \leq b. \end{cases}$$

Прыклад 1. Знайсці рашэнне ўраўнення $\ddot{x} + x = 0$, якое задавальняе крайвым умовам $x(0) = 0$, $x(a) = x_0$.

Рашэнне. Агульнае рашэнне дадзенага ўраўнення мае від $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t$ (гл. § 5). Умова $x(0) = 0$ задавальняецца, калі $C_1 = 0$, пры гэтым $x = C_2 \sin t$. Калі $a \neq \pi n$, дзе n — цэлы лік, то з другой гранічнай умовы знаходзім $x_0 = C_2 \sin a$, $C_2 = \frac{x_0}{\sin a}$. У

выніку гэтага існуе адзінае рашэнне дадзенай краёвай задачы $x = \frac{x_0}{\sin a} \sin t$. Калі $a = \pi n$, то з другой краёвай умовы маем

$C_2 \sin \pi n = x_0$. Значыць, калі $x_0 = 0$, краёвая задача мае бясконцае мноства рашэнняў $x = C_2 \sin t$, дзе C_2 можа прымаць любыя значэнні, а пры $x_0 \neq 0$ краёвая задача не мае рашэнняў.

Прыклад 2. Знайсці функцыю Грына краёвай задачы

$$\ddot{x}(t) + x(t) = f(t), \quad x(0) = 0, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Рашэнне. Частковыя рашэнні адпаведнага аднароднага

ўраўнення, якія задавальняюць умовам $x(0) = 0$ і $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, адпаведна маюць від $x_1(t) = \sin t$ і $x_2(t) = \cos t$, таму (гл. заўвагу 2, пры гэтым $W[x_1(t), x_2(t)] = -1$)

$$G(t, s) = \begin{cases} -\cos s \cdot \sin t & \text{пры } 0 \leq t \leq s, \\ -\sin s \cdot \cos t & \text{пры } s \leq t \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Прыклад 3. Пабудоваць функцыю Грына для краёвой задачы $\ddot{x} = f(t)$, $x(-1) = x(1) = 0$, і з дапамогай яе запісаць рашэнне.

Рашэнне. Агульнае рашэнне ўраўнення $\ddot{x} = 0$ ёсць $x = C_1 + C_2 t$. Умове $x(-1) = 0$ задавальняе, напрыклад, рашэнне $x_1(t) = 1 + t$, а другой краёвой умове – рашэнне $x_2(t) = 1 - t$. Функцыю Грына для ўказанай краёвой задачы адшукваем у выглядзе

$$G(t, s) = \begin{cases} \varphi(s)(1+t), & -1 \leq t \leq s, \\ \psi(s)(1-t), & s \leq t \leq 1, \end{cases}$$

дзе $\varphi(s)$ і $\psi(s)$ вызначаюцца з умоў

$$\psi(s)(1-s) = \varphi(s)(1+s), \quad -\psi(s) - \varphi(s) = 1.$$

Адсюль $\varphi(s) = -\frac{1-s}{2}$, $\psi(s) = -\frac{1+s}{2}$. Такім чынам, шуканая функцыя Грына мае від

$$G(t, s) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(1-s)(1+t), & -1 \leq t \leq s, \\ -\frac{1}{2}(1+s)(1-t), & s \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Рашэнне дадзенай краёвой задачы з дапамогай гэтай функцыі запішацца так:

$$x = \int_{-1}^1 G(t,s)f(s)ds = -\frac{1+t}{2} \int_{-1}^t (1-s)f(s)ds - \frac{1-t}{2} \int_t^1 (1+s)f(s)ds.$$

Прыклад 4. Рашыць краевую задачу

$$t\ddot{x} - \dot{x} = \frac{3}{t^2}, \quad x(1) = \dot{x}(1), \quad 3x(2) - 2\dot{x}(2) = 3.$$

Рашэнне. Прыменім метад прывядзення краевых задач да задач Кашы (заўвага 1). У дадзеным выпадку такое прывядзенне мала эфектыўнае, але ў некаторых іншых выпадках, асабліва ў сувязі з метадам лікавага рашэння, гэты прыём бывае карысным.

Будзем адшукваць рашэнне ўказанай краевой задачи ў выглядзе $x = x_0(t) + \alpha u(t) + \beta v(t)$, дзе $x_0(t), u(t), v(t)$ адпавядае рашэнню такіх задач Кашы:

$$\text{а) } t\ddot{x} - \dot{x} = \frac{3}{t^2}, \quad x(1) = \dot{x}(1) = 0;$$

$$\text{б) } t\ddot{x} - \dot{x} = 0, \quad x(1) = 1, \quad \dot{x}(1) = 0;$$

$$\text{в) } t\ddot{x} - \dot{x} = 0, \quad x(1) = 0, \quad \dot{x}(1) = 0.$$

Рашыўшы кожную з гэтых задач Кашы, знаходзім

$$x_0(t) = \frac{1}{2}(t^2 - 3) + \frac{1}{t}, \quad u(t) = 1, \quad v(t) = \frac{1}{2}(t^2 - 1).$$

Падбярэм у выразе

$$x = \frac{1}{2}(t^2 - 3) + \frac{1}{t} + \alpha + \frac{\beta}{2}(t^2 - 1)$$

каэфіцыенты α і β так, каб гэты выраз задавальняў крайвым умовам. Пасля яго падстаноўкі ў крайвыя ўмовы атрымліваем ураўненні для вызначэння α і β : $\alpha = \beta, 6\alpha + \beta = 7$. Адкуль $\alpha = \beta = 1$. Такім чынам, шуканае рашэнне мае выгляд

$$x = \frac{1}{2}(t^2 - 3) + \frac{1}{t} + 1 + \frac{1}{2}(t^2 - 1) = t^2 + \frac{1}{t} - 1.$$

Прыклад 5. Знайсці ўласныя значэнні і ўласныя функцыі краевой задачы $\ddot{x} = \lambda x, x(0) = 0, x(b) = 0, b > 0$.

Рашэнне. Пры $\lambda = 0$ атрымліваем $x = C_1 t + C_2$, і крайвым умовам задавальныя толькі трывіяльныя рашэнне, гэта значыць $\lambda = 0$ не з'яўляецца ўласным значэннем.

Пры $\lambda > 0$ агульнае рашэнне запісваецца так: $x = C_1 e^{\sqrt{\lambda} t} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda} t}$. Крайвым умовам задавальныя толькі $x \equiv 0$.

Няхай $\lambda < 0$. Агульнае рашэнне дадзенага ўраўнення мае від $x = C_1 \sin \sqrt{-\lambda} t + C_2 \cos \sqrt{-\lambda} t$. Крайвыя ўмовы выконваюцца пры $C_2 = 0, C_1 \sin \sqrt{-\lambda} b = 0$.

Такім чынам, пастаўленая крайвая задача мае ненульвыя рашэнні, калі $\sqrt{-\lambda} b = k\pi$, гэта значыць $\lambda = -\left(\frac{k\pi}{b}\right)^2, k = 1, 2, \dots$.

Уласныя функцыі, што адпавядаюць гэтым значэнням, маюць від

$$x_k(t) = \sin \frac{k\pi t}{b}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Варыянты заданняў для самастойнай працы

- I. 1. Рашыць ураўненне $\ddot{x} - 4\dot{x} + 3x = 0$.
2. Знайсці агульнае рашэнне ўраўнення $\ddot{x} + 2k\dot{x} + 2k^2 x = 5k^2 \sin kt$.
3. Рашыць метадам варыяцыі адвольных пастаянных ураўненне $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = e^{-2t} \ln t$.
4. Даказаць, што лінейнае дыферэнцыяльнае ўраўненне другога парадку $a(t)\ddot{x} + b(t)\dot{x} + c(t)x = 0$, дзе $a(t), b(t), c(t)$ – непарыўныя на некаторым інтэрвале $(t_0; t_1)$ функцыі, $a(t) \neq 0$, можна прывесці да віду $\frac{d}{dt} \left(p(t) \frac{dx}{dt} \right) + q(t)x = 0$.
5. Рашыць крайвую задачу $\ddot{x} = f(t), x(a) = x(b) = 0$.

II. 1. Рашыць ураўненне $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = \frac{t^2 + 2t + 2}{t^3}$.

2. Знайсці перыядычныя рашэнні ўраўнення $\ddot{x} + x = \cos t \cos 2t$.

3. Пабудаваць функцыю Грына краёвой задачы $\ddot{x} - k^2 x = f(t)$,
 $k \neq 0$, $x(-1) = x(1)$, $\dot{x}(-1) = \dot{x}(1)$.

4. Даказаць, што калі $\phi(t)$ і $\psi(t)$ – рашэнні ўраўнення $\frac{d}{dt}(p(t)\dot{x}) +$
 $+ q(t)x = 0$, то існуе такая пастаянная C , што $\phi(t)\dot{\psi}(t) -$
 $- \dot{\phi}(t)\psi(t) = \frac{C}{p(t)}$.

5. Рашыць ураўненне $t(t+1)\ddot{x} - (t+1)\dot{x} + x = 0$.

III. 1. Пабудаваць агульнае рашэнне ўраўнення Эйлера

$$t^2 \ddot{x} + t \dot{x} + 2x = 2 \cos(\ln t) + \sin(\ln t).$$

2. Пабудаваць рашэнне задачы Кашы ў выглядзе ступеннага рада
 $\ddot{x} + tx = 0$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$.

3. Знайсці рашэнні, што задавальняюць указаным краёвым умовам
 $\ddot{x} - 2\dot{x} - 3x = 0$, $x(0) = 1$, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

4. Праінтэграваць лінейнае аднароднае ўраўненне $x^{IV} + x = 0$.

5. Знайсці агульнае рашэнне ўраўнення Беселя $\ddot{x} + \frac{3}{t}\dot{x} + 4x = 0$.

IV. 1. Знайсці агульнае рашэнне дыферэнцыяльнага ўраўнення

$$\ddot{x} + \ddot{x} = t.$$

2. Пабудаваць функцыю Грына краёвой задачы $\ddot{x} + x = f(t)$,
 $x(0) = x(1) = 0$.

3. Паказаць, што ўсякае рашэнне ўраўнення $(1+t^2)\ddot{x} + t^{\frac{3}{2}} \cos^2 t x = 0$
мае бясконцае мноства нулёў.

4. Установіть від часткового рашэння ўраўнення

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = e^t t \sin t.$$

5. Знайсці перыядычныя рашэнні ўраўнення $\ddot{x} + 9x = \sin^3 t$.

- V. 1. Знайсці чатыры першыя члены раскладання ў ступенны рад дыферэнцыяльнага ўраўнення $t\ddot{x} + x \sin t = t$ пры пачатковых умовах $x(\pi) = 1, \dot{x}(\pi) = 0$.

2. Рашыць ураўненне Эйлера

$$(t+1)^3 \ddot{x} + 3(t+1)^2 \dot{x} + (t+1)x = 6 \ln(t+1).$$

3. Знайсці рашэнне ўраўнення $\ddot{x} - 2\dot{x} - 3x = 0$, якое задавальняе крайным умовам $x(0) = 1, \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t) = 2$.

4. Устанавіць від частковага рашэння ўраўнення

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + \dot{x} = (2t+1) \sin t + (t^2 - 4t) \cos t.$$

5. Праінтэграваць ураўненне $\ddot{x} + 9x = \sin^3 t$ метадам варыяцыі адвольных пастаянных.

- VI. 1. Знайсці агульнае рашэнне лінейнага аднароднага дыферэнцыяльнага ўраўнення другога парадку $\ddot{x} + p_1(t)\dot{x} + p_2(t)x = 0$, калі вядома адно яго частковае рашэнне $x_1 = x_1(t)$.

2. Указаць від частковага рашэння ўраўнення

$$\ddot{x} + x = t^2 \cos t + 2 \sin t + e^{2t} \sin 2t + t^3 e^t.$$

3. Праінтэграваць пры дапамозе рада ўраўненне $\ddot{x} + t\dot{x} + x = 0$.

4. Знайсці рашэнне, якое задавальняе гранічным умовам

$$\ddot{x} + x = t, \quad x(0) = 1, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

5. Рашыць ураўненне метадам варыяцыі адвольных пастаянных

$$\ddot{x} + x = \frac{1}{\sin x}.$$

VII. 1. Показав, що рашенні $x_0(t) = t^2 e^{2t}$, $x_1(t) = t e^{2t}$,

$x_2 = e^{2t}$ аднароднага лінейнага ўраўнення трэцяга парадку ўтвараюць базіс прасторы рашэнняў. Пабудаваць гэтае ўраўненне і запісаць для яго агульнае рашэнне.

2. Рашыць задачу Кашы $\ddot{x} - 3\dot{x} - 2x = 9e^{2t}$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = -3$, $\ddot{x}(0) = 3$.

3. Знайсці агульнае рашэнне ўраўнення Беселя $t^2 \ddot{x} + t\dot{x} + (t^2 - \frac{1}{4})x = 0$.

4. Знайсці агульнае рашэнне ўраўнення $x^{IV} + 5\ddot{x} + 4x = 0$.

5. Праінтэграваць ураўненне $\ddot{x} + x = \frac{t^3 - 6}{t^4}$.

VIII. 1. Складзі лінейнае аднароднае ўраўненне па яго агульным

рашэнні $x = (C_1 + C_2 t) e^{-\frac{t}{3}}$.

2. Знайсці агульнае рашэнне ўраўнення Беселя

$$t^2 \ddot{x} - 2t\dot{x} + 4(t^4 - 1)x = 0.$$

3. Указаць від частковага рашэння ўраўнення

$$\ddot{x} + \dot{x} = \sin t + t \cos t + e^{-t} \cos 2t + t^2.$$

4. Пабудаваць функцыю Грына для краявой задачы $\ddot{x} - x = f(t)$,

$x(t)$ абмежавана пры ўсіх $t \in (-\infty, \infty)$.

5. Знайсці агульнае рашэнне дыферэнцыяльнага ўраўнення

$$\ddot{x} + x = 2 \sin t - 6 \cos t - 12e^t.$$

IX. 1. Складзі лінейнае аднароднае ўраўненне другога парадку, агульным рашэннем якога з'яўляецца функцыя

$$x = (C_1 \cos t + C_2 \sin t) e^{2t} + 3e^{2t}.$$

2. Знайсці рашэнне ўраўнення $\ddot{x} + x = \operatorname{tg} t$, якое задавальняе кра-

явым умовам $x(0) = x\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

3. Знайсці чатыры першыя (не роўныя нулю) члены раскладання рашэння ўраўнення $\dot{x} = t^2 x + x^3$ пры $x(0) = 1$ у ступенны рад.
 4. Указаць від частковага рашэння ўраўнення $\ddot{x} - 9x = (t^2 + \sin 3t)e^{-3t}$.
 5. Рашыць ураўненне $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 2'$.
- X. 1. Знайсці ўсе рашэнні ўраўнення $\ddot{x} - 4\dot{x} + 5x = \sin t$, якія задавальняюць умове: $x(t)$ абмежавана пры $t \rightarrow \infty$.
2. Даказаць, што функцыі $x_1 = e^{\sqrt{2}t}(\cos \sqrt{2}t + i \sin \sqrt{2}t)$, $x_2 = e^{-\sqrt{2}t}(\cos \sqrt{2}t - i \sin \sqrt{2}t)$ утвараюць фундаментальную сістэму рашэнняў ураўнення $\ddot{x} - 4ix = 0$. Ці з'яўляюцца функцыі $u_1 = \operatorname{Re} x_1$, $u_2 = \operatorname{Re} x_2$, $v_1 = \operatorname{Im} x_1$, $v_2 = \operatorname{Im} x_2$ рашэннямі дадзенага ўраўнення? Ці мае дадзенае ўраўненне сапраўдныя рашэнні?
 3. Рашыць ураўненне $\ddot{x} + 4\dot{x} + 3x = ch x$.
 4. Знайсці тыя рашэнні ўраўнення $t\ddot{x} + 2\dot{x} + tx = 0$, якія выражаюцца радамі.
 5. Панізіць парадак і праінтэграваць ураўненне $\ddot{x} \sin^2 t = 2x$, якое мае частковае рашэнне $x = ctg t$.
- XI. 1. Знайсці агульнае рашэнне ўраўнення $\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0$, $p, q = \text{const}$.
2. Пабудаваць функцыю Грына, рашыць краявую задачу $t\ddot{x} + \dot{x} = 2t$, $x(1) = \dot{x}(1)$; $x(t)$ абмежавана пры $t \rightarrow 0$.
 3. Знайсці агульнае рашэнне дыферэнцыяльнага ўраўнення $\ddot{x} + \dot{x} = \frac{\sin t}{\cos^2 t}$.
 4. Паказаць, што рашэнні $x_0(t) = t^2$, $x_1(t) = t$, $x_2(t) = 1$, $x_3(t) = e^t$ аднароднага лінейнага ўраўнення чацвёртага парадку ўтвараюць

фундаментальную сістэму. Пабудавать гэтае ўраўненне і запісаць яго рашэнні.

5. Знайсці агульнае рашэнне ўраўнення $(t^2 - 1)\ddot{x} + 4t\dot{x} + 2x = 6t$,

калі яго частковыя рашэнні $x_1 = t, x_2 = \frac{t^2 + t + 1}{t + 1}$.

- XII. 1. Пабудавать фундаментальную сістэму рашэнняў для ўраўнення $\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \omega = \text{const} > 0$.

2. Знайсці ўласныя значэнні і ўласныя функцыі краёвой задачы

$$t^2 \ddot{x} + \frac{1}{4}x = \lambda x, x(1) = x(l) = 0.$$

3. Знайсці агульнае рашэнне ўраўнення Эйлера $t^2 \ddot{x} - t\dot{x} + x = 6t \ln t$.

4. Рашыць ураўненне $(2t + 1)\ddot{x} + 4t\dot{x} - 4x = 0$.

5. Устаноўце від частковага рашэння ўраўнення

$$x^{IV} + \ddot{x} = 7t - 3 \cos t - 1.$$

- XIII. 1. Знайсці перыядычныя рашэнні ўраўнення $\ddot{x} + 4x = \cos^2 t$.

2. Паказаць, што рашэнні $x_0(t) = \sin t, x_1(t) = \cos t, x_2(t) = e^t$ аднароднага лінейнага ўраўнення трэцяга парадку ўтвараюць фундаментальную сістэму рашэнняў. Пабудавать гэтае ўраўненне і запісаць для яго агульнае рашэнне.

3. Устаноўце від частковага рашэння ўраўнення $x^{VI} + x^{IV} = t \sin t + 1$.

4. Знайсці агульнае рашэнне ўраўнення $t^2(t + 1)\ddot{x} - 2x = 0$, калі яго частковае рашэнне $x_1 = 1 + \frac{1}{t}$.

5. Знайсці рашэнне ўраўнення Эйлера $t^2 \ddot{x} - 2x = 0$, якое задавальняе краевым умовам $x(1) = 1, \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t) = 0$.

- XIV. 1. Знайсці агульнае рашэнне ўраўнення $\ddot{x} + \dot{x} = 3$.

2. Знайсці ўласныя значэнні і ўласныя функцыі краёвой задачы $\ddot{x} = \lambda x, \dot{x}(0) = \dot{x}(b) = 0$.
3. Знайсці агульнае рашэнне ўраўнення $\ddot{x} - x = \frac{4t^2 - 1}{t\sqrt{t}}$.
4. Складзі лінейнае неаднароднае ўраўненне па яго агульным рашэнні $x = (C_1 + C_2 t) \cos t + (C_3 + C_4 t) \sin t$.
5. Указаць від частковага рашэння ўраўнення $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = ch t \cdot \sin t$.

XV. 1. Складзі лінейнае аднароднае ўраўненне і запісаць яго агульнае рашэнне, калі вядомы карані характарыстычнага ўраўнення $\lambda_{1,2} = 3 \pm 2i, \lambda_{3,4} = 1$.

2. Рашыць гранічную задачу $\ddot{x} + x = 0, x(0) = 1, x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.
3. Знайсці рашэнне ўраўнення $\ddot{x} + x = 6 \sin 2t$, якое задавальняе пачатковым умовам $x(0) = 0, \dot{x}(0) = -4$.
4. Рашыць ураўненне $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = 6te^t$ метадам варыяцыі адвольных пастаянных.
5. Знайсці перыядычныя рашэнні дыферэнцыяльнага ўраўнення $\ddot{x} + 9x = \sin^3 t$.

ГЛАВА III

СІСТЭМЫ ЛІНЕЙНЫХ ДЫФЕРЭНЦЫАЛЬНЫХ УРАЎНЕННЯЎ

§ 1. Аднародныя нармальныя сістэмы дыферэнцыяльных ураўненняў

Нармальнай лінейнай аднароднай сістэмай дыферэнцыяльных ураўненняў называецца сістэма

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j, \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in I = (a; b) \quad (1)$$

або ў матрычнай форме

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad (1')$$

дзе

$$x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \text{colon}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)),$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{ij}(t), j = \overline{1, n} \\ i = \overline{1, n} \end{pmatrix} -$$

квадратная матрыца памеру $n \times n$.

Будзем меркаваць, што $a_{ij}(t)$ — непарыўныя на інтэрвале I функцыі. У гэтым выпадку сістэма (1) будзе мець адзінае рашэнне, якое задавальняе пачатковым умовам

$$x_i(t_0) = x_i^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0,$$

дзе $x_1^0, \dots, x_n^0$ – любыя зададзеныя лікі, а t_0 узаты з інтэрвалу I . Гэтае рашэнне будзе непарыўным і вызначаным у разглядаемым інтэрвале I (гл. § 4.2, § 4.3). Рашэнне сістэмы (1) валодае наступнымі ўласцівасцямі:

1°. Калі $x_i^0 = 0, i = \overline{1, n}$, то, у сілу адзінасці, $x_i(t) \equiv 0, i = \overline{1, n}$.

2⁰. Калі $x^1, x^2, \dots, x^k$ – рашэнні сістэмы (1), дзе

$$x^j = colon(x_{l_j}, \dots, x_{m_j}), \quad j = \overline{1, k}, \text{ то}$$

$$x = C_1 x^1 + C_2 x^2 + \dots + C_k x^k - \quad (2)$$

рашэнне сістэмы (1).

Сапраўды, у сілу таго, што x^j – рашэнні, $j = \overline{1, k}$, маем $\dot{x}^j = A(t)x^j$. Прадыферэнцаваўшы (2) і карыстаючыся апошняй роўнасцю, атрымаем

$$\begin{aligned}\dot{x} &= C_1 \dot{x}^1 + C_2 \dot{x}^2 + \dots + C_k \dot{x}^k = C_1 A(t)x^1 + C_2 A(t)x^2 + \dots + C_k A(t)x^k = \\ &= A(t)(C_1 x^1 + C_2 x^2 + \dots + C_k x^k) = A(t)x.\end{aligned}$$

Нагадаємо, що вектарні функції $x^1, x^2, \dots, x^k$, визначані на $(a; b)$, називають лінійно залежними на $(a; b)$ (гл. § 2.2), коли існують лік $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, не роїні адначасово нулю, при якіх

$$\alpha_1 x^1(t) + \alpha_2 x^2(t) + \dots + \alpha_k x^k(t) \equiv 0, \quad t \in (a; b). \quad (3)$$

Калі роўнасць (3) выконваецца толькі пры $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0, \dots, \alpha_k = 0$, тады функцыі $x^1, x^2, \dots, x^k$ называюцца лінейна незалежнымі.

Роўнасць (3) у разгорнутым выглядзе запішацца

[illegible]

Дапусцім цяпер, што $x^1, x^2, \dots, x^n$ – рашэнні лінейнай сістэмы (1) на інтэрвале $(a; b)$. Утворым матрыцу, слупкамі якой з’яўляюцца гэтыя рашэнні,

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Мае месца

Тэарэма 1. I. Калі дэтэрмінант $|X(t)|$ матрыцы (4) адрозніваецца ад нуля хоць у адным пункце $t_0 \in (a; b)$, тады рашэнні $x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)$ сістэмы (1) лінейна незалежныя на $(a; b)$.

II. Калі ж існуе такі пункт $\tilde{t}_0 \in (a; b)$, у якім $|X(\tilde{t}_0)| = 0$, то рашэнні $x^1, x^2, \dots, x^n$ сістэмы (1) лінейна залежныя на $(a; b)$ і $|X(t)| \equiv 0, t \in (a; b)$.

Вынікам гэтай тэарэмы з’яўляецца сцвярджэнне: для таго, каб рашэнні $x^1, x^2, \dots, x^n$ лінейнай сістэмы (1) былі лінейна незалежнымі на $(a; b)$, неабходна і дастаткова, каб $|X(t_0)| \neq 0$ пры некаторым $t_0 \in (a; b)$.

Структура агульнага рашэння сістэмы (1) вызначаецца наступнай тэарэмай.

Тэарэма 2. Сістэма (1) мае роўна n лінейна незалежных рашэнняў $x^1, x^2, \dots, x^n$. Агульнае рашэнне гэтай сістэмы мае выгляд

$$x = C_1 x^1 + C_2 x^2 + \dots + C_n x^n, \quad (5)$$

дзе $C_1, C_2, \dots, C_n$ – адвольныя пастаянныя, а $x^1, x^2, \dots, x^n$ – гэтыя ці іншыя незалежныя рашэнні.

Доказ тэарэмы 2 прынцыпова не адрозніваецца ад доказу

тэарэмы 2.2.

Практыкаванне 1. Правесці самастойна падрабязны доказ тэарэмы 2.

Сукупнасць n лінейна незалежных на $(a; b)$ рашэнняў $x^1, x^2, \dots, x^n$ сістэмы (1) называецца фундаментальнай сістэмай рашэнняў, або базісам рашэнняў. Калі рашэнні $x^1, x^2, \dots, x^n$ лінейна незалежныя, то матрыцу (4) называюць фундаментальнай матрыцай сістэмы (1). З дапамогай яе агульнае рашэнне (5) можна запісаць у выглядзе $x = X(t) \cdot C$, дзе $C = colon(C_1, C_2, \dots, C_n)$ – вектар-слупок адвольных пастаянных. Калі $X(t_0) = E$, дзе E – адзінкавая матрыца, то $X(t)$ (абазначаюць яшчэ $X(t, t_0)$) называюць матрыцай Кашы.

Калі $X(t)$ – фундаментальная матрыца сістэмы (1), то мае месца формула Астраградскага-Ліувіля-Якабі (гл. формулу (2.2.8)):

$$|X(t)| = |X(t_0)| e^{\int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n a_{ii}(\tau) d\tau}. \quad (6)$$

Сапраўды,

$$\frac{d}{dt}|X(t)| = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1i} & \dots & x_{1n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \dot{x}_{i1} & \dot{x}_{i2} & \dots & \dot{x}_{ii} & \dots & \dot{x}_{in} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{ni} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Згодна з правілам дыферэнцавання па радках, вытворная ад дэтэрмінанта n -га парадку роўна суме n дэтэрмінантаў, якія атрымліваюцца з дадзенага заменай па чарзе элементаў 1-га, 2-га, ..., n -га радка іх вытворнымі.

Практыкаванне 2. Самастойна правесці доказ формулы (7). (Гл. [11], п. 8.6, с. 61).

У сілу таго, што $x^1, x^2, \dots, x^n$ рашэнні (1), маюць месца то-

еснасці $\dot{x}_{ij} \equiv \sum_{k=1}^n a_{ik}(t)x_{kj}, i = \overline{1, n}$. Замяняючы цяпер вытворныя

$\dot{x}_{i1}, \dots, \dot{x}_{in}$ іх значэннямі з папярэдняга выразу ў i -тым радку i -га складніка сумы (7), будзем мець, што гэты i -ы дэтэрмінант мае ў i -м радку элементы, якія з'яўляюцца сумамі n -складнікаў. Такі дэтэрмінант роўны суме дэтэрмінантаў, у кожным з якіх пакінута адпаведна па аднаму складніку (гл. [12], разд. 1, п. 4.1, с. 49). Але ўсе гэтыя дэтэрмінанты, за выключэннем аднаго, роўныя нулю, у сілу таго, што ў i -м радку ў іх стаяць элементы, якія з дакладнасцю да агульнага множніка супадаюць з элементамі некаторага іншага радка. Не роўным нулю будзе толькі адзін дэтэрмінант, у i -м радку якога будуць стаяць элементы $a_{ii}x_{i1}, \dots, a_{ii}x_{in}$. Гэты дэтэрмінант

будзе роўным $a_{ii} |X(t)|$. Таму $\frac{d}{dt}|X(t)| = |X(t)| \cdot \sum_{i=1}^n a_{ii}(t)$. Адкуль,

інтэгруючы атрыманае ўраўненне першага парадку, маем формулу (6).

Адзначым, што з формулы (6) можна атрымаць формулу (2.2.8).

Прыклад 1. Сістэма ўраўненняў $\dot{x} = (2 \sin t - \cos t)x + (\sin t - \cos t)y$, $\dot{y} = 2(\cos t - \sin t)x + (2 \cos t - \sin t)y$ мае рашэнні $x_1 = e^{-\cos t}$, $x_2 = -e^{\sin t}$, $y_1 = -e^{-\cos t}$, $y_2 = 2e^{\sin t}$. Правяршыць, ці ўтвараюць гэтыя рашэнні фундаментальную сістэму. Знайсці матрыцу Кашы гэтай сістэмы ўраўненняў і яе рашэнне пры ўмовах $x(\pi) = -1$, $y(\pi) = 2$.

Рашэнне. Праверым, ці задавальняюць дадзеныя функцыі зыходнай сістэме. Будзем мець

$$\frac{d}{dt}(e^{-\cos t}) = \sin t \cdot e^{-\cos t} \equiv (2 \sin t - \cos t)e^{-\cos t} - (\sin t - \cos t)e^{-\cos t},$$

$$\frac{d}{dt}(-e^{-\cos t}) = -\sin t \cdot e^{-\cos t} \equiv 2(\cos t - \sin t)e^{-\cos t} - (2 \cos t - \sin t)e^{-\cos t},$$

$$\frac{d}{dt}(-e^{\sin t}) = -\cos t \cdot e^{\sin t} \equiv (2 \sin t - \cos t)(-e^{\sin t}) + (\sin t - \cos t) \cdot 2e^{\sin t},$$

$$\frac{d}{dt}(2e^{\sin t}) = 2 \cos t \cdot e^{\sin t} \equiv 2(\cos t - \sin t)(-e^{\sin t}) + (2 \cos t - \sin t) \cdot 2e^{\sin t}.$$

Такім чынам, $\text{colon}(x_1, y_1)$ і $\text{colon}(x_2, y_2)$ ёсць рашэнне сістэмы. Дэтэрмінант

$$\begin{vmatrix} e^{-\cos t} & -e^{\sin t} \\ -e^{-\cos t} & 2e^{\sin t} \end{vmatrix} = e^{\sin t - \cos t} \neq 0,$$

таму гэтыя функцыі ўтвараюць фундаментальную сістэму рашэнняў зададзенай сістэмы. Яе агульнае рашэнне запішацца

$$x = C_1 e^{-\cos t} - C_2 e^{\sin t}, \quad y = -C_1 e^{-\cos t} + 2C_2 e^{\sin t}.$$

Выбярэм з гэтага рашэння два, якія задавальняюць умовам $x_1(t_0) = 1$ і $y_1(t_0) = 0$, $x_2(t_0) = 0$ і $y_2(t_0) = 1$. Для першага рашэння пастаянныя C_1 і C_2 вызначаем з сістэмы лінейных ураўненняў $1 = C_1 e^{-\cos t_0} - C_2 e^{\sin t_0}$, $0 = -C_1 e^{-\cos t_0} + 2C_2 e^{\sin t_0}$. Знаходзім $C_1 = 2e^{\cos t_0}$, $C_2 = e^{-\sin t_0}$.

Аналагічна для другога рашэння

$$0 = C_1 e^{-\cos t_0} - C_2 e^{\sin t_0}, \quad 1 = -C_1 e^{-\cos t_0} + 2C_2 e^{\sin t_0}.$$

Адкуль $C_1 = e^{\cos t_0}$, $C_2 = e^{-\sin t_0}$. Шуканыя рашэнні маюць выгляд

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 2e^{-(\cos t - \cos t_0)} - e^{\sin t - \sin t_0}, \\ y_1(t) &= -2e^{-(\cos t - \cos t_0)} + 2e^{\sin t - \sin t_0}, \\ x_2(t) &= e^{-(\cos t - \cos t_0)} - e^{\sin t - \sin t_0}, \\ y_2(t) &= -e^{-(\cos t - \cos t_0)} + 2e^{\sin t - \sin t_0}. \end{aligned}$$

Матрыцант дадзенай сістэмы запішацца так:

$$X(t, t_0) = \begin{pmatrix} 2e^{-(\cos t - \cos t_0)} - e^{\sin t - \sin t_0} & e^{-(\cos t - \cos t_0)} - e^{\sin t - \sin t_0} \\ 2e^{\sin t - \sin t_0} - e^{-(\cos t - \cos t_0)} & 2e^{\sin t - \sin t_0} - e^{-(\cos t - \cos t_0)} \end{pmatrix}.$$

Рашэнне дадзенай сістэмы, якое задавальняе ўмове $x(\pi) = -1$,

$y(\pi) = 2$, запішам у выглядзе

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = X(t, \pi) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-\cos t - 1} - e^{\sin t} & e^{-1 - \cos t} - e^{\sin t} \\ 2(e^{\sin t} - e^{-1 - \cos t}) & 2e^{\sin t} - e^{-1 - \cos t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\sin t} \\ 2e^{\sin t} \end{pmatrix}, \text{ гэта значыць } x = -e^{-\sin t}, \quad y = 2e^{\sin t}.$$

§ 2. Метад выключэння для рашэння лінейных сістэм

З дапамогай метаду выключэння, аналагічнага таму, які мае месца ў тэорыі лінейных алгебраічных ураўненняў, агульную сістэму лінейных ураўненняў з пастаяннымі каэфіцыентамі можна ў некаторым сэнсе прывесці да аднаго ўраўнення.

Разгледзім сістэму

$$\sum_{s=1}^n L_{js}(p)x_s = f_j(t), \quad j = \overline{1, n}, \quad (8)$$

дзе $x_1, x_2, \dots, x_n$ — невядомыя функцыі зменнай t , а $f_1(t), \dots, f_n(t)$ — зададзеныя функцыі t . Кожны сімвал $L_{js}(p)$ — паліном з пастаяннымі каэфіцыентамі адносна апэратара дыферэнцавання p , гэта значыць $L_{js}(p)x_s$ уяўляе сабою лінейную камбінацыю з пастаяннымі каэфіцыентамі адносна функцыі x_s і яе вытворных. Лік ураўненняў сістэмы (8) роўны ліку невядомых функцый. Няхай q_s — парадак сістэмы (8) адносна невядомай функцыі x_s , так што агульны парадак сістэмы (8) вызначаецца формулай $q = q_1 + q_2 + \dots + q_n$ (гл. § 4.1). Прымяняючы да (1) метады выключэння, будзем меркаваць, што кожная невядомая функцыя x_s мае дастатковы лік вытворных і што кожная з функцый $f_j(t)$ мае дастатковы лік вытворных. У сілу гэтых меркаванняў звужаецца клас разглядаемых рашэнняў і клас разглядаемых ураўненняў. Першае з гэтых абмежаванняў можна зняць, даказаўшы, што калі $x_1, x_2, \dots, x_n$ ёсць рашэнне сістэмы (8) і

калі правыя часткі $f_j(t)$ маюць дастатковы лік вытворных, то кожная функцыя x_s мае дастатковы лік вытворных. Апішам метады выключэння. Разгледзім матрыцу

$$L(p) = \begin{pmatrix} L_{11}(p) & \cdots & L_{1n}(p) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ L_{n1}(p) & \cdots & L_{nn}(p) \end{pmatrix} \quad (9)$$

сістэмы ўраўненняў (8). Кожны элемент $L_{js}(p)$ матрыцы (9) ёсць паліном ад p . Такім чынам, можна вылічыць дэтэрмінант $D(p)$ матрыцы (9) і яе міноры. Алгебраічнае дапаўненне элементу $L_{js}(p)$ матрыцы (9), гэта значыць мінор гэтага элементу, узяты з неабходным знакам, абазначым $M_{sj}(p)$. З алгебры вядома, што мае месца тоеснасць (гл. [12], з. 1, п. 4.4, с. 56)

$$\sum_{j=1}^n M_{ij}(p) L_{js}(p) = \delta_s^i D(p), \quad (10)$$

дзе δ_s^i – так званы сімвал Кронекера: $\delta_s^i = 1$, $\delta_s^i = 0$ пры $i \neq s$.

Памножым j -ае ўраўненне (8) на паліном $M_{ij}(p)$, гэта значыць выканаем шэраг дыферэнцаванняў, множання на лікі і складанняў, і, прасумаваўшы затым па j , атрымаем роўнасць

$$\sum_{j,s=1}^n M_{ij}(p) L_{js}(p) x_s = \sum_j M_{ij}(p) f_j(t). \quad (11)$$

Пры пераходзе ад (8) да (11) мяркуецца існаванне дастаткова вялікага ліку вытворных у функцыях x_s і $f_j(t)$. У сілу (10) роўнасць (11) перапішацца ў выглядзе

$$D(p) x_i = \sum_j M_{ij}(p) f_j(t), \quad i = \overline{1, n}. \quad (12)$$

Атрыманая сістэма ўраўненняў (12) валодае той уласцівасцю, што кожная невядомая функцыя x_i уваходзіць толькі ў адно ўраўненне (12).

Такім чынам, даказана, што калі сістэма функцый $x_1, \dots, x_n$ – рашэнне сістэмы (1), то кожная асобная функцыя x_i ёсць рашэнне ўраўнення (12).

Аднак не патрэбна думаць, што калі для кожнага нумара i выбраць адвольным чынам рашэнне x_i ураўнення (12) і затым скласці сістэму функцый $x_1, \dots, x_n$, то яна будзе рашэннем сістэмы (8). Для таго, каб знайсці агульнае рашэнне $x_1, \dots, x_n$ сістэмы (8), патрэбна знайсці агульнае рашэнне x_i кожнага ўраўнення (12), $i = \overline{1, n}$, скласці сістэму функцый $x_1, \dots, x_n$ і затым вызначыць, пры якіх умовах, гэта значыць пры якіх судачыненнях паміж пастаяннымі інтэгравання, гэтая сістэма функцый задавальняе сістэме (8).

Зробім некаторыя вывады з метаду выключэння. Разгледзім выпадак аднароднай сістэмы ўраўненняў

$$\sum_{s=1}^n L_{js}(p)x_s = 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (13)$$

Калі сістэма функцый $x_1, \dots, x_n$ уяўляе сабой рашэнне сістэмы (13), то кожная асобная функцыя x_i , што ўваходзіць у гэтае рашэнне, задавальняе ўраўненню

$$D(p)x_i = 0,$$

дзе $D(p)$ – дэтэрмінант матрыцы $L(p)$.

Пакажам цяпер, як, карыстаючыся метадам выключэння, патрэбна рашаць сістэму (13). Запішам яе ў вектарнай форме

$$L(p)x = 0, \quad (14)$$

дзе $x = \text{colon}(x_1, \dots, x_n)$.

Дапусцім, што $\det L(p) = D(p)$ сістэмы (13) не ператвараецца тоесна ў нуль, і няхай λ – корань палінома $D(p)$ кратнасці k . Будзем шукаць рашэнне сістэмы (14) у выглядзе

$$x = g(t)e^{\lambda t}, \quad (15)$$

дзе $g(t) = \text{colon}(g_1(t), \dots, g_n(t))$ – вектар, кампаненты

$$g_1(t), \dots, g_n(t) \quad (16)$$

якога – паліномы ступені $k-1$ адносна t з нявызначанымі каэфіцыентамі. Кожнае рашэнне віду (15) будзем называць адпаведным караню λ . Падстаўляючы (15) ва ўраўненне (14), атрымаем

$$0 = L(p)g(t)e^{\lambda t} = e^{\lambda t} L(p + \lambda)g(t). \quad (17)$$

Пасля скарачэння на $e^{\lambda t}$ будзем мець

$$L(p + \lambda)g(t) = 0. \quad (18)$$

Такім чынам, вектар (15) тады і толькі тады з'яўляецца рашэннем ураўнення (14), калі паліномы (16) задавальняюць умове (18). Калі перапісаць вектарнае ўраўненне (18) у каардынатнай форме, то атрымаем n судацыненняў

$$\sum_{s=1}^n L_{js}(p + \lambda)g_s(t) = 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (19)$$

Левая частка кожнага судацынення (19) ёсць паліном ступені $k-1$ адносна t , каэфіцыенты якога з'яўляюцца лінейнымі аднароднымі функцыямі каэфіцыентаў паліномаў (16). Прыраўняўшы да нуля каэфіцыент пры кожнай ступені t у кожным з судацыненняў (19), атрымаем сістэму лінейных аднародных ураўненняў адносна каэфіцыентаў паліномаў (16). Гэтая сістэма будзе эквівалентнай ураўненню (18).

Такім чынам, апісаны метады прыводзіць задачу адшуквання рашэнняў віду (15) да рашэння некаторай аднароднай лінейнай сістэмы алгебраічных ураўненняў. Адсюль вынікае, што рашэнні віду (15) будуць вызначаны на ўсім інтэрвале $(-\infty; +\infty)$.

Пры адшукванні ўсіх рашэнняў ураўнення (14) карыстаюцца наступнай тэарэмай

Тэарэма 3. Няхай дэтэрмінант $D(p)$ сістэмы (13) не ператвараецца тоесна ў нуль і $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ – сукупнасць усіх розных каранёў палінома $D(p)$. Тады адвольнае рашэнне x ураўнення (14) можна запісаць у выглядзе

$$x = x^I + \dots + x^m,$$

дзе x^i – некаторае рашэнне ўраўнення (14), што адпавядае караню λ_i .

Адкуль, у прыватнасці, вынікае, што кожнае рашэнне ўраўнення (14) вызначана для ўсіх значэнняў t .

Прыклад 1. Рашым метадам выключэння сістэму ўраўненняў

$$\dot{x}_1 + x_1 + \dot{x}_2 = 0,$$

$$\ddot{x}_1 - x_1 + \ddot{x}_2 + x_2 = 0.$$

Перапішам яе ў сімвалічнай форме

$$\begin{cases} (p+1)x_1 + px_2 = 0, \\ (p^2-1)x_1 + (p^2+1)x_2 = 0. \end{cases}$$

Лёгка бачыць, што дэтэрмінант $D(p)$ роўны $p^2 + 2p + 1$ і мае двукратны карань $\lambda = -1$. Згодна з тэарэмай 3 рашэнне сістэмы будзем ашукваць у выглядзе

$$\begin{cases} x_1 = (at + b)e^{-t}, \\ x_2 = (ct + d)e^{-t}. \end{cases}$$

Падстаўляючы ў першае ўраўненне, атрымаем $a + c - ct - d = 0$. Адкуль $c = 0, a = d$. Тыя ж судачыненні атрымліваюцца і пры падстаноўцы ў другое ўраўненне сістэмы. Такім чынам, агульнае рашэнне мае выгляд

$$\begin{cases} x_1 = (at + b)e^{-t}, \\ x_2 = ae^{-t}, \end{cases}$$

дзе a і b – адвольныя пастаянныя.

§ 3. Лінейныя аднародныя нармальныя сістэмы з пастаяннымі каэфіцыентамі

Разгледзім сістэму

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad (20)$$

ном ступені n адносна λ з сапраўднымі каэфіцыентамі, і таму ўраўненне мае n каранёў з улікам іх кратнасцяў. Ураўненне (22) лічыцца характарыстычным ураўненнем матрыцы A , а яго карані $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – уласнымі значэннямі гэтай матрыцы (гл. [25], глава III, § 7, с. 77). Знайшоўшы λ з (22), для кожнага з $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ знаходзім адпаведны ўласны вектар $\gamma = \text{colon}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ матрыцы A , вызначаны сістэмай (21).

Такім чынам, функцыі $x_1 = \gamma_1 e^{\lambda t}, \dots, x_n = \gamma_n e^{\lambda t}$ з'яўляюцца рашэннямі сістэмы (20) тады і толькі тады, калі лікі $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ з'яўляюцца каардынатамі ўласнага вектара γ матрыцы A гэтай сістэмы, прычым λ – адпаведнае ўласнае значэнне матрыцы A .

Разгледзім наступныя выпадкі:

а) Карані $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ характарыстычнага ўраўнення сапраўдныя і розныя. У гэтым выпадку матрыца A мае n лінейна незалежных уласных вектараў (гл. [25], глава III, § 7, с. 77) $\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^n$, дзе

$$\gamma^j = \begin{pmatrix} \gamma_{1j} \\ \vdots \\ \gamma_{nj} \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Тады рашэннем сістэмы будуць вектар-функцыі

$$x^j = \gamma^j e^{\lambda_j t} = \begin{pmatrix} \gamma_{1j} e^{\lambda_j t} \\ \gamma_{2j} e^{\lambda_j t} \\ \vdots \\ \gamma_{nj} e^{\lambda_j t} \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Функцыі x^j лінейна незалежныя, а значыць утвараюць базіс рашэнняў сістэмы (20). Сапраўды, для матрыцы

$$X(t) = \begin{pmatrix} \gamma_{11}e^{\lambda_1 t} & \gamma_{12}e^{\lambda_2 t} & \dots & \gamma_{1n}e^{\lambda_n t} \\ \gamma_{21}e^{\lambda_1 t} & \gamma_{22}e^{\lambda_2 t} & \dots & \gamma_{2n}e^{\lambda_n t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n1}e^{\lambda_1 t} & \gamma_{n2}e^{\lambda_2 t} & \dots & \gamma_{nn}e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

маем $|X(0)| \neq 0$, таму што яго слупкі – лінейна незалежныя ўласныя вектары. Згодна з формулай Астраградскага-Ліувіля-Якабі (гл. (6)) $|X(t)| \neq 0$ для $\forall t \in R$. Значыць, па тэарэме 1, вектар-функцыі x^j утвараюць базіс рашэнняў, $j = \overline{1, n}$.

Такім чынам, агульнае рашэнне сістэмы лінейных аднародных ураўненняў з пастаяннымі каэфіцыентамі ў выпадку сапраўдных розных каранёў характарыстычнага ўраўнення мае выгляд

$$x = C_1 x^1(t) + C_2 x^2(t) + \dots + C_n x^n(t)$$

або ў каардынатнай форме

[illegible]

Прыклад 1. Знайсці агульнае рашэнне сістэмы

$$\frac{dx_1}{dt} = 7x_1 + 3x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = 6x_1 + 4x_2.$$

Рашэнне. Характарыстычнае ўраўненне матрыцы сістэмы

має вигляд $\begin{vmatrix} 7-\lambda & 3 \\ 6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$, або $\lambda^2 - 11\lambda + 10 = 0$. Яго корені

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 10$ – уласныя лікі матрыцы каэфіцыентаў. Пры $\lambda = 1$ ураўненні для вызначэння ўласнага вектара маюць від $(7-1)\gamma_1 + 3\gamma_2 = 0$, $6\gamma_1 + (4-1)\gamma_2 = 0$ і прыводзяць да аднаго ўраўнення $2\gamma_1 + \gamma_2 = 0$. Калі дапусціць $\gamma_1 = 1$, то $\gamma_2 = -2$, гэта

значыць ураўненнем вызначаецца вектар *colon* (1,-2).

Пры $\lambda = 10$ атрымліваем ураўненні $(7 - 10) \gamma_1 + 3\gamma_2 = 0$, $6 \gamma_1 + (4 - 10) \gamma_2 = 0$ або $\gamma_1 - \gamma_2 = 0$. Гэтае ўраўненне вызначае вектар *colon* (1, 1).

Атрымліваем фундаментальную сістэму рашэнняў:

для $\lambda = 1$: $x_{11} = \gamma_1 e^t = e^t$, $x_{21} = \gamma_2 e^t = -2e^t$;

для $\lambda = 10$: $x_{12} = \gamma_1 e^{10t} = e^{10t}$, $x_{22} = \gamma_2 e^{10t} = e^{10t}$.

Агульнае рашэнне сістэмы мае від

$$x_1 = C_1 e^t + C_2 e^{10t}, \quad x_2 = -2C_1 e^t + C_2 e^{10t}.$$

б) Карані характарыстычнага ўраўнення ўсе розныя, але сярод іх ёсць камплексныя. Дапусцім, што $\lambda = \alpha + i\beta$ ($\beta \neq 0$) – камплексны карань. Калі каэфіцыенты сістэмы – сапраўдныя лікі, то спалучаны лік $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ таксама будзе каранем характарыстычнага ўраўнення. Гэтым караням (камплексна спалучаным уласным значэнням матрыцы A) будуць адпавядаць уласныя вектары з камплексна спалучанымі каардынатамі (гл. [19], глава I, § 8, с. 62)

$$p \pm iq = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \pm i \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}. \quad \text{Значыць, вектары} \quad \begin{pmatrix} (p_1 + i q_1) e^{(\alpha + i\beta)t} \\ (p_2 + i q_2) e^{(\alpha + i\beta)t} \\ \dots\dots\dots \\ (p_n + i q_n) e^{(\alpha + i\beta)t} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} (p_1 - i q_1) e^{(\alpha - i\beta)t} \\ (p_2 - i q_2) e^{(\alpha - i\beta)t} \\ \dots\dots\dots \\ (p_n - i q_n) e^{(\alpha - i\beta)t} \end{pmatrix} \quad \text{будуць частковымі рашэннямі сістэмы (20).}$$

Па формулах Эйлера маем

$$(p_k + i q_k) e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t} (p_k \cos \beta t - q_k \sin \beta t) + i e^{\alpha t} (p_k \sin \beta t + q_k \cos \beta t).$$

Вядома, як і ў тэорыі лінейных дыферэнцыяльных ураўненняў (гл. п. 2.5.2⁰), калі вектар $u(t) + iv(t)$ – рашэнне лінейнай сістэмы (20) з сапраўднымі каэфіцыентамі, то сапраўдная частка рашэння $u(t)$ і яго ўяўная частка $v(t)$ таксама будуць лінейна незалежнымі рашэннямі гэтай сістэмы.

Такім чынам, пары камплексна спалучаных каранёў $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ характарыстычнага ўраўнення адпавядае пара сапраўдных рашэнняў

$$v^1(t) = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} (p_1 \cos \beta t - q_1 \sin \beta t) \\ e^{\alpha t} (p_2 \cos \beta t - q_2 \sin \beta t) \\ \dots\dots\dots \\ e^{\alpha t} (p_n \cos \beta t - q_n \sin \beta t) \end{pmatrix}, v^2(t) = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} (p_1 \sin \beta t + q_1 \cos \beta t) \\ e^{\alpha t} (p_2 \sin \beta t + q_2 \cos \beta t) \\ \dots\dots\dots \\ e^{\alpha t} (p_n \sin \beta t + q_n \cos \beta t) \end{pmatrix}.$$

Агульнае рашэнне сістэмы (20) у гэтым выпадку ёсць лінейная камбінацыя пабудаваных такім чынам сапраўдных рашэнняў.

Прыклад 2. Рашыць сістэму $\dot{x} = 2x - y$, $\dot{y} = x + 2y$.

Рашэнне. Характарыстычнае ўраўненне сістэмы

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \text{ мае карані } \lambda_{1,2} = 2 \pm i. \text{ Знаходзім}$$

уласны вектар, што адпавядае караню $\lambda_1 = 2 + i$. З сістэмы

$$\begin{cases} (2 - (2 + i))\gamma_1 - \gamma_2 = 0, \\ \gamma_1 + (2 - (2 + i))\gamma_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -i\gamma_1 - \gamma_2 = 0, \\ \gamma_1 - i\gamma_2 = 0 \end{cases}$$

знаходзім, што $\gamma_2 = i\gamma_1$, гэта значыць пры $\gamma_1 = 1$ уласны вектар

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ -i\gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 0 \cdot i \\ 0 - i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \left(p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Рашэнне атрымліваем так:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(2+i)t} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{2t} (\cos t + i \sin t) = \begin{pmatrix} e^{2t} (\cos t + i \sin t) \\ e^{2t} (\sin t - i \cos t) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2t} \cos t \\ e^{2t} \sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} e^{2t} \sin t \\ -e^{2t} \cos t \end{pmatrix} = u + iv. \quad \text{Адкуль} \quad u = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

$$v = e^{2t} \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}. \quad \text{Агульнае рашэнне зыходнай сістэмы мае выгляд}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 u + C_2 v = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}, \quad \text{або ў каардынат-}$$

$$\text{най форме } x = C_1 e^{2t} \cos t + C_2 e^{2t} \sin t = e^{2t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t),$$

$$y = C_1 e^{2t} \sin t - C_2 e^{2t} \cos t = e^{2t} (C_1 \sin t - C_2 \cos t).$$

Прыклад 3. Знайсці агульнае рашэнне сістэмы ўраўненняў
 $\dot{x} = x - z, \quad \dot{y} = x, \quad \dot{z} = x - y.$

Рашэнне. Характарыстычнае ўраўненне мае від

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & -1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{або} \quad (1 - \lambda)(1 + \lambda^2) = 0. \quad \text{Характарыстычныя}$$

лікі: $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = \pm i$. Пры $\lambda = 1$ для вызначэння ўласнага вектара атрымліваем сістэму ўраўненняў $-\gamma_3 = 0, \gamma_1 - \gamma_2 = 0, \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 = 0$. Калі дапусціць $\gamma_1 = 1$, то пры $\gamma_3 = 0, \gamma_2 = 1$, гэта значыць сістэма вызначае ўласны вектар *colon* $(1, 1, 0)$. Яму адпавядаюць частковыя рашэнні $x_1 = e^t, y_1 = e^t, z_1 = 0$.

Пры $\lambda_2 = i$ атрымліваем сістэму ўраўненняў

$$(1 - i)\gamma_1 - \gamma_3 = 0, \quad \gamma_1 - i\gamma_2 = 0, \quad \gamma_1 - \gamma_2 - i\gamma_3 = 0.$$

Гэтая сістэма, калі дапусціць $\gamma_1 = 1$, вызначае ўласны вектар *colon* $(1, -i, 1 - i)$.

Значэнням $\lambda_{2,3} = \pm i$ адпавядаюць рашэнні

$$x_{2,3} = e^{it} = \cos t + i \sin t, \quad y_{2,3} = -ie^{-it} = \sin t - i \cos t,$$

$$z_{2,3} = (1 - i)e^{it} = (\cos t + \sin t) + i(\sin t - \cos t).$$

Адзяляючы сапраўдныя і ўяўныя часткі, атрымліваем рашэнні
 $x_2 = \operatorname{Re} x_{2,3} = \cos t$; $y_2 = \operatorname{Re} y_{2,3} = \sin t$; $z_2 = \operatorname{Re} z_{2,3} = \cos t + \sin t$;
 $x_3 = \operatorname{Im} x_{2,3} = \sin t$; $y_3 = \operatorname{Im} y_{2,3} = -\cos t$; $z_3 = \operatorname{Im} z_{2,3} = \sin t - \cos t$.
 Агульнае рашэнне сістэмы запішацца так:

$$x = C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 = C_1 e^t + C_2 \cos t + C_3 \sin t,$$

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 = C_1 e^t + C_2 \sin t - C_3 \cos t,$$

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3 = C_2 (\cos t + \sin t) + C_3 (\sin t - \cos t).$$

в) Сярод каранёў $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ характарыстычнага ўраўнення ёсць кратныя. Калі λ_1 ёсць характарыстычны лік кратнасці k , то яму адпавядаюць рашэнні выгляду

$$x_1 = P_1(t) e^{\lambda_1 t}, x_2 = P_2(t) e^{\lambda_1 t}, \dots, x_n = P_n(t) e^{\lambda_1 t}, \quad (23)$$

дзе $P_1(t), P_2(t), \dots, P_n(t)$ – паліномы ад t ступені не вышэй за $k-1$, якія ў сукупнасці маюць k адвольных каэфіцыентаў, прычым усе астатнія каэфіцыенты гэтых паліномаў выражаюцца праз гэтыя k адвольных каэфіцыенты. (Падрабязна гл. доказ у [9], глава VI, § 45, с. 183.)

Практыкаванне 1. Даказаць, што k -кратнаму караню λ_1 адпавядаюць рашэнні віду (23).

На практыцы пры знаходжанні рашэння, якое адпавядае характарыстычнаму ліку λ_1 , патрэбна адшукваць рашэнне ў выглядзе (23), пры гэтым паліномы $P_1(t), P_2(t), \dots, P_n(t)$ лічыць паліномами $(k-1)$ ступені з нявызначанымі каэфіцыентамі. Падстаўляючы (23) у (20) і параўноўваючы каэфіцыенты пры аднолькавых ступенях t злева і справа, неабходна выразіць усе каэфіцыенты праз k з іх, якія застаюцца адвольнымі.

Дапусціўшы па чарзе адзін з адвольных каэфіцыентаў роўным адзінцы, а астатнія роўнымі нулю, атрымаем k лінейна незалежных рашэнняў, што адпавядаюць λ_1 . Калі λ_1 – сапраўдны характарыстычны лік, то атрыманыя k лінейна незалежныя рашэнні будуць сапраўднымі. Калі ж сістэма (20) мае камплексны характарыстычны лік $\alpha + i\beta$ кратнасці k , то яна мае спалучаны

характарыстычны лік $\alpha - i\beta$ той жа кратнасці. Атрымаўшы k лінейна незалежных камплексных рашэнняў, што адпавядаюць характарыстычнаму ліку $\alpha + i\beta$, і аддзяліўшы ў іх сапраўдныя і ўяўныя часткі, атрымаем $2k$ сапраўдных лінейна незалежных частковых рашэнняў. Усе атрыманыя такім чынам лінейна незалежныя рашэнні ў сукупнасці ўтвараюць фундаментальную сістэму рашэнняў. Узяўшы лінейныя камбінацыі рашэнняў гэтай фундаментальнай сістэмы па слупках з аднымі і тымі ж адвольнымі пастаяннымі $C_1, C_2, \dots, C_n$, атрымаем агульнае рашэнне сістэмы (20).

Прыклад 4. Праінтэграваць сістэму $\dot{x} = 5x - y$, $\dot{y} = x + 3y$.

Рашэнне. Характарыстычнае ўраўненне
$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

або $(5-\lambda)(3-\lambda) + 1 = 0$, $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$, мае карані $\lambda_{1,2} = 4$. Як было сказана вышэй, каранню кратнасці k адпавядае рашэнне $x(t) = P_{k-1}(t)e^{\lambda t}$, дзе $P_{k-1}(t)$ – паліном ступені, на адзінку меншай за кратнасць. Такім чынам, двухкратнаму каранню $\lambda = 4$ адпавядае рашэнне $x = e^{4t}(a_1 t + a_2)$, $y = e^{4t}(b_1 t + b_2)$.

Прадыферэнцуем x і y , атрымаем $\dot{x} = a_1 e^{4t} + 4(a_1 t + a_2)e^{4t}$, $\dot{y} = b_1 e^{4t} + 4(b_1 t + b_2)e^{4t}$. Значэнні $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ падставім у зыходную сістэму. Пасля скарачэння на e^{4t} будзем мець

$$a_1 + 4(a_1 t + a_2) = 5(a_1 t + a_2) - (b_1 t + b_2),$$

$$b_1 + 4(b_1 t + b_2) = a_1 t + a_2 + 3(b_1 t + b_2).$$

Параўноўваючы каэфіцыенты пры t і свабодныя члены, атрымліваем сістэму ўраўненняў:

$$\begin{cases} 4a_1 = 5a_1 - b_1, \\ 4b_1 = a_1 + 3b_1, \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 + 4a_2 = 5a_2 - b_2, \\ b_1 + 4b_2 = a_2 + 3b_2. \end{cases}$$

Адкуль вынікае, што $a_1 = b_1$, $a_2 - b_2 = a_1 = b_1$. Дапускаючы, што

$a_1 = C_1$, $a_2 = C_2$ (C_1 , C_2 – адвольныя пастаянныя), знаходзім
 $b_1 = C_1$, $b_2 = C_2 - C_1$. Адкуль $x = e^{4t}(C_1 t + C_2)$, $y = e^{4t}(C_1 t + C_2 - C_1)$.

У якасці лінейна незалежных частковых рашэнняў, што адпавядаюць характарыстычнаму ліку $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$, можна ўзяць $x_1 = te^{4t}$, $x_2 = e^t$, $y_1 = (t-1)e^{4t}$, $y_2 = e^{4t}$. Адзначым, што заданая сістэма прасцей рашаецца метадам выключэння (гл. § 2).

Заўвага 1. Калі для кораня λ_1 кратнасці k ёсць толькі m лінейна незалежных уласных вектараў і $m < k$, тады рашэнне, што адпавядае гэтаму λ_1 , можна адшукваць у выглядзе здабытку палінома ступені $k-m$ на $e^{\lambda_1 t}$, гэта значыць у выглядзе $x_1 = (a + bt + \dots + dt^{k-m})e^{\lambda_1 t}$, ... , $x_n = (p + qt + \dots + st^{k-m})e^{\lambda_1 t}$, дзе $a, b, \dots, s$ – пастаянныя, прычым k з іх адвольныя.

Прыклад 5. Рашыць сістэму $\dot{x} = 2x - y - z$, $\dot{y} = 2x - y - 2z$, $\dot{z} = 2z - x + y$.

Рашэнне.	Характарыстычнае	ўраўненне
$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$	мае карані $\lambda_{1,2,3} = 1$.	Вызначым коль-

касць лінейна незалежных уласных вектараў, што адпавядаюць трохкратнаму кораню $\lambda = 1$. Пры $\lambda = 1$ атрымліваем матрыцу

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Яе парадак } n = 3, \text{ ранг } r = 1. \text{ Колькасць лінейна}$$

незалежных уласных вектараў роўна $m = n - r = 3 - 1 = 2$. Калі для кораня $\lambda = 1$, $k = 3$, то $k < m$ і рашэнне патрэбна адшукваць у выглядзе здабытку палінома ступені $k-m = 1$ на e^t , гэта значыць у выглядзе $x = (a_1 + b_1 t)e^t$, $y = (a_2 + b_2 t)e^t$, $z = (a_3 + b_3 t)e^t$. Для зна-

ходжання каэфіцыентаў $a_1, \dots, b_3$ падстаўляем гэтыя выразы для x, y, z у дадзеную сістэму і параўноўваем каэфіцыенты пры падобных членах (гл. прыклад 5). Канчаткова агульнае рашэнне будзе мець выгляд $x = (C_1 + C_3 t) e^t, y = (C_2 + 2 C_3 t) e^t,$

$$z = (C_1 - C_2 - C_3 - C_3 t) e^t.$$

2°. Рашэнне з дапамогай матрыц.

I. Выпадак кратных каранёў.

Прывядзём спачатку некаторыя звесткі з тэорыі матрыц (гл. [25]).

Прасцейшая форма, да якой прыводзіцца адвольная квадратная матрыца, ёсць так званая жарданава нармальная форма (гл. [25], глава VI, § 6, с. 141).

Матрыца віду

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} \quad (24)$$

называецца жарданавай клеткай.

Матрыца (24) мае адзінае ўласнае значэнне λ кратнасці k , дзе k – парадак матрыцы. Рашыўшы сістэму $Jx = \lambda x$, гэта значыць, $\lambda x_1 + x_2 = \lambda x_1, \lambda x_2 + x_3 = \lambda x_2, \dots, \lambda x_n = \lambda x_n$, знойдем яе ўласныя вектары. Будзем мець, $x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$, x_1 – любое. Адкуль заключаем, што матрыца J мае адзіны (з дакладнасцю да множніка) уласны вектар $\gamma^1 = \text{colon}(1, 0, \dots, 0)$ (усе вектары – слупкі). Для астатніх базісных вектараў

$$\gamma^2 = \text{colon}(0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \gamma^k = \text{colon}(\underbrace{0, \dots, 0}_k, 1, 0, \dots, 0)$$

маем $J\gamma^1 = \lambda\gamma^1, J\gamma^2 = \lambda\gamma^2 + \gamma^1, \dots, J\gamma^k = \lambda\gamma^k + \gamma^{k-1}$.

Набор вектараў $\{\gamma^1, \dots, \gamma^k\}$ будзем называць жарданавым

ланцужком матрыцы A (гл. [25], глава VII, § 7, с. 176), калі

$$A h^1 = \lambda h^1, A h^2 = \lambda h^2 + h^1, \dots, A h^k = \lambda h^k + h^{k-1}.$$

Вектар h^1 – уласны, вектары $h^2, \dots, h^k$ называюцца далучанымі.

Такім чынам, вектары $\gamma^1, \dots, \gamma^k$ утвараюць жарданаў ланцужок жарданавай клеткі J .

Вядома (гл. [25], глава VII, § 7, с. 177), што адвольная матрыца A заўсёды падобна матрыцы J , якая мае нармальную жарданаву форму, гэта значыць для адвольнай матрыцы A заўсёды існуе такая нявыраджаная матрыца T ($|T| \neq 0$), што $A = T J T^{-1}$, дзе

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & J_s \end{pmatrix}, \text{ а } J_1, J_2, \dots, J_s - \text{жарданавыя клеткі парадкаў}$$

$$k_1, k_2, \dots, k_s; \quad k_1 + k_2 + \dots + k_s = n; \quad J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix},$$

λ_k – уласныя значэнні матрыцы A . Прычым T^{-1} – адваротная да T

($t'_{ik} = \frac{T_{ki}}{|T|}$), дзе t'_{ik} – адпаведны элемент матрыцы T^{-1} , а T_{ki} –

алгебраічны дапаўненні элемента t_{ik} у матрыцы T). Нармальная жарданава форма матрыцы A вызначаецца адзіным чынам з дакладнасцю да перастаноўкі жарданавых клетак.

Узнікае цяпер пытанне, як для дадзенай матрыцы A пабудаваць яе жарданаву нармальную форму.

Вядома, што парадак k_s жарданавай клеткі J_s роўны ступені так званага элементарнага дзельніка $(\lambda - \lambda_s)^{k_s}$, які адпавядае кора-

ню λ_s . Калі некатораму караню адпавядае некалькі элементарных дзельнікаў, то і адпаведная колькасць клетак у жарданавай форме мае на галоўнай дыяганалі адзін і той жа элемент. У найбольш простым выпадку, калі ўсе элементарныя дзельнікі першай ступені (так будзе, у прыватнасці, калі ўсе карані характарыстычнага ўраўнення розныя), усе клеткі маюць першы парадак, гэта значыць матрыца J будзе мець дыяганальны выгляд. (Аб тым, як знаходзяцца элементарныя дзельнікі пры кратных каранях характарыстычнага ўраўнення, можна прачытаць у [9], глава VI, § 44, с. 180 або ў [25], глава VI, § 3, с. 133.)

У тым выпадку, калі матрыца A сярод уласных лікаў мае камплексны, будуюцца так званая яе сапраўдная жарданава форма (гл. [27], глава IV, § 3, с. 101), сярод клетак якой ёсць такія клеткі J_k , што адпавядаюць камплексным уласным лікам λ_k . У прыватнасці, у выпадку простых камплексных лікаў λ_k гэтыя клеткі

маюць выгляд $J_k = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \lambda_k & -\operatorname{Im} \lambda_k \\ \operatorname{Im} \lambda_k & \operatorname{Re} \lambda_k \end{pmatrix}$. Прыменім прыведзеныя вышэй звесткі да інтэгравання сістэмы (20).

Разгледзім спачатку сістэму з k ураўненняў

$$\frac{dy}{dt} = Jy, \quad (25)$$

дзе J – жарданава клетка віду (24).

У разгорнутым выглядзе сістэма (25) запішацца

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = \lambda y_1 + y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} = \lambda y_2 + y_3, \\ \dots\dots\dots, \\ \frac{dy_{k-1}}{dt} = \lambda y_{k-1} + y_k, \\ \frac{dy_k}{dt} = \lambda y_k. \end{cases}$$

Вырашым гэтую сістэму «знізу ўверх». З апошняга ўраўнення маем $y_k = C_k e^{\lambda t}$. Падставіўшы ва ўраўненне, змешчанае перад апошнім, атрымаем $\dot{y}_{k-1} - \lambda y_{k-1} = C_k e^{\lambda t}$, адкуль (гл. формулу (2.4.19))

$$y_{k-1} = C_{k-1} e^{\lambda t} + C_k t e^{\lambda t}.$$

Аналагічна атрымліваем

$$y_{k-2} = (C_{k-2} + t C_{k-1} + \frac{t^2}{2} C_k) e^{\lambda t},$$

.....,

$$y_1 = \left(C_1 + C_2 \frac{t}{1!} + C_3 \frac{t^2}{2!} + \dots + C_k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \right) e^{\lambda t}.$$

Такім чынам, усякае рашэнне сістэмы (25) будзе задавацца формулай $y = C_1 y^1 + C_2 y^2 + \dots + C_k y^k$, дзе $C_1, C_2, \dots, C_k$ – адвольныя пастаянныя, а рашэнні y^j маюць выгляд

$$\begin{aligned} y^1 &= e^{\lambda t} h^1, \quad y^2 = e^{\lambda t} \left(h^2 + \frac{t}{1!} h^1 \right), \dots, \\ y^k &= e^{\lambda t} \left(h^k + \frac{t}{1!} h^{k-1} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} h^1 \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Вяртаючыся цяпер да сістэмы (20), сфармулюем тэарэму, якая дасць рашэнне гэтай сістэмы ў агульным выпадку.

Тэарэма 4. Для адвольнай квадратнай матрыцы A парадку n існуе базіс $h^1, \dots, h^n$, які складаецца з жарданавых ланцужкоў $\{h^1, \dots, h^{k_1}\}$, $\{h^{k_1+1}, \dots, h^{k_1+k_2}\}$, ..., $\{h^{k_1+\dots+k_{s-1}+1}, \dots, h^n\}$, што адпавядаюць уласным значэнням $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ матрыцы A . Прычым, для кожнага такога ланцужка існуе сістэма рашэнняў, так што рашэнні сістэмы (20) запісваюцца

$$x^1 = h^1 e^{\lambda_1 t}, \dots, x^{k_1} = \left(\frac{t^{k_1-1}}{(k_1-1)!} h^1 + \dots + h^{k_1} \right) e^{\lambda_1 t},$$

$$\begin{aligned}
x^{k_1+1} &= h^{k_1+1} e^{\lambda_2 t}, \\
&\dots\dots\dots, \\
x^{k_1+k_2} &= \left(\frac{t^{k_2-1}}{(k_2-1)!} h^{k_1+1} + \dots + h^{k_1+k_2} \right) e^{\lambda_2 t}, \\
&\dots\dots\dots, \\
x^{k_1+\dots+k_{s-1}+1} &= h^{k_1+\dots+k_{s-1}+1} \cdot e^{\lambda_s t}, \\
&\dots\dots\dots, \\
x^n &= \left(\frac{t^{k_s-1}}{(k_s-1)!} h^{k_1+\dots+k_{s-1}+1} + \dots + h^n \right) e^{\lambda_s t}.
\end{aligned} \tag{27}$$

Пры гэтым формула

$$x = C_1 x^1 + \dots + C_n x^n, \tag{28}$$

дзе $C_1, \dots, C_n$ – канстанты, заўсёды дае рашэнне сістэмы (20) і кожнае рашэнне сістэмы (20) апісваецца формулай (28).

Заўвага 2. Аналізуючы сказанае вышэй, адзначым, што сістэма (20) пасля падстаноўкі $x = T y$ (матрыца T прыводзіць матрыцу A да жарданавай нармальнай формы) прыме выгляд

$$\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & J_s \end{pmatrix} y. \text{ Апошняя сістэма распадаецца на } s \text{ асобных}$$

падсістэм віду (25).

Заўвага 3. Рашэнні сістэмы (20), згодна з тэарэмай 4, можна знаходзіць так:

а) па кожнаму жарданаваму ланцужку $\{h^1, \dots, h^k\}$ матрыцы A будзем набор рашэнняў $x^1, \dots, x^k$ па формуле (27). Калі гэты ланцужок

адпавядае камплекснаму λ , то па правілу, прыведзенаму раней, будзеца набор сапраўдных рашэнняў сістэмы (20), які адпавядае λ і $\bar{\lambda}$;

б) запісваем лінейную камбінацыю ўсіх пабудаваных рашэнняў з адвольнымі пастаяннымі па формуле (28).

Прыклад 6. Рашыць сістэму $\dot{x}_1 = 3x_1 - x_2$, $\dot{x}_2 = 4x_1 - x_2$.

Рашэнне. Уласныя лікі матрыцы A гэтай сістэмы роўны $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Уласны вектар вызначым з сістэмы $Ax = x$, гэта значыць $3x_1 - x_2 = x_1$, $4x_1 - x_2 = x_2$, адкуль вынікае $2x_1 = x_2$ і ўласны вектар толькі адзін (з дакладнасцю да множніка): $h^1 = \text{colon}(1, 2)$.

Таму будзем мець далучаны вектар h^2 , які вызначаецца з сістэмы $Ah^2 = h^2 + h^1$. Для кампанент x_1 і x_2 вектара h^2 атрымліваем сістэму $3x_1 - x_2 = x_1 + 1$, $4x_1 - x_2 = x_2 + 2$ або $2x_1 - x_2 = 1$, $4x_1 - 2x_2 = 2$. Таму вектар h^2 можна ўзяць у выглядзе $\text{colon}(0, -1)$. Па формуле (27) будзем рашэнні

$$x^1 = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x^2 = e^t \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right],$$

і ўсякае рашэнне сістэмы мае від

$$x = e^t \left[C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} t \\ 2t - 1 \end{pmatrix} \right]$$

або ў каардынатнай форме

$$x_1 = e^t (C_1 + C_2 t), \quad x_2 = e^t (2C_1 + C_2 (2t - 1)).$$

II. *Агульны матрычны метад.*

Гэты метад заснаваны на непасрэдным знаходжанні фундаментальнай матрыцы сістэмы.

Каб знайсці фундаментальную матрыцу сістэмы, неабходна ведаць уласцівасці экспаненцыяльнай функцыі матрыцы A , менавіта e^A . Прывядзём іх (гл. [27], § 4, глава IV, с. 101).

Експанентай e^A (выкарыстоўваюць яшчэ абазначэнне $\exp(A)$) матрыцы A называюць суму рада

$$e^A \stackrel{\text{def}}{=} E + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots, \quad (29)$$

дзе E – адзінкавая матрыца. (Аб збежнасці матрычнага рада гл. [25], глава V, § 4, с. 107.) Матрычная экспанента валодае наступнымі ўласцівасцямі:

а) калі $AB = BA$, то $e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A$;

б) калі $A = T^{-1} \cdot J \cdot T$, то $e^A = T^{-1} \cdot e^J \cdot T$.

Тэарэма 5. Матрыца e^{At} з’яўляецца фундаментальнай матрыцай сістэмы (20).

Адсюль вынікае, што рашэнне $x(t)$ сістэмы (20), што задавальняе ўмове $x(0) = x^0$, вызначаецца выразам $x(t) = e^{At} x^0$. Будзем адшукваць матрыцу e^{At} метадам прывядзення матрыцы A да жарданавай формы. Прадставім A у выглядзе $A = T^{-1} J_A T$, дзе J_A – жарданава форма матрыцы A , таму што $e^{At} = T^{-1} e^{J_A t} T$.

Калі J – клетка Жардана, гэта значыць

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}, \text{ то, запісаўшы } J \text{ у выглядзе } J = \lambda E + \tilde{I},$$

$$\text{дзе } \tilde{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \text{ знаходзім, што } e^{Jt} = e^{\lambda t} \cdot e^{\tilde{I}t}, \text{ бо}$$

$(\lambda E) \cdot J = J \cdot (\lambda E)$. Матрыцу $e^{\tilde{I}t}$ лёгка знайсці пры дапамозе рада

(29). Паколькі $\tilde{I}^r = 0$, дзе r – памер клеткі J , значыць у радзе (29) не роўныя нулю толькі першыя r членаў.

Складзём з клетак $e^{J_i t}$ квазідыяганальную матрыцу e^{JA^t} і з дапамогай уласцівасці б) знойдзем матрыцу e^{A^t} .

Прыклад 7. Вылічыць матрыцу e^{A^t} , калі $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Рашэнне. З ураўнення $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$, або $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

знаходзім уласныя лікі дадзенай матрыцы $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. У сілу таго,

што ранг матрыцы $A - \lambda E = \begin{pmatrix} 3-2 & 1 \\ -1 & 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ роўны 1;

то жарданава матрыца A мае від $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Матрыцу $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

такую, што $A = T^{-1}JT$, вызначым з роўнасці

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Для знаходжання a, b, c, d атрымліваем лінейную сістэму ўраўненняў $3a - b = 2a + c$, $a + b = 2b + d$, $3c - d = 2c$, $c + d = 2d$ або $a - b - c = 0$, $c - d = 0$. Адным з рашэнняў сістэмы з'яўляецца

$a = 3$, $b = 2$, $c = 1$, $d = 1$. Такім чынам, $T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Адваротная да

яе матрыца мае выгляд $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Роўнасць $A = T^{-1}JT$

запішацца так: $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Калі $e^{Jt} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (t+1)e^{2t} & te^{2t} \\ -te^{2t} & (1-t)e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Прыклад 8. Рашыць сістэму ўраўненняў

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -2x_1 - 2x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = 4x_1 + 4x_2. \end{cases}$$

Рашэнне. З характарыстычнага ўраўнення

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 \\ 4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{знаходзім, што ўласнымі лікамі матрыцы}$$

$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ з'яўляюцца $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$. Знойдзем такую мат-

рыцу $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, каб $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Пера-

множыўшы матрыцы ў абедзвюх частках роўнасці, атрымаем сістэму ўраўненняў для знаходжання a, b, c, d : $-a + 2b = 0$, $-c + d = 0$.

Гэта сістэма алгебраічных ураўненняў мае, напрыклад, рашэнне

$$a = 2, b = 1, c = 1, d = 1. \quad \text{Таму} \quad T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Улічваючы роўнасць $A = T^{-1}JT$, знаходзім

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} t} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -e^{2t} \\ -1 & 2e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - e^{2t} & 1 - e^{2t} \\ -2 + 2e^{2t} & -1 + 2e^{2t} \end{pmatrix}. \text{ Такім чынам, лю-}$$

бое рашэнне, што задавальняе ўмове $x(0) = x^0$, запішацца

$$x(t) = \begin{pmatrix} 2 - e^{2t} & 1 - e^{2t} \\ -2 + 2e^{2t} & -1 + 2e^{2t} \end{pmatrix} x^0.$$

Прыклад 9. Вылічыць матрыцу e^{At} , калі $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$.

Рашэнне. Запішам матрыцу A у выглядзе $A = \alpha E + \beta \tilde{I}$, дзе $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Паколькі матрыца αE камутуе з матрыцай $\beta \tilde{I}$, то $e^{At} = e^{\alpha Et} e^{\beta \tilde{I} t}$. У сілу таго, што $e^{\alpha Et} = e^{\alpha t E}$, маем $e^{At} = e^{\alpha t} \cdot e^{\tilde{I} \beta t}$. Знойдзем матрыцу $e^{\tilde{I} t}$. Па азначэнню матрычнай экспаненты запішам $e^{\tilde{I} t} = E + \tilde{I} t + \frac{\tilde{I}^2 t^2}{2!} + \dots$. Вылічым матрыцы $\tilde{I}^k$ ($k = 2, 3, \dots$).

$$\tilde{I}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{I}^3 = \tilde{I}^2 \cdot \tilde{I} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{I}^4 = \tilde{I}^3 \cdot \tilde{I} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Лёгка бачыць, што $\tilde{I}^{2k} = (-1)^k E$, $\tilde{I}^{2k+1} = (-1)^k \tilde{I}$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

$$\text{Таму } e^{\tilde{I} t} = E + \tilde{I} t - E \frac{t^2}{2!} - \tilde{I} \frac{t^3}{3!} + E \frac{t^4}{4!} + \dots = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} t -$$

$$\begin{aligned}
& -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2!} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{t^3}{3!} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{t^4}{4!} + \dots = \\
& = \begin{pmatrix} 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots & t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots \\ -t + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^5}{5!} + \dots & 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}. \text{ Тады}
\end{aligned}$$

$$e^{\beta \tilde{I} t} = \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix}. \text{ Такім чынам,}$$

$$e^{At} = e^{\alpha t} e^{\beta \tilde{I} t} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} \cos \beta t & e^{\alpha t} \sin \beta t \\ -e^{\alpha t} \sin \beta t & e^{\alpha t} \cos \beta t \end{pmatrix}.$$

Прыклад 10. Знайсці рашэнне сістэмы ўраўненняў

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 6x_1 + 5x_2, \\ \dot{x}_2 = -10x_1 - 8x_2, \end{cases}$$

якое задавальняе пачатковай умове $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$.

Рашэнне. Уласныя лікі матрыцы знаходзім з ураўнення

$$\begin{vmatrix} 6 - \lambda & 5 \\ -10 & -8 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0. \text{ Будзем мець } \lambda_{1,2} = -1 \pm i. \text{ Лікі}$$

$\lambda_{1,2}$ камплексныя, значыць сапраўдная жарданава форма матрыцы

$$A \text{ мае від } J = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Матрыцу } T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ для якой } A = T^{-1} J T,$$

$$\text{знаходзім з роўнасці } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -10 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \text{ Гэтая}$$

роўнасць эквівалентна сістэме ўраўненняў

$$\begin{cases} 7a - 10b = c, \\ 5a - 7b = d. \end{cases}$$

Адным з рашэнняў атрыманай сістэмы будзе $a=3, b=2, c=1, d=1$.

Таму $T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Аналагічна прыкладу 8 падлі-

чым, што $e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{-t} \cos t & e^{-t} \sin t \\ -e^{-t} \sin t & e^{-t} \cos t \end{pmatrix}$. Таму

$$\begin{aligned} e^{At} &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} \cos t & e^{-t} \sin t \\ -e^{-t} \sin t & e^{-t} \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t + 7 \sin t & 5 \sin t \\ -10 \sin t & \cos t - 7 \sin t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Такім чынам, шуканае рашэнне

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At} x^0 = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t + 7 \sin t & 5 \sin t \\ -10 \sin t & \cos t - 7 \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= e^{-t} \begin{pmatrix} 5 \sin t \\ \cos t - 7 \sin t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Прыклад 11. Знайсці рашэнне сістэмы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + 4x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2, \end{cases}$$

якое задавальняе ўмове $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$.

Рашэнне. Уласныя лікі матрыцы A знаходзім з ураўнення

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0, \text{ гэта значыць } \lambda_1 = \lambda_2 = -1.$$

Ранг матрыцы $A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -3+1 & 4 \\ -1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ роўны 1, таму

жарданава форма матрыцы A ёсць $J = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Матрыца $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

якая задавальняе роўнасці $A = T^{-1}JT$, вызначаецца так:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad \text{Апошняя роўнасць экві-}$$

валентная сістэме алгебраічных ураўненняў $2a + b + c = 0$, $2c + d = 0$. Адным з рашэнняў гэтай сістэмы ўраўненняў з'яўляецца

$$a = -1, b = 1, c = 1, d = -2, \text{ таму } T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, T^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Такім чынам, $e^{At} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}t} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Паколькі

$$e^{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}t} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ канчаткова атрымліваем}$$

$$\begin{aligned} e^{At} &= \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -2e^{-t} & -e^{-t}(1+2t) \\ -e^{-t} & -e^{-t}(1+t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-2t)e^{-t} & 4te^{-t} \\ te^{-t} & (1+t)e^{-t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Рашэнне зыходнай задачы запішацца так:

$$x(t) = \begin{pmatrix} (1-2t)e^{-t} & 4te^{-t} \\ te^{-t} & (1+t)e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-2t)e^{-t} \\ te^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\text{або } x_1 = (1-2t)e^{-t}, x_2 = te^{-t}.$$

§ 4. Лінейныя неаднародныя сістэмы

Разгледзім лінейную неаднародную сістэму

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + f_i(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad (30)$$

або ў вектарным запісе

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t),$$

дзе $t \in I = (a; b)$, $f = \text{colon}(f_1, f_2, \dots, f_n)$ – вектар-функцыя з непарыўнымі на I кампанентамі, x і $A(t)$ вызначаны ў § 1.

Тэарэма 6 (аб структуры агульнага рашэння лінейнай неаднароднай сістэмы дыферэнцыяльных ураўненняў). Любое рашэнне сістэмы (30) уяўляе суму некаторага частковага рашэння x^* гэтай сістэмы і некаторага рашэння адпаведнай аднароднай сістэмы $\dot{x} = A(t)x$, і наадварот, сума некаторага частковага рашэння x^* неаднароднай сістэмы і любога рашэння адпаведнай ёй аднароднай сістэмы з’яўляецца рашэннем сістэмы (30).

Такім чынам, агульнае рашэнне сістэмы (30) мае выгляд $x = x^* + C_1 x^1 + C_2 x^2 + \dots + C_n x^n$, дзе $x^1, x^2, \dots, x^n$ – фундаментальная сістэма рашэнняў адпаведнай аднароднай сістэмы.

Доказ гэтай тэарэмы праводзіцца па той жа схеме, што і доказ тэарэмы 2.3. аб структуры агульнага рашэння лінейнага неаднароднага дыферэнцыяльнага ўраўнення.

Практыкаванне 1. Правесці самастойна падрабязны доказ тэарэмы 6.

Адзначым, што для сістэмы $\dot{x} = A(t)x + f^1(t) + \dots + f^k(t)$ мае месца прынцып суперпазіцыі частковых рашэнняў, у адпаведнасці з якім частковае рашэнне гэтай сістэмы адшукваецца ў выглядзе

$x^* = \sum_{i=1}^k x^{i*}$, дзе x^{i*} – частковае рашэнне сістэмы

$\dot{x} = A(t)x + f^i(t)$ (гл. § 2.3).

Сістэму лінейных неаднародных ураўненняў можна рашаць шляхам прывядзення яе да аднаго ўраўнення n -га парадку метадам выключэння, метадам інтэгральных камбінацый або метадам варыяцый адвольных пастаянных. Апошні з названых метадаў

примыняецца ў тым выпадку, калі ўдаецца рашыць адпаведную аднародную сістэму ўраўненняў $\dot{x} = A(t)x$. Няхай базіс рашэнняў гэтай сістэмы вядомы і $x = X(t) \cdot C$, дзе C – вектар-слупок адвольных пастаянных $C_1, C_2, \dots, C_n$ – ёсць яе агульнае рашэнне.

Замяняючы C_i на $C_i(t)$, падбярэм вектар-функцыю $C(t)$ так, каб выраз $x = X(t) \cdot C(t)$ даваў агульнае рашэнне неаднароднай сістэмы. Прадыферэнцуем x і падставім x і $\dot{x}$ у (30). Атрымаем $\dot{X}(t)C(t) + X(t)\dot{C}(t) = A(t)X(t)C(t) + f(t)$ або з улікам, што $X(t)$ – фундаментальная матрыца адпаведнай аднароднай сістэмы, $X(t)\dot{C}(t) = f(t)$. Адкуль $\dot{C}(t) = X^{-1}(t)f(t)$ ($X^{-1}(t)$ – адваротная матрыца $X(t)$ будзе існаваць, таму што слупкамі апошняй з'яўляюцца лінейна незалежныя вектар-функцыі і

$|X(t)| \neq 0$). Будзем мець $C(t) = \int_{t_0}^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau + C$, дзе C –

адвольны вектар-слупок, $t_0 \in I$.

Падстаўляючы цяпер знойдзеную $C(t)$ у выраз $x = X(t)C(t)$, атрымаем агульнае рашэнне зыходнай сістэмы ў выглядзе

$$x(t) = X(t) \int_{t_0}^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau + X(t)C. \quad (31)$$

Пакажам, што формула (31) змяшчае ўсе рашэнні сістэмы (30) на інтэрвале I . Няхай $x = \bar{x}(t)$ – любое рашэнне разглядаемай сістэмы. Выберам $t_0 \in I$, і няхай $\bar{x}(t_0) = x^0$. Пакажам, што рашэнне, зададзенае формулай (31), пры адпаведным выбары C будзе задавальняць такім жа пачатковым умовам. Падставіўшы дадзеныя пачатковыя ўмовы ў (31), будзем мець $x^0 = X(t_0)C$. У сілу

таго, што $X(t)$ – фундаментальная матрыца, адназначна знаходзім $C = X^{-1}(t_0)x^0$. Пры такім выбары C рашэнне (31) будзе супадаць з выбраным рашэннем $x = \bar{x}(t)$. Адсюль вынікае, што рашэнне сістэмы (30) з пачатковай умовай $x(t_0) = x^0$ (задачы Кашы) можна запісаць у выглядзе

$$x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x^0 + X(t)\int_{t_0}^t X^{-1}(t)f(t)dt. \quad (31')$$

Заўвага 1. Аб азначэнні вытворнай і інтэграла ад матрычнай функцыі можна прачытаць у [25], глава V, § 6, с. 116, 118.

Прыклад 1. Рашыць сістэму ўраўненняў

$$\frac{dx}{dt} = x + \frac{y}{t} + t \operatorname{ch} t, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{x}{t} + y + t \operatorname{sh} t.$$

Рашэнне. Складзём пачленна два ўраўненні, атрымаем лінейнае ўраўненне з невядомай функцыяй $x + y$:

$$\frac{d}{dt}(x + y) = \left(1 + \frac{1}{t}\right)(x + y) + te^t.$$

Рашэнне адпаведнага аднароднага ўраўнення ёсць $x + y = C_1 te^t$. Рашэнне неаднароднага ўраўнення адшукваем у выглядзе $x + y = C_1(t)te^t$. Функцыю $C_1(t)$ вызначаем з роўнасці

$$te^t \frac{dC_1}{dt} = te^t, \quad \text{гэта значыць} \quad C_1(t) = t + C_1. \quad \text{Такім чынам,}$$

$x + y = C_1 te^t + t^2 e^t$. Адымаючы пачленна з першага ўраўнення дадзенай сістэмы другое, маем

$$\frac{d}{dt}(x - y) = \left(1 - \frac{1}{t}\right)(x - y) + te^{-t}.$$

Адкуль знаходзім $x - y = C_2 te^{-t} + t^2 e^{-t}$. Улічваючы атрыманыя вынікі, будзем мець

$$x = \frac{t}{2}(C_1 e^t + C_2 e^{-t}) + t^2 \operatorname{ch} t, \quad y = \frac{t}{2}(C_1 e^t - C_2 e^{-t}) + t^2 \operatorname{sh} t.$$

Приклад 2. Рашыць сістэму ўраўненняў

$$t \frac{dx}{dt} = -x + yt, \quad t^2 \frac{dy}{dt} = -2x + yt \quad (t \neq 0).$$

Рашэнне. З першага ўраўнення знаходзім $y = \frac{x}{t} + \frac{dx}{dt}$. Адкуль

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{t^2} + \frac{1}{t} \frac{dx}{dt} + \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

Падстаўляючы гэтыя выразы для y і $\frac{dy}{dt}$ у

другое ўраўненне, атрымаем $t^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + t \frac{dx}{dt} - x = -2x + x + t \frac{dx}{dt}$ або

$$t^2 \frac{d^2 x}{dt^2} = 0.$$

У сілу таго, што $t \neq 0$, з апошняга ўраўнення маем

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0 \quad \text{і пасля інтэгравання атрымаем} \quad x = C_1 + C_2 t.$$

Значыць,

$$y = \frac{x}{t} + \frac{dx}{dt} = \frac{C_1 + C_2 t}{t} + C_2 = 2C_2 + \frac{C_1}{t}.$$

Агульнае рашэнне

дадзенай сістэмы $x = C_1 + C_2 t, \quad y = \frac{C_1}{t} + 2C_2.$

§ 5. Метады інтэгравання лінейных неаднародных сістэм з пастаяннымі каэфіцыентамі

1⁰. *Метад выключэння.* Прыменім метады, апісаны ў § 2, да разглядаемай сістэмы (30) з пастаяннай матрыцай A .

Прыклад 1. Рашыць сістэму

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{6}x_1 + \frac{7}{6}x_2 - \frac{5}{6}x_3 + \frac{5}{3}e^t; \quad \dot{x}_2 = -\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3;$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}e^t.$$

Рашэнне. Дыферэнцуем па t першае ўраўненне: $\ddot{x}_1 = \frac{1}{6}\dot{x}_1 + \frac{7}{6}\dot{x}_2 - \frac{5}{6}\dot{x}_3 + \frac{5}{3}e^t$. Пасля замены ў гэтым ураўненні $\dot{x}_2$ і $\dot{x}_3$ іх выразамі з другога і трэцяга ўраўненняў сістэмы будзем мець

$$36\ddot{x}_1 = 6\dot{x}_1 - 31\dot{x}_1 - x_2 + 11x_3 + 50e^t. \quad (32)$$

Атрыманае ўраўненне прадыверэнцуем па t : $36\ddot{\ddot{x}}_1 = 6\ddot{\ddot{x}}_1 - 31\dot{x}_1 + -\dot{x}_2 + 11\dot{x}_3 + 50e^t$, адкуль

$$216\ddot{\ddot{x}}_1 = 36\ddot{\ddot{x}}_1 - 186\dot{x}_1 + 25x_1 - 41x_2 + 19x_3 + 322e^t. \quad (33)$$

З першага ўраўнення сістэмы і ўраўнення (32) знаходзім x_2 і x_3 праз $t, x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1$:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{5}{2}\ddot{x}_1 + \frac{1}{2}\dot{x}_1 + 25x_1 - 5e^t, \\ x_3 &= \frac{7}{2}\ddot{x}_1 - \frac{1}{2}\dot{x}_1 + 3x_1 - 5e^t. \end{aligned} \quad (34)$$

Падставім x_2 і x_3 ва ўраўненне (33) і атрымаем адносна x_1 ураўненне трэцяга парадку з пастаяннымі каэфіцыентамі і спецыяльнай правай часткай $\ddot{\ddot{x}}_1 + \dot{x}_1 = 2e^t$.

Агульнае рашэнне гэтага ўраўнення мае від (гл. § 2.6) $x_1 = = C_1 + C_2 \cos t + C_3 \sin t + e^t$. Падставіўшы $x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1$ у роўнасці (34), знаходзім

$$\begin{aligned} x_2 &= 2C_1 + \frac{1}{2}(C_3 - C_2)\cos t - \frac{1}{2}(C_3 + C_2)\sin t, \\ x_3 &= 3C_1 - \frac{1}{2}(C_2 + C_3)\cos t + \frac{1}{2}(C_2 - C_3)\sin t + e^t. \end{aligned}$$

2^0 . *Метад варыяцыі адвольных пастаянных.* Прыменім метада,

апісаны ў папярэднім параграфу, да сістэмы (30), у якой матрыца $A(t) \equiv A$.

Прыклад 2. Рашыць сістэму $\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = -x + \frac{1}{\cos t}$.

Рашэнне. Агульнае рашэнне адпаведнай аднароднай сістэмы

$\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = -x$ мае выгляд $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t, y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t$

(гл. § 2). Рашэнне зыходнай сістэмы будзем адшукваць у выглядзе $x = C_1(t) \cos t + C_2(t) \sin t, y = -C_1(t) \sin t + C_2(t) \cos t$. Прадыферэнцаваўшы x, y і падставіўшы ўсе выразы ў зыходную сістэму, будзем мець наступныя ўраўненні для вызначэння $\dot{C}_1(t)$ і $\dot{C}_2(t)$:

$$\dot{C}_1(t) \cos t + \dot{C}_2(t) \sin t = 0,$$

$$-\dot{C}_1(t) \sin t + \dot{C}_2(t) \cos t = \frac{1}{\cos t},$$

адкуль $\dot{C}_1 = -\frac{\sin t}{\cos t}, \dot{C}_2(t) = 1$. Праінтэграваўшы, атрымаем

$$C_1(t) = \ln|\cos t| + \bar{C}_1, C_2(t) = t + \bar{C}_2$$

і, значыць,

$$x = \bar{C}_1 \cos t + \bar{C}_2 \sin t + \cos t \cdot \ln|\cos t| + t \sin t,$$

$$y = -\bar{C}_1 \sin t + \bar{C}_2 \cos t - \sin t \cdot \ln|\cos t| + t \cos t.$$

3⁰. *Метад нявызначаных каэфіцыентаў.* Гэты метада прымянення ў тым выпадку, калі функцыі $f_i(t)$ складаюцца з сумаў і здабыткаў функцый $b_0 + b_1 t + \dots + b_m t^m, e^{\alpha t}, \cos \beta t, \sin \beta t$.

Калі $f_i(t) = e^{\alpha_i t} [P_{n_i}(t) \cos \beta_i t + Q_{m_i}(t) \sin \beta_i t]$, то частковае рашэнне лінейнай неаднароднай сістэмы адшукваецца па тых жа правілах, што і для аднаго лінейнага ўраўнення з пастаяннымі каэфі-

цыентамі (гл. § 2.6) са зменаі, якія вызначаюцца наступнай тэарэмай

Тэарэма 7. Частковае рашэнне сістэмы

$$\dot{x} = Ax + P_m(t)e^{\mu t},$$

дзе $A = \begin{pmatrix} a_{ij}, j = \overline{1, n} \\ i = \overline{1, n} \end{pmatrix}$, $P_m(t)$ — n -вектарны поліном ступені m , μ —

камплексны лік, мае выгляд

$$x^* = Q_{m+k}(t)e^{\mu t},$$

прычым $Q_{m+k}(t)$ — вектарны поліном з кампанентамі ступені, не большай за $m+k$, а лік k супадае з кратнасцю μ , калі μ з'яўляецца коранем характарыстычнага ўраўнення (22) і $k=0$, калі μ не корань ураўнення (22).

Невядомыя каэфіцыенты поліномаў $Q_{m+k}^i(t)$ (кампанент $Q_{m+k}(t)$) вызначаюцца шляхам падстаноўкі і параўнання каэфіцыентаў падобных членаў, а сапраўдныя рашэнні выдзяляюцца па той жа схеме, што і раней.

Прыклад 3. Рашыць сістэму ўраўненняў

$$\frac{dx}{dt} = 2x + y + 2e^t, \quad \frac{dy}{dt} = x + 2y - 3e^{4t}.$$

Рашэнне. Знаходзім карані характарыстычнага ўраўнення адпаведнай аднароднай сістэмы $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$ або $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$; $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$. Агульнае рашэнне аднароднай сістэмы ёсць $x = C_1 e^t + C_2 e^{3t}$, $y = -C_1 e^t + C_2 e^{3t}$. Паколькі $\mu = 1$ з'яўляецца коранем характарыстычнага ўраўнення аднароднай сістэмы, а $\mu = 4$ не з'яўляецца коранем гэтага ўраўнення, то частковае рашэнне, згодна з тэарэмай 7, будзем адшукваць у выглядзе

$$x^* = (A_1 + A_2 t)e^t + A_3 e^{4t}, y^* = (B_1 + B_2 t)e^t + B_3 e^{4t}.$$

Падстаўляючы гэтыя выразы ў дадзеную сістэму, атрымліваем ураўненні для вызначэння невядомых каэфіцыентаў $A_i, B_i, i = 1, 2, 3$:

$-A_1 + A_2 - B_1 = 2, A_1 + B_1 - B_2 = 0, A_2 + B_2 = 0, 2A_3 - B_3 = 0, 2B_3 - A_3 = 0$. З гэтых ураўненняў знаходзім $A_1 = 0, A_2 = 1, A_3 = -1, B_1 = -1, B_2 = -1, B_3 = -2$. Частковае рашэнне неаднароднай сістэмы $x^* = te^t - e^{4t}, y^* = -(t+1)e^t - 2e^{4t}$, а яе агульнае рашэнне (гл. тэарэму 3) запішацца так:

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{3t} + te^t - e^{4t}, y = -C_1 e^t + C_2 e^{3t} - (t+1)e^t - 2e^{4t}.$$

Прыклад 4. Устанавіць від частковага рашэння сістэм:

$$\begin{aligned} \text{а) } \dot{x} &= 4x - y + e^{3t}(t + \sin t), & \dot{x} &= x - y + 8t, \\ \dot{y} &= x + 2y + te^{3t} \cos t. & \text{б) } \dot{y} &= 5x - y + t^2 + \sin 2t. \end{aligned}$$

Рашэнне. а) Знаходзім карані характарыстычнага ўраўнення адпаведнай аднароднай сістэмы $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$. У зыходнай сістэме $\mu = 3, \alpha + i\beta = 3 + i$. З-за таго, што $\mu = 3$ з'яўляецца двухкратным каранем характарыстычнага ўраўнення ($m = 1, k = 2$), а $\alpha + i\beta = 3 + i$ не з'яўляецца каранем гэтага ўраўнення ($m = 1$), то частковае рашэнне запішацца ў выглядзе

$$\begin{aligned} x^* &= (a_1 t^3 + b_1 t^2 + c_1 t + d_1)e^{3t} + (k_1 t + l_1)e^{3t} \sin t + (m_1 t + n_1)e^{3t} \cos t, \\ y^* &= (a_2 t^3 + b_2 t^2 + c_2 t + d_2)e^{3t} + (k_2 t + l_2)e^{3t} \sin t + (m_2 t + n_2)e^{3t} \cos t. \end{aligned}$$

б) Карані характарыстычнага ўраўнення тут роўныя $\lambda_{1,2} = \pm 2i$. Для дадзенай сістэмы $\gamma = 0$ не з'яўляецца каранем характарыстычнага ўраўнення ($m = 2$), лік $\alpha \pm i\beta = \pm 2i$ з'яўляецца каранем гэтага ўраўнення ($k = 1, m = 0$). Таму частковае рашэнне дадзенай сістэмы будзе мець выгляд

$$\begin{aligned} x^* &= a_1 t^2 + b_1 t + c_1 + (d_1 + k_1 t) \cos 2t + (f_1 + l_1 t) \sin 2t, \\ y^* &= a_2 t^2 + b_2 t + c_2 + (d_2 + k_2 t) \cos 2t + (f_2 + l_2 t) \sin 2t. \end{aligned}$$

4⁰. Пабудова інтэгральных камбінацый. Метад Даламбера.

Разгледзім гэты метад у выпадку сістэмы двух ураўненняў

$$\frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y + f_1(t), \quad \frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y + f_2(t). \quad \text{Памножым другое}$$

ўраўненне сістэмы на нейкі лік λ і складзём пачленна з першым ураўненнем. Атрымаем

$$\frac{d(x + \lambda y)}{dt} = (a_1 + \lambda a_2)x + (b_1 + \lambda b_2)y + f_1(t) + \lambda f_2(t).$$

Перапішам апошняе ўраўненне ў выглядзе ($a_1 + \lambda a_2 \neq 0$)

$$\frac{d(x + \lambda y)}{dt} = (a_1 + \lambda a_2) \left(x + \frac{b_1 + \lambda b_2}{a_1 + \lambda a_2} y \right) + f_1(t) + \lambda f_2(t). \quad (35)$$

Выберам лік λ так, каб $\frac{b_1 + \lambda b_2}{a_1 + \lambda a_2} = \lambda$. Тады (35) прывядзецца да

ўраўнення, лінейнага адносна $x + \lambda y$,

$$\frac{d(x + \lambda y)}{dt} = (a_1 + \lambda a_2)(x + \lambda y) + f_1(t) + \lambda f_2(t),$$

інтэгруючы якое, будзем мець

$$x + \lambda y = e^{(a_1 + \lambda a_2)t} \left(C + \int (f_1(t) + \lambda f_2(t)) e^{-(a_1 + \lambda a_2)t} dt \right). \quad (36)$$

Калі ўраўненне $\frac{b_1 + \lambda b_2}{a_1 + \lambda a_2} = \lambda$ мае розныя сапраўдныя карані λ_1 і

λ_2 , то з (36) атрымаем два незалежныя інтэгралы дадзенай сістэмы, а, значыць, інтэграванне сістэмы будзе закончана.

Прыклад 5. Рашыць метадам Даламбера сістэму

$$\frac{dx}{dt} = -2x + 2y + e^t, \quad \frac{dy}{dt} = -x - 5y + e^{2t}.$$

Рашэнне. Памнажаем другое ўраўненне сістэмы на λ і складаем пачленна з першым:

$$\frac{d}{dt}(x + \lambda y) = (-2 - \lambda)x + (2 - 5\lambda)y + e^t + \lambda e^{2t}$$

або

$$\frac{d}{dt}(x + \lambda y) = (-2 - \lambda) \left(x + \frac{2 - 5\lambda}{-2 - \lambda} y \right) + e^t + \lambda e^{2t}. \quad (37)$$

Вибіраємо λ так, щоб коефіцієнт при y у квадратній дужці був роўны λ , гэта значыць $\frac{2 - 5\lambda}{-2 - \lambda} = \lambda$ або $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, адкуль $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. Пры $\lambda_1 = 1$ з (37) атрымліваем

$$\frac{d(x + y)}{dt} = -3(x + y) + e^t + e^{2t}.$$

Значыць, згодна з формулай (36), будзем мець

$$x + y = e^{-3t} \left(C_1 + \int (e^t + e^{2t}) e^{3t} dt \right).$$

Пасля інтэгравання знаходзім

$$x + y = C_1 e^{-3t} + \frac{1}{4} e^t + \frac{1}{5} e^{2t}. \quad (38)$$

Пры $\lambda_2 = 2$ з (37) аналагічна запішам

$$x + 2y = C_2 e^{-4t} + \frac{1}{5} e^t + \frac{1}{3} e^{2t}. \quad (39)$$

Вырашаючы сістэму (38), (39) адносна x і y , атрымаем агульнае рашэнне дадзенай сістэмы

$$\begin{aligned} x &= 2C_1 e^{-3t} - C_2 e^{-4t} + 0,3e^t + \frac{1}{15} e^{2t}, \\ y &= -C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-4t} - 0,05e^t + \frac{2}{15} e^{2t}. \end{aligned}$$

5°. *Матрычны метад.* У сістэму $\frac{dx}{dt} = Ax + f(t)$ увядзём замест x новы слупок невядомых функцый z па формуле

$$x = e^{At} z. \quad (40)$$

Дыферэнцуючы (40) і падстаўляючы ў зыходную сістэму, атрымаем

$e^{At} \frac{dz}{dt} = f(t)$. Адкуль $z(t) = C + \int_{t_0}^t e^{-A\tau} f(\tau) d\tau$. Вяртаючыся па

формуле (40) да x , атрымаем

$$x = e^{At} \left[C + \int_{t_0}^t e^{-A\tau} f(\tau) d\tau \right] = e^{At} \cdot C + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau,$$

дзе C – слупок з адвольнымі пастаяннымі элементамі. З улікам пачатковай умовы $x(t_0) = x^0$, з апошняй формулы атрымаем $C = e^{-At_0} x^0$, і рашэнне задачы Кашы можна запісаць так:

$$x = e^{A(t-t_0)} x^0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau.$$

Прыклад 6. Рашыць задачу Кашы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 5x_1 - x_2 - 4x_3 + e^t, \\ \dot{x}_2 = -12x_1 + 5x_2 + 12x_3, & x_1(-2) = 0, x_2(-2) = 1, x_3(-2) = 0. \\ \dot{x}_3 = 10x_1 - 3x_2 - 9x_3, \end{cases}$$

Рашэнне. Уласнымі значэннямі матрыцы A будуць $\lambda_{1,2} = 1$, $\lambda_3 = -1$. Уласнаму значэнню $\lambda_{1,2} = 1$ адпавядае адзін уласны вектар, таму што ранг матрыцы $(A - \lambda_{1,2}E) = (A - E)$ будзе роўны 2.

Жарданава матрыца мае выгляд $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Адкуль

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \quad (\text{гл. прыклады 8-11 § 2). \text{ Знаходзячы матрыцу}$$

T і адваротную да яе, будзем мець

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -5 \\ -2 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Такім чынам,}$$

$$e^{At} = Te^{Jt}T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -5 \\ -2 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (4-2t)e^t - 3e^{-t} & (t-1)e^t + e^{-t} & (2t-3)e^t + 3e^{-t} \\ -6e^t + 6e^{-t} & 3e^t - 2e^{-t} & 6e^t - 6e^{-t} \\ (6-2t)e^t + 6e^{-t} & (t-2)e^t + 2e^{-t} & (2t-5)e^t + 6e^{-t} \end{pmatrix}. \text{ Тады}$$

$$e^{A(t-t_0)}x_0 = e^{A(t+2)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (t+1)e^{t+2} + e^{-(t+2)} \\ 3e^{t+2} - e^{-(t+2)} \\ te^{t+2} + 2e^{-(t+2)} \end{pmatrix},$$

$$\int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau = \int_{-2}^t \begin{pmatrix} ((4-2t+2\tau)e^{t-\tau} - 3e^{-(t-\tau)})e^{\tau} \\ (-6e^{t-\tau} + 6e^{-(t-\tau)})e^{\tau} \\ ((6-2t+2\tau)e^{t-\tau} - 6e^{-(t-\tau)})e^{\tau} \end{pmatrix} d\tau =$$

$$= \begin{pmatrix} \int_{-2}^t ((4-2t+2\tau)e^t - 3e^{-t}e^{2\tau}) d\tau \\ \int_{-2}^t (-6e^t + 6e^{-t}e^{2\tau}) d\tau \\ \int_{-2}^t ((6-2t+2\tau)e^t - 6e^{-t}e^{2\tau}) d\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{5}{2} - t^2\right)e^t + \frac{3}{2}e^{-(t+4)} \\ (-6t+9)e^t - 3e^{-(t+4)} \\ (5+2t-t^2)e^t + 3e^{-(t+4)} \end{pmatrix}.$$

Прымяніўшы формулу для рашэння пачатковай задачы, будзем мець

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{5}{2} + e^2 + te^2 - t^2 \right) e^t + \left(e^{-2} + \frac{3}{2} e^{-4} \right) e^{-t} \\ (3e^2 - 9 - t^2) e^t - (2e^{-2} + 3e^{-4}) e^{-t} \\ (5 + 2t + te^2 - t^2) e^t + (2e^{-2} + 3e^{-4}) e^{-t} \end{pmatrix}.$$

§ 6. Прымяненне пераўтварэння Лапласа да рашэння лінейных дыферэнцыяльных ураўненняў і сістэм (аперацыйны метад інтэгравання)

1. *Агульныя звесткі аб пераўтварэнні Лапласа.* Аперацыйны метад рашэння некаторых задач па знаходжанні функцыі $x(t)$ сапраўднай зменнай t з ураўнення, што змяшчае гэтую функцыю пад знакамі вытворных ці інтэгралаў, заключаецца ў наступным:

- 1) ад шуканай функцыі $x(t)$ пераходзяць да функцыі $X(p)$ ^{*)} камплекснай зменнай p – «выяве» $x(t)$;
- 2) над выявай $X(p)$ праводзяць аперацыі, якія адпавядаюць зададзеным аперацыям над $x(t)$, тым самым атрымліваюць «аператарнае ўраўненне» адносна $X(p)$;
- 3) атрыманае аператарнае ўраўненне вырашаюць адносна $X(p)$;
- 4) ад знойдзенай выявы $X(p)$ пераходзяць да арыгінала $x(t)$, які і з'яўляецца шуканай функцыяй.

Арыгіналамі будзем называць камплексназначныя функцыі сапраўднай зменнай t , такія што:

- 1) $f(t) = 0$ для ўсіх адмоўных t ;
- 2) $f(t)$ – кусочна-непарыўная, інтэгральная на любым канечным прамежку восі t функцыя;

^{*)} У гэтым параграфе фундаментальная матрыца не выкарыстоўваецца, таму блытаніны з абазначэннямі не будзе.

3) $f(t)$ узрасце не хутчэй паказнікавай функцыі, гэта значыць існуюць такія пастаянныя $M > 0, s_0 \geq 0$, што для ўсіх t

$$|f(t)| < Me^{s_0 t}. \text{ Лік } s_0 \text{ называюць паказнікам росту}$$

Напрыклад, найпрасцейшай функцыяй арыгіналам з'яўляецца функцыя

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Вывай функцыі $f(t)$ (па Лапласу) называюць функцыю камплекснай зменнай $p = s + i\sigma$, вызначаную судачыненнем

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt, \quad (41)$$

дзе інтэграл бярэцца па дадатнай паўвосі.

Пераўтварэнне (41), што ставіць у адпаведнасць арыгіналу $f(t)$ яго выяву $F(p)$, называецца пераўтварэннем Лапласа. Пры

гэтым пішуць $f(t) = F(p)$ або $F(p) = f(t)$. Адзначым два

простыя прыклады пераўтварэння Лапласа: $1 = \frac{1}{p}, e^{\lambda t} = \frac{1}{p - \lambda},$

якія непасрэдна атрымліваюцца з яго азначэння. Будзем абазначаць праз $f(t), g(t), \dots$ арыгіналы, а праз $F(p), G(p), \dots$ — іх выявы.

Непасрэдна з уласцівасцяў інтэгралаў

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt, \quad G(p) = \int_0^{\infty} g(t)e^{-pt} dt, \dots$$

атрымліваем наступныя ўласцівасці.

I. Уласцівасць лінейнасці. Для любых комплексных пастаянных α і β

$$\alpha f(t) + \beta g(t) = \alpha F(p) + \beta G(p).$$

Кіруючыся гэтай уласцівасцю, напрыклад, можна атрымаць

$$\sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega} \right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Аналагічна

$$\cos \omega t = \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \quad sh \omega t = \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}, \quad ch \omega t = \frac{p}{p^2 - \omega^2}.$$

II. *Тэарэма падабенства.* Для любога пастаяннага $\alpha > 0$

$$f(\alpha t) = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Сапраўды, мяркуючы $\alpha t = \tau$, маем

$$f(\alpha t) = \int_0^{\infty} f(\alpha t) e^{-pt} dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-\frac{p}{\alpha} \tau} d\tau = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

III. *Дыферэнцаванне арыгінала.* Калі $f(t)$ і $f'(t)$ — арыгіналы або $f^{(n)}(t)$ з'яўляецца арыгіналам, то

$$f'(t) = pF(p) - f(0), \quad (42)$$

або

$$f^{(n)}(t) = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0), \quad (43)$$

дзе пад $f^{(k)}(0)$ будзем разумець правае лімітавае значэнне $\lim_{t \rightarrow +0} f^{(k)}(t)$.

Сапраўды, пераходзячы да выяў і інтэгруючы па частках, атрымліваем

$$f'(t) = \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = \left[f(t) e^{-pt} \right]_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

У сілу таго, што $Re p = s > s_0$, маем $|f(t) e^{-pt}| \leq M e^{(s-s_0)t}$, і падстаноўка $t = \infty$ у першы член дае нуль, падстаноўка $t = 0$ дае

$-f(0)$; другі член роўны $pF(p)$, і формула (42) даказана.

Прымяніўшы гэтую формулу двойчы, атрымаем $f''(t) = [f'(t)]' = p[pF(p) - f(0)] - f'(0) = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$ і

г.д. Па індукцыі мае месца формула (43).

IV. *Дыферэнцаванне выявы.* Дыферэнцаванне выявы прыводзіцца да множання на $-t$ арыгінала або наогул

$$F^{(n)}(p) = (-1)^n t^n f(t). \quad (44)$$

З інтэграла Лапласа (41), згодна з яго аналітычнасцю, маем $F'(p) =$

$$= \int_0^{\infty} -tf(t)e^{-pt} dt. \text{ Адкуль і атрымліваем роўнасць } F'(p) = -tf(t).$$

$$\text{Затым } F''(p) = \int_0^{\infty} t^2 f(t)e^{-pt} dt, \dots, F^{(n)}(p) = (-1)^n \int_0^{\infty} t^n f(t)e^{-pt} dt.$$

Прымяняючы ўласцівасць IV, можна атрымаць $t^n = \frac{n!}{p^n + 1}$,

$$t^n e^{\lambda t} = \frac{n!}{(p - \lambda)^{n+1}}, \quad t \sin \omega t = \frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}, \quad t \cos \omega t = \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}.$$

V. *Інтэграванне арыгінала.* Інтэграванне арыгінала прыводзіцца да дзялення выявы на p $\int_0^t f(t)dt = \frac{F(p)}{p}$. Пераўтварыўшы па

Лапласу роўнасць $\left(\int_0^t f(\tau) d\tau \right)' = f(t)$ з улікам формулы (42) і

азначэння $\int_0^t f(\tau) d\tau = g(t)$, атрымаем

$$f(t) = g'(t) = pG(p).$$

Такім чынам, для выявы $f(t)$ маем $F(p) = pG(p)$, адкуль

$$G(p) = \frac{F(p)}{p}.$$

VI. *Інтэграванне выявы.* Калі інтэграл $\int_p^\infty F(p)dp$ збягаецца, то ён служыць выявай функцыі $\frac{f(t)}{t} : \frac{f(t)}{t} = \int_p^\infty F(p)dp$.

Сапраўды, $\int_p^\infty F(p)dp = \int_p^\infty dp \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$. Мяркуючы, што шлях інтэгравання (p, ∞) увесь ляжыць у паўплоскасці $\operatorname{Re} p \geq a > s_0$, атрымаем ацэнку ўнутранага інтэграла $\left| \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt \right| \leq M \int_0^\infty e^{-(a-s_0)t}dt$, з якой вынікае яго раўнамерная збежнасць адносна p . Таму можна змяніць парадак інтэгравання

$$\int_p^\infty F(p)dp = \int_0^\infty f(t)dt \int_p^\infty e^{-pt}dp = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-pt}dt.$$

Прымяняючы ўласцівасць VI, знойдзем $\frac{\sin t}{t} = \int_p^\infty \frac{dp}{1+p^2} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arcctg} p$. Прымяняючы ўласцівасць V, знойдзем

$$\text{выяву інтэгральнага сінуса} \quad \sin t = \int_0^t \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\operatorname{arcctg} p}{p}.$$

VII. Тэарэмы спазнення. Для любога $a > 0$

$$f(t-a) = e^{pa} F(p). \quad (45)$$

З-за таго, што $f(t-a) = 0$ пры $t < a$, пасля замены $t-a = \tau$ атрымаем

$$f(t-a) = \int_a^{\infty} f(t-a) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p(\tau+a)} d\tau = e^{-pa} F(p).$$

Аналагічна даказваецца формула ($a > 0$)

$$f(t+a) = e^{pa} \left(F(p) - \int_0^a f(t) e^{-pt} dt \right).$$

Прымяняючы формулу (31), можна, напрыклад, знайсці для $t > \frac{\pi}{2}$

$$\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi p}{2}} \cdot \frac{1}{p^2 + 1}.$$

VIII. Тэарэма зрушэння. Для любога камплекснага α

$$e^{\alpha t} f(t) = F(p - \alpha).$$

Маем $e^{\alpha t} f(t) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(p-\alpha)t} dt = F(p - \alpha).$

Тэарэма дазваляе па вядомых выявах функцый знаходзіць выявы тых жа функцый, памножаных на экспаненту, напрыклад:

$$e^{-\lambda t} \sin \omega t = \frac{\omega}{(p + \lambda)^2 + \omega^2}, \quad e^{-\lambda t} \cos \omega t = \frac{p + \lambda}{(p + \lambda)^2 + \omega^2},$$

$$e^{-\lambda t} t^n = \frac{n!}{(p + \lambda)^{n+1}}.$$

IX. Тэарэма множання (Э.Барэля) 8. Здабытак дзвюх выяў $F(p)$ і $G(p)$ таксама з'яўляецца выявай, прычым

$$F(p) \cdot G(p) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Інтэграл у правай частцы называецца згорткай функцый $f(t)$ і $g(t)$

і абазначаецца $(f * g) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$

Тэарэма 8 сцвярджае, што множанне выяў раўназначна згортванню арыгіналаў $(f * g) = F(p) \cdot G(p).$

Карыстаючыся гэтай тэарэмай і правілам дыферэнцавання арыгінала (формула (42)), атрымаем так званы інтэграл Дзюамеля:

$$pF(p) \cdot G(p) = \frac{d}{dt}(f * g) = \frac{d}{dt} \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Выконваючы ў гэтым інтэграле дыферэнцаванне, атрымаем

$$pF(p) \cdot G(p) = f(t)g(0) + \int_0^t f(\tau)g'(t-\tau)d\tau.$$

Апошняю роўнасць называюць формулай Дзюамеля.

Карыстаючыся прыведзенымі вышэй формуламі, можна,

напрыклад, знайсці арыгінал $f(t)$ па выяве $F(p) = \frac{p^2}{(p^2 + 1)^2}.$

Запішам $F(p)$ у выглядзе $p \frac{p}{p^2 + 1} \cdot \frac{1}{p^2 + 1}.$ У сілу таго, што

$$\sin t = \frac{1}{p^2 + 1}, \quad \cos t = \frac{p}{p^2 + 1}, \quad \text{то}$$

$$p \frac{p}{p^2 + 1} \cdot \frac{1}{p^2 + 1} = \frac{d}{dt}(\cos t * \sin t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \cos \tau \cdot \sin(t-\tau)d\tau =$$

$$= \cos t \cdot \sin 0 + \int_0^t \cos \tau \cdot \cos(t - \tau) d\tau = \frac{1}{2} (t \cos t + \sin t).$$

Аб інших тээрэмах множання гл., напрыклад, [28], глава VI, § 1, с. 477.

2⁰. *Знаходжанне арыгінала па выяве.* Прывядзём некаторыя прыёмы знаходжання арыгінала $f(t)$ па вядомай выяве $F(p)$, дзе

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$$

ёсць правільны рацыянальны дроб. Аб тээрэмах

раскладання і формулах можна прачытаць [28], глава VI, § 1, с. 480; [29], раздзел 16, п. 16.2, с. 227; [30], глава III, § 9, с. 27.

На практыцы зручна прымяняць наступны спосаб знаходжання арыгіналаў для выяў, якія з'яўляюцца рацыянальнымі функцыямі: функцыю раскладваюць на прасцейшыя дробы і знаходзяць для кожнай з іх арыгінал, карыстаючыся прыведзенымі вышэй уласцівасцямі пераўтварэння Лапласа.

Арыгіналам функцыі $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$, $F(p)$ – правільны рацыянальны дроб, служыць функцыя ([28], с. 484)

$$f(t) = \sum_{k=1}^l \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}} \{F(p)(p - p_k)^{n_k} e^{pt}\},$$

дзе p_k – полюсы $F(p)$, а n_k – іх кратнасці, і сума бярэцца па ўсіх полюсах.

У выпадку, калі ўсе полюсы p_k функцыі $F(p)$ – простыя, гэта значыць $n_k = 1, k = \overline{1, l}$, апошняя формула спрашчаецца і мае выгляд

$$f(t) = \sum_{k=1}^l \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (46)$$

Калі паліномы $A(p)$ і $B(p)$ маюць сапраўдныя каэфіцыенты, то апошнюю формулу можна запісаць у выглядзе

$$\frac{A(p)}{B(p)} = \sum \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t} + 2 \operatorname{Re} \sum \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t},$$

дзе першая сума распаўсюджана на ўсе сапраўдныя карані $B(p)$, а другая – на ўсе комплексныя карані з дадатнымі ўяўнымі часткамі.

Калі выява мае выгляд $F(p) = \frac{A(p)}{pB(p)}$, дзе ступень $A(p)$ не перавышае ступені $B(p)$ і $B(p)$ мае простыя карані, не роўныя нулю, замест формулы (46) атрымліваем

$$\frac{A(p)}{pB(p)} = \frac{A(0)}{B(0)} + \sum_{k=1}^l \frac{A(p_k)}{p_k B'(p_k)} e^{p_k t},$$

дзе сума бярэцца па ўсіх каранях $B(p)$.

Прывядзём табліцу асноўных арыгіналаў і іх выяў, якія часта сустракаюцца пры рашэнні тых ці іншых задач. Больш пашыраную табліцу можна знайсці ў [28] на стар. 502.

№ п/п.	Арыгінал $f(t)$	Выява $F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$
1	1	$\frac{1}{p}$
2	$t^n (n = 1, 2, \dots)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
3	$t^\alpha (\alpha > -1)$	$\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{p^{\alpha+1}}$
4	$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p - \lambda}$
5	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$

№ п/п.	Арыгінал $f(t)$	Выява $F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$
6	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
7	$sh \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
8	$ch \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$
9	$\sin(t - \alpha) \ (\alpha > 0)$	$\frac{1}{p^2 + 1} \cdot e^{-\alpha p}$
10	$\cos(t - \alpha) \ (\alpha > 0)$	$\frac{p}{p^2 + 1} \cdot e^{-\alpha p}$
11	$t^n e^{\lambda t}, n = 1, 2, \dots$	$\frac{n!}{(p - \lambda)^{n+1}}$
12	$t^\alpha e^{\lambda t} \ (\alpha > -1)$	$\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(p - \lambda)^{\alpha+1}}$
13	$e^{\lambda t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$
14	$e^{\lambda t} \cos \omega t$	$\frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$
15	$t \sin \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$
16	$t \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
17	$t sh \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2 - \omega^2)^2}$

№ п/п.	Арыгінал $f(t)$	Выява $F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$
18	$t \operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p^2 + \omega^2}{(p^2 - \omega^2)^2}$
19	$J_n(t), n = 1, 2, \dots$	$\frac{(\sqrt{p^2 + 1} - p)^n}{\sqrt{p^2 + 1}}$
20	$\operatorname{si} t$	$\frac{\operatorname{arcctg} p}{p}$
21	$\operatorname{Erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right) (\alpha > 0)$	$\frac{e^{-\alpha} \sqrt{p}}{p}$
22	$\ln t$	$\frac{1}{p} \left(\ln \frac{1}{p} - c \right), c = 0,57722 -$ пастаянная Эйлера

3⁰. Рашэнне лінейных дыферэнцыяльных ураўненняў з пастаяннымі каэфіцыентамі аперацыйным метадам.

Няхай зададзена лінейнае дыферэнцыяльнае ўраўненне n -га парадку з пастаяннымі каэфіцыентамі

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{x} + a_n x = f(t), \quad (47)$$

дзе $x = x(t); t \geq 0$.

Патрабуецца знайсці рашэнне ўраўнення (47), якое задавальняе пачатковым умовам

$$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}. \quad (48)$$

Калі правая частка $f(t)$ ураўнення (47) – арыгінал, то відавочна, што і рашэнне $x(t)$ гэтага ўраўнення з'яўляецца арыгіналам. Няхай

$x(t) = X(p)$. Пераўтворым ураўненне (47) па Лапласу. З улікам пачатковых умоў і ўласцівасці ІІІ (формулы (42), (43)) будзем мець

$$x^{(n)}(t) = p^n X(p) - p^{n-1} x_0 - p^{n-2} \dot{x}_0 - \dots - x_0^{(n-1)},$$

$$a_1 x^{(n-1)}(t) = a_1 (p^{n-1} X(p) - p^{n-2} x_0 - p^{n-3} \dot{x}_0 - \dots - x_0^{(n-2)}),$$

.....,

$$a_{n-1} \dot{x}(t) = a_{n-1} (p X(p) - x_0),$$

$$a_n x(t) = a_n X(p).$$

Падставіўшы выявы складнікаў з левай часткі (47) з улікам, што $f(t) = F(p)$, атрымаем $(p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) X(p) = F(p) + x_0(p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \dots + a_{n-1}) + \dot{x}_0(p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \dots + a_{n-2}) + \dots + x_0^{(n-1)}$.

Апошняе ўраўненне называюць аператарным. Запісаўшы яго ў выглядзе $L(p)X(p) = F(p) + A(p)$, дзе $L(p)$, $A(p)$ – вядомыя паліномы, знаходзім аператарнае рашэнне $X(p) = \frac{F(p) + A(p)}{L(p)}$.

Калі ўраўненне (47) пры пачатковых дадзеных (48) дапускае рашэнне $x(t)$, якое задавальняе ўмовам для арыгіналаў, то гэтае рашэнне з'яўляецца арыгіналам $X(p)$.

Прыклад 1. Рашыць задачу Кашы $\ddot{x} - 5\dot{x} + 4x = 4$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 2$.

Рашэнне. У сілу таго, што $4 = \frac{4}{p}$, адпаведнае аператарнае

ўраўненне мае выгляд $(p^2 - 5p + 4)X(p) = \frac{4}{p} + 2$. Адкуль знаходзім

аператарнае рашэнне $X(p) = \frac{2p + 4}{p(p^2 - 5p + 4)}$. Раскладваем правую

частку на элементарныя дробы $X(p) = \frac{1}{p} - \frac{2}{p-1} + \frac{1}{p-4}$. Перахо-

дзячы да арыгіналаў, атрымліваем рашэнне $x(t) = 1 + e^t + e^{4t}$.

Прыклад 2. Рашыць задачу Кашы $\ddot{x} + x = -\sin 2t$, $x(\pi) = \dot{x}(\pi) = 1$.

Рашэнне. Увядзём замену $\tau = t - \pi$. Тады зыходная задача Кашы прывядзецца да задачы $\ddot{x} + x = -\sin 2(\tau + \pi) = -\sin 2\tau$, $x(0) = \dot{x}(0) = 1$, дзе $x = x(\tau)$.

Няхай $x(\tau) = X(p)$. Аператарнае ўраўненне будзе мець вы-

гляд $(p^2 + 1)X(p) - p - 1 = -\frac{2}{p^2 + 4}$. Адкуль $X(p) = \frac{p}{p^2 + 1} + \frac{1}{p^2 + 1} - \frac{2}{(p^2 + 4)(p^2 + 1)} = \frac{p}{p^2 + 1} + \frac{1}{3} \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{2}{3} \frac{1}{p^2 + 4}$.

Знаходзячы арыгіналы па формулах табліцы, атрымваем

$$x(t) = -\cos t - \frac{1}{3} \sin t + \frac{2}{3} \sin 2t.$$

4⁰. *Прымяненне формулы Дзюамеля да рашэння дыферэнцыяльных ураўненняў.*

Няхай патрабуецца рашыць лінейнае дыферэнцыяльнае ўраўненне з пастаяннымі каэфіцыентамі (47) пры нулявых пачатковых умовах $x(0) = \dot{x}(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0$. Калі вядома рашэнне $y(t)$ ураўнення з той жа левай часткай і правай часткай 1, таксама пры нулявых пачатковых умовах, то інтэграл Дзюамеля (гл. уласцівасць IX п. 1) дазваляе напісаць рашэнне ураўнення (47) без усякіх вылічэнняў. Аператарныя ўраўненні, адпаведныя дадзенаму 200

ураўненню $L(x) = f(t)$ і дадатковаму $L(y) = 1$, маюць выгляд
 $L(p)X(p) = F(p)$ і $L(p)Y(p) = \frac{1}{p}$, дзе $F(p) = f(t)$. Адкуль
 $X(p) = pY(p)F(p)$.

Такім чынам, згодна з формулай Дзюамеля

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) y(t-\tau) d\tau \quad (\text{улічым, што } y(0) = 0), \quad (49)$$

$$\text{або } x(t) = y(t)f(0) + \int_0^t y(\tau)f'(t-\tau)d\tau.$$

Прыклад 3. Знайсці рашэнне задачы Кашы

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = \frac{e^{-2t}}{(1+2t)^2}; \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$$

Рашэнне. Спачатку рашым ураўненне $\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 1$ пры

тых жа ўмовах. Пры $y(t) = Y(p)$ і пераходзячы да выяў, атрымаем

$$(p^2 + 4p + 4)Y(p) = \frac{1}{p}. \quad \text{Адкуль } Y(p) = \frac{1}{p(p+2)^2} = \frac{1}{4p} - \frac{1}{4(p+2)} - \frac{1}{2(p+2)^2}.$$

Знайшоўшы арыгіналы, маем $y(t) = \frac{1}{4} - \frac{e^{-2t}}{4} - \frac{te^{-2t}}{2}.$

Карыстаючыся формулай (49), шуканае рашэнне зыходнай задачы запішам у выглядзе

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \frac{e^{-2\tau}}{(1+2\tau)^2} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{4} - \frac{e^{-2(t-\tau)}}{4} - \frac{(t-\tau)e^{-2(t-\tau)}}{2} \right) d\tau = \\ &= \int_0^t \frac{e^{-2\tau}}{(1+2\tau)^2} (t-\tau)e^{-2(t-\tau)} d\tau = e^{-2t} \int_0^t \frac{t-\tau}{(1+2\tau)^2} d\tau = \end{aligned}$$

$$= \frac{e^{-2t}}{4} (2t - \ln(1 + 2t)).$$

5°. Рашэнне сістэм лінейных дыферэнцыяльных ураўненняў з пастаяннымі каэфіцыентамі.

Аналагічна прымяняецца аперацыйны метада і да рашэння сістэм

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + f_1(t),$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n + f_2(t),$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + f_n(t)$$

пры пачатковых умовах $x_1(0) = x_{10}, x_2(0) = x_{20}, \dots, x_n(0) = x_{n0}$.

Перайшоўшы да аператарнай сістэмы, будзем мець

$$(p - a_{11})X_1 - a_{12}X_2 - \dots - a_{1n}X_n = F_1 + x_{10},$$

$$-a_{21}X_1 + (p - a_{22})X_2 - \dots - a_{2n}X_n = F_2 + x_{20},$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$-a_{n1}X_1 - a_{n2}X_2 - \dots + (p - a_{nn})X_n = F_n + x_{n0},$$

дзе $x_k(t) = X_k(p)$ (X_k), $f_k(t) = F_k(p)$ (F_k).

Вырашыўшы гэтую лінейную алгебраічную сістэму адносна X_k , $k = \overline{1, n}$, па выявах $X_k(p)$ знойдзем арыгіналы $x_k(t)$.

Прыклад 4. Рашыць сістэму ўраўненняў $\dot{x}_0 = -ax_0$, $\dot{x}_k + ax_k = ax_{k-1}$, $k = \overline{1, n}$ пры пачатковых умовах $x_0(0) = 1$, $x_1(0) = \dots = x_n(0) = 0$.

Рашэнне. Аператарная сістэма мае выгляд $(p + a)X_0 = 1$,

$(p + a)X_k - aX_{k-1} = 0$, адкуль $X_k = \frac{a^k}{(p + a)^{k+1}}$, $k = \overline{0, n}$. Знай-

шоўшы па табліцы арыгіналы, атрымаем $x_k(t) = \frac{1}{k!} (at)^k e^{-at}$.

Прыклад 5. Рашыць сістэму $\dot{x} = e^t - y$, $\dot{y} = e^{-t} - x$ пры пачатковых умовах $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$.

Рашэнне. Няхай $x(t) = X(p)$, $y(t) = Y(p)$, тады $\dot{x}(t) = pX(p) - x_0$, $\dot{y}(t) = pY(p) - y_0$. Аператарная сістэма мае выгляд

$pX(p) - x_0 + Y(p) = \frac{1}{p-1}$, $pY(p) - y_0 + X(p) = \frac{1}{p+1}$. Рашыўшы яе, знаходзім

$$X(p) = \frac{p}{p^2-1}x_0 - \frac{1}{p^2-1}y_0 + \frac{p^2+1}{(p^2-1)^2},$$

$$Y(p) = \frac{p}{p^2-1}y_0 + \frac{1-x_0}{p^2-1} - \frac{2p}{(p^2-1)^2}.$$

Пераходзячы да арыгіналаў, атрымаем шуканае рашэнне

$$x(t) = x_0 \operatorname{ch} t - y_0 \operatorname{sh} t + t \operatorname{ch} t,$$

$$y(t) = y_0 \operatorname{ch} t + (1-x_0) \operatorname{sh} t - t \operatorname{sh} t.$$

§ 7. Лінейныя сістэмы дыферэнцыяльных ураўненняў з перыядычнымі каэфіцыентамі

I. Аднародная лінейная сістэма дыферэнцыяльных ураўненняў з перыядычнымі каэфіцыентамі.

Разгледзім сістэму

$$\dot{x} = A(t)x \tag{50}$$

з непарыўнай ω перыядычнай матрыцай A , гэта значыць

$A(t + \omega) = A(t)$ для $t \in (-\infty; \infty)$. Няхай пачатковыя ўмовы

$x^j(0) = \gamma^j$, дзе $\gamma^j = \operatorname{colon}(\delta_1^j, \dots, \delta_n^j)$ – адзінкавыя вектары –

$\left(\delta_k^j = \begin{cases} 0, & k \neq j, \\ 1, & k = j \end{cases} \right)$ вызначаюць фундаментальную сістэму рашэнняў

(50) $x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)$. У сілу таго, што матрыца $A(t)$ перыядычная, функцыі $x^1(t+\omega), x^2(t+\omega), \dots, x^n(t+\omega)$ таксама будуць утвараць фундаментальную сістэму рашэнняў. У сілу тэарэмы 2 любое рашэнне сістэмы (50) ёсць лінейная камбінацыя рашэнняў фундаментальнай сістэмы $x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)$. Таму кожная з функцый $x^j(t+\omega)$ будзе лінейнай камбінацыяй $x^k(t)$, $k = \overline{1, n}$ з пастаяннымі каэфіцыентамі, гэта значыць $x^j(t+\omega) = \sum_{k=1}^n C_{jk} x^k(t)$,

$j = \overline{1, n}$, дзе C_{jk} – пастаянныя. Запісаўшы апошнюю роўнасць у матрычнай форме, будзем мець

$$X(t+\omega) = X(t)C, \quad (51)$$

дзе $X(t)$ – фундаментальная матрыца рашэнняў $x^k(t)$, $k = \overline{1, n}$, а

$$C = \begin{pmatrix} C_{jk}, & k = \overline{1, n} \\ j = \overline{1, n} \end{pmatrix} \text{ – пастаянная матрыца.}$$

Пры $t=0$ роўнасць (51) прыме выгляд $X(\omega) = C$. Такім чынам, атрымліваем

$$X(t+\omega) = X(t) \cdot X(\omega). \quad (52)$$

Матрыца $X(\omega)$ называецца матрыцай монадраміі сістэмы (50) (відавочна, што $|X(\omega)| \neq 0$). Уласныя значэнні матрыцы $X(\omega)$ называюцца мультыплікатарамі сістэмы ўраўненняў (50).

Мае месца

Тэарэма 9 (Флоке-Ляпунова). Фундаментальная матрыца $X(t)$ сістэмы (50) дапускае наступнае выяўленне

$$X(t) = G(t) \cdot e^{A_1 t},$$

дзе $G(t)$ – перыядычная матрыца з перыядам ω , а A_1 – пастаянная

матрыца.

Відавочна, што матрыца $G(t)$ задавальняе ўмове

$$\dot{G}(t) = A(t) \cdot G(t) - G(t) \cdot A_1,$$

адкуль непасрэдна вынікае, што замена зменных $x = G(t)z$ пераводзіць сістэму ўраўненняў (50) у сістэму ўраўненняў з пастаяннымі каэфіцыентамі $\dot{z} = A_1 z$.

Тэарэма 10. Для таго, каб камплесны лік μ з'яўляўся мультиплікатарам сістэмы ўраўненняў (50), неабходна і дастаткова, каб існавала ненулявое рашэнне $\varphi(t)$ сістэмы (50) такое, што

$$\varphi(t + \omega) = \mu \varphi(t) \quad \forall t \in (-\infty; +\infty). \quad (53)$$

З дадзенай тэарэмы непасрэдна вынікае

Вынік 1. Лінейная аднародная сістэма ўраўненняў (50) мае нетрывіяльнае рашэнне з перыядам ω у тым і толькі тым выпадку, калі адзін з яе мультиплікатараў роўны адзінцы.

Заўвага 1. Часам пры азначэнні фундаментальнай матрыцы пачатковыя ўмовы не задаюцца. У гэтым выпадку матрыца монадрамii не вызначаецца адназначна, таму што фундаментальная матрыца не адзіная (гл. [27], глава VI, § 6, с. 115).

II. *Неаднародная лінейная сістэма дыферэнцыяльных ураўненняў з перыядычнымі каэфіцыентамі.*

Разгледзім сістэму дыферэнцыяльных ураўненняў

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \quad (54)$$

дзе $A(t)$ – непарыўная перыядычная матрыца з перыядам ω , $f(t)$ – непарыўная перыядычная вектар-функцыя з перыядам ω .

Маюць месца

Тэарэма 11. Для таго, каб рашэнне $x = \varphi(t)$, $t \in (-\infty; +\infty)$ сістэмы (54) было ω -перыядычным, неабходна і дастаткова, каб $\varphi(0) = \varphi(\omega)$.

Тэарэма 12. Калі аднародная сістэма ўраўненняў (50), якая адпавядае (54), не мае ненулявых перыядычных рашэнняў з перыядам ω (гэта значыць усе яе мультиплікатары не роўныя адзінцы), тады сістэма (54) мае адзінае перыядычнае рашэнне з перыядам ω .

Адзначым, што ў тым выпадку, калі аднародная сістэма (50) мае ненулявое перыядычнае рашэнне з перыядам ω , лінейная неаднародная сістэма (54) можа не мець перыядычных рашэнняў або мець бясконца многа лінейна незалежных перыядычных рашэнняў з перыядам ω .

З тэарэмы 12 вынікае: калі A – пастаянная матрыца і $f(t + \omega) = f(t)$, то неабходнай і дастатковай умовай існавання ў сістэмы (54) адзінага ω -перыядычнага рашэння з'яўляецца адсутнасць у матрыцы A уласных лікаў віду $\frac{2\pi ki}{\omega}$, $k \in \mathbb{Z}$. Пацвердзім гэты вынік наступным прыкладам.

Прыклад 1. Паказаць, што лінейнае ўраўненне другога парадку $\ddot{x} + a^2 x = f(t)$, $a \neq 0$, дзе $f(t)$ – непарыўная перыядычная функцыя з перыядам ω , мае адзінае перыядычнае рашэнне з перыядам ω , калі $a \neq \frac{2\pi k}{\omega}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$).

Рашэнне. З дапамогай замены $x = x_1$, $\dot{x} = x_2$ прывядзём дадзенае ўраўненне да сістэмы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -a^2 x_1 + f(t). \end{cases}$$

Згодна з тэарэмай 12 гэтая сістэма будзе мець адзінае перыядычнае рашэнне з перыядам ω , калі ўсе мультыплікатары адпаведнай аднароднай сістэмы $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -a^2 x_1$ не роўныя адзінцы. Знайдзем матрыцу монадрамii. Згодна з азначэннем, для дадзенай аднароднай сістэмы гэта матрыца мае выгляд

$$X(\omega) = \begin{pmatrix} x_1(\omega) & x_2(\omega) \\ \dot{x}_1(\omega) & \dot{x}_2(\omega) \end{pmatrix}, \text{ дзе } x_1(t) - \text{рашэнне зададзенага}$$

ўраўнення, што задавальняе пачатковым умовам $x_1(0) = 1$, $\dot{x}_1(0) = 0$, а $x_2(t)$ – рашэнне гэтага ўраўнення, што задавальняе ўмовам $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_2(0) = 1$. Уласныя лікі матрыцы

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 0 \end{pmatrix}$ знаходзім з ураўнення $\begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ -a^2 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = 0$. Маем

$\lambda_{1,2} = \pm ai$. Таму $x_1(t) = \cos at$, $x_2 = \frac{1}{a} \sin at$. Матрыца монадра-
мій запішацца

$$X(\omega) = \begin{pmatrix} \cos a\omega & \frac{1}{a} \sin a\omega \\ -a \sin a\omega & \cos a\omega \end{pmatrix}.$$

Мультыплікатары з'яўляюцца ўласнымі лікамі матрыцы

$X(\omega)$ і знаходзяцца з ураўнення $\begin{vmatrix} \cos a\omega - \mu & \frac{1}{a} \sin a\omega \\ -a \sin a\omega & \cos a\omega - \mu \end{vmatrix} = 0$ або

$\mu^2 - 2\mu \cos a\omega + 1 = 0$. Апошняе ўраўненне не будзе мець караня

$\mu = 1$, калі $a \neq \frac{2\pi k}{\omega}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$), а гэта значыць, што калі мат-

рыца A не будзе мець уласных лікаў, роўных $\frac{2\pi k}{\omega} i$, $k \in Z$, ($k \neq 0$), то ў разглядаемай сістэмы не будзе

мультыплікатараў, роўных 1 , а значыць, дадзеная сістэма будзе мець адзінае перыядычнае рашэнне.

§ 8. Траекторыі лінейных сістэм на плоскасці

Разгледзім паводзіны траекторый лінейнай аднароднай сістэмы дыферэнцыйных ураўненняў другога парадку з пастаяннымі каэфіцыентамі

$$\dot{x} = Ax, \tag{55}$$

дзе $x = \text{colon}(x_1, x_2)$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ – сапраўдная матрыца.

Рашэнне сістэмы $\dot{x} = f(x)$, $x \in R$ віду $x = a$, дзе a – пастаянны вектар, будзем называць становішчам раўнавагі (або пунктам спакою). Адзначым, што $x = 0$ уяўляе сабою становішча раўнавагі аўтаномнай сістэмы (55), якое з’яўляецца адзіным у выпадку $\det A \neq 0$. У прасторы зменных x_1, x_2 любое рашэнне $x = \varphi(t)$ сістэмы (55) вызначае крывую. Гэтую крывую з зададзеным на ёй параметрам t будзем называць траекторыяй.

З дапамогай лінейнага неасаблівага пераўтварэння $x = Ty$ прывядзём сістэму (55) да віду

$$\dot{y} = Jy, \quad (56)$$

дзе J – жарданава форма матрыцы A .

У залежнасці ад выгляду ўласных лікаў будуць мець месца розныя выпадкі:

1⁰. λ_1, λ_2 – сапраўдныя, розныя і $\lambda_1 \lambda_2 > 0$. У сілу таго, што ў гэтым выпадку $J = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$, параметрычныя ўраўненні траекторыі будуць мець выгляд

$$y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, y_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}, t \in R, \quad (56')$$

C_1, C_2 – адвольныя пастаянныя. Каардынаты паўвосі з’яўляюцца траекторыямі, што адпавядаюць $C_1 = 0$ або $C_2 = 0$. Пры $C_1 \neq 0$ і

$$C_2 \neq 0 \text{ маем } \left(\frac{y_1}{C_1} \right)^{\lambda_2} = \left(\frac{y_2}{C_2} \right)^{\lambda_1}.$$

Не парушаючы агульнасці, будзем лічыць

$$|\lambda_1| < |\lambda_2|. \quad (57)$$

Калі $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$, то, згодна з (57), $\lambda_1 > \lambda_2$. Пры $C_1 > 0$ і $C_2 > 0$ маем (гл. (56'))

$$y_1 \rightarrow 0, y_2 \rightarrow 0, \quad \text{калі } t \rightarrow +\infty,$$

$$y_1 \rightarrow +\infty, y_2 \rightarrow +\infty, \quad \text{калі } t \rightarrow -\infty.$$

Такім чынам, пры $t \rightarrow +\infty$ траекторыя «ўваходзіць» у пачатак

каардынат і ў ліміце датыкаецца восі y_1 , бо $\frac{y_2}{y_1} \rightarrow 0$, а пры $t \rightarrow -\infty$

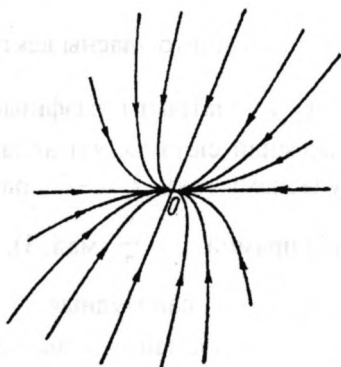
аддаляецца ад пачатку каардынат, застаючыся ў першым квадранце сістэмы каардынат y_1, y_2 . Схематычнае размяшчэнне траекторый пададзена на мал. 1 (стрэлкі паказваюць напрамак руху пункта па траекторыі пры ўзрастанні параметру t). Такое размяшчэнне траекторый паблізу $x = 0$ называецца ўстойлівым вузлом.^{*)}

Калі ж $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, тады $\lambda_1 < \lambda_2$. Пры $C_1 > 0$ і $C_2 > 0$

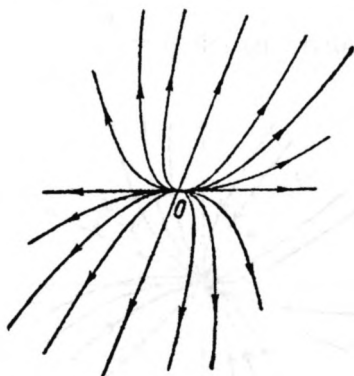
$y_1 \rightarrow 0, y_2 \rightarrow 0$, калі $t \rightarrow -\infty$,

$y_1 \rightarrow +\infty, y_2 \rightarrow +\infty$, калі $t \rightarrow +\infty$.

Размяшчэнне траекторый застаецца такім жа, як і ў папярэднім выпадку, але мяняецца напрамак руху пункта пры ўзрастанні параметру t (мал. 2). Такое размяшчэнне траекторый паблізу $x = 0$ называецца няўстойлівым вузлом.



Мал. 1



Мал. 2

Прыклад 1. Даследаваць паводзіны фазавых траекторый сіс-

тэмы ўраўненняў $\frac{dx}{dt} = -3x + 2y, \frac{dy}{dt} = x - 4y$.

^{*)} Дакладнае азначэнне паняцця ўстойлівасці дадзена ў § 5.1.

Рашэнне. Карані характарыстычнага ўраўнення

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ 1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0, \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -5$$

сапраўдныя і адмоўныя. Становішча раўнавагі – устойлівы вузел.

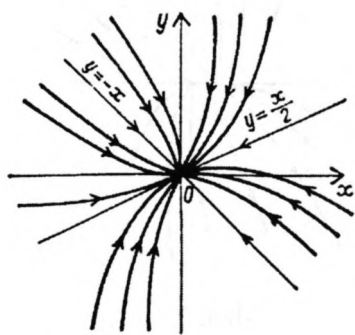
Прамыя, якія змяшчаюць фазавыя крывыя сістэмы, шукаем у выглядзе $y = kx$. Падставіўшы $y = kx$ ва ўраўненне

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-4y}{-3x+2y},$$

атрымліваем ураўненне для вызначэння k

$$k = \frac{1-4k}{-3+2k}, 2k^2 + k - 1 = 0, k_1 = -1, k_2 = \frac{1}{2}.$$

Значыць, $y = -x$, $y = \frac{x}{2}$ – шуканыя прамыя. Астатнія фазавыя крывыя – часткі парабал, якія датыкаюцца ў пачатку каардынат прамой $y = \frac{x}{2}$. Гэта вынікае з таго, што ўласны вектар



Мал. 3

$colon(2,1)$ матрыцы каэфіцыентаў дадзенай сістэмы, які адпавядае ўласнаму ліку $\lambda = -2$, паралельны прамой $y = \frac{x}{2}$ (мал. 3).

2°. λ_1, λ_2 – сапраўдныя і $\lambda_1 \lambda_2 < 0$. Атрыманыя ў выпадку вузла формулы маюць месца і пры гэтых умовах. Дастаткова разгледзець выпадак

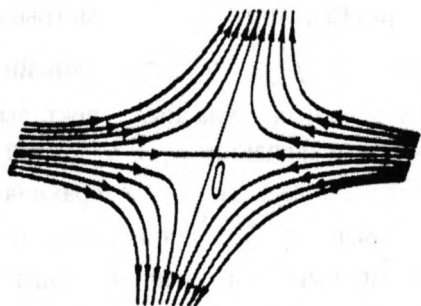
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Пры $C_1 > 0, C_2 > 0$

будзем мець:

$$y_1 \rightarrow 0, \quad y_2 \rightarrow +\infty, \quad \text{калі } t \rightarrow +\infty,$$

$$y_1 \rightarrow +\infty, \quad y_2 \rightarrow 0, \quad \text{калі } t \rightarrow -\infty.$$

У дадзеным выпадку размяшчэнне траекторый называецца сядлом (мал. 4), восі y_1, y_2 называюць сепаратрысамі сядла.



Мал. 4

Прыклад 2. Даследаваць паводзіны траекторый сістэмы

$$\frac{dx}{dt} = 2y, \quad \frac{dy}{dt} = 2x + 3y.$$

Рашэнне. Карані характарыстычнага ўраўнення

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad -$$

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 4$$

сапраўдныя і маюць розныя знакі, гэта значыць, што становішча раўнавагі – сядло. Будзем адшукваць сепаратрысы сядла ў выглядзе $y = kx$, дзе k вызначаецца з

ураўнення $k = \frac{2+3k}{2k}$ або $2k^2 - 3k - 2 = 0$. Адсюль $k_1 = -\frac{1}{2}$,

$k_2 = 2$. Маём $y = -\frac{x}{2}$, $y = 2x$ – шуканыя прамыя, прычым кожная з

іх складаецца з трох фазавых крывых. На прамой $y = -\frac{x}{2}$ дадзеная сістэма прымае выгляд $\dot{x} = -x$, $\dot{y} = -y$. Гэта значыць, што ўздоўж

прамой $y = -\frac{x}{2}$ пункт $(x(t), y(t))$ рухаецца па закону $x(t) = x_0 e^{-t}$,

$y(t) = y_0 e^{-t} = -\frac{x_0}{2} e^{-t}$. Рух адбываецца ў напрамку да пачатку

каардынат пры ўзрастанні t .

На прамой $y = 2x$ сістэма ўраўненняў мае выгляд

$$\dot{x} = 4x, \quad \dot{y} = 4y.$$

Рух адбываецца па закону $x(t) = x_0 e^{4t}$, $y(t) = y_0 e^{4t} = 2x_0 e^{4t}$ у напрамку ад пачатку каардынат (мал. 5).

3°. λ_1 і λ_2 – комплексна спалучанія. Няхай $\lambda_1 = \alpha + i\beta$,

$$\lambda_2 = \alpha - i\beta, \quad \beta > 0. \quad \text{У}$$

пераўтварэнні $x = Ty$ матрыца

$$T = (\gamma^1, \gamma^2), \quad \gamma^1 \text{ і } \gamma^2 - \text{лінейна}$$

незалежныя ўласныя вектары, якія адпавядаюць λ_1 і λ_2 . У сілу таго, што A – сапраўдная

матрыца, γ^1 і γ^2 можна выбраць комплексна спалучанымі. Тады і $y_1 = \bar{y}_2$. Каб не разглядаць камп-

лексных рашэнняў, будзем мерка-

ваць $y_1 = z_1 + iz_2$, $y_2 = z_1 - iz_2$, а траекторыі разглядаць у плоскасці Oz_1z_2 . Зменная $z = colon(z_1, z_2)$ звязана з x судачыненнем

$$x = Ty = TSz = Pz, \quad (58)$$

дзе $S = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$, $P = (\gamma^1 + \gamma^2, i(\gamma^1 - \gamma^2))$. Значыць, P – сапраўд-

ная неасаблівая матрыца. Пераўтварэнне (58) прывядзе сістэму (55) да віду

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \alpha z_1 - \beta z_2, \\ \dot{z}_2 &= \beta z_1 + \alpha z_2, \end{aligned} \quad (59)$$

дзе матрыца каэфіцыентаў утварае сапраўдную жарданаву форму матрыцы A . Сапраўды,

$$\dot{z}_1 = \frac{1}{2}(\dot{y}_1 + \dot{y}_2) = \frac{1}{2}[(\alpha + i\beta)y_1 + (\alpha - i\beta)y_2] = \alpha z_1 - \beta z_2.$$

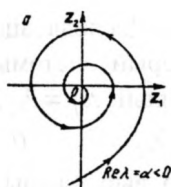
Аналагічна атрымліваецца і другая з роўнасцяў (59).

Увядзём палярныя каардынаты $z_1 = r \cos \varphi$, $z_2 = r \sin \varphi$, $r \geq 0$, або $y_1 = re^{i\varphi}$, $y_2 = re^{-i\varphi}$. Будзем мець $\dot{y}_1 = \dot{r}e^{i\varphi} + ire^{i\varphi}\dot{\varphi} = (\alpha + i\beta)re^{i\varphi}$. Падзяляючы сапраўдныя і ўяўныя часткі, атрымаем

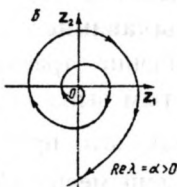
$$\dot{r} = \alpha r, \dot{\phi} = \beta. \quad (60)$$

Значыць,

$$r(t) = r_0 e^{\alpha t}, \phi(t) = \beta t + \phi_0.$$



Мал. 6



Мал. 7

Пры $\alpha \neq 0$, $r_0 \neq 0$ траекторыі ўтвараюць спіралі. Такое размяшчэнне траекторый называецца ўстойлівым фокусам, калі $\alpha < 0$, і няўстойлівым фокусам, калі $\alpha > 0$ (мал. 6, мал. 7 адпаведна).

Пры $\alpha = 0$, $r_0 \neq 0$ усе траекторыі – акружнасці. У гэтым выпадку атрымліваем цэнтр. У выпадку цэнтра ўсе рашэнні сістэмы (55) – перыядычныя з перыядам $\frac{2\pi}{\beta}$.

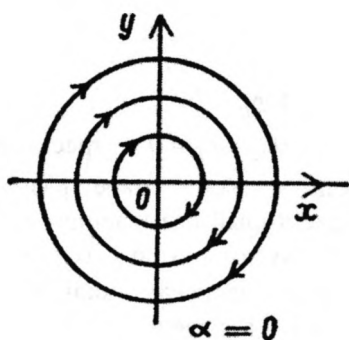
Для таго, каб зразумець размяшчэнне траекторый у плоскасці Ox_1x_2 сістэмы (55), неабходна мець на ўвазе, што пераўтварэнне, якое было выкарыстана пры пераходзе ад (55) да (56) або (59), з'яўляецца афінным пераўтварэннем плоскасці, якое пакідае нерухомым пачатак каардынат. Яно складаецца ў павароце на некаторы вугал вакол пачатку каардынат і ў сцісканні (расцягванні) адносна дзвюх узаемна перпендыкулярных восяў. Пры гэтым прамыя пераходзяць у прамыя, акружнасці ператвараюцца ў эліпсы.

Прыклад 3. Начарціць траекторыі сістэмы $\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = -x$.

Рашэнне. Для дадзенай сістэмы характарыстычнае ўраўненне запішацца $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \lambda^2 + 1 = 0$. Пункт спакою $(0,0)$ – цэнтр, таму што карані характарыстычнага ўраўнення чыста ўяўныя. Рашэнне разглядаемай сістэмы мае выгляд (гл. § 3)

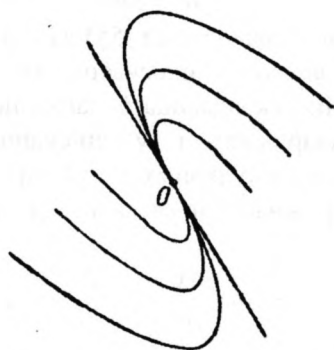
$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t,$$

$$y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t,$$

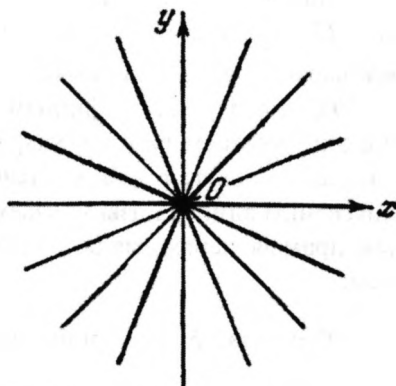


Мал. 8

гляд $\frac{dx}{dt} = ax, \frac{dy}{dt} = ay, a = \text{const.}$ Асобна даследаваць выпадак $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.



Мал. 9



Мал.10

таму траекторыі з'яўляюцца акружнасцямі $x^2 + y^2 = C_1^2 + C_2^2$. Схема размяшчэння траекторый прыведзена на мал. 8.

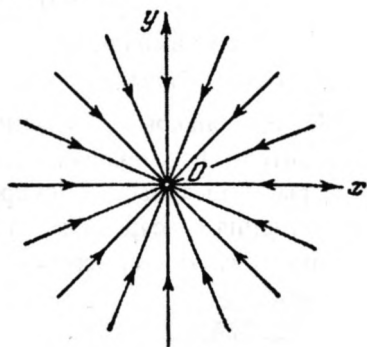
Практыкаванне 1. Даследаваць размяшчэнне траекторый сістэмы (55) у тым выпадку, калі $\lambda_1 = \lambda_2$. Паказаць, што пры $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ будзе мець месца або выраджаны вузел (мал. 9), альбо дыкрытычны вузел (мал. 10), калі сістэма мае вы-

Прыклад 4. Визначыць характар пункта спакою і начарціць фазавыя траекторыі сістэмы $\dot{x} = x, \dot{y} = y$.

Рашэнне. Характарыстычнае ўраўненне дадзенай сістэмы мае выгляд

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Яго каранямі будуць $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. У сілу таго, што $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, пункт спакою $(0,0)$ з'яўляецца няўстойлівым вузлом. Траекторыямі сістэмы з'яўляюцца паўпрамыя, якія задаюцца ўраўненнем $y = Cx$, $x \neq 0$. (Рашэннем сістэмы з'яўляюцца функцыі $x = C_1 e^t$, $y = C_2 e^t$.) Рух па гэтых прамых ажыццяўляецца ад пункту спакою $(0,0)$, які ў гэтым выпадку называюць дыкрытычным вузлом (мал. 11).



Мал. 11

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1.$$

Маем кратны карань. Значыць, становішча раўнавагі – выраджаны вузел, прычым няўстойлівы, з-за таго, што $\lambda_{1,2} > 0$. Знаходзім для $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ уласны вектар $colon (1,2)$.

На плоскасці Oxy будуюм прамую $y = 2x$, накіраваную ўздоўж указанага вектара. Гэтая прамая змяшчае тры фазавыя крывыя, становішча раўнавагі і дзве паўпрамыя, на якія прамая падзяляецца пунктамі $O(0,0)$. Астатнія фазавыя крывыя датыкаюцца пры падыходзе да пункта $O(0,0)$ прамой $y = 2x$. Паводзіны фазавых

Прыклад 5. Вызначыць тып становішча раўнавагі (характар паводзін фазавых крывых) сістэмы ўраўненняў

$$\frac{dx}{dt} = 3x - y, \quad \frac{dy}{dt} = 4x - y.$$

Рашэнне. Сістэма мае адзінае становішча раўнавагі $x = y = 0$. Складзём і рашым характарыстычнае ўраўненне

кривых схематично адлюстраваны на мал. 12.

Прыклад 6. Даследаваць ўраўненне пругкіх ваганняў

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx}{dt} + \beta^2 x = 0$$

з улікам трэння і супраціўлення асяроддзя (пры $\alpha > 0$).

Рашэнне. Заменім дадзенае ўраўненне эквівалентнай сістэмай $\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = -2\alpha y - \beta^2 x$, характарыстычнае ўраўненне якой

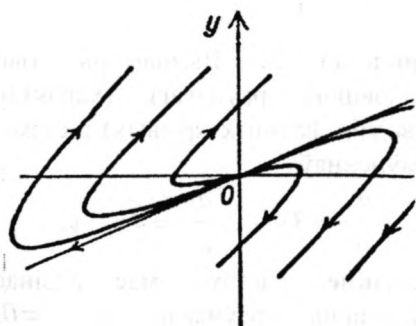
мае карані

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}.$$

Разгледзім выпадкі:

1) $\alpha = 0$. Тады $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$.

Пункт спакою з'яўляецца цэнтрам. Гэта значыць, што пры адсутнасці супраціўлення асяроддзя ўсе рухі з'яўляюцца перыядычнымі;



Мал. 12.

2) $\alpha > 0, \alpha^2 - \beta^2 < 0$. Карані λ_1 і λ_2 – камплексна спалучаныя.

Пункт спакою – ўстойлівы фокус, ваганні затухаюць;

3) $\alpha < 0$ (выпадак адмоўнага трэння), $\alpha^2 - \beta^2 < 0$. Пункт спакою – няўстойлівы фокус;

4) $\alpha > 0, \alpha^2 - \beta^2 \geq 0$ (супраціўленне асяроддзя вялікае $\alpha \geq \beta$).

Карані λ_1 і λ_2 – сапраўдныя і адмоўныя. Пункт спакою – устойлівы вузел;

5) $\alpha < 0, \alpha^2 - \beta^2 \geq 0$. Карані λ_1 і λ_2 – сапраўдныя і дадатныя.

Пункт спакою – няўстойлівы вузел.

Заўвага 1. У тым выпадку, калі $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$, траекторыі размяшчаюцца, як паралельныя прамыя.

Прыклад 7. Даследаваць паводзіны фазавых крывых сістэ-

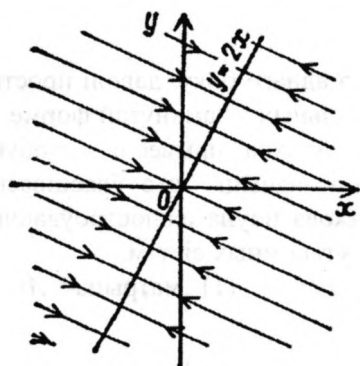
мы ўраўненняў $\frac{dx}{dt} = -4x + 2y$, $\frac{dy}{dt} = 2x - y$.

Рашэнне. Становішчы раўнавагі дадзенай сістэмы будуць размяшчацца на прамой $y = 2x$, таму што ў пунктах гэтай прамой правыя часткі сістэмы ператвараюцца ў нуль. Інтэгральныя крывыя

ўраўнення $\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{-4x + 2y}$ або $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}$, $y \neq 2x$ будуць фазавымі

крывымі сістэмы. Яны ўяўляюць сабою паўпрамыя, што атрымліваюцца з сямейства прамых $y = -\frac{1}{2}(x + C)$ пры перасячэнні яго прамой $y = 2x$.

Рух па фазавых траекторыях адбываецца ў напрамку да становішчаў раўнавагі, таму што калі фазавы пункт $(x(t), y(t))$ у



Мал. 13

момант t знаходзіцца ў абсягу $2x - y < 0$, гэта значыць над прамой $y = 2x$, то

$$\frac{dx}{dt} = -4x + 2y > 0,$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x - y < 0,$$

а значыць, $x(t)$ узрасце з часам, а $y(t)$ убывае. Наадварот, калі фазавы пункт у момант часу t знаходзіцца пад прамой $y = 2x$, гэта

значыць $2x(t) - y(t) > 0$, то $\frac{dx}{dt} < 0$, $\frac{dy}{dt} > 0$, а таму $x(t)$ убывае, $y(t)$ узрасце (мал. 13).

§ 9. Лінейныя сістэмы са зменнымі каэфіцыентамі, інтэгральныя ў замкнутай форме^{*)}

З § 1 вынікае, што любое рашэнне лінейнай аднароднай сістэмы (1) можна лёгка знайсці, калі вызначана яе фундаментальная матрыца. Аднак вызначыць фундаментальную матрыцу ў яўным выглядзе, гэта значыць праз каэфіцыенты сістэмы (1), для большасці неаўтаномных лінейных сістэм (са зменнымі каэфіцыентамі) немагчыма. З іншага боку, у літаратуры апісаны дастаткова шырокія класы сістэм, для якіх можна пабудаваць рашэнне ў замкнутай форме, гэта значыць у выглядзе элементарных функцый ад каэфіцыентаў сістэмы і іх квадратур (нявызначаных інтэгралаў). Значыць, калі аднародная сістэма (1) інтэгральная ў замкнутай форме, то згодна з формулай (31), у той жа форме будзе інтэгральнай і неаднародная сістэма (30). Таму, даследуючы сістэмы, якія дапускаюць інтэграванне ў замкнутай форме, можна абмежавацца толькі разглядам аднародных сістэм.

1. Трохвугольныя сістэмы.

Такія сістэмы ўяўляюць сабою, з аднаго боку, даволі просты клас дыферэнцыяльных сістэм, інтэгральных у замкнутай форме, з другога боку, да іх, наогул кажучы, можна прывесці любую неаўтаномную лінейную сістэму, а гэта значыць, што ўласцівасці рашэнняў трохвугольных сістэм дастаткова поўна адлюстроўваюць уласцівасці рашэнняў усіх лінейных неаўтаномных сістэм.

Разгледзім спачатку выпадак, калі ў (1) матрыца $A(t)$ дыяганальная, гэта значыць

$$A(t) = \text{diag}(a_{11}(t), a_{22}(t), \dots, a_{nn}(t)).$$

Тады матрыца $X(t)$, якая нармаваная ў пункце $t_0 \in I$, таксама дыяганальная і

^{*)} Тут, а таксама ў § 4.4, § 5.7 выкарыстана выкладанне некаторых фактаў і тэрэм згодна з манаграфіяй И.В.Гайшуна «Введение в теорию линейных нестационарных систем». – Мн., 1999.

$$X(t) = \text{diag} \left(\exp \left(\int_{t_0}^t a_{11}(\tau) d\tau \right), \dots, \exp \left(\int_{t_0}^t a_{nn}(\tau) d\tau \right) \right).$$

Разгледзім трохвугольную сістэму, гэта значыць сістэму (1) з матрыцай

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ 0 & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}. \quad (61)$$

Такая сістэма, відавочна, інтэгруецца ў замкнутай форме, пачынаючы з апошняга ўраўнення, і элементы $x_{ij}(t)$ фундаментальнай матрыцы $X(t)$, нармаванай у пункце $t_0 \in I$, вызначаюцца выразамі

$$x_{ij}(t) = \exp \left(\int_{t_0}^t a_{ii}(\tau) d\tau \right) \times \int_{t_0}^t \sum_{r=i+1}^j a_{ir}(s) x_{rj}(s) \times \\ \times \exp \left(- \int_{t_0}^s a_{ii}(\tau) d\tau \right) ds \quad (i < j), \quad (62)$$

$$x_{ij}(t) = \exp \left(\int_{t_0}^t a_{jj}(\tau) d\tau \right) \quad (i = j),$$

$$x_{ij}(t) = 0 \quad (i > j); \quad i, j = \overline{1, n}.$$

З судачыненняў, у прыватнасці, вынікае, што фундаментальная матрыца трохвугольнай сістэмы можа быць выбрана таксама трохвугольнай.

Прыклад 1. Знайсці фундаментальную матрыцу $X(t)$ сістэмы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = tx_1 + (1-t)x_3, \\ \dot{x}_2 = t^2x_2 + (1-t^2)x_3, \\ \dot{x}_3 = x_3. \end{cases}$$

Рашэнне. Згодна з формуламі (62) будзем мець

$$x_{11} = \exp\left(\int_0^t a_{11}(\tau) d\tau\right) = \exp\left(\int_0^t \tau d\tau\right) = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right),$$

$$x_{22} = \exp\left(\int_0^t a_{22}(\tau) d\tau\right) = \exp\left(\int_0^t \tau^2 d\tau\right) = \exp\left(\frac{t^3}{3}\right),$$

$$x_{33} = \exp\left(\int_0^t a_{33}(\tau) d\tau\right) = \exp\left(\int_0^t 1 d\tau\right) = \exp(t),$$

$$x_{12} = \exp\left(\int_0^t a_{11}(\tau) d\tau\right) \cdot \int_0^t a_{12}(s) x_{22}(s) \cdot \exp\left(-\int_0^s a_{11}(\tau) d\tau\right) ds = 0,$$

$$x_{23} = \exp\left(\int_0^t a_{22}(\tau) d\tau\right) \cdot \int_0^t a_{23}(s) x_{33}(s) \cdot \exp\left(-\int_0^s a_{22}(\tau) d\tau\right) ds =$$

$$= \exp\left(\int_0^t \tau^2 d\tau\right) \cdot \int_0^t (1-s^2) \exp(s) \cdot \exp\left(-\frac{s^3}{3}\right) ds =$$

$$= \exp\left(\frac{t^3}{3}\right) \cdot \left(\exp\left(t - \frac{t^3}{3}\right) - 1\right) = \exp(t) - \exp\left(\frac{t^3}{3}\right),$$

$$x_{13} = \exp\left(\int_0^t a_{11}(\tau) d\tau\right) \cdot \int_0^t (a_{12}(s) \cdot x_{23}(s) + a_{13}(s) x_{33}(s)) \times$$

$$\times \exp\left(-\int_0^s a_{11}(\tau) d\tau\right) ds = \exp\left(\int_0^t \tau d\tau\right) \cdot \int_0^t (1-s) \exp(s) \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) ds = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) \cdot \left(\exp\left(t - \frac{t^2}{2}\right) - 1\right) = \exp(t) - \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).$$

Такім чынам, фундаментальная матрыца $X(t)$ дадзенай сістэмы запішацца так:

$$X(t) = \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) & 0 & \exp(t) - \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) \\ 0 & \exp\left(\frac{t^3}{3}\right) & \exp(t) - \exp\left(\frac{t^3}{3}\right) \\ 0 & 0 & \exp(t) \end{pmatrix}.$$

Тыповасць трохвугольных сістэм у першую чаргу тлумачыцца вядомай тэарэмай Перона. Перш, чым яе фармуляваць, нагадаем, што $(n \times n)$ -матрыца U называецца артаганальнай, калі $UU' = U'U = E$ (гл. [25], глава IX, § 7, с. 224). У сілу таго, што для любых $a, b \in R^n$ мае месца роўнасць

$$(Ua, Ub) = (U'Ua, b) = (a, b),$$

то пераўтварэнне $x = U$ у захоўвае эўклідаву геаметрыю прасторы R^n , гэта значыць захоўвае даўжыні вектароў і вуглы паміж імі. Таму, калі ў сістэме (1) зрабіць замену $x = U(t)y$, дзе матрыца $U(t)$ артаганальная $\forall t \in I$, то ўласцівасці з пункту гледжання эўклідавай геаметрыі рашэнняў зыходнай і пераўтворанай сістэм будуць аднолькавыя.

Тэарэма 13. Усякую лінейную сістэму (1) з дапамогай артаганальнага пераўтварэння $x = U(t)y$ можна прывесці да сістэмы $\dot{y} = B(t)y$ з трохвугольнай матрыцай $B(t)$.

Доказ тэарэмы 13 прыведзены, напрыклад, у [46], § 3.14, с. 178 – 182.

На жаль, доказ тээрэмы 13 не дае спосабу пабудовы неабходнага пераўтварэння $x = U(t)$ у і таму гэтая тээрэма не можа быць выкарыстана для інтэгравання ў замкнутай форме якога-небудзь шырокага класа лінейных неаўтаномных сістэм.

2. Сістэмы Лапа-Данілеўскага.

Няхай інтэграл ад матрыцы $A(t) = (a_{ij}(t))$ вызначаецца роўнасцю

$$\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau = \left(\int_{t_0}^t a_{ij}(\tau) d\tau \right),$$

разгледзім сістэму (1) пры ўмове

$$A(t) \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau A(t). \quad (63)$$

Лінейныя сістэмы, якія задавальняюць умове (63), часта называюць сістэмамі Лапа-Данілеўскага. Відавочна, што фундаментальная матрыца такой сістэмы, нармаваная ў пункце $t_0 \in I$, вызначаецца ў замкнутай форме з дапамогай роўнасці

$$X(t) = \exp \left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right). \quad (64)$$

Практыкаванне 1. Праверыць роўнасць (64).

Адзначым, што дыяганальныя матрыцы заўсёды задавальняюць умове (63); недыяганальныя матрыцы парадку 2×2 , якія задавальняюць умове (63), маюць выгляд

$$A(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) + b_1 \alpha_2(t) & \alpha_2(t) \\ b_2 \alpha_2(t) & \alpha_1(t) \end{pmatrix},$$

дзе $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $t \in I$ – адвольныя непарыўныя функцыі, а b_1 , b_2 – сапраўдныя лікі.

Практыкаванне 2. Даказаць сфармуляванае вышэй сцвярджэнне.

Прыклад 2. Знайсці фундаментальную матрыцу $X(t)$ сіс-

тэмы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (t + 2 \sin t) x_1 + \sin t x_2, \\ \dot{x}_2 = \sin t + t x_2. \end{cases}$$

Рашэнне. Згодна з формулай (64), атрымаем

$$X(t) = \exp \left(\int_0^t \begin{pmatrix} \tau + \sin \tau & \sin \tau \\ \sin \tau & \tau \end{pmatrix} d\tau \right) = \exp \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} - 2 \cos t + 2 & 1 - \cos t \\ 1 - \cos t & \frac{t^2}{2} \end{pmatrix}.$$

Дапусцім, што матрыцу $A(t)$ можна запісаць так:

$$A(t) = \sum_{i=0}^k \alpha_i(t) A_i, \quad (65)$$

дзе $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_k(t)$ – лінейна незалежныя непарыўныя на I скалярныя функцыі, A_i , $i = \overline{1, k}$, – пастаянныя матрыцы.

Тады ўмова (63), відавочна, выконваецца, калі матрыцы $A_1, A_2, \dots, A_k$ папарна камутатыўныя, гэта значыць $A_i A_j = A_j A_i$ ($i, j = \overline{1, k}$). Дапусцім, што ўмова (63) выконваецца пры ўсіх $t_0, t \in I$. Тады гэтая ўмова эквівалентная функцыянальнай камутатыўнасці матрыцы $A(t)$:

$$A(t) A(\tau) \equiv A(\tau) A(t) \quad (t, \tau \in I). \quad (66)$$

Сапраўды, відавочна, што патрабаванне (63) вынікае з роўнасці (66). Калі мае месца судачыненне (63), то, прадыферанцаваўшы яго па t_0 і ўлічыўшы адвольнасць велічыні $t_0 \in I$, атрымаем тоеснасць (66).

Відавочна таксама, што ўсякая матрыца (65) з папарна камутатыўнымі матрыцамі $A_1, A_2, \dots, A_k$ задавальняе ўмове функцыянальнай камутатыўнасці (66).

Прыклад 3. Праінтэграваць сістэму (1) з матрыцай

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & \sin t \\ -2 & 0 & \sin t & 0 \\ 0 & -\sin t & 0 & -2 \\ -\sin t & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (67)$$

Рашэнне. Матрыцу (67) можна запісаць у выглядзе (65) пры $k = 2$, $\alpha_1(t) = 1$, $\alpha_2(t) = \sin t$,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad A_1 A_2 = A_2 A_1.$$

Значыць, яна задавальняе ўмове (63) і таму фундаментальная матрыца гэтай сістэмы, нармаваная ў пункце $t = 0$, вызначаецца формулай

$$X(t) = \exp(A_1 t) \exp\left(A_2 \int_0^t \sin \tau \, d\tau\right) = \exp(A_1 t) \exp[A_2(1 - \cos t)].$$

3. Сістэмы з матрыцамі спецыяльнага віду.

Няхай $I = R$ і матрыца $A(t)$ непарыўна дыферэнцавальная на R і задавальняе судачыненню

$$\dot{A}(t) = D A(t) - A(t) D \quad (68)$$

для некаторай пастаяннай матрыцы D парадку $n \times n$. Пакажам, што ў гэтым выпадку фундаментальная матрыца $X(t)$ сістэмы (1), нармаваная ў пункце $t = 0$, знаходзіцца так:

$$X(t) = \exp(Dt) \exp(Bt), \quad (69)$$

дзе $B = A(0) - D$.

Сапраўды, дапускаючы $x = \exp(Dt)y$, атрымаем

$$\dot{y} = -Dy + \exp(-Dt) A(t) \exp(Dt)y.$$

З умовы (68) вынікае, што $A(t) = \exp(Dt) A(0) \exp(-Dt)$. Тады

$$\dot{y} = (A(0) - D)y = By. \quad (70)$$

Фундаментальная матрица сістэмы (70), нармаваная ў пункце $t = 0$, вызначаецца формулай $Y(t) = \exp(Bt)$, што ў сілу ўказанай замены прыводзіць да роўнасці (69).

Прыклад 4. Лінеарызаваныя ўраўненні руху матэрыяльнага пункта па кругавой арбіце ў цэнтральным полі сіл у нерухомай сістэме каардынат апісваюцца ўраўненнем (1') з матрыцай

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2}(1 + 3 \cos 2\omega t) & \frac{3}{2} \sin 2\omega t & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} \sin 2\omega t & \frac{1}{2}(1 - 3 \cos 2\omega t) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{дзе } \omega -$$

вуглавая скорасць вярчэння. У гэтым выпадку матрыца $A(t)$ задавальняе ўмове (68) пры

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таму фундаментальная матрыца $X(t)$ гэтай сістэмы, нармаваная пры $t = 0$, роўна $\exp(Dt) \exp(Bt)$, дзе

$$B = A(0) - D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

У заключэнні гэтага параграфа адзначым, што тут прыведзены толькі некаторыя выпадкі (іх спіс далёка не поўны) інтэгравання ў замкнутай форме неаўтаномных сістэм.

§ 10. Матрыцант

Разгледзім лінейную аднародную дыферэнцыяльную сістэму

$$\dot{x} = A(t)x, \quad (71)$$

дзе $-n \times n$ – матрыца $A(t) \in C(I^+)$, гэта значыць каэфіцыенты сістэмы непарыўныя ў інтэрвале $I^+ = (a; \infty)$, прычым a – лік або сімвал $-\infty$. Няхай $t_0 \in I^+$ і $x = x(t)$ – рашэнне сістэмы (71), вызначанае пачатковай умовай

$$x(t_0) = x^0, \quad (72)$$

дзе $x^0 \in R^n$. Для аналітычнага прадстаўлення рашэння $x(t)$ прыменім метада паслядоўных набліжэнняў (гл. § 1.12) у спецыяльнай форме. З ураўнення (71), з улікам (72), атрымаем інтэгральнае ўраўненне

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^t A(t_1)x(t_1)dt_1.$$

Замяняючы ў апошнім інтэграле $x(t_1)$ сумай $x^0 + \int_{t_0}^{t_1} A(t_2)x(t_2)dt_2$,

будзем мець:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t A(t_1)dt_1 \cdot x^0 + \int_{t_0}^t A(t_1)dt_1 \int_{t_0}^{t_1} A(t_2)x(t_2)dt_2.$$

Паўтараючы гэты працэс неабмежаваны лік разоў, атрымаем фармальнае прадстаўленне рашэння:

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^t A(t_1)dt_1 \cdot x^0 + \int_{t_0}^t A(t_1)dt_1 \int_{t_0}^{t_1} A(t_2)x(t_2)dt_2 \cdot x^0 + \dots$$

або

$$x(t) = \left(\int_{t_0}^t \Omega A(\tau) d\tau \right) x^0, \quad (73)$$

дзе

$$\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau = E + \int_{t_0}^t A(t_1) dt_1 \int_{t_0}^{t_1} A(t_2) dt_2 + \dots \quad (74)$$

Рад, записаны ў правай частцы роўнасці (74), называецца радам Пеано. Пакажам, што рад (74) збягаецца абсалютна для любога $t \in I^+$, прычым раўнамерна на кожным адрэзку $[c; d] \subset I^+$.

Сапраўды, ацэньваючы члены рада (74), атрымаем рад

$$\|E\| + \left\| \int_{t_0}^t \|A(t_1)\| dt_1 \right\| + \left\| \int_{t_0}^t \|A(t_1)\| dt_1 \left\| \int_{t_0}^{t_1} \|A(t_2)\| dt_2 \right\| + \dots \quad (75)$$

Тут норма матрыцы A : $\|A\| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{k=1}^n |a_{jk}|$ (гл. [25], глава XIV, § 2, с. 385), а таксама выкарыстана няроўнасць

$$\left\| \int_{t_0}^t F(\tau) d\tau \right\| \leq \int_{t_0}^t \|F(\tau)\| d\tau$$

(гл. [46], глава I, § 11, с. 52).

Няхай $[c; d] \subset [t_0 - A_0; t_0 + B]$, дзе A_0 і B дастаткова вялікія дадатныя лікі, $C = \max(A_0, B)$, $M = \max_{t_0 - A_0 \leq t \leq t_0 + B} \|A(t)\|$. Пры $t \in [c; d]$ паслядоўна атрымліваем:

$$\left\| \int_{t_0}^t A(t_1) dt_1 \right\| \leq M |t - t_0|,$$

$$\left\| \int_{t_0}^t A(t_1) dt_1 \left\| \int_{t_0}^{t_1} A(t_2) dt_2 \right\| \leq M^2 \left| \int_{t_0}^t |t_1 - t_0| dt_1 \right| \leq \frac{M^2}{2!} |t - t_0|^2,$$

У сілу таго, што $|t - t_0| \leq C$, рад (75) мажаруецца радам

$$|E| + MC + \frac{M^2 C^2}{2!} + \dots = |E| - I + \exp(MC).$$

Адсюль, згодна з прыкметай Вейерштраса, атрымліваем, што дадатна вызначаны функцыянальны рад (75) збягаецца раўнамерна на любым адрэзку $[c; d] \subset I^+$. Значыць, матрычны рад (74) таксама збягаецца абсалютна і раўнамерна на $[c; d]$. Дыферэнцуючы па членна рад (74), атрымваем раўнамерна збежны на $[c; d]$ рад

$$\begin{aligned} \frac{d \left(\int_{t_0}^t \Omega A(\tau) d\tau \right)}{dt} &= A(t) + A(t) \int_{t_0}^t A(t_2) dt_2 + \\ &+ A(t) \int_{t_0}^t A(t_2) dt_2 \int_{t_0}^{t_2} A(t_3) dt_3 + \dots \equiv A(t) \cdot \int_{t_0}^t \Omega A(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Акрамя таго,

$$\int_{t_0}^{t_0} \Omega A(\tau) d\tau = E.$$

Таму матрычная функцыя $\int_{t_0}^t \Omega A(\tau) d\tau$ з'яўляецца матрыцантам сістэмы (71), таму што яна ўяўляе сабою фундаментальную матрыцу сістэмы (2), нармаваную пры $t = t_0$.

У сілу ўласцівасці адзінасці рашэнняў лінейнай дыферэнцыяльнай сістэмы мае месца тоеснасць

$$\int_{t_0}^t \Omega A(\tau) d\tau \equiv X(t, t_0),$$

дзе $X(t, t_0)$ – матрыца Кашы сістэмы (71) (гл. § 1).

На аснове тэарэмы адзінасці (гл. § 4.1) атрымваем асноўную ўласцівасць матрыцанта

$$\int_{t_1}^t A(\tau) d\tau \cdot \int_{t_0}^{t_1} A(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau, \quad (76)$$

дзе $t_0, t_1, t \in I^+$.

Уласцівасць матрыцанта, якая вызначана формулай (76), называецца мультыплікатыўнасцю.

Варыянты заданняў для самастойнай працы

I. 1. Рашыць задачу Кашы:

$$\dot{x} + y = -3x, \dot{y} + y = x, x(0) = y(0) = 1.$$

2. Рашыць аперацыйным метадам

$$\dot{x} = -y, \dot{y} = 2(x + y), x(0) = y(0) = 1.$$

3. Знайсці, пры якіх a лінейнае ўраўненне другога парадку

$$\ddot{x} + a^2 x = \sin \frac{2\pi}{\omega} t$$

будзе мець адзінае перыядычнае рашэнне з перыядам ω .

4. Праінтэграваць лінейную неаднародную сістэму

$$\dot{x} = 4x - 5y + 4t, \dot{y} = x - 2y + t.$$

5. Складзі лінейную аднародную сістэму дыферэнцыяльных ураўненняў, фундаментальная матрыца якой мае выгляд

$$\begin{pmatrix} e^t \cos t & e^t \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

II. 1. Устаноўце від частковага рашэння сістэмы

$$\dot{x} = x - y + 2(\sin t + 1), \dot{y} = 2x - y + t(\cos t + t).$$

2. Знайсці, пры якіх a лінейнае ўраўненне другога парадку

$$\ddot{x} + a^2 x = \sin \frac{2\pi}{\omega} t$$

не мае перыядычных рашэнняў з перыядам ω .

3. Рашыць сістэму матрычным метадам:

$$\dot{x}_1 = 2x_1, \dot{x}_2 = 2x_2, \dot{x}_3 = 3x_3.$$

4. Знайські агульнае рашэнне сістэмы

$$\dot{x} = 2x - 4y + te^t, \dot{y} = x - 3y + 3e^t.$$

5. Рашыць задачу Кашы: $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_3, \dot{x}_3 = x_1,$

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1.$$

III. 1. Знайсі, пры якіх a лінейнае ўраўненне другога парадку

$$\ddot{x} + a^2 x = \sin \frac{2\pi}{\omega} t \text{ мае ўсе свае рашэнні, перыядычныя з перыя-}$$

дам ω .

2. Рашыць метадам Даламбера сістэму ўраўненняў

$$\dot{x} = 2x - 4y + 1, \dot{y} = -x + 5y.$$

3. Рашыць задачу Кашы аперацыйным метадам:

$$\ddot{x} = \dot{x} + 6x + 6e^{3t} + 2e^{-2t}, x(0) = 0, \dot{x}(0) = \frac{4}{5}.$$

4. Рашыць неаднародную сістэму $\dot{x} + y = t^2, \dot{y} - x = t.$

5. Знайсі агульнае рашэнне сістэмы $\dot{x}_1 = -15x_1 - 6x_2 + 16x_3,$

$$\dot{x}_2 = -15x_1 - 7x_2 + 18x_3 + 1, \dot{x}_3 = -19x_1 - 8x_2 + 21x_3 + e^t.$$

IV. 1. Метадам выключэння знайсі агульнае рашэнне сістэмы

$$\dot{x}_1 = -5x_1 + 2x_2 + e^t, \dot{x}_2 = x_1 + 6x_2 + e^{-2t}.$$

2. Знайсі агульнае рашэнне сістэмы дыферэнцыяльных ураўненняў

$$\dot{x}_1 = x_2 + tg^2 t - 1, \dot{x}_2 = -x_1 + tg t.$$

3. Няхай сапраўдныя часткі ўласных лікаў матрыцы A адмоўныя, $f(t)$ – непарыўная і абмежаваная пры ўсіх $t \in R$ вектар-функцыя. Знайсі абмежаванае пры ўсіх $t \in R$ рашэнне сістэмы ўраўненняў $\dot{x} = Ax + f(t).$

4. Рашыць сістэму метадам Эйлера: $\dot{x} = x - y + e^t, \dot{y} = x - 4y + e^{3t}.$

5. Даказаць, што лінейная сістэма $\frac{dx}{dt} = A(t)x, A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix}$

інтэгруецца ў квадратурах. Знайсці матрыцант гэтай сістэмы.

- V. 1. Даказаць, што ўласныя лікі матрыцы e^A роўны e^{λ_j} , дзе λ_j – уласныя лікі матрыцы A .
2. Даказаць, што ўсе рашэнні сістэмы $\dot{x} = y, \dot{y} = -\frac{2y}{t}$ абмежаваныя пры $t \geq 1$.
3. Рашыць сістэму метадам выключэння: $\dot{x} - y = 1, \dot{y} + x = t$.
4. Праінтэграваць сістэму матрычным метадам: $\dot{x}_1 = 3x_1 + 12x_2 - 4x_3, \dot{x}_2 = -x_1 - 3x_2 + x_3, \dot{x}_3 = -x_1 - 12x_2 + 6x_3$.
5. Рашыць сістэму ўраўненняў $\dot{x} = x + \frac{y}{t} + tch t, \dot{y} = \frac{x}{t} y + tsh t$.

- VI. 1. Знайсці рашэнне сістэмы ўраўненняў $\dot{x} = 2x + y - 7te^{-t}, \dot{y} = -x + 2y - 1$, якое застаецца абмежаваным пры $t \rightarrow \infty$.
2. Рашыць сістэму метадам выключэння: $\dot{x}_1 = 3x_2 - x_1, \dot{x}_2 = x_2 + x_1 + e^t$.
3. Рашыць сістэму метадам Даламбера: $\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + x_3 + 4t^2, \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3 + 12e^{2t}, \dot{x}_3 = x_1 + x_2 + x_3 - 4t$.
4. Рашыць сістэму $\dot{x} = y, \dot{y} = x + \frac{1}{t^2} + \ln t$.
5. Знайсці $\det e^A$, не вылічваючы матрыцы e^A , калі

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- VII. 1. Знайсці агульнае рашэнне сістэмы $\dot{x}_1 = -15x_1 - 6x_2 + 16x_3, \dot{x}_2 = -15x_1 - 7x_2 + 18x_3, \dot{x}_3 = -19x_1 - 8x_2 + 21x_3$.

2. Установіть від часткового рашення сістэмы $\dot{x} = 2x - y + t + te^t$,
 $\dot{y} = 2y - x - 5(1 + e^{5t} \sin t)$.
3. Цела кінута пад вуглом α да гарызонту з пачатковай скорасцю v_0 . Лічачы супраціўленне паветра прапарцыянальным скорасці руху, знайсці закон руху ў залежнасці ад часу і траекторыю руху цела.
4. Рашыць сістэму $\frac{dx}{dt} = Ax$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
5. Рашыць аперацыйным метадам: $\dot{x} + y - 2x = 0$, $\dot{y} + x - 2y = -5e^t \sin t$, $x(0) = 2$, $y(0) = 3$.

VIII. 1. Рашыць сістэму $\dot{x} = (a+1)x - y$, $\dot{y} = x + (a-1)y$.

2. Рашыць сістэму аперацыйным метадам: $\dot{x} + 2\dot{y} + x + y + z = 0$,
 $\dot{x} + \dot{y} + x + z = 0$, $\dot{z} - 2\dot{y} - y = 0$, $x(0) = y(0) = 1$, $z(0) = -2$.
3. Дыферэнцыяльныя ўраўненні руху свабоднага матэрыяльнага пункта адносна зямнога шара пад уздзеяннем сілы цяжару маюць выгляд $\frac{d^2x}{dt^2} = -2\omega \frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega \frac{dx}{dt} = 2\omega \frac{dx}{dt} - g \cos \varphi$, $\frac{d^2z}{dt^2} = -g \sin \varphi$, дзе φ – шырата пункту, ω – вуглавая скорасць вярчэння зямнога шара. Вызначыць залежнасць становішча пункта ад часу, калі пры $t = 0$ пункт знаходзіўся ў пачатку каардынат.
4. Вызначыць характар пункта спакою і пабудавать фазавыя траекторыі сістэмы $\dot{x} = -x + 5y$, $\dot{y} = -x + y$.
5. Рашыць сістэму матрычным метадам: $\dot{x}_1 = 2x_1 + x_2$, $\dot{x}_2 = 2x_2$,
 $\dot{x}_3 = 3x_3$.

IX. 1. Рашыць метадам Даламбера сістэму $\dot{x}_1 = x_2 + x_3 + 10 \cos t$,
 $\dot{x}_2 = x_1 + x_3 + 2e^t$, $\dot{x}_3 = x_1 + x_2 - 10 \sin t$.

2. Рашыць аперацыйным метадам задачу Кашы $\dot{x} = y - z$, $\dot{y} = x + y$,
 $\dot{z} = x + z$, $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, $z(0) = 3$.

3. Рашыць сістэму $\dot{x} = Ax$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

4. Вядома адно рашэнне $x_1 = -\sin t$, $y_1 = \cos t$ сістэмы ўраўненняў
 $\dot{x} = x \cos^2 t - (1 - \sin t \cos t)y$, $\dot{y} = (1 + \sin t \cos t) + y \sin^2 t$.
Знайсці ўсе яе рашэнні.

5. Рашыць сістэму $\dot{x} + \frac{2}{t}x = 1$, $\dot{y} - \left(1 + \frac{2}{t}\right)x - y = -1$.

X. 1. Знайсці ўсе рашэнні сістэмы $\dot{x} = t(1-t)x + (t^3 - t^2 + t + 1)y$,
 $\dot{y} = (1-t)x + (t^2 - t + 1)y$, калі вядома, што яна мае рашэнні
 $x_1(t)$ – паліном другой ступені, $y_1(t)$ – паліном першай ступені.

2. Рашыць сістэму метадам варыяцыі адвольных пастаянных:

$$\dot{x} = -4x - 2y + \frac{2}{e^t - 1}, \dot{y} = 6x + 3y - \frac{3}{e^t - 1}.$$

3. Рашыць метадам Эйлера сістэму дыферэнцыяльных ураўненняў
 $\dot{x} = x + y + e^t$, $\dot{y} = x + y - e^t$.

4. Знайсці дэтэрмінант матрыцы e^A , не вылічваючы e^A , калі

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Рашыць сістэму $\dot{x} = 2y$, $\dot{y} = 2x$.

XI. 1. Вылічыць матрыцу e^A , калі $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Рашыць сістэму $\dot{x} = 2x + y - 2z - t + 2$, $\dot{y} = -x + 1$, $\dot{z} = x + y - z - t + 1$.
3. Рашыць сістэму метадам варыяцыі адвольных пастаянных:

$$\dot{x} = y + \frac{1}{t}, \quad \dot{y} = -x.$$
4. Знайсці ўсе рашэнні сістэмы ўраўненняў $\dot{x} = -\frac{x}{t} - ty$, $\dot{y} = \frac{x}{t}$, калі вядома частковае рашэнне $x_1(t) = \cos t - \frac{\sin t}{t}$, $y_1(t) = \frac{\sin t}{t}$.
5. Рашыць сістэму метадам выключэння: $\dot{x}_1 = 3x_1 - 2x_2 + t$,
 $\dot{x}_2 = 3x_1 - 4x_2$.

ХІІ. 1. Ці ўтвараюць вектар-функцыі $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = e^{-\cos t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = e^{\sin t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ фундаментальную сістэму рашэнняў сістэмы ўраўненняў $\dot{x} = (2 \sin t - \cos t)x + (\sin t - \cos t)y$,
 $\dot{y} = 2(\cos t - \sin t)x + (2 \cos t - \sin t)y$?

2. Вылічыць матрыцу e^A , калі $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
3. Рашыць сістэму ўраўненняў $\dot{x} = 2x + y + z$, $\dot{y} = -2x - z$,
 $\dot{z} = 2x + y + 2z$.
4. Рашыць сістэму матрычным метадам: $\dot{x}_1 = 5x_1 - x_2 - 4x_3$,
 $\dot{x}_2 = -12x_1 + 5x_2 + 12x_3$, $\dot{x}_3 = 10x_1 - 3x_2 - 9x_3$.
5. Устаноўце від частковага рашэння сістэмы $\dot{x} = x - y + 2 \sin t$,
 $\dot{y} = 2x - y + t(1 + \cos t)$.

ХІІІ. 1. Метадам варыяцыі адвольных пастаянных прайнтэграваць

сістэму $\dot{x}_1 = -2x_1 - 4x_2 + 1 + 4t$, $\dot{x}_2 = -x_1 + x_2 + 3\frac{t^2}{2}$.

2. Метадам Даламбера прайнтэграваць сістэму $\dot{x}_1 = x_2 + x_3 + 10 \cos t$, $\dot{x}_2 = x_1 + x_3 + 2e^t$, $\dot{x}_3 = x_1 + x_2 - 10 \sin t$.

3. Рашыць сістэму $\dot{x} = Ax$, дзе $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Рашыць задачу Кашы $\dot{x} = y$, $\dot{y} = \frac{2}{t^2}x$; $x(-1) = 1$, $y(-1) = -2$.

5. Запісаць від частковага рашэння сістэмы $\dot{x} = y + 2e^t + 1$, $\dot{y} = x + t^2$.

XIV. 1. Рашыць сістэму ўраўненняў $\dot{x} = y + \sin \omega t$, $\dot{y} = -x$.

2. Рашыць сістэму $\dot{x} = e^t - 5x - y$, $\dot{y} = e^{2t} + x - 3y$.

3. Знайсці траекторыю руху электрона ў аднародным электрычным полі з напружаннем E , калі ў пачатковы момант вядомы напрамак і велічыня пачатковай скорасці электрона.

4. Знайсці e^A для матрыцы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Рашыць аперацыйным метадам задачу Кашы $\dot{x} = 4y + z$, $\dot{y} = z$, $\dot{z} = 4y$; $x(0) = 5$, $y(0) = 0$, $z(0) = 4$.

XV. 1. Метадам Даламбера прайнтэграваць сістэму $\dot{x}_1 = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$, $\dot{x}_2 = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$, $\dot{x}_3 = 5x_1 + 5x_2 + 2x_3$.

2. Аперацыйным метадам рашыць сістэму $\dot{x} = -7x + y + 5$, $\dot{y} = -2x - 5y - 37t$; $x(0) = y(0) = 0$.

3. Цела масы m рухаецца на плоскасці x, y , прыцягваючыся да пункта $(0;0)$ з сілай a^2mr , дзе r – адлегласць да гэтага пункта.

Знайсі рух ціла пры пачатковых умовах $x(0) = d$, $y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{y}(0) = v$ і траекторыю гэтага руху.

4. Знайсці $\det e^A$, не вылічваючы матрыцу e^A , калі

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

5. Вызначыць характар пункта спакою і пабудавать фазавыя траекторы сістэмы $\dot{x} = -2x - y$, $\dot{y} = 3x - y$.

ГЛАВА IV

АГУЛЬНЫЯ ПЫТАННІ СІСТЭМ ДЫФЕРЭНЦЫЯЛЬНЫХ УРАЎНЕННЯЎ

§ 1. Сістэмы дыферэнцыяльных ураўненняў. Асноўныя паняцці і азначэнні

Сістэмай дыферэнцыяльных ураўненняў парадку M будзем называць сукупнасць ураўненняў

$$\begin{aligned} x_1^{(m_1)}(t) &= f_1(t, x_1, \dot{x}_1, \dots, x_1^{(m_1-1)}, \dots, x_n, \dot{x}_n, \dots, x_n^{(m_n-1)}), \\ &\dots\dots\dots \\ x_n^{(m_n)}(t) &= f_n(t, x_1, \dot{x}_1, \dots, x_1^{(m_1-1)}, \dots, x_n, \dot{x}_n, \dots, x_n^{(m_n-1)}), \end{aligned} \quad (1)$$

дзе $f_1(t, x_1, \dots, x_M), \dots, f_n(t, x_1, \dots, x_M)$ ($M = m_1 + \dots + m_n$) – непарыўныя ў абсягу G $(M+1)$ -мернай прасторы $Otx_1 \dots x_M$ скалярныя функцыі.

Лік m_i называюць парадкам сістэмы па зменнай x_i .

Да сістэм дыферэнцыяльных ураўненняў прыводзяць, напрыклад, задачы дынамікі пункта: зададзены сілы, якія дзейнічаюць на матэрыяльны пункт; знайсці закон руху, гэта значыць знайсці функцыі $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, якія выражаюць залежнасць каардынат пункта, які рухаецца, ад часу. У агульным выпадку сістэма, якая апісвае гэты закон, мае выгляд

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= f_1(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}), \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= f_2(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}), \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= f_3(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}), \end{aligned} \quad (2)$$

дзе x, y, z – каардынаты пункта, які рухаецца, t – час, f_1, f_2, f_3 – вядомыя функцыі сваіх аргументаў.

Сістэмы віду (1) або (2) называюцца кананічнымі, таму што яны вырашаны адносна старэйшых вытворных.

Сістэма ўраўненняў n -га парадку, вырашаных адносна вытворных ад шуканых функцый,

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n} \quad (3)$$

называецца нармальнай.

Рашэннем сістэмы дыферэнцыяльных ураўненняў (1) называецца сукупнасць n функцый $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$, вызначаных на прамежку $(a; b)$ сапраўднай восі, калі выкананы наступныя ўмовы:

1) $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ – адпаведна $m_1, \dots, m_n$ разоў дыферэнцавальныя пры $t \in (a; b)$;

2) для ўсіх $t \in (a; b)$ пункт

$$(t, \varphi_1(t), \dot{\varphi}_1(t), \varphi_1^{(m_1-1)}(t), \dots, \varphi_n(t), \dot{\varphi}_n(t), \dots, \varphi_n^{(m_n-1)}(t)) \in G;$$

3) для ўсіх $t \in (a; b)$

$$\varphi_1^{(m_1)}(t) = f_1(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n^{(m_n-1)}(t)),$$

.....

$$\varphi_n^{(m_n)}(t) = f_n(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n^{(m_n-1)}(t)).$$

Прыклад 1. Паказаць, што сістэма функцый $x_1 = -\frac{1}{t^2}$, $x_2 = -t \ln t$, вызначаных у прамежку $0 < t < +\infty$, з'яўляецца рашэннем сістэмы дыферэнцыяльных ураўненняў $\frac{dx_1}{dt} = 2tx_1^2$, $\frac{dx_2}{dt} = \frac{x^2}{t} - 1$.

Рашэнне. Маем $\frac{dx_1}{dt} = \frac{2}{t^3}$, $\frac{dx_2}{dt} = -1 - \ln t$. Падстаўляючы

ва ўраўненні дадзенай сістэмы замест x_1, x_2 , $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dx_2}{dt}$ іх выразы

праз t , атрымліваем тоеснасць $\frac{2}{t^3} \equiv \frac{2t}{t^4} \equiv \frac{2}{t^3}$ і $-\ln t - 1 \equiv -\ln t - 1$,
 $0 < t < +\infty$.

Калі $\dot{x}_i, \ddot{x}_i, \dots, x_i^{(m_i-1)}$ ($i = \overline{1, n}$) прыняць за новыя дапаможныя функцыі, то агульную кананічную сістэму (1) можна замяніць эквівалентнай ёй нармальнай сістэмай, якая складаецца з $N = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ ураўненняў. Таму далей будзем разглядаць толькі нармальныя сістэмы віду (3).

Прыклад 2. Прывесці да нармальнай сістэмы наступную сістэму дыферэнцыяльных ураўненняў $\frac{d^2 x}{dt^2} = y$, $t^3 \frac{dy}{dt} = 2x$ ($t \neq 0$).

Рашэнне. Дапусцім, $x = x_1$, $\frac{dx}{dt} = x_2$, $y = x_3$. Тады будзем мець $\frac{dx_1}{dt} = x_2$, $\frac{dy}{dt} = \frac{dx_3}{dt}$, і зададзеная сістэма прывядзецца да наступнай нармальнай сістэмы трэцяга парадку $\frac{dx_1}{dt} = x_2$, $\frac{dx_2}{dt} = x_3$,
 $\frac{dx_3}{dt} = \frac{2x_1}{t^3}$.

Заўвага 1. Частковым выпадкам кананічнай сістэмы з'яўляецца адно ўраўненне n -га парадку, якое вырашана адносна старэйшай вытворнай $x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})$. Увядзеннем новых функцый $x = x_1$, $\dot{x} = x_2, \dots, x^{(n-1)} = x_n$ гэтае ўраўненне замяніцца наступнай сістэмай n ураўненняў:

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_3, \dots, \dot{x}_{n-1} = x_n,$$

$$\dot{x}_n = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Прыклад 3. Адно ўраўненне $\frac{d^2 x}{dt^2} = -x$ з'яўляецца пры-

ватным випадкам кананічної сістэмы. Калі дапусціць, што $\frac{dx}{dt} = y$, з

зыходнага ўраўнення атрымаем $\frac{dy}{dt} = -x$. У выніку атрымліваем

нармальную сістэму ўраўненняў $\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = -x$.

Заўвага 2. Можна сцвярджаць і адваротнае, што, пры некаторых умовах нармальная сістэма n -га парадку (3) будзе эквівалентнай аднаму ўраўненню парадку n . Сапраўды, дыферэнцуючы першае ўраўненне з (3) і замяняючы $\dot{x}_i$ праз іх выразы $f_i(t, x_1, \dots, x_n)$,

атрымаем $\ddot{x}_1 = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdot f_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \cdot f_n$, гэта значыць

выраз віду $\ddot{x}_1 = F_2(t, x_1, \dots, x_n)$. Дыферэнцуючы атрыманае ўраў-

ненне па t , з улікам (3) будзем мець $\ddot{x}_1 = \frac{\partial F_2}{\partial t} + \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \cdot f_1 +$

$+ \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \cdot f_2 + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \cdot f_n$, або $\ddot{x}_1 = F_3(t, x_1, \dots, x_n)$. Працягваючы

далей, атрымаем $x_1^{(n)} = F_n(t, x_1, \dots, x_n)$. З атрыманай сістэмы $n-1$ ураўненняў можна, наогул кажучы, вызначыць $n-1$ велічынь $x_2, x_3, \dots, x_n$ праз $t, x_1, \dot{x}_1, \dots, x_1^{(n-1)}$. Падстаўляючы гэтыя выразы ва ўраўненне для $x_1^{(n)}$, атрымаем ураўненне віду

$$x_1^{(n)} = \Phi(t, x_1, \dot{x}_1, \dots, x_1^{(n-1)}).$$

З самога спосабу атрымання гэтага ўраўнення вынікае, што калі $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ – рашэнне сістэмы (3), то $x_1(t)$ будзе яму задавальняць. А ў тым, што $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ – рашэнні (3), можна лёгка ўпэўніцца (гл., напрыклад, [2], глава VII, § 1, с. 247). Магчымасць пераходу ад сістэмы да эквівалентных ураўненняў можна выкарыстаць пры рашэнні гэтых сістэм.

Прыклад 4. Рашыць сістэму $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$.

Рашэнне. Дыферэнцуем першае ўраўненне $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt}$, вы-

карыстоўваючы другое, атрымаем $\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$, адкуль $x = C_1 \cos t +$

$+ C_2 \sin t$; далей з першага ўраўнення $y = \frac{dx}{dt} = -C_1 \sin t +$

$+ C_2 \cos t$. Прыведзеныя вышэй выкладкі не прывядуць сістэму да аднаго ўраўнення n -га парадку, калі не выконваецца ўмова вышальнасці апісанай сістэмы $n-1$ ураўненняў адносна $x_2, x_3, \dots, x_n$. Напрыклад, сістэму $\dot{x}_1 = f_1(t, x_1)$, $\dot{x}_2 = f_2(t, x_1, x_2)$ немагчыма замяніць эквівалентным ураўненнем другога парадку адносна x_1 , але калі f_2 сапраўды залежыць ад x_1 , то можна скласці эквівалентнае ўраўненне другога парадку адносна x_2 .

Будзем разглядаць сістэму (3). Калі $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ – рашэнне сістэмы (3) на прамежку $(a; b)$, то мноства пунктаў $(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$, $t \in (a; b)$ называецца інтэгральнай крывой. З азначэння рашэння вынікае, што інтэгральная кривая належыць абсягу G .

Задача Кашы для сістэмы (3) фармулюецца так: знайсці рашэнне $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ сістэмы, якое задавальняе пры $t = t_0$ пачатковым умовам,

$$\varphi_1|_{t=t_0} = x_1^0, \varphi_2|_{t=t_0} = x_2^0, \dots, \varphi_n|_{t=t_0} = x_n^0. \quad (4)$$

Геаметрычна гэта азначае, што патрабуецца пабудаваць інтэгральную кривую, якая будзе праходзіць праз дадзены пункт абсягу G .

Калі ў сістэме (3) t разглядаць як час, $x_1, x_2, \dots, x_n$ – як каардынаты пункта n -мернай прасторы (фазавай прасторы) $Ox_1x_2\dots x_n$ (у выпадку $n = 2$ гэтая прастора ёсць плоскасць Ox_1x_2 (фазавая плоскасць)), то яе рашэнне

$$x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), \dots, x_n = \varphi_n(t) \quad (5)$$

называецца рухам, азначаным гэтай сістэмай, а шлях, які апісвае рухомы пункт у фазавай прасторы (на фазавай плоскасці), – траекторыяй гэтага руху.

Відавочна, траекторыя рашэння з'яўляецца праекцыяй адпаведнай інтэгральнай крывой у фазавую прастору.

Левыя часткі сістэмы (3) ёсць складовыя (па восях каардынат) скорасці руху пункта. Таму сістэма (3) задае так званае поле скарасцей рухаў, так што пункт можа праходзіць у момант часу t праз становішча $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ толькі з дадзенай скорасцю.

Калі скорасць, з якой пункт праходзіць праз становішча $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, не залежыць яўна ад моманту часу праходжання, гэта значыць сістэма (3) мае выгляд

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n},$$

то яна называецца стацыянарнай, або аўтаномнай сістэмай.

У тым выпадку, калі ў пачатковым пункце $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ правыя часткі сістэмы (3) ператвараюцца ў нуль пры ўсіх разглядаемых значэннях часу t , сістэма (3) вызначае рух віды

$$x_1 \equiv x_1^0, x_2 \equiv x_2^0, \dots, x_n \equiv x_n^0. \quad (6)$$

Такі рух называюць станам спакою. Траекторыя руху (6) з'яўляецца пунктам $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, які называюць пунктам спакою, або пунктам раўнавагі сістэмы (3).

Прыклад 5. Разгледзім сістэму $\dot{x} = x, \dot{y} = 2y$.

Знойдзем рухі, вызначаемыя гэтай сістэмай, і даследуем іх уласцівасці. Адзначым, што сістэма аўтаномная. Пачатак каардынат з'яўляецца пунктам спакою, бо правыя часткі сістэмы ператвараюцца ў нуль пры ўсіх значэннях часу t . Гэтаму пункту адпавядае рух $x \equiv 0, y \equiv 0$ – стан спакою. Усё сямейства рухаў даецца формулай

$x_1 = C_1 e^t, y = C_2 e^{2t}$, дзе C_1, C_2 – адвольныя пастаянныя.

Выдзелім $x_1 = C_1 e^t, y = C_2 e^{2t}$, дзе C_1, C_2 – адвольныя пастаянныя.

Выдзелім рух, які задавальняе пачатковым умовам $x = 1, y = 1$ пры

$t = 0$, гэта значыць рух, для якога рухомы пункт знаходзіцца ў пункце $(1,1)$ у момант часу $t = 0$.

Падстаўляючы ва ўраўненне сямейства рухаў $t = 0, x = 1, y = 1$, знаходзім $C_1 = 1, C_2 = 1$, так што шуканым рухам будзе $x = e^t, y = e^{2t}$.

Траекторыя гэтага руху служыць паўпарабала $y = x^2$ ($x > 0$), прычым з ураўнення руху відаць, што пры $t > 0$ пункт будзе рухацца ад пункта $(1,1)$, аддаляючыся на ∞ з узростаннем t . Гэта таксама відаць і з самой сістэмы дыферэнцыяльных ураўненняў,

бо для $x > 0, y > 0$ будзем мець $\frac{dx}{dt} > 0, \frac{dy}{dt} > 0$, таму з павелічэннем часу t абедзве каардынаты x і y пункта (x, y) таксама павялічваюцца. Пры $t < 0$ пункт рухаецца ад пачатку каардынат ($t = -\infty$) да пункта $(1,1)$.

Нармальная сістэма (3) у вектарным запісе прымае выгляд дыферэнцыяльнага ўраўнення

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (7)$$

дзе $f: G \rightarrow R^n$ – непарыўная функцыя, $G \subset R^{n+1}$,

$$f = \text{colon}(f_1, \dots, f_n), \quad x = \text{colon}(x_1, \dots, x_n) \in R^n.$$

Рашэннем вектарнага дыферэнцыяльнага ўраўнення (7) назавём функцыю $\varphi: (a; b) \rightarrow R^n$, калі выкананы наступныя ўмовы:

- 1) $\varphi(t)$ дыферэнцавальная пры ўсіх $t \in (a; b)$;
- 2) $(t, \varphi(t)) \in G$ пры ўсіх $t \in (a; b)$;
- 3) $\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t))$ пры ўсіх $t \in (a; b)$.

У вектарнай форме пачатковыя дадзеныя задачы Кашы прымаюць выгляд $(t_0, x^0) \in G$, рашэнне $\varphi(t)$ задачы Кашы павінна задавальняць умове $\varphi(t_0) = x^0$.

У некаторых выпадках пры рашэнні сістэмы (7) бывае лягчэй

знайсці спачатку камплексныя рашэнні сапраўднага ўраўнення, а затым выдзеліць ужо з іх сапраўдныя рашэнні (напрыклад, як у выпадку лінейных сістэм з пастаяннымі каэфіцыентамі, § 3.2).

Разгледзім нармальную сістэму дыферэнцыяльных ураўненняў

$$\dot{z}_j = w_j(t, z_1, z_2, \dots, z_n), \quad j = \overline{1, n}. \quad (8)$$

Камплексныя рашэнні (8) будзем адшукваць пры ўмове, што функцыі $w_j(t, z_1, z_2, \dots, z_n)$ вызначаны для камплексных значэнняў зменных $z_1, z_2, \dots, z_n$. Можна абмежавацца, напрыклад, выпадкам, калі гэтыя функцыі з'яўляюцца паліномами адносна зменных $z_1, z_2, \dots, z_n$ з каэфіцыентамі ў выглядзе сапраўдных або камплексных функцый сапраўднай зменнай t , вызначаных і на інтэрвале $(a; b)$.

Сістэму

$$z_j = \omega_j(t), \quad j = \overline{1, n} \quad (9)$$

камплексных функцый сапраўднай зменнай t , зададзеных на некаторым інтэрвале $a < t < b$, будзем называць рашэннем сістэмы (8), калі пры замене зменных z_i функцыямі зменнай t па формулах (9) атрымаецца сістэма тоеснасцей па t на гэтым інтэрвале.

У тым выпадку, калі правыя часткі (8) лінейныя адносна $z_1, z_2, \dots, z_n$, яны вызначаны для ўсіх значэнняў гэтых зменных.

Няхай $t_0, z_1^0, z_2^0, \dots, z_n^0$ — адвольная сістэма пачатковых значэнняў, прычым t_0 — адвольны сапраўдны лік, што задавальняе ўмове $a < t_0 < b$, $z_1^0, z_2^0, \dots, z_n^0$ — адвольныя камплексныя лікі.

Пакажам, што існуе рашэнне $z_j = \omega_j(t), j = \overline{1, n}$ сістэмы (8), якое будзе задавальняць пачатковым умовам $\omega_j(t_0) = z_j^0, j = \overline{1, n}$. Пры гэтым усякія два рашэнні з аднолькавымі пачатковымі ўмовамі супадаюць на агульнай частцы іх інтэрвалаў вызначэння. Для гэтага заменім нармальную сістэму (8) камплексных ураўненняў

нармальнай сістэмай (3) сапраўдных ураўненняў. Дапусцім, $z_j = x_j + iy_j$, $j = \overline{1, n}$, тады замест (8) атрымаем

$$\dot{x}_j + i\dot{y}_j = f_j(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) + ig_j(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n), \quad (10),$$

дзе f_j і g_j – сапраўдныя функцыі сапраўдных аргументаў, якія задавальняюць судачыненням $f_j(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) +$
 $+ ig_j(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = w_j(t, x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n).$

З (10) будзем мець

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n), i = \overline{1, n}, \\ \dot{y}_i &= g_i(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n), i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (11)$$

Такім чынам, сістэма (8) замянілася сістэмай (11).

Калі меркаваць, што правыя часткі ўраўненняў (8) з'яўляюцца паліномами адносна $z_1, z_2, \dots, z_n$, то правыя часткі (11) f_j, g_j будуць паліномами адносна $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$. Прычым каэфіцыенты гэтых паліномаў будуць непарыўнымі функцыямі на інтэрвале $(a; b)$, таму што на гэтым інтэрвале непарыўнымі з'яўляюцца каэфіцыенты паліномаў w_i . У сілу таго, што пры гэтых умовах выконваецца тэарэма існавання і адзінасці рашэнняў у сапраўдным выпадку (гл. наступны параграф), можна сцвярджаць, мяркуючы $z_j^0 = x_j^0 + iy_j^0$, $w_j(t) = \varphi_j(t) + i\psi_j(t)$, што існуе адзінае рашэнне сістэмы (11) пры пачатковых умовах $\varphi_j(t_0) = x_j^0$, $\psi_j(t_0) = y_j^0$, $j = \overline{1, n}$.

Таксама, як і ў сапраўдным выпадку, у выпадку камплексным да нармальнай сістэмы можна прывесці дастаткова агульныя сістэмы дыферэнцыяльных ураўненняў.

Прыклад 7. Прывесці сістэму камплексных ураўненняў $\dot{z}_1 = z_1^2 + iz_2$, $\dot{z}_2 = z_2^2 + iz_1$ да сістэмы сапраўдных ураўненняў.

Рашэнне. Няхай $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ ёсць камплексныя невядомыя функцыі сапраўднай зменнай t . Падставіўшы ў да-

джену систему, атримаем

$$\dot{x}_1 + i\dot{y}_1 = (x_1 + iy_1)^2 + i(x_2 + iy_2) = (x_1^2 - y_1^2 - y_2) + i(2x_1y_1 + x_2),$$

$$\dot{x}_2 + i\dot{y}_2 = (x_2 + iy_2)^2 + i(x_1 + iy_1) = (x_2^2 - y_2^2 - y_1) + i(2x_2y_2 + x_1).$$

Адкуль система сапраўдных ураўненняў мае выгляд

$$\dot{x}_1 = x_1^2 - y_1^2 - y_2, \quad \dot{y}_1 = 2x_1y_1 + x_2,$$

$$\dot{x}_2 = x_2^2 - y_2^2 - y_1, \quad \dot{y}_2 = 2x_2y_2 + x_1.$$

§ 2. Тэарэма адзінасці

Няхай $f_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(t, x_1, \dots, x_n)$ – непарыўныя функцыі са значэннямі ў R , вызначаныя для сапраўдных t з інтэрвалу $I \subset R$ і для пунктаў $x = colon(x_1, x_2, \dots, x_n)$ з адкрытага абсягу $D \subset R^n$; абазначым $G = I \times D = \{(t, x) : t \in I, x \in D\}$. Як і ў § 1, разгледзім систему дыферэнцыяльных ураўненняў адносна невядомых функцый $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$:

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad (i = \overline{1, n})$$

або ў вектарнай форме

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{12}$$

дзе $x(t)$ і $f(t, x)$ – вектарныя функцыі (слупкі) з каардынатамі $x_1(t), \dots, x_n(t)$ і $f_1(t, x), \dots, f_n(t, x)$ адпаведна.

У якасці рашэння ўраўнення (сістэмы) (12) азначым любую непарыўна дыферэнцавальную функцыю $\varphi(t)$, зададзеную на інтэрвале $\Delta \subset I$, якая прымае значэнні ў D і задавальняе тоеснасці $\varphi(t) \equiv f(t, \varphi(t))$, $t \in \Delta$.

Скажам (гл. § 1), што пастаўлена задача Кашы або пачатковая задача, калі патрэбна знайсці рашэнне ўраўнення (12), якое задавальняе пачатковай умове

$$x(t_0) = x^0. \tag{13}$$

У випадку, калі для любых $t_0 \in I$, $x^0 \in D$ задача Кашы (12), (13) мае адзінае рашэнне, кажуць, што ўраўненне (12) задавальняе ўласцівасці існавання і адзінасці рашэнняў. Адзначым, што, як і раней, адзінасць рашэння тут разумеецца ў наступным сэнсе: калі функцыі $\varphi_1: \Delta_1 \rightarrow D$, $\varphi_2: \Delta_2 \rightarrow D$ задавальняюць ураўненню (12) і пачатковай умове (13), то $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ для $t \in \Delta_1 \cap \Delta_2$.

Зусім аналагічна, як і пры доказе тэарэмы 1.2, паказваецца, што задача Кашы (12), (13) эквівалентна сістэме інтэгральных ураўненняў

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau, \quad (14)$$

гэта значыць, што кожнае рашэнне задачы (12), (13) задавальняе ўраўненню (14), а кожнае непарыўнае на некаторым інтэрвале Δ рашэнне ўраўнення (14) з'яўляецца рашэннем задачы (12), (13). Кажуць, што функцыя $f(t, x)$ задавальняе ўмове Ліпшыца па вектарнай зменнай x на мностве $\tilde{G}$ прасторы зменных (t, x) , калі існуе такі лік L , што для любых двух пунктаў $(t, \bar{x})$ і $(t, \bar{\bar{x}})$ з мноства $\tilde{G}$ выконваецца няроўнасць

$$|f(t, \bar{x}) - f(t, \bar{\bar{x}})| \leq L|\bar{x} - \bar{\bar{x}}|. \quad (15)$$

Лік L называецца канстантай Ліпшыца.

Тэарэма 1. Калі функцыя $f(t, x)$ непарыўная на некаторым адкрытым мностве G прасторы зменных (t, x) , задавальняе ўмове Ліпшыца па x на любым замкнутым абмежаваным мностве, што змяшчаецца ў G , і існуе рашэнне задачы Кашы (12), (13), то яно адзінае.

Заўважым, што патрабаванне выканання ўмовы Ліпшыца ў любым замкнутым абмежаваным мностве, якое змяшчаецца ў мностве G , можна замяніць больш моцнымі ўмовамі дыферэнцывальнасці функцыі $f(t, x)$ па x на мностве G і абмежаванасці

частковых вытворных $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ ($i, j = \overline{1, n}$) на любой замкнутой абмежаванай частцы G . Гэтыя ўмовы, у прыватнасці, выконваюцца, калі частковыя вытворныя $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ ($i, j = \overline{1, n}$) непарыўныя на мностве G .

Сапраўды, калі $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ непарыўныя на мностве G , то па тэарэме аб канечным прыросце (гл. [4], глава V, § 3, с. 224) маем

$$f_i(t, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) - f_i(t, \bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{x}}_2, \dots, \bar{\bar{x}}_n) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1} \right)_{\bar{x}_j} (\bar{x}_1 - \bar{\bar{x}}_1) + \dots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_n} \right)_{\bar{x}_j} (\bar{x}_n - \bar{\bar{x}}_n),$$

дзе знак $\left(\right)_{\bar{x}_j}$ паказвае, што аргументы x_j ($j = \overline{1, n}$) павінны быць заменены праз $\tilde{x}_j = \bar{x}_j + \Delta(\bar{\bar{x}}_j - \bar{x}_j)$, $0 < \Delta < 1$. У сілу непарыўнасці частковых вытворных з'яўляюцца абмежаванымі. Узяўшы за пастаянную L найбольшае значэнне абсалютных велічынь усіх вытворных $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ у абсягу $\bar{G}$, можна з роўнасці, указанай вышэй, атрымаць умову Ліпшыца (15). Такім чынам, умова Ліпшыца выконваецца пры існаванні і непарыўнасці ў G частковых вытворных $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ ($i, j = \overline{1, n}$).

§ 3. Лакальныя тэарэмы існавання

Разгледзім сістэму (12) з пачатковымі ўмовамі (13). Няхай адрэзак $[t_0 - a; t_0 + a]$ змяшчаецца ў мностве I , а замкнуты шар

$\{x \in R^n: |x - x^0| \leq r\}$ належыць абсягу D . У сілу таго, што функцыя $f(t, x)$ непарыўная, яна будзе абмежаванай на мностве

$$\Pi = \{(t, x): |t - t_0| \leq a, |x - x^0| \leq r\},$$

гэта значыць $|f(t, x)| \leq M = \text{const}$, калі $(t, x) \in \Pi$.

Няхай для гэтай функцыі выконваецца ўмова Ліпшыца (15) па зменнай x на мностве Π , гэта значыць пры любых $(t, \bar{x})$ і $(t, \bar{\bar{x}})$ з Π .

Тэарэма 2. Калі функцыя $f(t, x)$ непарыўная на адкрытым мностве $G = I \times D$ і задавальняе ўмове Ліпшыца па x на замкнутым мностве Π , то задача Кашы (12), (13) мае рашэнне $x(t) = x(t, t_0, x^0)$, прычым у абсягу азначэння Δ гэтага рашэння

змяшчаецца адрэзак $[t_0 - h; t_0 + h]$, дзе $h = \min \left\{ a, \frac{r}{M} \right\}$.

Метад паслядоўных набліжэнняў Пікара, якім карыстаюцца пры доказе тэарэмы існавання (гл. дадатак, тэарэма 1.2), з'яўляецца добрым набліжаным метадам рашэння задачы Кашы. Паслядоўныя набліжэнні знаходзяцца адначасова для ўсіх шуканых функцый. За набліжэнне нулявога парадку да рашэння сістэмы (12) возьмем $x_i^{(0)}$ з умоў (13), далей набліжэнні першага парадку будуць

$$x_1^{(1)}(t) = x_1^{(0)} + \int_{t_0}^t f_1(\tau, x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) d\tau, \\ \dots\dots\dots, \tag{16}$$

$$x_n^{(1)}(t) = x_n^{(0)} + \int_{t_0}^t f_n(\tau, x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) d\tau.$$

Відавочна, што пабудаваныя функцыі з'яўляюцца непарыўнымі і не выходзяць з мноства Π . Далей вызначым другія набліжэнні

$$x_l^{(2)}(t) = x_l^{(0)} + \int_{t_0}^t f_l(\tau, x_l^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}) d\tau, \\ \dots\dots\dots, \quad (17)$$

$$x_n^{(2)}(t) = x_n^{(0)} + \int_{t_0}^t f_n(\tau, x_l^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}) d\tau$$

Наогул m -я набліжэнні вызначаюцца праз набліжэнні $(m-1)$ -га парадку такімі формуламі

$$x_l^{(m)}(t) = x_l^{(0)} + \int_{t_0}^t f_l(\tau, x_l^{(m-1)}, \dots, x_n^{(m-1)}) d\tau, \\ \dots\dots\dots, \quad (18)$$

$$x_n^{(m)}(t) = x_n^{(0)} + \int_{t_0}^t f_n(\tau, x_l^{(m-1)}, \dots, x_n^{(m-1)}) d\tau.$$

Відавочна, што m -я набліжэнні, як нявызначаныя інтэгралы ад непарыўных функцый, таксама з'яўляюцца непарыўнымі. Можна даказаць (гл. дадатак, тэарэма 4.2), што ўсе паслядоўныя набліжэнні (18) належаць мноству Π пры $|t - t_0| \leq h$, а таксама што гэтыя набліжэнні ўтвараюць паслядоўнасць, якая раўнамерна збягаецца, гэта значыць, што $\lim_{m \rightarrow \infty} x_i^{(m)}(t)$ існуе, а функцыі $x_i(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} x_i^{(m)}(t)$ даюць шуканую сістэму рашэнняў дыферэнцыяльнай сістэмы (12) пры пачатковых умовах (13).

Адзначым, што ў якасці нулявога набліжэння не абавязкова патрэбна браць пачатковыя значэнні шуканых функцый. Можна ўзяць любыя непарыўна дыферэнцавальныя функцыі, якія не выходзяць з мноства G пры $|t - t_0| \leq h$. Пры гэтым самі паслядоўныя набліжэнні мяняюцца, але лімітавыя функцыі застаюцца тымі ж самымі ў сілу адзінасці рашэння.

Прыклад 1. Знайсці тры паслядоўныя набліжэнні да рашэння задачы Кашы $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = t^3(x_1 + x_2)$, $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = -2$.

Рашэнне. Маём $x_1^{(0)}(t) = 1$, $x_2^{(0)}(t) = -2$. Карыстаючыся формуламі (16), знойдзем

$$x_1^{(1)}(t) = 1 + \int_0^t (-2) d\tau = 1 - 2t,$$

$$x_2^{(1)}(t) = -2 + \int_0^t \tau^3(1 - 2) d\tau = -2 - \frac{t^4}{4}.$$

Згодна з формуламі (17) будзем мець

$$x_1^{(2)}(t) = 1 + \int_0^t \left(-2 - \frac{\tau^4}{4}\right) d\tau = 1 - 2t - \frac{t^5}{20},$$

$$x_2^{(2)}(t) = -2 + \int_0^t \tau^3 \left(1 - 2\tau - 2 - \frac{\tau^4}{4}\right) d\tau = -2 - \frac{t^4}{4} - \frac{2}{5}t^5 - \frac{t^8}{32}.$$

Прыклад 2. Разгледзім сістэму $\dot{x}_1 = -x_2$, $\dot{x}_2 = x_1$. Гэтая сістэма мае адзінае рашэнне, якое задавальняе любым зададзеным пачатковым умовам, прычым гэтак рашэнне будзе вызначана пры ўсіх t . Знойдзем метадам паслядоўных набліжэнняў Пікара рашэнне, якое задавальняе пачатковым умовам $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$. Адапаведная сістэма інтэгральных ураўненняў будзе мець выгляд

$$x_1 = 1 - \int_0^t x_2 d\tau, \quad x_2 = \int_0^t x_1 d\tau.$$

Будзем паслядоўныя набліжэнні:

$$x_1^{(0)}(t) = 1, \quad x_2^{(0)}(t) = 0;$$

$$x_1^{(1)}(t) = 1 - \int_0^t 0 \cdot d\tau = 1; \quad x_2^{(1)}(t) = \int_0^t 1 \cdot d\tau = t;$$

$$x_1^{(2)}(t) = 1 - \int_0^t \tau \cdot d\tau = 1 - \frac{t^2}{2}; \quad x_2^{(2)}(t) = \int_0^t 1 \cdot d\tau = t;$$

$$x_1^{(3)}(t) = 1 - \int_0^t \tau \cdot d\tau = 1 - \frac{t^2}{2}; \quad x_2^{(3)}(t) = \int_0^t (1 - \frac{\tau^2}{2}) \cdot d\tau = t - \frac{t^3}{3!};$$

$$x_1^{(4)}(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!}; \quad x_2^{(4)}(t) = t - \frac{t^3}{3!};$$

$$x_1^{(5)}(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!}; \quad x_2^{(5)}(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!}.$$

Паслядоўнасці $x_1^{(0)}(t), x_1^{(1)}(t), x_1^{(2)}(t), \dots; x_2^{(0)}(t), x_2^{(1)}(t), x_2^{(2)}(t), \dots$ збягаюцца пры ўсіх t . Лімітавыя функцыі $x_1(t) = \cos t$, $x_2(t) = \sin t$ утвараюць шуканае рашэнне.

Адзначым, што прыведзеная тэарэма 2 носіць лакальны характар: існаванне рашэння гарантуецца толькі на малым інтэрвале $|t - t_0| < h$.

Заўвага. Пры выкананні ўмовы тэарэмы 2 з § 1 вынікае, што ва ўказаным наваколлі пункта t_0 існуе адзінае рашэнне задачы Кашы (12), (13). Тым не менш, для лакальнага адназначнага рашэння задачы Кашы не абавязкова, каб функцыя f была ліпшыцавай.

Тэарэма Осгуда. Няхай функцыя f , непарыўная ў абсягу G , задавальняе няроўнасці

$$|f(t, \bar{x}) - f(t, \bar{\bar{x}})| \leq \Phi(|\bar{x} - \bar{\bar{x}}|) \quad \forall (t, \bar{x}), (t, \bar{\bar{x}}) \in G,$$

дзе функцыя Φ непарыўная, $\Phi(u) > 0$ пры $u > 0$ і $\int_{+0}^{\infty} \frac{du}{\Phi(u)} = +\infty$.

Тады для любога пункта $(t_0, x^0) \in G$ задачу Кашы (12), (13) можна вырашыць адназначна на некаторым адрэзку $[t_0 - h; t_0 + h]$.

Калі патрэбна ўстанавіць толькі існаванне рашэння задачы

Кашы, то абмежаванні на функцыю f можна істотна аслабіць.

Тэарэма Пеано. Няхай функцыя f непарыўная ў абсягу G і пункт $(t_0, x^0) \in G$. Тады задача Кашы (12), (13) мае рашэнне, вызначанае, прынамсі, на некаторым адрэзку $[t_0 - h; t_0 + h]$.

Доказ тэарэм Осгуда і Пеано гл., напрыклад, у [47], глава VI, § 15, с. 113; § 16, с. 121.

Для нармальнай сістэмы лінейных дыферэнцыяльных ураўненняў

$$\dot{x} = A(t)x + f(t),$$

у якой матрыца $A(t)$ і вектар-функцыя $f(t)$ непарыўныя на некаторым адрэзку $[a; b]$, паслядоўныя набліжэнні

$$x^0(t) = x^0, \quad x^{k+1}(t) = x^0 + \int_{t_0}^t [A(\tau)x^k(\tau) + f(\tau)] d\tau \quad (k = 0, 1, \dots)$$

раўнамерна збягаюцца на ўсім адрэзку $[a; b]$.

Сапраўды, з непарыўнасці матрыцы $A(t)$ і вектар-функцыі $f(t)$ вынікае, што існуюць такія дадатныя лікі A і B , што

$$\|A(t)\| \leq A, \quad |x^1(t) - x^0(t)| \leq B$$

пры ўсіх $t \in [a; b]$.

Выкарыстоўваючы метады матэматычнай індукцыі, можна паказаць справядлівасць няроўнасцяў

$$|x^{k+1}(t) - x^k(t)| \leq BA^k \frac{|t - t_0|^k}{k!} \quad (k = 0, 1, \dots)$$

пры $t \in [a; b]$, з якіх вынікае раўнамерная зыходнасць паслядоўнасці $\{x^k(t)\}$ на ўсім адрэзку $[a; b]$. Таму ў выпадку лінейнай сістэмы ўраўненняў можна разглядаць рашэнні, вызначаныя адразу на ўсім адрэзку $[a; b]$.

§ 4. Працяг рашэнняў

Разгледзім нармальную сістэму дыферэнцыяльных ураўненняў (12), для якой выкананы ўсе ўмовы тэарэмы існавання і адзінасці рашэнняў у некаторым абсягу $G = I \times D$ зменных t, x . Згодна з тэарэмай існавання для любога пункта $(t_0, x^0) \in G$ знойдзецца рашэнне $x = x(t, t_0, x^0) = \varphi(t)$ сістэмы ўраўненняў (12) з пачатковымі дадзенымі (t_0, x^0) , вызначанае ў некаторым наваколлі пункта t_0 . Можна паказаць, што наваколле, у якім вызначана рашэнне з пачатковымі значэннямі (t_0, x^0) , можа быць пашырана да некаторага максімальнага інтэрвалу. Рашэнне $y(t)$ называецца працягам рашэння $x(t)$, вызначанага на інтэрвале Δ , калі яно вызначана на большым інтэрвале $\Delta_1 \supset \Delta$ і супадае з $x(t)$ пры $t \in \Delta$.

Рашэнне называецца неабмежавана доўжаным (неабмежавана доўжаным уперад або назад), калі яго можна працягваць на ўсю вось $-\infty < t < \infty$ (на паўвось $t_0 \leq t < \infty$ або $-\infty < t \leq t_0$, адпаведна).

Няхай Γ – граніца абсягу G . Рашэнне $x(t)$, што задавальняе пачатковым умовам $x(t_0) = x^0$, называецца доўжаным уперад да граніцы Γ , калі існуе яго працяг $y(t)$, вызначаны на канечным паўінтэрвале $[t_0, t_+)$, $t_+ < \infty$, і такі, што пункты віду $(t, y(t))$ пры t , блізкіх да t_+ , не змяшчаюцца ні ў якім кампактным падмностве F абсягу G . Аналагічна вызначаецца працяг рашэння назад да самай граніцы Γ .

Паяснім прыведзеныя вышэй азначэнні на прыкладзе аднаго ўраўнення $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$. Няхай $y(t)$ – працяг яго рашэння, вызначаны пры $t_0 \leq t < t_+ < \infty$. У тым выпадку, калі існуе $\lim_{t \rightarrow t_+} y(t) = y_+$ і ён канечны, тады $(t, y(t)) \rightarrow (t_+, y_+)$ і лімітавы

пункт інтэгральнай крывой ляжыць на граніцы. Напрыклад, для ўраўнення $\dot{x} = 0$, G – прамавугольнік віду $t_1 < t < t_2$, $x_1 < x < x_2$. Калі ж $\lim_{t \rightarrow t_+} y(t)$ не існуе, паводзіны інтэгральнай крывой паблізу граніцы Γ носяць больш складаны характар. Так, напрыклад, функцыя $x = \sin \frac{1}{t}$ задавальняе ўраўненню $\dot{x} = -t^{-2} \cos \frac{1}{t}$ у абсягу $G = \{(t, x) : t < 0, -1 \leq x \leq 1\}$. Умовы тэарэмы 2 выкананы. Ліміт $\lim_{t \rightarrow -0} x(t)$ не існуе, а мноства лімітавых пунктаў інтэгральнай крывой запаўняе адрэзак $t = 0, -1 \leq x \leq 1$, што ляжыць на граніцы Γ . Можа яшчэ сустрэцца магчымасць, калі $\lim_{t \rightarrow t_+} y(t) = \infty$. Так, для ўраўнення $\dot{x} = x^2$ рашэнне задачы Кашы $x(t_0) = x_0$ пры $x_0 \neq 0$ мае выгляд $x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0(t - t_0)}$. Калі $x_0 > 0$, то гэтае рашэнне ператвараецца ў бясконцасць пры $t = t_0 + \frac{1}{x_0}$.

На падставе ўсяго сказанага вышэй лагічна сфармуляваць наступнае

Сцвярджэнне 1. Для таго, каб рашэнне $x = \varphi(t)$, вызначанае на інтэрвале $\Delta = (a; b) \subset I$ сістэмы (12), было доўжаным управа, неабходна і дастаткова, каб існаваў ліміт $\lim_{t \rightarrow b-0} \varphi(t) = \delta$ і пры гэтым $(b, \delta) \in G$.

Заўважым, што з прыведзенага вышэй азначэння працягу рашэння вынікае, што рашэнне φ , вызначанае на $\Delta = (a; b) \subset I$, будзе доўжаным управа, за пункт b , калі існуе рашэнне ψ , вызначанае на $\Delta_1 = (a; b_1) \subset I$, $b_1 > b$, звужэнне якога на $(a; b)$ супадае з φ .

Рашэнне будзем называць нядоўжаным, калі любы яго працяг супадае з ім самім.

Прывядзём некаторыя ўласцівасці нядоўжаных рашэнняў, чым пакажам, што кожнае рашэнне можа быць падоўжана да рашэння, далей нядоўжанага, і ў гэтым сэнсе нядоўжаныя рашэнні вычэрпваюць сукупнасць усіх рашэнняў.

Тэарэма 3. 1) Існуе нядоўжанае рашэнне сістэмы (12) з адвольнымі пачатковымі значэннямі з G .

2) Калі некаторае нядоўжанае рашэнне сістэмы (12) супадае з некаторым іншым рашэннем гэтай сістэмы хоць пры адным значэнні t , то яно з'яўляецца працягам гэтага рашэння.

3) Калі два нядоўжаныя рашэнні сістэмы (12) супадаюць паміж сабой хоць пры адным значэнні t , то яны поўнасцю супадаюць, гэта значыць маюць адзін і той жа інтэрвал вызначэння і роўныя на ім.

Тэарэма 4. Няхай $I = R$, $\varphi(t)$ – нядоўжанае рашэнне і Δ – яго абсяг вызначэння. Калі існуе такое кампактнае мноства $K \subset D$, што $\varphi(t) \in K$ для $t \in \Delta$, то $\Delta = R$, гэта значыць $\varphi(t)$ неабмежавана доўжанае.

З тэарэмы 4 высвятляецца наступная прычына, якая перашкаджае неабмежаванай доўжанасці (або доўжанасці на I) рашэння $\varphi(t)$: існуе такі канечны момант часу $\tau \in I$, што калі t імкнецца да τ справа або злева, то пункт $\varphi(t)$ пакідае любое кампактнае мноства, якое змяшчаецца ў D ; інакш кажучы, пры $t \rightarrow \tau$ вектар $\varphi(t)$ неабмежавана набліжаецца да мяжы $Fr(D)$ абсягу D , у прыватнасці, калі $D = R^n$, то $|\varphi(t)| \rightarrow \infty$ пры $t \rightarrow \tau$. Такім чынам, калі абсяг вызначэння Δ нядоўжанага рашэння $\varphi(t)$ не супадае з I , то выконваецца адна з наступных умоў:

$$\begin{aligned} \sup |\varphi(t)| &= \infty, \\ \inf_{t \in \Delta} d(\varphi(t), Fr(D)) &= 0, \end{aligned} \tag{19}$$

дзе $d(v, M) = \inf_{x \in M} |v - x|$ – адлегласць ад пункта v да мноства M .

Прыклад 1. Разгледзім рашэнне ўраўнення $\dot{x} = 1 + x^2$ пры пачатковых умовах $x(0) = 0$.

Інтэгруючы яго, атрымаем $\operatorname{arctg} x = t + C \left(-\frac{\pi}{2} < t + C < \frac{\pi}{2} \right)$.

Шуканае рашэнне пастаўленай задачы Кашы мае від $x = \operatorname{tg} t \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \right)$ і, відавочна, дзве асімптоты $t = -\frac{\pi}{2}$ і $t = \frac{\pi}{2}$. Гэтае рашэнне будзе нядоўжаным лявей пункта $t = -\frac{\pi}{2}$ і правей пункта

$$t = \frac{\pi}{2}.$$

Тэарэма 4 дае таксама і дастатковыя ўмовы неабмежаванай доўжанасці, якія, аднак, не з'яўляюцца эфектыўнымі, паколькі фармулююцца ў тэрмінах, наогул кажучы, невядомага нам рашэння. Таму ўзнікае задача знаходжання ўмоў неабмежаванай доўжанасці, якія выражаны непасрэдна праз правую частку $f(t, x)$ ураўнення (12).

Няхай $I = R$, $D = R^n$ і $\Phi(s)$ непарыўная функцыя, вызначаная для неадмоўных сапраўдных s , якая прымае дадатныя сапраўдныя значэнні і задавальняе ўмове

$$\int_0^{\infty} \frac{ds}{\Phi(s)} = \infty.$$

Тэарэма 5. Калі для ўсіх $(t, x) \in R \times R^n$ выконваецца няроўнасць

$$|f(t, x)| \leq \Phi(|x|), \quad (21)$$

то кожнае рашэнне ўраўнення (12) неабмежавана доўжанае.

Заўвага. Ясна, што тэарэма 5 мае месца, калі няроўнасць (21)

выконваецца толькі для вялікіх $|x|$. Таму, у якасці функцыі $\Phi(s)$ можна ўзяць $c \cdot s$, $c \cdot s \cdot \ln s$, $c \cdot s \cdot \ln(\ln s)$, ..., дзе $c = \text{const} > 0$.

§ 5. Непарыўная залежнасць рашэнняў ад пачатковых дадзеных і параметраў

Разгледзім пытанне аб характары залежнасці рашэнняў дыферэнцыяльных ураўненняў ад пачатковых дадзеных і параметраў. І пачатковыя дадзеныя, і параметры ў задачах прыкладнога характару знаходзяцца вымярэннем, за дакладнасць якога нельга паручыцца. Таму важна быць упэўненым у тым, што невялікія хібнасці ў такіх вымярэннях не прывядуць да вялікіх змяненняў рашэння.

Будзем разглядаць нармальную сістэму ўраўненняў

$$\dot{x} = f(t, x, \mu), \quad (22)$$

правая частка якой залежыць ад параметру μ і вызначаецца на некаторым адкрытым мностве $\tilde{G}$ у прасторы зменных (t, x, μ) .

Тэарэма 6. Няхай выконваюцца ўмовы:

1°. функцыя $f(t, x, \mu)$ непарыўная на адкрытым мностве $\tilde{G}$ і задавальняе ўмове Ліпшыца па аргументе x на любым замкнутым абмежаваным мностве, што змяшчаецца ў $\tilde{G}$;

2°. Пункт (t_0, x^0, μ_0) – адвольны з мноства $\tilde{G}$ і $x = \varphi(t, \mu)$ ($\mu_0 - h < \mu < \mu_0 + h$) – сямейства нядоўжаных рашэнняў сістэмы ўраўненняў (22), якія задавальняюць пачатковым умовам $\varphi(t_0, \mu) = x^0$;

3°. пры $\mu = \mu_0$ рашэнне $x = \varphi(t, \mu_0)$ зададзена на інтэрвале $m_1 < t < m_2$ і $[a, b]$ – адвольны адрэзак, які змяшчаецца ў інтэрвале (m_1, m_2) .

Тады існуе такі лік $\sigma > 0$, што пры $|\mu - \mu_0| < \sigma$ рашэнні $x = \varphi(t, \mu)$ вызначаны пры $a \leq t \leq b$ і для любога $\varepsilon > 0$ знойдзецца

такі лік δ ($0 < \delta \leq \sigma$), што пры $|\mu - \mu_0| < \delta$ будзе выконвацца няроўнасць $|\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu_0)| < \varepsilon$ для ўсіх $t \in [a; b]$, гэта значыць функцыя $\varphi(t, \mu)$ непарыўная па μ у пункце $\mu = \mu_0$, прытым раўнамерна адносна t на адрэзку $[a; b]$.

З гэтай тэарэмы вынікае, што функцыя $\varphi(t, \mu)$ будзе непарыўнай на мностве $a \leq t \leq b$, $|\mu - \mu_0| < \sigma$ па сукупнасці зменных (t, μ) .

Спраўды, няхай (t_1, μ_1) — адвольны пункт з гэтага мноства.

Тады

$$|\varphi(t, \mu) - \varphi(t_1, \mu_1)| \leq |\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu_1)| + |\varphi(t, \mu_1) - \varphi(t_1, \mu_1)|$$

(гл. доказ тэарэмы 4.6, формулу (49)).

У сілу тэарэмы 6 для любога $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ знойдзецца такі лік $\delta > 0$, што

$$|\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu_1)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ пры } |\mu - \mu_1| < \delta, \quad a \leq t \leq b.$$

З непарыўнасці функцыі $\varphi(t, \mu_1)$ вынікае, што для любога $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ знойдзецца такі $\delta_1 > 0$, што пры $|t - t_1| < \delta_1$ будзе выконвацца

$$|\varphi(t, \mu_1) - \varphi(t_1, \mu_1)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

З атрыманых няроўнасцяў вынікае, што пры $|t - t_1| < \delta_1$ і $|\mu - \mu_1| < \delta$ маем

$$|\varphi(t, \mu) - \varphi(t_1, \mu_1)| < \varepsilon,$$

а гэта і азначае, што функцыя $\varphi(t, \mu)$ непарыўная ў пункце (t_1, μ_1) .

Тэарэму 6 можна абагуліць і на выпадак, калі правая частка сістэмы ўраўненняў (22) залежыць ад некалькіх параметраў.

Пытанне аб залежнасці рашэнняў задачы Кашы ад пачатковых дадзеных прыводзіцца да даследавання залежнасці рашэння некаторай сістэмы ўраўненняў ад параметраў, што ўваходзяць у яе правую частку. Сапраўды, разгледзім сістэму ўраўненняў

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (23)$$

пры пачатковых умовах $x(t_0) = x^0$.

Няхай

$$x = \varphi(t, t_0, x^0) \quad (24)$$

нядоўжанае рашэнне ўказанай задачы Кашы, якое задавальняе пачатковым умовам

$$\varphi(t_0, t_0, x^0) = x^0. \quad (25)$$

З дапамогай замены незалежнай зменнай $\tilde{t} = t - t_0$ і невядомай функцыі

$$\tilde{x}(\tilde{t}, t_0, x^0) = x(\tilde{t} + t_0) - x^0 \quad (26)$$

атрымаем

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = \dot{x}(\tilde{t} + t_0) = f(\tilde{t} + t_0, x(\tilde{t} + t_0)) = f(\tilde{t} + t_0, \tilde{x}(\tilde{t}) + x^0).$$

Калі ў якасці $x(t)$ узяць рашэнне (24) сістэмы ўраўненняў (23), якое задавальняе пачатковым умовам (25), тады адпаведная функцыя (26) будзе рашэннем сістэмы ўраўненняў

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = f(\tilde{t} + t_0, \tilde{x} + x^0), \quad (27)$$

якое задавальняе пачатковым умовам

$$\tilde{x}(0, t_0, x^0) = 0, \quad (28)$$

паколькі ў сілу (25) $\tilde{x}(0, t_0, x^0) = \varphi(t_0, t_0, x^0) - x^0 = 0$.

Такім чынам, даследаванне залежнасці рашэння сістэмы ўраўненняў (23) ад пачатковых дадзеных (t_0, x^0) прыводзіцца да

даследавання залежнасці рашэння задачы Кашы (27), (28) ад параметраў t_0, x^0 .

Таму мае месца

Тэарэма 7. Няхай выконваюцца ўмовы:

1°. Правая частка $f(t, x)$ сістэмы ўраўненняў (23) непарыўная на адкрытым мностве G прасторы зменных (t, x) і задавальняе ўмове Ліпшыца па аргументе x на любым замкнутым абмежаваным мностве, якое змяшчаецца ў G ;

2°. Пункт $(\bar{t}_0, \bar{x}^0)$ – адвольны з мноства G і $x = \varphi(t, t_0, x^0)$ – сямейства нядоўжанах рашэнняў сістэмы ўраўненняў (23), якія задавальняюць пачатковай умове $\varphi(t_0, t_0, x^0) = x^0$.

3°. Пры $t_0 = \bar{t}_0, x^0 = \bar{x}^0$ рашэнне $x = \varphi(t, \bar{t}_0, \bar{x}^0)$ зададзена на інтэрвале $m_1 < t < m_2$ і $[a; b]$ – адвольны адрэзак, які змяшчаецца ў $(m_1; m_2)$.

Тады існуе такі лік $\sigma > 0$, што пры $|t_0 - \bar{t}_0| < \sigma$, $|x^0 - \bar{x}^0| < \sigma$ рашэнні $x = \varphi(t, t_0, x^0)$ вызначаны пры $a \leq t \leq b$, і для любога $\varepsilon > 0$ знайдзецца такі δ ($0 < \delta \leq \sigma$), што пры $|t_0 - \bar{t}_0| < \delta$, $|x^0 - \bar{x}^0| < \delta$ будзе выконвацца няроўнасць

$$|\varphi(t, t_0, x^0) - \varphi(t, \bar{t}_0, \bar{x}^0)| < \varepsilon$$

для ўсіх $t \in [a; b]$, гэта значыць функцыя $\varphi(t, t_0, x^0)$ будзе непарыўнай па t_0 і x^0 у пункце $t_0 = \bar{t}_0$, $x^0 = \bar{x}^0$, прычым раўнамерна адносна t на адрэзку $[a; b]$.

Аналагічна можна паказаць, што з тэарэмы 7 вынікае непарыўнасць функцыі $\varphi(t, t_0, x^0)$ на мностве $a \leq t \leq b$, $|t_0 - \bar{t}_0| < \sigma$, $|x^0 - \bar{x}^0| < \sigma$ па сукупнасці зменных (t, t_0, x^0) .

Прыклад 1. Разгледзім лінейную сістэму $\dot{x} = y, \dot{y} = -2x - 2y$.

Агульнае рашэнне гэтай сістэмы мае выгляд (гл. § 3.2)

$$x = e^{-t} (x_0 \cos t + (x_0 + y_0) \sin t),$$

$$y = e^{-t} (y_0 \cos t - (2x_0 + y_0) \sin t),$$

дзе адвольныя пастаянныя x_0 і y_0 ёсць пачатковыя значэнні шуканых функцый пры $t = 0$. Зададзім пачатковыя ўмовы $x(0) = 0$, $y(0) = 1$. Частковае рашэнне ў гэтым выпадку запішацца ў выглядзе $x = e^{-t} \sin t$, $y = e^{-t} (\cos t - \sin t)$. Зменім цяпер пачатковыя значэнні шуканых функцый $\bar{x}_0 = x_0 + \delta = \delta$, $\bar{y}_0 = y_0 + \delta = 1 + \delta$ пры тым жа значэнні аргумента $t = 0$. Рашэнне ў гэтым выпадку будзе мець выгляд

$$\bar{x} = e^{-t} (\delta \cos t + (1 + 2\delta) \sin t),$$

$$\bar{y} = e^{-t} ((1 + \delta) \cos t - (1 + 3\delta) \sin t).$$

З рознасці гэтых рашэнняў $\bar{x} - x = e^{-t} (\delta \cos t + 2\delta \sin t)$, $\bar{y} - y = e^{-t} (\delta \cos t - 3\delta \sin t)$ відаць, што для ўсіх $t \geq 0$ змяненні рашэнняў будуць дастаткова малымі пры дастаткова малых змяненнях пачатковых значэнняў шуканых функцый. Адзначым, што акрамя гэтага $\lim_{t \rightarrow +\infty} (\bar{x} - x) = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} (\bar{y} - y) = 0$ пры любым δ , гэта значыць, што ўсе рашэнні са змененымі пачатковымі дадзенымі шуканых функцый асімптатычна набліжаюцца да частковага рашэння x, y пры $t \rightarrow +\infty$.

§ 6. Дыферэнцавальнасць рашэнняў па пачатковых дадзеных і параметрах

Як і ў папярэднім параграфі, спачатку будзем разглядаць дыферэнцавальнасць рашэнняў па параметрах, а затым на аснове атрыманых вынікаў даследуем пытанне дыферэнцавальнасці рашэнняў па пачатковых дадзеных.

Тэарэма 8. Няхай у сістэме (22) функцыі $f(t, x, \mu)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(t, x, \mu) (j = \overline{1, n}), \frac{\partial f}{\partial \mu}(t, x, \mu) — непарыўныя на мностве $\tilde{G}$.$$

Няхай $x = \varphi(t, \mu)$ — рашэнні сістэмы (22), якія задавальняюць пачатковым умовам $\varphi(t_0, \mu) = x^0$ і вызначаюцца пры $a \leq t \leq b$, $|\mu - \mu_0| < \sigma$. Тады функцыя $\varphi(t, \mu)$ разам са сваёй частковай

вытворнай $\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}(t, \mu)$ — непарыўная пры тых жа значэннях t і μ .

Заўважым, што, калі ў тэарэме 8 патрабаваць непарыўнасць усіх мяшаных вытворных

$$\frac{\partial^m f}{(\partial x_1)^{q_1} \dots (\partial x_n)^{q_n} (\partial \mu)^p} (q_1 + \dots + q_n + p = m \leq k)$$

функцыі $f(t, x, \mu)$ па ўсіх x_j ($j = \overline{1, n}$) і μ да k -га парадку ўключна, тады рашэнне $x = \varphi(t, \mu)$ мае k непарыўных вытворных па зменнаму μ у прававугольніку $a \leq t \leq b$, $|\mu - \mu_0| < \sigma$ і, значыць, раскладваецца па ступенях малога параметру μ па формуле Тэйлара

$$\varphi(t, \mu) = \psi_0(t) + \mu \psi_1(t) + \dots + \mu^k \psi_k(t) + o(\mu^k).$$

Каб знайсці функцыі $\psi_l(t)$ ($l = \overline{0, k}$), неабходна апошняе раскладанне падставіць у сістэму ўраўненняў (22) і, папярэдне расклаўшы правую частку па ступенях малога параметру, параўнаць каэфіцыенты пры аднолькавых ступенях μ . З атрыманай у выніку такіх аперацый сістэмы паслядоўна знаходзім $\psi_0(t), \psi_1(t), \dots, \psi_k(t)$.

У сілу таго, што

$$x^0 = \psi_0(t_0) + \mu \psi_1(t_0) + \dots + \mu^k \psi_k(t_0) + o(\mu^k),$$

пачатковыя ўмовы ў разглядаемым выпадку маюць від

$$\psi_0(t_0) = x^0, \psi_1(t_0) = 0, \dots, \psi_k(t_0) = 0.$$

Прыклад 1. Раскласці па ступенях параметра μ рашэнне ўраўнення

$$\dot{x} = x^2 + 2\mu t^{-1}, \quad G = \{(t, x): t > 0, |x| < \infty\} \quad (29)$$

пры пачатковай умове

$$\varphi(1, \mu) = -1. \quad (30)$$

Рашэнне. Згодна са сказаным вышэй, пры непарыўнасці вытворнай па x рашэнне будзе мець непарыўныя вытворныя па μ да парадку k , а гэта значыць, што яно раскладаецца па ступенях параметра μ па формуле Тэйлара

$$x(t) = \psi_0(t) + \mu \psi_1(t) + \mu^2 \psi_2(t) + \dots + \mu^k \psi_k(t) + o(\mu^k).$$

Падставіўшы гэтае раскладанне ва ўраўненне (29), папярэдне знайшоўшы $\dot{x}(t)$ і параўноўваючы каэфіцыенты пры аднолькавых ступенях μ злева і справа, атрымліваем наступную сістэму для знаходжання $\psi_l(t)$:

$$\dot{\psi}_0 = \psi_0^2, \quad \psi_0(1) = -1,$$

$$\dot{\psi}_1 = 2\psi_0\psi_1 + 2t^{-1}, \quad \psi_1(1) = 0,$$

$$\dot{\psi}_2 = 2\psi_0\psi_2 + \psi_1^2, \quad \psi_2(1) = 0,$$

.....

З улікам пачатковай умовы з першага ўраўнення атрымліваем $\psi_0(t) = -t^{-1}$. Падстаўляючы $\psi_0(t)$ у другое ўраўненне, будзем мець $\dot{\psi}_1 = -2t^{-1}\psi_1 + 2t^{-1}$, $\psi_1(1) = 0$. Адкуль $\psi_1(t) = 1 - t^2$. Пасля падстаноўкі ψ_0 і ψ_1 у трэцяе ўраўненне атрымаем $\dot{\psi}_2 = -2t^{-1}\psi_2 + (1 - t^2)^2$, $\psi_2(1) = 0$ – задачу Кашы для лінейнага ўраўнення першага парадку (гл. § 1.6). Рашэннем гэтай задачы будзе функцыя $\psi_2(t) = \frac{t}{3} - \frac{2}{t} + \frac{8}{3t^2} - \frac{1}{t^3}$. Такім чынам, рашэнне задачы (29), (30) мае выгляд

$$x(t) = -\frac{I}{t} + \mu \left(I - \frac{I}{t^2} \right) + \mu^2 \left(\frac{t}{3} - \frac{2}{t} + \frac{8}{3t^2} - \frac{I}{t^3} \right) + o(\mu^2).$$

Гэтае раскладанне можна прадоўжыць тым жа спосабам.

Разгледзім сістэму ўраўненняў (22). Няхай $x = \varphi(t, \mu)$ – нядоўжанае яе рашэнне, якое задавальняе пачатковым умовам $\varphi(t_0, \mu) = x^0$. Выберам некаторае значэнне параметра $\mu = \mu_0$.

Пакажам, што вытворную $\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}(t, \mu_0)$ можна знайсці з дапамогай рашэння задачы Кашы для некаторай сістэмы лінейных дыферэнцыяльных ураўненняў.

Сапраўды, дыферэнцуючы тоеснасць $\dot{\varphi}(t, \mu) = f(t, \varphi(t, \mu), \mu)$ па параметры μ , пры $\mu = \mu_0$ атрымаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}(t, \mu_0) \right) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(t, \varphi(t, \mu_0), \mu_0) \frac{\partial \varphi_j}{\partial \mu}(t, \mu_0) + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial \mu}(t, \varphi(t, \mu_0), \mu_0). \end{aligned}$$

З апошняй роўнасці вынікае, што вытворная $\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}(t, \mu_0)$ задавальняе сістэме лінейных ураўненняў

$$\dot{y} = A(t)y + b(t), \quad (31)$$

$$\text{дзе } A(t) = \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(t, \varphi(t, \mu_0), \mu_0) \right), \quad b(t) = \frac{\partial f}{\partial \mu}(t, \varphi(t, \mu_0), \mu_0).$$

Акрамя таго, паколькі $\varphi(t_0, \mu) = x^0$, маем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}(t_0, \mu_0) = \frac{\partial}{\partial \mu}(\varphi(t_0, \mu)) \Big|_{\mu=\mu_0} = \frac{\partial x^0}{\partial \mu} = 0.$$

Такім чынам, для знаходжання вытворнай $\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}(t, \mu_0)$ неабходна ра-

шыць задачу Кашы для ўраўнення (31) з пачатковымі ўмовамі $y(t_0)=0$, а гэта значыць, што няма неабходнасці адшукваць рашэнне $\varphi(t, \mu)$ для зменнай μ і затым дыферэнцаваць яго па μ .

Сістэму ўраўненняў (31) называюць сістэмай ураўненняў у варыяцыях для сістэмы (22) пры $\mu = \mu_0$.

Прыклад 2. Знайсці вытворную па параметры ў пункце $\mu = 0$ рашэння $\varphi(t, \mu)$ ураўнення (29) пры ўмове (30).

Рашэнне. Ураўненне ў варыяцыях (31) будзе мець выгляд $\dot{y} = 2\varphi(t, \mu)y + 2t^{-1}$, дзе $y(t, \mu) = \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}(t, \mu)$, прычым $y(1, \mu) = 0$. Значыць, шуканая функцыя $\psi(t) = y(t, 0)$ з'яўляецца рашэннем ураўнення $\dot{y} = 2\varphi(t, 0)y + 2t^{-1}$, што задавальняе ўмове $\psi(1) = 0$. У сілу таго, што $\varphi(t, 0)$ – рашэнне ўраўнення $\dot{x} = x^2$ з пачатковымі дадзенымі $x(1) = -1$, маем $\varphi(t, 0) = -t^{-1}$. Такім чынам, для таго, каб атрымаць $\psi(t)$, неабходна рашыць дыферэнцыяльнае ўраўненне першага парадку з падзяляльнымі зменнымі (гл. § 1.4)

$$\dot{y} = 2t^{-1}(1 - y).$$

Пры ўказанай вышэй пачатковай умове з апошняга ўраўнення знаходзім $\psi(t) = 1 - t^2$.

Відавочна, што прыведзеная тэарэма 8 абагульняецца на выпадак, калі правая частка сістэмы ўраўненняў (22) залежыць ад некалькіх параметраў.

У сілу разважанняў папярэдняга параграфу, дзе даследаванне залежнасці рашэнняў сістэмы ўраўненняў (23) ад пачатковых дадзеных (t_0, x^0) было прыведзена да даследавання залежнасці рашэння задачы Кашы (27), (28) ад параметраў t_0 і x^0 , сфармулюем тэарэму аб дыферэнцавальнасці па пачатковых дадзеных, аналагічную тэарэме 8.

Тэарэма 9. Няхай функцыі $f(t, x)$ і $\frac{\partial f}{\partial x_j}(t, x)$ ($j = \overline{1, n}$) –

непарыўныя на мностве G прасторы зменных (t, x) . Няхай

$x = \varphi(t, t_0, x^0)$ – рашэнні сістэмы ўраўненняў (23), якія задавальняюць пачатковым умовам $\varphi(t, t_0, x^0) = x^0$ і вызначаюцца пры $a \leq t \leq b$, $|t_0 - \bar{t}_0| < \delta$, $|x^0 - \bar{x}^0| < \sigma$. Тады функцыя $\varphi(t, t_0, x^0)$

разам са сваімі частковымі вытворнымі $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j^0}(j = \overline{1, n})$ будуць

непарыўнымі пры тых жа значэннях (t, t_0, x^0) .

Прыклад 3. Разгледзім аўтаномную сістэму дыферэнцыяльных ураўненняў

$$\dot{x} = f(x). \quad (32)$$

Няхай $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ – пункт раўнавагі гэтай сістэмы, гэта значыць, што $f_i(a) = 0$ і сістэма $x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n$ – рашэнне (32).

Разгледзім рашэнне $\varphi(t, x^0) = colon(\varphi_1(t, x^0), \dots, \varphi_n(t, x^0))$ з пачатковымі дадзенымі $(0, x^0)$. Падлічым вытворныя

$$\frac{\partial}{\partial x_j^0} \varphi_i(t, a) = \psi_i^j(t), \quad (33)$$

карыстаючыся тым жа спосабам, які апісалі вышэй для знаходжання вытворнай па параметры.

Сістэма ўраўненняў у варыяцыях (31) будзе з'яўляцца лінейнай аднароднай сістэмай з пастаяннымі каэфіцыентамі, таму

што $\frac{\partial f_i(a)}{\partial x_j} = a_{ij}$. Маём $\dot{y}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j$, ($i = \overline{1, n}$). Вытворныя (33),

якія з'яўляюцца рашэннямі апошняй сістэмы, могуць быць лёгка знойдзены, у той час як рашэнне $\varphi(t, x^0)$ пры зменнай x^0 знайсці, наогул кажучы, цяжка.

§ 7. Перыядычныя рашэнні квазілінейных сістэм

З дапамогай тэарэм папярэдніх параграфіў аб непарыўнасці і дыферэнцавальнасці рашэнняў па пачатковых дадзеных і параметрах даследуем важнае ў тэарэтычным і прыкладным плане пытанне аб існаванні перыядычных рашэнняў.

Будзем разглядаць сістэмы, якія мала адрозніваюцца ад лінейных, так званыя квазілінейныя сістэмы

$$\dot{x} = Ax + f(t) + \mu F(t, x, \mu). \quad (34)$$

Лічым, што ў (34) $f(t) = \text{colon}(f_1(t), \dots, f_n(t))$ ёсць ω -перыядычная непарыўная функцыя пры $t \in R$, $F(t, x, \mu) = \text{colon}(F_1(t, x, \mu), \dots, F_n(t, x, \mu))$, зададзеная ў абсягу $\tilde{G} = R \times D \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ – функцыя ω -перыядычная і непарыўная па t , непарыўна дыферэнцавальная па x і μ пры кожным $t \in R$ (D – некаторы абсяг у R^n) у абсягу $D \times (-\varepsilon, \varepsilon)$;

$A = \begin{pmatrix} a_{ij}, j = \overline{1, n} \\ i = \overline{1, n} \end{pmatrix}$ – пастаянная матрыца. Лік ε лічым дастаткова малым, таму параметр μ будзем называць малым параметрам.

1°. *Выпадак адсутнасці рэзанансу.*

Дапусцім, што ўласныя лікі λ_j ($j = \overline{1, n}$) матрыцы каэфіцыентаў задавальняюць умове адсутнасці рэзанансу (гл. § 3.6, п. II, вынік з тэарэмы 3.5), гэта значыць

$$\lambda_j \neq \frac{2\pi i}{\omega} k, \quad k \in Z, \quad i = \sqrt{-1}. \quad (35)$$

Згодна з вынікамі тэарэмы 3.5. так званае параджальнае ўраўненне (ураўненне, якое атрымліваецца з (34) пры $\mu = 0$) мае адзінае ω -перыядычнае рашэнне $\bar{x}(t)$.

Тэарэма 10. Сістэма ўраўненняў (34) пры ўказаных умовах мае ω -перыядычнае рашэнне $x(t, \mu)$, непарыўна дыферэнцавальнае

па μ у некаторым наваколлі пункта $\mu = 0$, якое імкнецца пры $\mu \rightarrow 0$ да параджальнага рашэння $\bar{x}(t)$, і гэтае рашэнне $x(t, \mu)$ адзінае.

З гэтай тэарэмы вынікае, што калі карані λ_j характарыстычнага ўраўнення, якое адпавядае ўраўненню

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = f(t) + \mu F(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}, \mu), \quad (36)$$

дзе $a_1, \dots, a_n$ – пастаянныя, $f(t)$ – ω -перыядычная функцыя па t , F – ω -перыядычная і непарыўна дыферэнцавальная па t , задавальняюць умове (35), то гэтае ўраўненне (36) мае ω -перыядычнае рашэнне $x(t, \mu)$ такое, што $x(t, 0) = \bar{x}(t)$, дзе $\bar{x}(t)$ – ω -перыядычнае рашэнне параджальнага ўраўнення $x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = f(t)$, прычым такое рашэнне адзінае. Для знаходжання перыядычнага рашэння параджальнага ўраўнення карыстаюцца раскладаннем $f(t)$ у рад Фур'е (гл. § 2.11).

Прыклад 1. Прыблізна вызначыць перыядычнае рашэнне ўраўнення $\ddot{x} + 2x = \sin t + \mu x^2$.

Рашэнне. Будзем адшукваць рашэнне ў выглядзе

$$x(t, \mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \dots + \mu^n x_n(t) + \dots \quad (37)$$

Знаходзім перыядычнае рашэнне параджальнага ўраўнення $\ddot{x}_0 + 2x_0 = \sin t$. Яно будзе мець выгляд $x_0 = \sin t$. Падстаўляючы рад (37) у дадзенае ўраўненне і параўноўваючы выразы пры μ злева і справа, атрымаем ураўненне $\ddot{x}_1 + 2x_1 = \sin^2 t$. Яго перыядычным

рашэннем будзе функцыя $x_1 = \frac{1}{4} + \frac{\cos 2t}{4}$. Аналагічна знаходзяцца $x_2(t), \dots, x_n(t), \dots$. Перыядычнае рашэнне запішацца ў выглядзе

$$x(t, \mu) = \sin t + \frac{1}{4}(1 + \cos 2t)\mu + \dots$$

²⁰. *Перыядычныя рашэнні пры рэзанансе.*

Разгледзім сістэму (34) пры зробленых у п. 1⁰ дапушчэннях, але не будзем патрабаваць выканання ўмовы (35). У гэтым выпадку

ўласныя лікі матрыцы A разаб'юцца на дзве групы: $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ($0 < m \leq n$), для якіх гэтая ўмова парушаецца, а астатнія (яны могуць і адсутнічаць), для якіх яна выконваецца. Відавочна, $\lambda_1, \dots, \lambda_m$

маюць выгляд $\frac{2\pi i}{\omega} k$, $k \in Z$. Будзем меркаваць у далейшым, што або сярод іх няма кратных, або ім адпавядаюць толькі простыя элементарныя дзельнікі. Сістэму (34) з дапамогай лінейнага неасаблівага пераўтварэння можна пераўтварыць так, каб матрыца A прыняла сапраўдную жарданаву форму: $A = \text{diag}(B, C)$, прычым матрыцы B адпавядаюць уласныя лікі першай групы, а матрыцы C – уласныя лікі другой (гл. § 3.2, п. 3⁰). У выніку гэтага сістэма прыме від

$$\begin{aligned}\dot{y} &= By + f_1(t) + \mu F_1(t, y, z, \mu), \\ \dot{z} &= Cz + f_2(t) + \mu F_2(t, y, z, \mu),\end{aligned}\quad (38)$$

дзе f_1, f_2 – ω -перыядычныя функцыі, а F_1 і F_2 задавальняюць тым жа ўмовам, што і F у (34).

Разгледзім параджальную сістэму

$$\dot{y} = By + f_1(t), \quad \dot{z} = Cz + f_2(t). \quad (39)$$

Будзем шукаць яе ω -перыядычныя рашэнні. У сілу таго, што для ўласных лікаў матрыцы C умова (35) выконваецца, то другое ўраўненне (39) мае адзінае ω -перыядычнае рашэнне

$$\bar{z}(t) = (E_{n-m} - e^{\omega C})^{-1} \int_{t-\omega}^t e^{(t-\tau)C} f_2(\tau) d\tau, \quad \bar{z}(0) = \bar{z}^0$$

(гл. § 3.4, п. 5⁰). Тут E_k – адзінкавая матрыца памеру $k \times k$.

Першае ўраўненне з-за таго, што $e^{\omega B} = E_m$, мае ω -перыядычныя рашэнні толькі тады, калі выконваецца ўмова (гл. у дадатку доказ тэарэмы 3.5, формула (30))

$$\int_0^{\omega} e^{-tB} f_1(t) dt = 0. \quad (40)$$

Пры гэтай умове ўсе рашэнні $\bar{y}(t, y^0), \bar{y}(0, y^0) = y^0$ першага ўраўнення з (39) ω -перыядычныя.

Будзем адшукваць пры выкананні (40) ω -перыядычнае рашэнне сістэмы (38) $y(t, y^0, z^0, \mu), z(t, y^0, z^0, \mu)$ з пачатковымі дадзенымі y^0, z^0 пры $t = 0$, якое пры $\mu = 0$ ператвараецца ў параджальнае рашэнне $\bar{y}(t, y^0), \bar{z}(t)$.

У сілу тэарэмы 6 рашэнне $y(t, y^0, z^0, \mu), z(t, y^0, z^0, \mu)$ вызначаецца пры $t \in [0, \omega]$, калі велічыні $|\mu|, \|z^0 - \bar{z}^0\|$ дастаткова малыя. Неабходнай і дастатковай умовай ω -перыядычнасці рашэння $y(t, y^0, z^0, \mu), z(t, y^0, z^0, \mu)$ з'яўляецца выкананне роўнасцяў (гл. доказ тэарэмы 3.12, формулы (28)–(30)):

$$0 = Y(y^0, z^0, \mu) = \int_0^\omega e^{-tB} F_1(t, y(t, y^0, z^0, \mu), z(t, y^0, z^0, \mu)) dt, \quad (41)$$

$$0 = Z(y^0, z^0, \mu) = (e^{\omega C} - E_{n-m})z^0 + \int_0^\omega e^{(\omega-t)C} [f_2(t) + \mu F_2(t, y(t, y^0, z^0, \mu), z(t, y^0, z^0, \mu))] dt \quad (42)$$

(у (41) улічана (40)).

Мяркуючы ў (41) $\mu = 0$, атрымалі, што $\bar{y}(t, y^0)$ павінна задавальняць ураўненню

$$W(y^0) = \int_0^\omega e^{-tB} F_1(t, \bar{y}(t, y^0), \bar{z}(t), 0) dt = 0. \quad (43)$$

Няхай $W(\bar{y}^0) = 0$. Функцыі Y, Z ператвараюцца ў нуль у пункце $(\bar{y}^0, \bar{z}^0, 0)$ і згодна з тэарэмай 9 будуць непарыўна дыферэнцавальнымі ў наваколлі гэтага пункта. Якаб'ян гэтых функцый (гл. [20], глава V, § 41, п. 41.3, с. 209) па зменных y^0, z^0 ва ўказаным пункце роўны

$$\det \frac{\partial W}{\partial y^0}(\bar{y}^0) \det(e^{\omega C} - E_{n-m}).$$

Другі множнік у гэтым выразе не роўны нулю ў сілу ўласцівасці матрыцы C . Значыць, калі выконваецца ўмова

$$\det \frac{\partial W}{\partial y^0}(\bar{y}^0) \neq 0, \quad (44)$$

то па тэарэме аб няяўнай функцыі (гл. там жа, с. 211) існуе адзінае рашэнне $y^0(\mu), z^0(\mu)$ сістэмы (41), (42), такое, што $y^0(0) = \bar{y}^0$, $z^0(0) = \bar{z}^0$. Пры гэтым атрыманае рашэнне непарыўна дыферэнцавальнае па μ пры дастаткова малых $|\mu|$.

Абагульняючы ўсё сказанае вышэй, сфармулюем умовы існавання ω -перыядычнага рашэння ў рэзанансным выпадку.

Калі выканана ўмова (40), $\bar{y}^0$ задавальняе ўраўненню (43) і мае месца (44), то сістэма (38) мае ω -перыядычнае рашэнне $y(t, \mu), z(t, \mu)$, вызначанае і непарыўна дыферэнцавальнае па μ у некаторым наваколлі пункта $\mu = 0$ і роўнае пры $\mu = 0$ параджальнаму рашэнню $\bar{y}(t, y^0), \bar{z}(t)$. Такое рашэнне адзінае.

Да ўраўнення (42), якое вызначае няяўную функцыю $z^0 = z^0(y^0, \mu)$, $\bar{z}^0 = z^0(\bar{y}^0, 0)$, можна прымяніць тэарэму аб няяўнай функцыі і ў тым выпадку, калі $\det \frac{\partial W}{\partial y^0}(\bar{y}^0) \neq 0$. Тады (41) прымае выгляд

$$V(y^0, \mu) = Y(y^0, z^0(y^0, \mu)) = 0.$$

Апошняе ўраўненне выконваецца пры $y^0 = \bar{y}$, $\mu = 0$. Відавочна, $V(y^0, 0) = W(y^0)$.

Ураўненне $W(y^0) = 0$ вызначае пачатковыя значэнні $\bar{y}$ параджальных рашэнняў, а ўраўненне $V(y^0, \mu) = 0$ – залежнасць па-

між y^0 і параметрам μ для ω -перяядычнага рашэння сістэмы (38),
якое адпавядае параджальнаму рашэнню $\bar{y}(t, \bar{y}^0), \bar{z}(t)$. Гэтае ўраў-
ненне называюць біфуркацыйным ураўненнем (ураўненнем галіна-
вання), таму што кожнай непарыўнай галіне $y^0(\mu), y^0(0) = \bar{y}$
рашэння гэтага ўраўнення адпавядае ω -перяядычнае рашэнне сіс-
тэмы (38), якое імкнецца пры $\mu \rightarrow 0$ да параджальнага рашэння.

3⁰. *Аўтаномныя квазілінейныя сістэмы.*

Разгледзім аўтаномную сістэму

$$\dot{x} = Ax + f + \mu F(x, \mu), \quad (45)$$

дзе f, F задавальняюць тым жа ўмовам, што і ў (34), але не зале-
жаць ад t , у прыватнасці, f – пастаянны вектар.

У сілу таго, што аўтаномную сістэму можна разглядаць як
перяядычную па t з адвольным перыядам, узнікае пытанне вызна-
чэння перыяду рашэння.

Будзем адшукваць адразу перяядычнае рашэнне параджаль-
нага ўраўнення

$$\dot{x} = Ax + f. \quad (46)$$

Калі $\det A \neq 0$, ураўненне (46) будзе мець рашэнне $x = \tilde{x} = A^{-1}f$.

Прычым агульнае рашэнне мае выгляд $x = e^{tA}x^0 + A^{-1}f$. Яно будзе
змяшчаць перяядычныя рашэнні (не роўныя $\tilde{x}$) толькі пры наяўнас-
ці ў A чыста ўяўных уласных лікаў. Кожнай пары $\pm \alpha i$ такіх
уласных лікаў адпавядаюць перяядычныя рашэнні з перыядам $\frac{2\pi}{\beta}$.

Значыць, неабходна адшукваць перяядычныя рашэнні з перыядам
 $\omega(\mu)$, для якога $\omega(0) = \frac{2\pi}{\beta}$.

Мяркуючы $\omega = \frac{2\pi}{\beta}(1 + \mu\alpha)$, выканаем замену незалежнай
зменнай па формуле $t = (1 + \mu\alpha)\tau$. Ад (45) прыйдзем да сістэмы

$$\frac{dx}{d\tau} = (1 + \mu\alpha)(Ax + f + \mu F)$$

або

$$\frac{dx}{d\tau} = Ax + f + \mu F_1(x, \mu, \alpha). \quad (47)$$

Цяпер ужо будзем адшукваць перыядычныя рашэнні (47) з означаным перыядам $\frac{2\pi}{\beta}$. У сілу таго, што мае месца рэзананс, задача прывялася да разгледжанай у п. 2⁰, толькі з той розніцай, што (47) змяшчае дадатковы параметр α . Ён будзе вызначацца, як функцыя μ разам з пачатковым значэннем x^0 перыядычнага рашэння.

Прыклад 2. Знайсці перыядычнае рашэнне ўраўнення

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0,$$

якое з'яўляецца частковым выпадкам ураўнення ван-дэр-Поля.

Рашэнне. З улікам таго, што карані характарыстычнага ўраўнення, якое адпавядае параджальнаму ўраўненню, роўны $\pm i$, а новы час τ звязаны са старым формулай $t = (1 + \mu\alpha)\tau$, зыходнае ўраўненне прымае выгляд

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \mu(1 + \mu\alpha)(x^2 - 1)\frac{dx}{d\tau} + (1 + \mu\alpha)^2 x = 0, \text{ або}$$

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = \mu \left[(1 - x^2) \frac{dx}{d\tau} - 2\alpha(0)x \right] + O(\mu^2),$$

дзе $O(\mu^2)$ – бясконца малая велічыня парадку μ^2 .

Шукаем рашэнне перыяду 2π . У параджальнага ўраўнення любое рашэнне – перыядычнае. Яго можна запісаць у выглядзе $x = A \cos(\varphi_0 + \tau)$. Паколькі ўраўненне аўтаномнае, зрухам τ атрымаем $\varphi_0 = 0$. Запішам ураўненні (43), якія вызначаюць $A, \beta = \alpha(0)$:

$$\int_0^{2\pi} [(1 - A^2 \cos^2 \tau) A \sin \tau + 2 A \beta \cos \tau] \sin \tau d\tau = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} [(1 - A^2 \cos^2 \tau) A \sin \tau + 2 A \beta \cos \tau] \cos \tau d\tau = 0.$$

У выніку інтэгравання атрымаем

$$\frac{A}{2} - \frac{1}{8} A^3 = 0, \quad A\beta = 0.$$

Адкуль, лічачы, што $A \neq 0$, знаходзім $A^2 = 4$, $\beta = 0$. Якабіян апошняй сістэмы роўны $A \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8} A^2 \right)$. Пры $A = 2$, $\beta = 0$ ён ад-
 розніваецца ад нуля. Значыць, ураўненне ван-дэр-Поля мае перыядычнае рашэнне $x(t, \mu)$, для якога $x(t, 0) = 2 \cos t$. Яго перыяд роўны $2\pi + O(\mu^2)$, таму што $\beta = 0$.

§ 8. Аўтаномныя сістэмы і іх уласцівасці

Будзем разглядаць аўтаномныя сістэмы віду

$$\dot{x} = f(x). \quad (48)$$

Дапусцім, што вектарная функцыя $f(x)$ непарыўная на некаторым адкрытым мностве D прасторы зменных $x_1, \dots, x_n$ і задавальняе ўмове Ліпшыца ў любым замкнутым абмежаваным мностве, якое цалкам змяшчаецца ў D . Тады, у сілу тэарэм існавання і адзінасці, для любога сапраўднага ліку t_0 і для любога пункта $x^0 \in D$ будзе існаваць адзінае рашэнне $x = \varphi(t)$ сістэмы ўраўненняў (48) у некаторым наваколлі пункта (t_0, x^0) , якое задавальняе пачатковай умове $\varphi(t_0) = x^0$.

Як было сказана ў § 1, любое рашэнне $x = \varphi(t)$ сістэмы (48) у прасторы зменных $x_1, \dots, x_n$, што называюць фазавай прасторай,

вызначае кривую, якую з зададзеным на ёй параметрам t называюць траекторыяй.

У кожным пункце $x \in D$ вызначаны вектар $f(x)$, гэта значыць, што сістэма (48) вызначае вектарнае поле на мностве D .

Калі $x = \varphi(t)$ – рашэнне сістэмы (48), вызначанае на некаторым інтэрвале $(\alpha; \beta)$ і $\varphi(t_0) = x^0$, $t_0 \in (\alpha; \beta)$, то

$$\dot{\varphi}(t_0) = f(\varphi(t_0)) = f(x^0).$$

Разглядаючы t як час, з апошняга судачынення заключаем, што крывая $x = \varphi(t)$ у мностве D з'яўляецца траекторыяй сістэмы (48) тады і толькі тады, калі ў кожным яе пункце $x^0 = \varphi(t_0)$ скорасць $\dot{\varphi}(t_0)$ роўна значэнню вектарнага поля $f(x)$ у гэтым пункце.

Рашэнне сістэмы (48) валодае наступнымі ўласцівасцямі:

1⁰. Калі $x = \varphi(t)$ – рашэнне сістэмы (48), то пры любой пастаяннай C вектар-функцыя $x = \varphi(t + C)$ таксама з'яўляецца рашэннем гэтай сістэмы.

Сапраўды,

$$\frac{d}{dt} \varphi(t + C) = \dot{\varphi}(t + C) = f(\varphi(t + C)).$$

2⁰. Дзве фазавыя траекторыі або не маюць агульных пунктаў, або супадаюць. Інакш кажучы, калі $x = \varphi^1(t)$ і $x = \varphi^2(t)$ – два рашэнні сістэмы (48) і $\varphi^1(t_1) = \varphi^2(t_2)$, то $\varphi^2(t) = \varphi^1(t + \tau)$, дзе $\tau = t_1 - t_2$.

Пакажам гэта. Функцыя $x = \varphi^1(t + \tau)$, дзе $\tau = t_1 - t_2$ у сілу 1⁰ будзе рашэннем сістэмы (48), а ў сілу роўнасці $\varphi^1(t_1) = \varphi^2(t_2)$ маем $\varphi^1(t_2 + \tau) = \varphi^1(t_1) = \varphi^2(t_2)$. Згодна з тэарэмай 1 рашэнні $x = \varphi^1(t + \tau)$ і $x = \varphi^2(t)$ будуць супадаць, таму што яны задавальняюць аднолькавым пачатковым умовам пры $t = t_2$.

3°. Групавая ўласцівасць: калі $x = \varphi(t, x^0)$ ёсць рашэнне сістэмы (48), якое задавальняе пачатковым дадзеным $x^0 = \varphi(0, x^0)$, тады $\varphi(t, \varphi(s, x^0)) = \varphi(t+s, x^0)$.

Сапраўды, пры $x^1 = \varphi(s, x^0)$ будзем мець $\varphi^1(t) = \varphi(t, x^1)$ – рашэнне (48) і $\varphi^2(t) = \varphi(t+s, x^0)$ таксама рашэнне (48) (гл. 1°). Пры гэтым $\varphi^1(0) = \varphi(0, x^1) = x^1$, $\varphi^2(0) = \varphi(s, x^0) = x^1$. Гэта значыць, што $\varphi^1(t)$ і $\varphi^2(t)$ задавальняюць аднолькавым пачатковым умовам. А ў сілу тэарэмы 1 $\varphi^1(t) = \varphi^2(t)$ або $\varphi(t, \varphi(s, x^0)) = \varphi(s+t, x^0)$.

У § 1 было адзначана, што пункт a называецца становішчам раўнавагі, або пунктам спакою аўтаномнай сістэмы (48), калі $f(a) = 0$.

4°. Калі a – становішча раўнавагі, то вектар-функцыя $x(t) \equiv a$, $-\infty < t < +\infty$ з’яўляецца рашэннем (48).

Сапраўды, $\frac{dx}{dt} = \frac{da}{dt} = 0$; $f(x(t)) = f(a) = 0$. Інакш кажучы, калі a – становішча раўнавагі, то пункт $x = a$ ёсць фазавая траекторыя.

Разгледзім цяпер $x = \varphi(t)$ – рашэнне сістэмы (48), вызначанае пры $-\infty < t < +\infty$ (неабмежавана доўжанае). Калі $\varphi(t+\tau) = \varphi(t)$ пры ўсіх t , лік τ будзем называць перыядам рашэння $x = \varphi(t)$. Пакажам, што мноства ўсіх перыядаў рашэння $x = \varphi(t)$, абазначым яго P , валодае наступнымі ўласцівасцямі:

1. Калі $\tau \in P$, то $-\tau \in P$.

На самай справе, маем $\varphi(t+\tau) = \varphi(t)$. Замяняючы t на $t-\tau$, атрымаем $\varphi(t) = \varphi(t-\tau)$, гэта значыць $-\tau$ ёсць перыяд.

2. Калі $\tau_1 \in P$, $\tau_2 \in P$, то $\tau_1 + \tau_2 \in P$.

Гэта вынікае з роўнасцяў $\varphi(t+\tau_1+\tau_2) = \varphi(t+\tau_1) = \varphi(t)$.

3. P – замкнутае мноства.

Сапраўды, у сілу непарыўнасці $\varphi(t)$ маем

$$\varphi(t + \tau_0) = \varphi\left(t + \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t + \tau_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t) = \varphi(t),$$

дзе $\{\tau_n\}$ – збежная паслядоўнасць і $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \tau_0$. Такім чынам, $\tau_0 \in P$ і, значыць, P – замкнутае мноства (гл. [32], глава V, § 23, п. 5, с. 243).

Мае месца

Тэарэма 11. Няхай траекторыя $x = \varphi(t)$ аўтаномнай сістэмы (48) сама сябе перасякае. Тады рашэнне $\varphi(t)$ можа быць падоўжана на інтэрвал $-\infty < t < +\infty$ і мае месца адна з магчымасцяў:

- 1) $\varphi(t) = a$, гэта значыць рашэнне $\varphi(t)$ з'яўляецца становішчам раўнавагі;
- 2) існуе такі лік $T > 0$, што $\varphi(t + T) = \varphi(t)$ пры ўсіх t , але пры $0 < |t_1 - t_2| < T$ будзе $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$.

Такім чынам, як вынікае з тэарэмы, рашэнне сістэмы можа быць толькі трох тыпаў: пастаянным, тады фазавая траекторыя – пункт; перыядычным — фазавая траекторыя замкнутая (называюць цыклам); непэрыядычным – з траекторыяй без самаперасячэнняў.

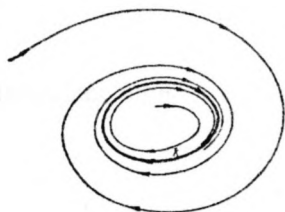
Ізляванае перыядычнае рашэнне сістэмы (48) (а таксама траекторыю K , што апісваецца гэтым рашэннем) будзем называць лімітавым цыклам гэтай сістэмы. Геаметрычна гэта азначае, што ў мностве траекторый, якія праходзяць праз пункты, дастаткова блізкія да K , няма замкнутых (акрамя самой K).

Няхай $x = \varphi(t)$ – лімітавы цыкл сістэмы ўраўненняў (48) і K – замкнутая траекторыя, якая апісваецца гэтым рашэннем.

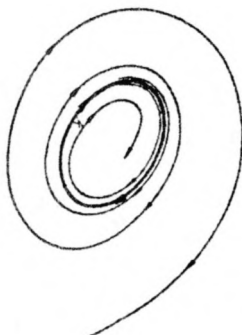
Калі ўсе траекторыі, якія пачынаюцца паблізу ад K як знутры так і звонку, набліжаюцца да K пры $t \rightarrow +\infty$, то лімітавы цыкл называюць устойлівым (мал. 1). Калі траекторыі, што пачынаюцца паблізу да лімітавага цыклу, набліжаюцца да яго пры $t \rightarrow -\infty$ і аддаляюцца ад яго пры $t \rightarrow +\infty$, гэты лімітавы цыкл

называюць няўстойлівым (мал. 2). Калі траекторыі, якія пачынаюцца паблізу лімітавага цыклу, набліжаюцца да яго пры $t \rightarrow +\infty$ (адпаведна пры $t \rightarrow -\infty$) знутры, а пры $t \rightarrow -\infty$ (адпаведна пры $t \rightarrow +\infty$) звонку, такія цыклы называюцца паўустойлівымі (мал. 3).

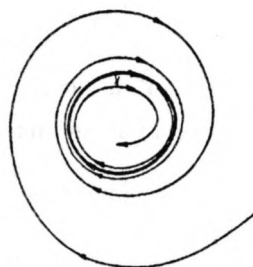
Тэарэтычнае і прыкладное значэнне лімітавых цыклаў прыдае асаблівую важнасць праблеме лакалізацыі і характарыстыцы гэтых траекторый. Аднак пры рашэнні адпаведных задач сустракаюцца цяжкасці, якія звязаны з адсутнасцю агульных аналітычных метадаў пастроення лімітавых цыклаў.



Мал. 1



Мал. 2



Мал. 3

Пры высвятленні пытання існавання лімітавых цыклаў сістэмы ўраўненняў (48) часта карыстаюцца прынцыпам кольца, які быў прапанаваны Пуанкарэ: калі ўдаецца пабудаваць кольца, абмежаванае дзвюма ладкімі крывымі, такое, што на ім няма пунктаў спакою і ўсе траекторыі перасякаюць межы кольца, уваходзячы ў яго, то ўнутры гэтага кольца ёсць, прынамсі, адзін лімітавы цыкл.

На фазавай плоскасці адшукваюць кольца, як наступнае мноства:

$$r_1^2 \leq (x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 \leq r_2^2.$$

Лімітавы цыкл усярэдзіне яго будзе існаваць, калі ўсе рашэнні сістэмы (48), якія пачынаюцца на мяжы гэтага кольца, уваходзяць у сярэдзіну кольца або адначасова выходзяць з яго.

Пры даследаванні ўраўненняў у R^n , $n > 2$ ролю лімітавых

цыклаў адыгрываюць лімітавыя торы і больш складаныя геаметрычныя паверхні.

Задача даследавання лімітавых тораў аналітычнымі сродкамі ўскладняецца. У прыватнасці, у n -мернай прасторы прынцып кольца выкарыстоўваецца эфектыўна толькі ў асобных выпадках.

Больш падрабязна аб лімітавых цыклах гл.[9], глава VII, §§ 53 – 55, с. 218; [26], глава V, § 28, с. 224; [18], глава IV, § 3, с. 139; [33], глава III, § 21, с. 210 і інш.

Прыклад 1. Ці будзе мець лімітавы цыкл сістэма ўраўненняў

$$\frac{dx}{dt} = y - x + x^3, \quad \frac{dy}{dt} = -x - y + y^3 ?$$

Рашэнне. Няхай $colon (x(t), y(t))$ – рашэнне дадзенай сістэмы ўраўненняў. Тады

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x^2(t) + y^2(t)) &= 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 2x(y - x + x^3) + \\ &+ 2y(-x - y + y^3) = -2(x^2 + y^2) + 2(x^4 + y^4). \end{aligned}$$

Калі фазавы пункт $(x(t), y(t))$ знаходзіцца на акружнасці радыуса r , гэта значыць $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, то

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x^2(t) + y^2(t)) &= -2r^2 + 2r^4(\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi) = \\ &= -2r^2(1 - r^2(\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi)). \end{aligned}$$

У сілу таго, што $\frac{1}{2} \leq \cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi \leq 1$, пры $r < 1$ маем

$$\frac{d}{dt}(x^2(t) + y^2(t)) = -2r^2(1 - r^2(\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi)) < -2r^2(1 - r^2) < 0,$$

а пры $r > \sqrt{2}$ атрымаем $\frac{d}{dt}(x^2(t) + y^2(t)) > 0$. Адкуль, у сілу прынцыпу кольца, вынікае, што ў кольцы $1 < x^2 + y^2 < 2$ ёсць лімітавы цыкл, таму што праз акружнасці $x^2 + y^2 = 1$ і $x^2 + y^2 = 2$ рашэнні зыходнай сістэмы выходзяць з гэтага кольца.

Прыклад 2. Даследаваць фазавыя крывыя сістэмы ўраўненняў

$$\frac{dx}{dt} = -x - y + x(x^2 + y^2), \quad \frac{dy}{dt} = x - y + y(x^2 + y^2).$$

Рашэнне. Пяройдзем да палярнай сістэмы каардынат $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Будзем мець

$$\frac{d\rho}{dt} \cos \varphi - \rho \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} = -\rho \cos \varphi - \rho \sin \varphi + \rho^3 \cos \varphi,$$

$$\frac{d\rho}{dt} \sin \varphi + \rho \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} = \rho \cos \varphi - \rho \sin \varphi + \rho^3 \sin \varphi.$$

Вырашыўшы гэтыя ўраўненні адносна $\frac{d\rho}{dt}$ і $\frac{d\varphi}{dt}$, атрымаем

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho(1 - \rho^2), \quad \frac{d\varphi}{dt} = 1. \text{ Такім чынам, ураўненне фазавых крывых}$$

у палярнай сістэме каардынат мае выгляд $\frac{d\rho}{dt} = -\rho(1 - \rho^2)$.

Гэтае ўраўненне паказвае, што ёсць адна замкнутая фазавая крывая $\rho = 1$. Для астатніх фазавых крывых ρ , як функцыя ад φ , узрастае пры $\rho > 1$ і ўбывае пры $0 < \rho < 1$. Таму зыходная сістэма, акрамя становішча раўнавагі $O(0,0)$, мае няўстойлівы лімітавы цыкл – акружнасць адзінкавага радыуса з цэнтрам у пачатку каардынат.

§ 9. Першыя інтэгралы

Разгледзім сістэму ўраўненняў ў нармальнай форме

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad (49)$$

дзе $f_i: G \rightarrow R$, $G \subset R^{n+1}$, $i = \overline{1, n}$.

Будзем меркаваць спачатку, што ў абсягу G выкананы ўмовы тэарэм існавання і адзінасці рашэння. Значыць, калі пункт з

каардынатамі t_0, x^0 належыць абсягу G , то ў наваколлі гэтага пункта існуе адно і толькі адно рашэнне сістэмы (49), якое задавальняе пачатковай умове $x_i = x_i^0$ пры $t = t_0$, $i = \overline{1, n}$. Дапусцім, што гэтае рашэнне мае выгляд

$$x_i = \varphi_i(t, t_0, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0), \quad i = \overline{1, n}. \quad (50)$$

У формулах (50) указана залежнасць рашэння ад пачатковых дадзеных $(t_0, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, якія, як параметры, могуць прымаць розныя значэнні. Прычым, калі выкананы ўмовы тэарэмы 9, то правыя часткі (50) дапускаюць непарыўныя вытворныя па $t_0, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$.

Разгледзім у абсягу G разам з пачатковым пунктам $(t_0, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ і некаторы пункт $(t, x_1, \dots, x_n)$, які ляжыць на інтэгральнай крывой, якая праходзіць праз дадзены пачатковы пункт. Значэнні $t_0, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$, з аднаго боку, і значэнні $t, x_1, \dots, x_n$, з другога боку, звязаны судачыненнямі (50). Калі цяпер прыняць пункт $(t, x_1, \dots, x_n)$ за пачатковы, то, у сілу ўласцівасці адзінасці, інтэгральная крывая, вызначаная гэтымі пачатковымі значэннямі, пройдзе праз пункт $(t_0, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, прычым, відавочна, будучы мець месца судачыненні

$$x_i^0 = \psi_i(t_0, t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n}. \quad (51)$$

Апошнія формулы паказваюць, што сістэма ўраўненняў (50) можа быць адназначна вырашана адносна пачатковых значэнняў $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ у некаторым наваколлі пункта $(t, x_1, \dots, x_n)$ з абсягу G , прычым правыя часткі (51) дапускаюць непарыўныя частковыя вытворныя па $t, x_1, x_2, \dots, x_n$.

Мяняючы пачатковыя значэнні $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ на адвольныя пастаянныя $C_1, C_2, \dots, C_n$ і надаючы параметру t_0 вызначанае лікавае значэнне ў (51), атрымаем сукупнасць роўнасцяў

$$\psi_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = C_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (52)$$

Кожную з роўнасцяў (52) называюць першым інтэгралам сістэмы.

У сілу таго, што прыведзенае азначэнне першага інтэграла прымяняецца да ўсёй сістэмы суадносін (52), дадзім іншае строгае азначэнне, якое характарызуе кожны першы інтэграл паасобку. Далей толькі мяркуем, што пры любых пачатковых умовах $(t_0, x^0) \in G$ сістэма (49) мае рашэнне (не абавязкова адзінае)

$x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t)$, такое, што $x_1(t_0) = x_1^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0$.

Дыферэнцавальная функцыя $\psi(t, x_1, \dots, x_n)$, якая адрозніваецца ад пастаяннай на любым непустым падабсягу абсягу G , называецца першым інтэгралам сістэмы (49), калі яна захоўвае пастаяннае значэнне ўздоўж рашэнняў гэтай сістэмы. Іншымі словамі, для любога рашэння $x_1(t), \dots, x_n(t)$ сістэмы (49)

$$\psi(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \equiv C.$$

Адзначым, што тут тэрміналогія тэорыі дыферэнцыяльных ураўненняў некалькі супярэчлівая. Так, тэрмін «інтэграл» выкарыстоўваюць для абазначэння розных паняццяў. Інтэгралам называюць рашэнне дыферэнцыяльнага ўраўнення. Інтэгралам называюць і агульны інтэграл, а таксама першы інтэграл, хоць у гэтых выпадках гаворка ідзе ўжо не аб адным рашэнні, а аб бясконцых сукупнасцях асобных рашэнняў. Нарэшце, інтэгралам называюць само судачыненне $\psi = C$.

Прыклад 1. Паказаць, што сістэма функцый

$x_1 = \varphi_1(t, C_1, C_2) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}$, $x_2 = \varphi_2(t, C_1, C_2) = 2C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{3t}$ з'яўляецца агульным рашэннем сістэмы ўраўненняў

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_2 - 4x_1.$$

Рашэнне. Абсяг G тут вызначаецца так: $-\infty < t < \infty$, $-\infty < x_1, x_2 < \infty$. Падстаўляючы зададзеныя функцыі x_1 і x_2 у сістэму, атрымліваем з кожнага ўраўнення тоеснасць па t , якая выконваецца пры любых значэннях пастаянных C_1, C_2 . Пакажам цяпер,

што ў абсягу G функцыі $x_1 = \varphi_1(t, C_1, C_2)$, $x_2 = \varphi_2(t, C_1, C_2)$ рашаюць любую задачу Кашы. Адзначым, што для дадзенай сістэмы ўраўненняў умовы тэарэм існавання і адзінасці рашэння задачы Кашы выконваюцца ва ўсім абсягу G . Таму ў якасці пачатковых умоў можна ўзяць любую тройку лікаў t_0, x_1^0, x_2^0 . Для вызначэння C_1, C_2 атрымаем сістэму $x_1^0 = C_1 e^{-t_0} + C_2 e^{3t_0}$, $x_2^0 = 2C_1 e^{-t_0} - 2C_2 e^{3t_0}$. Дэтэрмінант гэтай сістэмы $\Delta = -4e^{2t_0} \neq 0$, гэта значыць, што яна адназначна вырашаецца адносна C_1, C_2 пры любых t_0, x_1^0, x_2^0 . А гэта раўназначна таму, што вырашальнай з'яўляецца любая задача Кашы. Таму сістэма функцый x_1, x_2 – агульнае рашэнне (гл. § 3.1).

Прыклад 2. Паказаць, што функцыя $\psi(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ з'яўляецца першым інтэгралам сістэмы $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -x_1$.

Рашэнне. Вырашыўшы дадзеную лінейную аўтаномную сістэму з дапамогай метада выключэння (гл. § 3.2, п. 1⁰), знаходзім агульнае рашэнне

$$x_1(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \quad x_2(t) = -C_1 \sin t + C_2 \cos t.$$

Вызначым значэнне $\psi(x_1, x_2)$ уздоўж рашэнняў сістэмы:

$$\begin{aligned} \psi(x_1, x_2) &= x_1^2 + x_2^2 = (C_1 \cos t + C_2 \sin t)^2 + \\ &+ (-C_1 \sin t + C_2 \cos t)^2 \equiv C_1^2 + C_2^2 = C. \end{aligned}$$

Таму $\psi(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ з'яўляецца першым інтэгралам разглядаемай сістэмы.

 Мае месца

Тэарэма 12. Функцыя $\psi(t, x_1, \dots, x_n)$ з'яўляецца першым інтэгралам сістэмы (49) тады і толькі тады, калі выконваецца тоеснасць

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} f_1 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} f_n = 0 \quad (53)$$

для ўсіх $(t, x_1, \dots, x_n) \in G$.

Уласціваць першага інтэграла, апісаную роўнасцю (53), можна сфармуляваць так: вытворная першага інтэграла ператвараецца ў нуль у сілу дадзенай сістэмы дыферэнцыяльных ураўненняў.

Прыклад 3. Праверыць, ці з'яўляюцца функцыі $\psi_1 = t^2 + 2xy$; $\psi_2 = x - ty^2$ першымі інтэграламі сістэмы ўраўненняў $\frac{dx}{dt} = -y$, $\frac{dy}{dt} = \frac{y^2 - t}{x}$, у абсягу $G = \{t, x, y: (t, x, y) \in R^3, x \neq 0\}$.

Рашэнне. Кожная з дадзеных функцый ψ_1 і ψ_2 непарыўна дыферэнцавальная. Падлічым вытворныя $\frac{d\psi_1}{dt}$ і $\frac{d\psi_2}{dt}$ у сілу дадзенай сістэмы ўраўненняў

$$\frac{d\psi_1}{dt} = 2t + 2x \frac{dy}{dt} + 2y \frac{dx}{dt} = 2t + 2x \frac{y^2 - t}{x} + 2y(-y) = 0,$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = \frac{dx}{dt} - y^2 - 2ty \frac{dy}{dt} = -y - y^2 - 2ty \frac{y^2 - t}{x} \neq 0.$$

Такім чынам, функцыя $\psi_1 = t^2 + 2xy$ ёсць першы інтэграл зыходнай сістэмы ўраўненняў, а функцыя $\psi_2 = x - ty^2$ першым інтэгралам гэтай сістэмы не з'яўляецца.

Першыя інтэгралы $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m$, $m \leq n$ сістэмы (49) незалежныя на некаторым абсягу $G \subset R^{n+1}$, калі на G ранг матрыцы Якабі роўны m , гэта значыць (гл. [32], глава XVI, § 82, п. 7, с. 776)

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \psi_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \psi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = m.$$

Калі ψ – першы інтэграл сістэмы (49) і h – дыферэнцавальная функцыя без участкаў пастаянства, то кампазіцыя

$$\Phi(t, x_1, \dots, x_n) = h(\psi(t, x_1, \dots, x_n))$$

таксама захоўвае пастаяннае значэнне ўздоўж рашэнняў сістэмы і таму з’яўляецца першым інтэгралам сістэмы. Аналагічна можна пабудаваць першыя інтэгралы $H(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m)$, выкарыстоўваючы сукупнасць першых інтэгралаў $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m$.

Сукупнасць незалежных першых інтэгралаў $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ сістэмы (49) называецца базісам першых інтэгралаў, калі любы першы інтэграл Φ можна падаць у выглядзе $\Phi = H(\psi_1, \dots, \psi_n)$.

Лёгка ўпэўніцца ў тым, што для існавання ў (49) базіса першых інтэгралаў $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$, непарыўна дыферэнцавальных у наваколлі пункта $(t_0, x^0) \in G$, неабходна і дастаткова, каб любая задача Кашы $x(\tau) = \tilde{x}^0$ для сістэмы (49) пры $(\tau, \tilde{x}^0)$, дастаткова блізкіх да (t_0, x^0) , мела ў наваколлі пункта τ адзінае рашэнне, непарыўна дыферэнцавальнае па пачатковых дадзеных. (Больш падрабязна гл. [27], глава V, § 6, п. 2, с. 164; [33], глава III, § 16, с. 177.)

Практыкаванне 1. Даказаць крытэрыі існавання базісу першых інтэгралаў.

Наяўнасць m ($m < n$) незалежных першых інтэгралаў сістэмы (49) дазваляе панізіць яе вымернасць на m адзінак. Аднак нельга ўказаць агульнага спосабу знаходжання першых інтэгралаў. Але патрэбна адзначыць, што ў некаторых выпадках удаецца знайсці першы інтэграл шляхам пераўтварэнняў зададзенай сістэмы, у выніку якіх атрымліваецца лёгка інтэгральнае дыферэнцыяльнае ўраўненне. Усякае такое ўраўненне называюць інтэгральнай камбінацыяй. Кожная інтэгральная камбінацыя параджае першы інтэграл. Аднак сярод іх могуць апынуцца і залежныя. Таму кожны раз пры атрыманні новага першага інтэграла патрэбна праверыць, ці будзе ён незалежным з раней знойдзеным.

Прыклад 4. Праверыць, што функцыі $\psi_1 = tx$, $\psi_2 = ty + x^2$

з'яўляюцца першымі інтэграламі сістэмы $\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{2x^2 - ty}{t^2}$

у абсягу $G = \{t, x, y: (t, x, y) \in R^3, t \neq 0\}$ і ўстанавіць незалежнасць гэтых інтэгралаў.

Рашэнне. Праварым выкананне тоеснасці (53):

$$\frac{d\psi_1}{dt} = t \frac{dx}{dt} + x = -x + x = 0,$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = t \frac{dy}{dt} + y + 2x \frac{dx}{dt} = \frac{2x^2}{t} - y + y - \frac{2x^2}{t} = 0.$$

Згодна з тэарэмай 12 функцыі ψ_1 і ψ_2 будуць першымі інтэграламі дадзенай сістэмы.

Каб вызначыць незалежнасць гэтых інтэгралаў, складзём матрыцу

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 2x & t \end{pmatrix}.$$

Ранг гэтай матрыцы роўны 2, таму інтэгралы ψ_1 і ψ_2 незалежныя.

Прыклад 5. Праінтэграваць сістэму

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{x_2^2}{x_1}, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{x_1^2}{x_2}, \quad x_1 > 0, x_2 > 0.$$

Рашэнне. Падзяліўшы першае ўраўненне на другое, складзём

інтэгральную камбінацыю $\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{x_2^3}{x_1^3}$. Праінтэграваўшы гэтае

ўраўненне, як ураўненне з падзяляльнымі зменнымі, атрымаем агульнае рашэнне $x_2^4 = x_1^4 + C_1$. Таму першы інтэграл сістэмы мае

выгляд $\psi_1 = x_2^4 - x_1^4$. Падставіўшы цяпер у сістэму

$x_2^2 = \sqrt{x_1^4 + C_1}$, панізім яе вымернасць на адзінку і атрымаем

ураўненне з падзяляльнымі зменнымі $\frac{dx_1}{dt} = \frac{\sqrt{x_1^4 + C_1}}{x_1}$, якое мае

агульнае рашэнне $x_1^2 + \sqrt{x_1^4 + C_1} = C_2 e^{2t}$. Значыць,

$\Psi_2 = e^{-2t} (x_1^2 + x_2^2)$. Лёгка праверыць, падлічыўшы ранг матрыцы

Якабі, што сукупнасць першых інтэгралаў $\Psi_1 = x_2^4 - x_1^4$,

$\Psi_2 = e^{-2t} (x_1^2 + x_2^2)$ утварае базіс першых інтэгралаў.

Вырашыўшы функцыянальную сістэму ўраўненняў $x_2^4 - x_1^4 - C_1 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 - C_2 e^{2t} = 0$ адносна x_1 і x_2 , атрымаем агульнае рашэнне сістэмы

$$x_1(t) = \sqrt{\frac{C_2}{2} e^{2t} - \frac{C_1}{2C_2} e^{-2t}}, \quad x_2(t) = \sqrt{\frac{C_2}{2} e^{2t} + \frac{C_1}{2C_2} e^{-2t}}.$$

Для аўтаномнай сістэмы (48) першы інтэграл $\Psi(x_1, \dots, x_n)$ – гэта некаторы закон захоўвання: велічыня $\Psi(x_1, \dots, x_n)$ пры руху пункта ўздоўж фазавай траекторыі (гл. § 8) захоўвае тое ж значэнне, што і ў першапачатковы момант часу. Менавіта з такіх меркаванняў, як законы захавання, і былі атрыманы многія першыя інтэгралы дыферэнцыяльных ураўненняў класічнай механікі.

Прыклад 6. Функцыя Гамільтона $H(x, p)$, дзе $x = colon(x_1, \dots, x_n)$, $p = colon(p_1, \dots, p_n)$, ёсць першы інтэграл гамільтонавай сістэмы

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H(x, p)}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H(x, p)}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Сапраўды,

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial H}{\partial x_i} \right) = 0.$$

Тоеснасць (53) мае месца.

Функцыя Гамільтона – гэта энергія адпаведнай механічнай сістэмы, і той факт, што яна ёсць першы інтэграл, азначае закон захавання энергіі.

Прыклад 7. Аднамерны рух матэрыяльнага пункта масы m у патэнцыяльным полі апісваецца ўраўненнем Ньютана $m\ddot{x} = U'(x)$. Яго першы інтэграл – гэта функцыя $v(x, \dot{x})$, якая з’яўляецца пастаяннай пры $x = \varphi(t)$, $\dot{x} = \dot{\varphi}(t)$, дзе $x = \varphi(t)$ – рашэнне. Памножыўшы абедзве часткі ўраўнення на $\dot{x}$, атрымаем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) \right) = 0,$$

так што

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E,$$

дзе E – пастаянная. Левая частка гэтай роўнасці – першы інтэграл. Яна носіць назву інтэграл энергіі, ён роўны суме кінетычнай энергіі і патэнцыяльнай энергіі.

Напрыканцы дадзім азначэнне агульнага рашэння сістэмы (49) (гл. [33], глава III, § 16, с. 178). Няхай

$$\psi_i(t, x_1, \dots, x_n, C_1, \dots, C_m), \quad i = \overline{1, n}$$

ёсць сукупнасць n сапраўдных функцый, зададзеных у абсягу $\tilde{G} \subset R^{n+m+1}$. Гэтая сукупнасць вызначае на G агульнае рашэнне сістэмы (49), калі пры кожным дапусцімым наборы пастаянных $C_1, \dots, C_m$ сістэма ўраўненняў адносна x_k

$$\psi_i(t, x_1, \dots, x_n, C_1, \dots, C_m) = 0 \quad i = \overline{1, n} \quad (54)$$

вызначае адно або некалькі рашэнняў сістэмы (49). Часам сістэмы (54) вызначаюць пры ўсіх магчымых C_k усе рашэнні (49), але ў агульным выпадку яны даюць толькі частку сямейства рашэнняў сістэмы (49). Калі з дапамогай рашэнняў сістэм (54) можна рашыць любую пачатковую задачу на G , то, дапоўніўшы мноства рашэнняў сістэм (54) асаблівымі і састаўнымі (гл. [33], глава II, § 10, с. 122–123) рашэннямі, атрымаем усе рашэнні сістэмы (49).

§ 10. Метад нормальных формаў у тэорыі аўтаномных сістэм

Разгледзім сістэму віда

$$\dot{x} = f(x), \quad (55)$$

дзе $f(x) = \text{colon}(f_1(x), \dots, f_n(x))$ – вектар-функцыя, вызначаная ў некаторым абсягу V n -мернай камплекснай прасторы C^n для ўсіх $|x| < a_0$, ($V = \{x \in C^n : |x| < a_0\}$).

Будзем меркаваць, што сістэма (55) мае становішча раўнавагі $x = 0$ і што $f(x)$ аналітычная ў абсягу V .

Як вядома, функцыю $f : V \rightarrow C^l$ называюць аналітычнай (або галаморфнай) у абсягу $V \subset C^n$, калі для кожнага пункта $b \in V$ існуе абсяг $P = \{x \in C^n : |x_j - b_j| < r_j, j = \overline{1, n}\}$, $P \subset V$ з цэнтрам у пункце b і ступенны рад

$$\sum_{k_1, \dots, k_n \geq 0} a_{k_1, \dots, k_n} (x_1 - b_1)^{k_1} \dots (x_n - b_n)^{k_n},$$

збежны да функцыі $f(x)$ у кожным пункце (гл. [36], с. 267).

Запішам $f(x)$ у выглядзе

$$f(x) = Ax + X(x), \quad (55')$$

дзе $A = \begin{pmatrix} a_{ij}, & j = \overline{1, n} \\ i = \overline{1, n} \end{pmatrix}$ – матрыца з камплекснымі элементамі,

$X = \text{colon}(X_1, \dots, X_n)$, прычым

$$X_i = \sum_{q_1 + \dots + q_n = 2}^{\infty} X_i^{(q_1, \dots, q_n)} x_1^{q_1} \dots x_n^{q_n}, \quad (56)$$

$$X_i^{(k)} = \sum_{q_1 + \dots + q_n = k}^{\infty} X_i^{(q_1, \dots, q_n)} x_1^{q_1} \dots x_n^{q_n},$$

$i = \overline{1, n}$, q_i – цэлы неадмоўны лік.

Адзначым, што вектарны рад $X(x)$ будзем лічыць збежным, калі можна ўказаць такое наваколле пачатку каардынат, у якім усе каардынатныя рады (56) збягаюцца. Калі ж рад $X(x)$ разбежны, у любым наваколлі пачатку каардынат або аб яго збежнасці нічога не сцвярджаецца, то гэты рад будзем лічыць фармальным і пры яго дыферэнцаванні, падстаноўцы ў іншы рад будзем ставіцца да яго, як да збежнага.

Вектарную функцыю $X^{(k)} = colon(X_1^{(k)}, \dots, X_n^{(k)})$ будзем называць аднародным вектарным паліномам парадку k .

У збежнай сістэме (55) з дадзенай правай часткай выканаем замену зменных

$$x = y + \varphi(y), \quad (57)$$

дзе $\varphi(y)$ – збежны рад. Дапусцім, што гэтая замена прывядзе да сістэмы

$$\dot{y} = Ay + Y(y). \quad (58)$$

Дыферэнцуючы (57) па t і лічачы x і y адпаведна рашэннямі сістэм (55) і (58), атрымаем судачыненне

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} Ay - A\varphi = X(y + \varphi) - \frac{\partial \varphi}{\partial y} Y - Y. \quad (59)$$

Такім чынам, каб сістэма (55) з дапамогай замены (57) прывялася да сістэмы (58), неабходна і дастаткова, каб φ задавальняла ўраўненню з частковымі вытворнымі (59). У тым выпадку, калі X, Y, φ – фармальныя рады, роўнасць (59) неабходна разумець як роўнасць радоў, гэта значыць роўнасць іх каэфіцыентаў у левай і правай частках пры аднолькавых ступенях $y_1^{q_1} y_2^{q_2} \dots y_n^{q_n}$.

Будзем казаць аб фармальных сістэмах (55) і (58), што яны фармальна эквівалентныя, калі існуе такая падстаноўка (57), дзе φ – фармальны рад, якая пераводзіць (55) у (58). Калі, у прыватнасці, рады X, Y, φ – збежныя, то аналітычныя сістэмы (55) і (58) будзем называць аналітычна эквівалентнымі.

Абзначым уласныя лікі матрыцы A праз $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Мае месца

Тэарэма 13. Калі выконваюцца няроўнасці

$$q_1\lambda_1 + \dots + q_n\lambda_n - \lambda_i \neq 0, i = \overline{1, n}, \quad q_1 + q_2 + \dots + q_n \geq 2, \quad (60)$$

то сістэма (55) будзе фармальна эквівалентнай любой наперад заданай сістэме (58), прычым рад φ у (57) вызначаецца адзіным чынам.

Калі ўмовы (60) выконваюцца не пры ўсіх $i = \overline{1, n}$; $q_1 + q_2 + \dots + q_n \geq 2$, то тады некаторыя з ураўненняў, што атрымліваюцца з (59), калі падставіць туды $\varphi = \sum_{k=2}^{\infty} \varphi^{(k)}$ (гл. (63) з дадатку), могуць быць невырашальнымі.

Аднак, карыстаючыся крытэрыем сумяшчальнасці сістэмы лінейных ураўненняў (тэарэма Кронекера-Капелі, гл. [34], глава I, § 9, с. 42), неабходным выбарам $Y^{(k)}$ можна зрабіць указаныя ўраўненні вырашальнымі, хоць і неадназначна. У выніку атрымаем сістэму (58), фармальна эквівалентную сістэме (55).

З дапамогай лінейнай неасаблівай замены зменных прывядзём матрыцу A да жарданавай формы і будзем разглядаць цяпер сістэму

$$\dot{x} = Jx + X(x). \quad (61)$$

Прадставім φ у выглядзе $\varphi = \sum_{k=2}^{\infty} \varphi^{(k)}$, дзе

$$\varphi^{(k)} = \text{colon}(\varphi_1^{(k)}, \dots, \varphi_n^{(k)}), \quad \varphi_i^{(k)}(y) = \sum_{q_1 + \dots + q_n = k} \varphi_i^{(q_1, \dots, q_n)} y_1^{q_1} \dots y_n^{q_n},$$

тады (59) прыме выгляд

$$\frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial y} Jy - J\varphi^{(k)} = F^{(k)}(\varphi^{(m)}, Y^{(j)}, X^{(i)}) - Y^{(k)}, \quad (62)$$

$m < k, \quad j < k, \quad i \leq k.$

Пры доказе лемы 4.1 з дадатку было паказана, што матрыца аператара левай часткі (62) з'яўляецца ніжнетрохвугольнай з велічы-

нямі $q_1\lambda_1 + \dots + q_n\lambda_n - \lambda_i$ па галоўнай дыяганалі. Значыць, каэфіцыенты $\varphi_i^{(q_1, \dots, q_n)}$ вектарнага аднароднага палінома вызначаюцца ўраўненнямі

$$(q_1\lambda_1 + \dots + q_n\lambda_n - \lambda_i) \varphi_i^{(q_1, \dots, q_n)} = F_i^{(q_1, \dots, q_n)} - Y_i^{(q_1, \dots, q_n)}, \quad (63)$$

дзе $F_i^{(q_1, \dots, q_n)}$ — вядомая велічыня, калі вылічваць гэтыя каэфіцыенты ва ўказаным парадку (гл. доказ лемы 4.1).

Калі

$$q_1\lambda_1 + \dots + q_n\lambda_n - \lambda_i \neq 0, \quad (64)$$

тады $\varphi_i^{(q_1, \dots, q_n)}$ вызначаецца адназначна. Калі ж

$$q_1\lambda_1 + \dots + q_n\lambda_n - \lambda_i = 0, \quad (65)$$

тады ўраўненне (63) будзе вырашальным толькі пры ўмове $Y_i^{(q_1, \dots, q_n)} = F_i^{(q_1, \dots, q_n)}$. Пры гэтым $\varphi_i^{(q_1, \dots, q_n)}$ будзе адвольнай велічынёй, якую можна лічыць роўнай нулю.

Тыя каэфіцыенты ступенных радоў, якія адпавядаюць такім $i, q, i = \overline{1, n}; q_1 + q_2 + \dots + q_n \geq 2$, што задавальняюць (65), будзем называць рэзананснымі. Пры выкананні ўмовы (64) назавём іх нерэзананснымі. Пры гэтым судачыненне (65) называецца рэзанансным судачыненнем.

Адзначым, што прыведзеныя азначэнні маюць месца толькі ў выпадку, калі $A = J$ — жарданава матрыца.

Падводзячы вынікі, можна сцвярджаць, што сістэма (61) будзе фармальна эквівалентнай любой сістэме

$$\dot{y} = Jy + Y(y) \quad (66)$$

з адвольнымі нерэзананснымі каэфіцыентамі. Пры гэтым рэзанансныя каэфіцыенты ў радзе $\varphi(y)$ можна выбіраць адвольна. Пры выбраных адвольных каэфіцыентах астатнія каэфіцыенты φ і Y вызначаюцца адзіным чынам.

Сістэму (66), у якой усе нерэзанансныя каэфіцыенты $Y_i^{(q_1, \dots, q_n)}$ роўны нулю, будзем называць нармальнай формай сістэмы (61). Пераўтварэнне (57) да нармальнай формы (66), у якой усе рэза-

нансныя каэфіцыенты $\varphi_i^{(q_1, \dots, q_n)}$ роўны нулю, называюць стандартным нармалізуючым пераўтварэннем.

Адзначым, што калі разглядаць толькі стандартныя нармалізуючыя пераўтварэнні, то нармальная форма сістэмы вызначаецца адзіным чынам.

Прыклад 1. Няхай $n = 2$, $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = -\alpha$, $\alpha \neq 0$.

Рэзананснае судачыненне мае выгляд

$$(q_1 - q_2 - 1)\alpha = 0 \quad \text{пры } i = 1,$$

$$(q_1 - q_2 + 1)\alpha = 0 \quad \text{пры } i = 2.$$

Значыць, нармальная форма (66) мае наступны выгляд

$$\dot{y}_1 = \alpha y_1 + y_1 P_1(y_1 y_2),$$

$$\dot{y}_2 = -\alpha y_2 + y_2 P_2(y_1 y_2),$$

дзе P_1, P_2 – фармальныя рады па ступенях здабытку $y_1 y_2$ без свабодных членаў.

Прыменім апісаны вышэй метадад прывядзення сістэмы (55) пры ўмове (55') да нармальнай формы для даследавання размяшчэння траекторый гэтай сістэмы ў дастаткова малым наваколлі пачатку каардынат. Будзем разглядаць сапраўдную сістэму (55) пры ўмове (55') для $n = 2$. (Даследаванне размяшчэння траекторый у такой лінеарызаванай сістэме $\dot{x} = Ax$ было праведзена ў § 3.8.)

1°. Дапусцім $|\lambda_1| < |\lambda_2|$. Рэзананснае судачыненне (65) для вызначэння рэзанансных i, q мае выгляд

$$q_1 \lambda_1 + q_2 \lambda_2 - \lambda_i = 0, \quad i = 1, 2; \quad q_1 + q_2 \geq 2. \quad (67)$$

Пры $i = 1$ судачыненне (67) не мае рашэнняў. Пры $i = 2$, калі $\lambda_2 \neq l\lambda_1$ пры $l > 1$ – цэлым, (67) таксама не мае рашэнняў. У выпадку, калі $i = 2, \lambda_2 = l\lambda_1$, тады $q_1 = l, q_2 = 0$. Нармальная форма пры гэтым мае выгляд

$$\dot{y}_1 = \lambda_1 y_1, \quad \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2 \quad (68)$$

у першым выпадку і

$$\dot{y}_1 = \lambda_1 y_1, \quad \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2 + a y_1^l \quad (69)$$

у другім. Можна паказаць, што ў разглядаемым выпадку стандартнае нармалізаванае пераўтварэнне збягаецца. Відавочна, што (68) ёсць частковы выпадак (69) пры $a = 0$.

Паўвосі восі y_2 з'яўляюцца траекторыямі. Каб знайсці астатнія траекторыі, праінтэгруем лінейнае ўраўненне (гл. § 1.7)

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{\lambda_2 y_2}{\lambda_1 y_1} + \frac{a}{\lambda_1} y_1^{l-1}.$$

Агульнае рашэнне гэтага ўраўнення мае выгляд

$$y_2 = y_1^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \left(C + \frac{a}{\lambda_1} \int y_1^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1} + l - 1} dy_1 \right) = \begin{cases} C y_1^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, & \text{калі } a = 0, \\ y_1^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \left(C + \frac{a}{\lambda_1} \ln|y_1| \right), & \text{калі } a \neq 0. \end{cases}$$

У абодвух выпадках інтэгральныя крывыя датыкаюцца восі y_1 у пачатку каардынат і гэтым пунктам падзяляюцца на дзве траекторыі.

Атрымліваем схему размяшчэння траекторый тыпу той, што адлюстравана на мал. 3.8.1, 3.8.2.

Гэтая схема для разглядаемай сістэмы ў дастаткова малым наваколлі пачатку каардынат пападае пад уздзеянне аналітычнага пераўтварэння, блізкага да афіннага. Пры гэтым каардынаты восі прайдуць у крывыя $x_1 = \varphi_1(0, y_2)$, $x_2 = y_2 + \varphi_2(0, y_2)$ і $x_1 = y_1 + \varphi_1(y_1, 0)$, $x_2 = \varphi_2(y_1, 0)$, дзе y_1, y_2 разглядаюцца як параметры, што мяняюцца ў некаторым наваколлі нулявога пункта. Першая з гэтых траекторый пачаткам каардынат разбіваецца на дзве паўтраекторыі, а ўсе астатнія ў пачатку каардынат маюць агульную датычную з другой траекторыяй, якая ў сваю чаргу складаецца з паўтраекторый толькі пры $a = 0$. Такое размяшчэнне траекторый таксама называецца вузлом.

2°. Судачыненні (67) у залежнасці ад тыпу ліку $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ будуць па-

рознаму вызначаць рэзанансныя каэфіцыенты q_1, q_2 . Так, калі

$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ будзе ірацыянальным лікам, тады (67) не мае рашэнняў, гэта

значыць нармальная форма лінейная

$$\dot{y}_1 = \lambda_1 y_1, \quad \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2. \quad (70)$$

Калі ж $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = -\frac{p_2}{p_1}$, дзе $\frac{p_2}{p_1}$ – нескарачальны дроб, то пры $i = 1$ з (67)

атрымліваем $q_1 - 1 - q_2 \frac{p_2}{p_1} = 0$, адкуль $\frac{q_2}{q_1 - 1} = \frac{p_1}{p_2}$. Значыць, пры

$i = 1$ маем $q_1 - 1 = lp_2$, $q_2 = lp_1$, $l \in \mathbb{N}$. Такім чынам, пры рацыя-

нальным $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ нармальная форма мае выгляд

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \lambda_1 y_1 + y_1 \sum_{l=1}^{\infty} b_l (y_1^{p_2} y_2^{p_1})^l, \\ \dot{y}_2 &= \lambda_2 y_2 + y_2 \sum_{l=1}^{\infty} a_l (y_1^{p_2} y_2^{p_1})^l. \end{aligned} \quad (71)$$

З формул (70) і (71), калі рад у правай частцы збежны, можна заключыць, што размяшчэнне траекторый мае тып сядла. Але ў гэтым выпадку не заўсёды можна апісаць паводзіны траекторый сістэмы (54), таму што пераўтварэнне да нармальнай формы можа быць разбежным у любым наваколлі пачатку каардынат. Але, калі гэтае наваколле дастаткова малое, можна іншымі метадамі сцвярджаць (гл. главу V), што сядлу ў лінейнай сістэме адпавядае сядло ў нелінейнай сістэме.

3⁰. Разгледзім выпадак, калі $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, $\alpha \neq 0$, $\beta > 0$.

Прыводзячы матрыцу A да жарданавай формы J (гл. § 3.3., п. 2⁰), атрымаем сістэму

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (\alpha + i\beta)x_1 + X_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= (\alpha - i\beta)x_2 + X_2(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (72)$$

дзе зменныя x_1 і x_2 камплексна-спалучаныя, $x_2 = \bar{x}_1$. Таму і $X_2 = \bar{X}_1$, гэта значыць, калі

$$X_1 = \sum_{q_1+q_2=2}^{\infty} X_1^{(q_1, q_2)} x_1^{q_1} x_2^{q_2},$$

то

$$X_2 = \sum_{q_1+q_2=2}^{\infty} X_1^{(\overline{q_1, q_2})} x_2^{q_1} x_1^{q_2},$$

або X_2 атрымліваецца з X_1 заменай каэфіцыентаў раскладання на спалучаныя, x_2 на x_1 , x_1 на x_2 .

Нармальная форма сістэмы (72), згодна з (67), будзе лінейнай

$$\dot{y}_1 = (\alpha + i\beta)y_1, \quad \dot{y}_2 = (\alpha - i\beta)y_2. \quad (73)$$

Разгледзім стандартнае нармалізуючае пераўтварэнне

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + \Phi_1(y_1, y_2), \\ x_2 &= y_2 + \Phi_2(y_1, y_2). \end{aligned} \quad (74)$$

Практыкаванне 1. Паказаць, што пераўтварэнне (74) будзе збежным (гл. [27], глава VIII, § 4, с. 264).

Пакажам, што $h_2 = \bar{h}_1$. У дадзеных умовах судачыненне (59) прыме выгляд

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial y_1} (\alpha + i\beta)y_1 + \frac{\partial \Phi_j}{\partial y_2} (\alpha - i\beta)y_2 - \lambda_j \Phi_j = X_j(y_1 + \Phi_1, y_2 + \Phi_2), \quad (75)$$

$j = 1, 2$.

У сілу таго, што $X_2 = \bar{X}_1$, члены другога парадку ў Φ_j будуць камплексна спалучанымі, $\Phi_2^{(2)} = \overline{\Phi_1^{(2)}}$. Няхай да членаў парадку, меншага за k , $\Phi_2 = \overline{\Phi_1}$. Тады гэтая ўласцівасць мае месца і для членаў парадку k . Сапраўды, з (75) маем

$$\frac{\partial \Phi_1^{(k)}}{\partial y_1} (\alpha + i\beta)y_1 + \frac{\partial \Phi_1^{(k)}}{\partial y_2} (\alpha - i\beta)y_2 - (\alpha + i\beta)\Phi_1^{(k)} =$$

$$= \{X_1(y_1 + \varphi_1, y_2 + \varphi_2)\}^{(k)}. \quad (76)$$

Падставім рысу над усімі членамі гэтай роўнасці. Атрымаем, што $\overline{\varphi}_1^{(k)}$ задавальняе таму ж ураўненню, што і $\varphi_2^{(k)}$, з-за таго, што правая частка (76) залежыць ад $\varphi_1^{(s)}$, $\varphi_2^{(s)}$, для якіх $s < k$. Значыць, $\varphi_2^{(k)} = \overline{\varphi}_1^{(k)}$. Калі меркаваць, што $x_1 = u_1 + iv_1$, $x_2 = u_1 - iv_1$, $y_1 = u_2 + iv_2$, $y_2 = u_2 - iv_2$, то, пераходзячы да сапраўдных і ўяўных частак, з (74) атрымаем $u_1 = u_2 + w_1(u_2, v_2)$, $v_1 = v_2 + w_2(u_2, v_2)$, дзе w_1, w_2 – сапраўдныя збежныя рады. Як вядома (гл. § 3.8), у плоскасці Ou_2v_2 мае месца фокус. Такім чынам, і для зыходнай сістэмы мае месца фокус.

4⁰. Няхай цяпер $\lambda_1 = i\beta$, $\lambda_2 = -i\beta$, $\beta > 0$. У сілу таго, што рэзанансныя судачыненні (65) маюць выгляд

$$(q_1 - q_2 - 1)i\beta = 0, \quad (q_1 - q_2 + 1)i\beta = 0,$$

нармальная форма сістэмы (72) запішацца так

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= i\beta y_1 + y_1 P_1(y_1 y_2), \\ \dot{y}_2 &= -i\beta y_2 + y_2 P_2(y_1 y_2), \end{aligned} \quad (77)$$

дзе $P_j = \sum_{l=1}^{\infty} P_j^{(l)}(y_1 y_2)^l$, $j = 1, 2$.

Пакажам, што $\varphi_2 = \overline{\varphi}_1$, $P_2 = \overline{P}_1$.

У зададзеных умовах судачыненне (59) прыме выгляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_1} (i\beta y_1 + y_1 P_1) + \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_2} (-i\beta y_2 + y_2 P_2) - \lambda_j \varphi_j &= \\ &= X_j(y_1 + \varphi_1, y_2 + \varphi_2) - y_j P_j, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (78)$$

У сілу таго, што $X_2 = \overline{X}_1$, маем $\varphi_2^{(2)} = \overline{\varphi}_1^{(2)}$. Няхай да членаў парадку, меншага за k , $\varphi_2 = \overline{\varphi}_1$, $P_2 = \overline{P}_1$. Тады гэтая ўласцівасць мае месца і для членаў парадку k . Сапраўды, $\varphi_j^{(k)}$ і $P_j^{(k)}$ выражаюцца

праз $\varphi_j^{(s)}, P_j^{(s)}$, у якіх $s < k$, таму можна выкарыстаць разважанні, што былі прыменены для доказу камплекснай спалучальнасці ў папярэднім пункце.

Будзем разглядаць наступныя два магчымых выпадкі:

- 1) трансэндэнтны: $P_1 = iQ(y_1 y_2)$, $P_2 = -iQ(y_1 y_2)$, дзе Q – рад па ступенях $y_1 y_2$ з сапраўднымі каэфіцыентамі;
- 2) алгебраічны: $P_1 = Q_1(y_1 y_2) + iQ(y_1 y_2)$, $P_2 = Q_1(y_1 y_2) - iQ(y_1 y_2)$, дзе Q_1 і Q – рады па ступенях $y_1 y_2$ з сапраўднымі каэфіцыентамі, прычым

$$Q_1 = p(y_1 y_2)^N + \dots, \quad p \neq 0.$$

Практыкаванне 2. Даказаць, што ў трансэндэнтным выпадку стандартнае нармалізуючае пераўтварэнне (74) будзе збежным.

Разгледзім спачатку трансэндэнтны выпадак. Сістэма (77) у

палярных каардынатах $y_1 = re^{+i\varphi}$, $y_2 = re^{-i\varphi}$, $r \geq 0$, прыме выгляд

$$\dot{r} = 0, \quad \dot{\varphi} = \beta + Q(r^2).$$

Гэта значыць, што ў плоскасці r, φ траекторыямі з'яўляюцца акруж-

насці $r = C$, рухі па іх – перыядычныя з перыядам $\frac{2\pi}{\beta + Q(C^2)}$. Мяр-

куючы, што $x_1 = u_1 + iv_1$, $x_2 = u_1 - iv_1$, $y_1 = u_2 + iv_2$, $y_2 = u_2 - iv_2$, з (74) атрымаем, пераходзячы да сапраўдных і ўяўных частак,

$$u_1 = u_2 + w_1(u_2, v_2), \quad v_1 = v_2 + w_2(u_2, v_2),$$

дзе w_1, w_2 – сапраўдныя збежныя рады. Такім чынам, для зыходнай сістэмы мае месца цэнтр. У тым выпадку, калі $Q \equiv 0$, перыяды ўсіх

рашэнняў будуць аднолькавымі, роўнымі $\frac{2\pi}{\beta}$, а цэнтр называюць ізахронным.

Заўвага 1. Агульны падыход да рашэння праблемы ізахроннасці, заснаваны на прывядзенні сістэмы спецыяльнага віду да нармальнай формы, гл., напрыклад, у [35] главу II, § 13, с. 86.

Разгледзім алгебраічны выпадак. Замест фармальнага пераўтварэння (74) разгледзім палінаміяльнае пераўтварэнне

$$\begin{aligned}x_1 &= y_1 + \varphi_1^{(2N+1)}(y_1, y_2), \\x_2 &= y_2 + \varphi_2^{(2N+1)}(y_1, y_2),\end{aligned}\tag{79}$$

$$\text{дзе } \varphi_j^{(2N+1)} = \sum_{q_1+q_2=2}^{2N+1} \varphi_j^{(q_1, q_2)} y_1^{q_1} y_2^{q_2}.$$

Практыкаванне 3. Паказаць, што пераўтварэнне (79) будзе збежным.

Прыміняючы (79), атрымаем сістэму, якая, як вынікае з (78), супадае з нармальнай формай да членаў, парадку не вышэй за $2N+1$. Гэтую сістэму можна запісаць у выглядзе

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= i\beta y_1 + p y_1 (y_1 y_2)^N + i y_1 Q^{(N)} + Y_1^*, \\ \dot{y}_2 &= -i\beta y_2 + p y_2 (y_1 y_2)^N - i y_2 Q^{(N)} + Y_2^*,\end{aligned}$$

дзе $Y_2^* = \bar{Y}_1^*$, іх раскладанні пачынаюцца з членаў парадку, не ніжэй за $2N+2$, $Q^{(N)}$ атрымліваюцца адкідваннем членаў раскладання парадку вышэй за N адносна здабытку $y_1 y_2$. У палярных каардынатах $\dot{r} = p r^{2N+1} + R(r, \varphi)$, $\dot{\varphi} = \beta + Q^{(N)}(r^2) + \Phi(r, \varphi)$, дзе R, Φ – збежныя рады па ступенях r з 2π -перыядычнымі па φ каэфіцыентамі парадку не ніжэй за $2N+2$ і $2N+1$ адпаведна. Пры дастаткова малых r маем $|R| < \frac{1}{2}|p|r^{2N+1}$, а гэта значыць, што пры такіх r мае месца

няроўнасць $\frac{dr}{d\varphi} < 0$ пры $p < 0$ і $\frac{dr}{d\varphi} > 0$ пры $p > 0$. А гэта, згодна з

§ 3.8, адпавядае фокусу – устойліваму пры $p < 0$ і няўстойліваму пры $p > 0$.

Такім чынам, для вызначэння наяўнасці фокуса дастаткова з дапамогай (74) прывесці разглядаемую сістэму да нармальнай

формы (77) да першага члена раскладання, каэфіцыент якога не будзе з'яўляцца чыста ўяўным лікам.

Прыклад 2. Разгледзім сістэму дыферэнцыяльных ураўненняў

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 - x_2 - x_1^2 x_2 - x_1^3.$$

У каардынатах z_1, z_2 , якія адпавядаюць сапраўднай жарданавай матрыцы каэфіцыентаў лінейнага набліжэння, гэтая сістэма мае выгляд

$$\dot{z}_1 = -z_2 - \frac{1}{2}(z_1 - z_2)^2(z_1 + z_2),$$

$$\dot{z}_2 = z_1 - \frac{1}{2}(z_1 - z_2)^2(z_1 + z_2).$$

Пераходзячы да камплексна спалучаных зменных па формулах $y_1 = z_1 + iz_2$, $y_2 = z_1 - iz_2$, атрымаем сістэму, другое ўраўненне якой з'яўляецца камплексна спалучаным у адносінах да першага. Таму, можна абмежавацца першым ураўненнем. Яно мае выгляд

$$\dot{y}_1 = iy_1 - \frac{1}{4}[(y_2^3 + y_1^2 y_2) + i(y_1^3 + y_1 y_2^2)].$$

У гэтым ураўненні з дапамогай палінаміяльнага пераўтварэння $y_1 = u_1 + \varphi^3(u_1, u_2)$, $y_2 = u_2 + \varphi^3(u_1, u_2)$, дзе φ^3 – аднародны паліном трэцяга парадку, можна знішчыць усе члены трэцяга парадку, акрамя рэзананснага, які пры гэтым не зменіцца. Такім чынам, $p = -\frac{1}{4}$. Мае месца ўстойлівы фокус.

Варыянты заданняў для самастойнай працы

- I. 1. Праверыць, ці з'яўляюцца першымі інтэграламі сістэмы $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -x_1$ функцыі $\psi_1 = x_1 \cos t - x_2 \sin t$, $\psi_2 = x_1 x_2$, $\psi_3 = x_1 \sin t + x_2 \cos t$, $\psi_4 = x_1^2 - x_2^2$.

2. Праінтэграваць сістэму, пабудаваўшы інтэгруемыя камбінацыі:

$$\dot{x}_1 = \frac{x_2}{(x_2 - x_1)^2}, \quad \dot{x}_2 = \frac{x_1}{(x_2 - x_1)^2}.$$

3. Даследаваць, ці мае сістэма $\frac{dr}{dt} = r(1-r)^2, \frac{d\varphi}{dt} = 1$ лімітавыя цыклы.

4. Знайсці вытворную па параметры $\left. \frac{\partial x}{\partial \mu} \right|_{\mu=1}$ ад рашэння ўраўнення

$$\ddot{x} - \dot{x} = (x+1)^2 - \mu x^2, \quad x(0) = \frac{1}{2}, \quad \dot{x}(0) = -1.$$

5. Рашыць сістэму ўраўненняў $\frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{y(z-x)} = \frac{dz}{z(x-y)}.$

II. 1. Рашыць сістэму ўраўненняў $\dot{x} = \frac{y}{t^2}, \quad \dot{y} = 3x + \frac{3}{t}y.$

2. Знайсці вытворную па пачатковых дадзеных $\left. \frac{\partial x}{\partial y_0} \right|_{\substack{x_0=3 \\ y_0=2}}$ ад рашэнняў задачы $\dot{x} = xy + t^2, 2\dot{y} = -y^2, x(1) = x_0, y(1) = y_0.$

3. Праверыць, ці з'яўляюцца функцыі $\psi_1 = (x_1 + x_2)t^3 - \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{5}t^5,$

$\psi_2 = (x_1 + 2x_2)t^4 - \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{3}t^6$ першымі інтэграламі сістэмы

$$\dot{x}_1 = -\frac{2}{t}x_1 + \frac{2}{t}x_2 + 1, \quad \dot{x}_2 = -\frac{1}{t}x_1 - \frac{5}{t}x_2 + t.$$

4. Знайсці перыядычныя рашэнні ўраўнення $\ddot{x} + 3x = 2\mu \cos t.$

5. Пабудаваць фазавыя крывыя сістэмы ўраўненняў $\dot{x}_1 = -x_2,$

$$\dot{x}_2 = 2x_1^3.$$

III. 1. Знайдіть перші інтеграл системи $\frac{dx}{dt} = -y^2 + \sin x$, $\frac{dy}{dt} = -y \cos x$.

2. Праверьте, ці стварає пара функцій $\psi_1 = x + y + t$, $\psi_2 = x^2 + y^2 + t^2$ систему незалежних інтегралів для системи диференціальних рівнянь $\frac{dx}{dt} = \frac{t-y}{y-x}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{x-t}{y-x}$.

3. Начертите на фазовій площині траєкторії системи $\frac{dr}{dt} = r \sin \frac{1}{r}$, $\frac{d\phi}{dt} = 1$.

4. Знайдіть загальну па параметри $\left. \frac{\partial x}{\partial \mu} \right|_{\mu=0}$ ад рішення рівняння

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + \mu t x^3, \quad x(0) = 1 + \mu.$$

5. Знайдіть три члени розкладання рішення рівняння $\dot{x} = \frac{2}{x} - 5\mu t$, $x(1) = 2$ па ступенях малого параметра μ .

IV. 1. Рішіть систему рівнянь $\frac{dx}{dt} = -\frac{y}{t}$, $\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{t}$.

2. Праверьте, ці стварає пара функцій $\psi_1 = \frac{x-y}{t-x}$, $\psi_2 = \frac{t-x}{t-y}$ систему незалежних інтегралів для системи диференціальних рівнянь $\frac{dx}{dt} = \frac{t+y}{x+y}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{t+x}{x+y}$.

3. Знайсці $\left. \frac{\partial x}{\partial b} \right|_{b=1}$ для рашэння задачы $\ddot{x} = \frac{2}{t} - \frac{2}{x}$, $x(1) = 1$, $\dot{x}(1) = b$.
4. Пры якіх умовах сістэма $\frac{dr}{dt} = f(r)$, $\frac{d\varphi}{dt} = 1$, дзе функцыя $f(r)$ непарыўная, мае лімітавы цыкл?
5. З дапамогай метаду малога параметра прыблізна знайсці перыядычнае рашэнне ўраўнення $\ddot{x} + x = \mu(\dot{x} - \dot{x}^3)$.
- V. 1. Рашыць сістэму ўраўненняў $\frac{dx}{dt} = x^2 y$, $\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t} - xy^2$.
2. Даследаваць, ці мае лімітавы цыкл сістэма $\frac{dr}{dt} = r(1-r)^2$, $\frac{d\varphi}{dt} = 1$.
3. Знайсці тры члены раскладання рашэння па ступенях малога параметра ўраўнення $t\dot{x} = \mu t^2 + \ln x$, $x(1) = 1$.
4. Знайсці $\left. \frac{\partial x}{\partial x_0} \right|_{x_0=0}$ ад рашэння ўраўнення $\dot{x} = x + x^2 + tx^3$, $x(2) = x_0$.
5. Для сістэмы $\frac{dx}{dt} = x^2 - y^2$, $\frac{dy}{dt} = 2xy$, $x(1) = -1$, $y(1) = 0$ знайсці рух, які задавальняе зададзеным пачатковым умовам, і даследаваць, ці будзе гэты рух доўжаным на ўсе $-\infty < t < +\infty$.
- VI. 1. Рашыць сістэму ўраўненняў $\frac{dx}{dt} = y + (1 - x^2 - y^2)x$, $\frac{dy}{dt} = -x + (1 - x^2 - y^2)y$.

2. Паказаць, што функцыя $\psi = \frac{x_2}{t} - x_1$, вызначаная ў абсягу

$$G = \{(t, x_1, x_2) : t \neq 0, -\infty < x_1, x_2 < +\infty\},$$
 з'яўляецца інтэгралам

$$\text{сістэмы ўраўненняў } \frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1}{t}, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 + \frac{x_2}{t}, \quad \text{калі агульнае}$$

рашэнне сістэмы мае выгляд $x_1 = C_1 t, \quad x_2 = C_1 t^2 + C_2 t$.

3. Знайсці вытворную $\left. \frac{\partial x}{\partial \mu} \right|_{\mu=0}$ па параметры ад рашэння ўраўнення

$$\dot{x} = x + \mu(t + x^2), \quad x(0) = 1.$$

4. Знайсці прыблізна перыядычныя рашэнні з перыядам, роўным перыяду правай часткі ўраўнення $\ddot{x} + 5x = \cos 2t + \mu x^2$.

5. Для сістэмы $\frac{dx}{dt} = -x^2 + y^2, \quad \frac{dy}{dt} = -2xy; \quad x = 0, \quad y = 2t^2$ пры $t = 0$

знайсці рашэнне задачы Кашы і даследаваць, ці з'яўляецца яно доўжаным на ўсю вось $-\infty < t < +\infty$.

VII. 1. Рашыць сістэму ўраўненняў $\frac{dx}{dt} = y - z, \quad \frac{dy}{dt} = x + y + t,$

$$\frac{dz}{dt} = x + z + t.$$

2. Праверыць, ці з'яўляюцца функцыі $\psi_1 = x + y - t, \quad \psi_2 = x + y + t$

$$\text{першымі інтэграламі сістэмы } \frac{dx}{dt} = \frac{y+t}{x+y}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{x-t}{x+y}.$$

3. Знайсці тры члены раскладання рашэння ўраўнення $\dot{x} = \frac{2}{x} - 5\mu t$, $x(1) = 2$ па ступенях малога параметра μ .

4. Вызначыць прыблізна перыядычнае рашэнне ўраўнення $\ddot{x} + 3x = \cos t + \mu \dot{x}^2$, μ – малы параметр.

5. Карыстаючыся метадам Пікара, знайсці рашэнне задачы Кашы для сістэмы $\dot{x} = x + y - t^2$, $\dot{y} = x^2 + 2t - e^{2t}$, $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

VIII. 1. Праінтэграваць сістэму, пабудоваўшы інтэгральную камбінацыю $\dot{x}_1 = \sin x_1 \cos x_2$, $\dot{x}_2 = \cos x_1 \sin x_2$.

2. Праверыць, ці мае лімітавы цыкл сістэма ўраўненняў $\dot{x} = y - x + x^3$, $\dot{y} = -x - y + y^3$. Схематычна начарціць паводзіны фазавых крывых.

3. Праверыць, ці з'яўляецца функцыя $\psi = x_1 x_2 e^{-t}$ першым інтэгралам сістэмы $\dot{x}_1 = \frac{x_1^2}{x_2}$, $\dot{x}_2 = x_2 - x_1$.

4. Метадам Пікара знайсці рашэнне задачы Кашы $\dot{x} = x + y + \cos t - \sin t - t$, $\dot{y} = x^2 + \cos t$, $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

5. З дапамогай метаду малога параметра знайсці прыблізна перыядычныя рашэнні ўраўнення $\ddot{x} + x = \mu(\dot{x} - \dot{x}^3)$.

IX. 1. Рашыць сістэму ўраўненняў $\dot{x}_1 = e^{-\frac{t}{x_2}}$, $\dot{x}_2 = e^{-\frac{t}{x_1}}$.

2. Пабудоваць фазавыя крывыя сістэмы ўраўненняў $\frac{dx}{dt} = ay$, $\frac{dy}{dt} = x^2$.

3. Знайсці вытворную па параметры $\left. \frac{\partial x}{\partial \mu} \right|_{\mu=0}$ ад рашэння ўраўнення $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} + \mu t e^{-x}$, $x(1) = 1$.

4. Знайсці прыблізна перыядычныя рашэнні з перыядам, роўным перыяду правай часткі ўраўнення $\ddot{x} + x^2 = 1 + \mu \sin t$.

5. Метадам Пікара знайсці рашэнне задачы Кашы $\ddot{x} = \dot{x}^2 - x\dot{x} + e^t$, $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 1$.

X. 1. Рашыць сістэму ўраўненняў $\dot{x} = 2tx^2$, $\dot{y} = \frac{y-t}{t}$.

2. Метадам Пікара знайсці рашэнне задачы Кашы $\ddot{x} = \dot{x}^2 + x^2 - \sin t - 1$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$.

3. Праверыць, ці з'яўляюцца функцыі $\psi_1 = x_1^2 + x_2^2$, $\psi_2 = x_1 e^{-2t} + e^{-t}$, $\psi_3 = x_2 e^{3t} - 3e^{3t}$ першымі інтэграламі сістэмы $\dot{x}_1 = 2x_1 + e^t$, $\dot{x}_2 = -3x_2 + 1$.

4. Даказаць, што існуе адзінае рашэнне сістэмы $x - t\dot{x} = x^2$, $\dot{y} = \frac{2ty}{t^2 - y^2}$ і праінтэграваць яе.

5. Знайсці тры члены раскладання рашэння ўраўнення $\dot{x} = e^{x-t} + \mu x$, $x(0) = -\mu$ па ступенях малога параметра μ .

XI. 1. Рашыць сістэму ўраўненняў $\dot{x} = x + y$, $2x\dot{y} = y^2 - x^2 + 1$.

2. Пабудаваць фазавыя крывыя сістэмы ўраўненняў $\dot{x} = x^2$, $\dot{y} = ay$.

3. Знайсці прыблізна перыядычныя рашэнні ўраўнення $\ddot{x} + x = \mu(\dot{x} - x^3)$.

4. Прывесці да нармальнай наступную сістэму ўраўненняў $\frac{d^2 x}{dt^2} = y$, $t^3 \frac{dy}{dt} - 2x = 0$.

5. Знайсці вытворную па параметры $\left. \frac{\partial y}{\partial \mu} \right|_{\mu=0}$ ад рашэння сістэмы

$$\dot{x} = x + y, \dot{y} = 2x + \mu y^2; x(0) = 1 + \mu, y(0) = -2.$$

ХІІ. 1. Праверыць, ці з'яўляюцца першымі інтэграламі сістэмы

$$\dot{x}_1 = \frac{t}{x_2}, \quad \dot{x}_2 = -\frac{t}{x_1} \quad \text{функцыі} \quad \psi_1 = x_1 x_2, \quad \psi_2 = \ln x_2 + \frac{t^2}{2x_1 x_2}.$$

Праінтэграваць сістэму.

2. Знайсці метадам Пікара другое набліжэнне да рашэння, што задавальняе дадзеным пачатковым умовам: $\ddot{x} + x\dot{x} - x^2 + t = 0$, $|t| \leq 1, |x| \leq 1, |\dot{x}| \leq 1$; $x = 1, \dot{x} = 2$ пры $t = 0$.

3. Прывесці сістэму дыферэнцыяльных ураўненняў да нармальнай формы: $\ddot{x} - y = 0, t^3 \dot{y} - 2x = 0$.

4. Знайсці тры члены раскладання рашэння па ступенях малога параметра μ : $\dot{x} = \frac{6\mu}{t} - x^2, x(1) = 1 + 3\mu$.

5. Знайсці прыблізна перыядычныя рашэнні ўраўнення $\ddot{x} + \sin x = \mu \sin 2t$.

ХІІІ. 1. Праінтэграваць сістэму дыферэнцыяльных ураўненняў

$$\dot{x} = e^{t-x}, \quad \dot{y} = \frac{2y}{2t - y^2}.$$

2. Ацаніць, на колькі можа змяніцца пры $0 \leq t \leq 1$ рашэнне ўраўнення $\ddot{x} = t + \sin x$ з пачатковай умовай $x(0) = x_0 = 0$, калі лік x_0 змяніць менш, чым на $0,01$.

3. Знайсці незалежныя інтэгралы сістэмы $\frac{dt}{\cos x} = \frac{dx}{\cos t} = \frac{dy}{\cos t \cos x}$.

4. Прывесці дыферэнцыяльнае ўраўненне да адпаведнай сістэмы ў нармальнай форме: $x^{IV} + t^2 x = 0$.

5. Визначыць перыядычнае рашэнне ўраўнення $\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_2 x = f(t) + \mu x^2$, дзе a_1 і a_2 – пастаянныя, $f(t)$ – непарыўная перыядычная функцыя перыяду 2π , $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$.

XIV. 1. Прыблізна вызначыць перыядычнае рашэнне ўраўнення $\ddot{x} + 3x = \cos t + \mu \dot{x}^2$.

2. Праверыць, ці з'яўляюцца першымі інтэграламі сістэмы ўраўненняў $\dot{x} = -y, \dot{y} = \frac{y^2 - t}{x}$ функцыі $\psi_1 = t^2 + 2xy, \psi_2 = x - ty^2$.

3. Знайсці вытворную па параметры $\left. \frac{\partial x}{\partial \mu} \right|_{\mu=0}$ ад рашэння сістэмы

$$\dot{x} = 4ty^2, \dot{y} = 1 + 5\mu x, x(0) = y(0) = 0.$$

4. Пры якіх значэннях пастаяннай a сістэма $\frac{d\varphi}{dt} = 1, \frac{dr}{dt} = (r-1)(a + \sin^2 \varphi)$ мае ўстойлівы лімітавы цыкл.

5. Рашыць сістэму $t\dot{x} = x + \sqrt{x^2 - t^2}, \dot{y} = \frac{x+y}{y^2 - t}$.

XV. 1. Паказаць, што ўраўненне $\ddot{x} + F(\dot{x}) + x = 0$, дзе функцыя F непарыўная і $F(y) > 0$ пры $y > 0, F(y) < 0$ пры $y < 0$, не можа мець лімітавых цыклаў на фазавай плоскасці.

2. Праверыць, ці з'яўляюцца першымі інтэграламі сістэмы

$$\dot{x}_1 = x_1^2 x_2, \dot{x}_2 = \frac{x_2}{t} - x_1 x_2^2 \text{ функцыі } \psi_1 = \frac{x_1 x_2}{2t}, \psi_2 = x_1 e^{\frac{-tx_1 x_2}{2}}.$$

3. Праінтэграваць сістэму дыферэнцыяльных ураўненняў

$$\dot{x} = \frac{y + e^x}{y + e^t}, \dot{y} = \frac{y^2 - e^{t+x}}{y + e^t}.$$

4. Прывесці дыферэнцыяльнае ўраўненне $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0$ да адпаведнай сістэмы ў нармальнай форме.
5. Знайсці прыблізна 2π -перыядычнае рашэнне ўраўнення $\ddot{x} + \alpha^2x = \lambda \sin t + \mu x^3$, μ – малы параметр.

ГЛАВА V

УСТОЙЛІВАСЦЬ ДЫНАМІЧНЫХ СІСТЭМ

§ 1. Асноўныя азначэнні тэорыі ўстойлівасці

Сістэмы звычайных дыферэнцыяльных ураўненняў апісваюць работу вельмі многіх машын, прыбораў і да т.п. Такія сістэмы маюць заўсёды бясконцае мноства рашэнняў. Каб задаць адно з гэтых рашэнняў, патрэбна ўказаць яго пачатковыя значэнні, якія на практыцы звычайна з'яўляюцца вынікамі вымярэнняў і таму непазбежна атрыманы з некаторай хібнасцю.

Калі дастаткова малыя змяненні пачатковых дадзеных могуць моцна змяніць рашэнне, то рашэнне, якое вызначаецца такімі недакладнымі пачатковымі дадзенымі, звычайна нават прыблізна не можа апісваць работу таго ці іншага прыбора. Такім чынам, узнікае важная для прыкладанняў задача аб знаходжанні ўмоў, пры якіх дастаткова малое змяненне пачатковых значэнняў выклікае як патрэбна малое змяненне рашэння.

З тэарэмы 4.7 аб непарыўнай залежнасці рашэння ад пачатковых значэнняў вядома, што калі задаць вызначаны канечны прамежак часу, то пры дастаткова малым змяненні пачатковых значэнняў рашэнне зменіцца мала на ўсім зададзеным прамежку часу. Калі ж час задаецца нявызначана вялікім адрэзкам, то пастаўленым пытаннем займаецца тэорыя ўстойлівасці.

Фундаментальныя рэзультаты тэорыі ўстойлівасці належаць вядомаму рускаму матэматыку А.М.Ляпунову.

Будзем разглядаць сістэму ўраўненняў

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad (1)$$

дзе $x = colon (x_1, \dots, x_n) \in R^n$ – шуканая функцыя незалежнай зменнай t .

Няхай для (1) зададзены пачатковыя ўмовы

$$x(t_0) = x^0, \quad (2)$$

дзе $x^0 = colon (x_1^0, \dots, x_n^0)$.

Увядзём наступныя абазначэнні. Праз D_H абазначым шар радыуса H з цэнтрам у пачатку каардынат у эўклідавай прасторы

R^n з нормай $|x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. Праз I абазначым інтэрвал сапраўднай восі віду $I = \{a < t < \infty\}$, дзе a – некаторы лік.

Будзем лічыць, што функцыя $f(t, x)$ ($f: I \times D_H \rightarrow R^n$) з'яўляецца непарыўнай па абодвух аргументах і па другому аргументу задавальняе ўмове Ліпшыца, гэта значыць

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|, \quad L = \text{const} > 0.$$

Пры гэтых умовах выконваюцца тэарэмы існавання, адзінасці і непарыўнай залежнасці на канечным інтэрвале рашэння $x(t, t_0, x^0)$ задачы (1), (2) ад пачатковых умоў $t_0 \in I$ і $x^0 \in D_H$ (гл. главу IV).

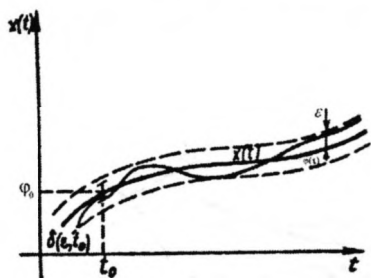
У тэорыі ўстойлівасці Ляпунова даследуецца на ўстойлівасць якое-небудзь адно рашэнне. Няхай $\varphi(t) = \varphi(t, t_0, \varphi^0)$ – рашэнне задачы (1), (2) ($\varphi(t_0) = \varphi^0$), доўжанае ўправа да бясконцасці, гэта значыць $\varphi(t)$ існуе на мностве $[t_0; \infty)$, прычым $\varphi(t) \in D_H$ пры $t_0 \leq t < \infty$.

Азначэнне 1. Рашэнне $\varphi(t, t_0, \varphi^0)$ задачы (1), (2) называецца ўстойлівым па Ляпунову, калі для любога ε ($0 < \varepsilon < H$) існуе $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такі, што ўсе рашэнні $x(t) = x(t, t_0, x^0)$ задачы (1), (2) бясконца доўжаныя ўправа, як толькі $|x^0 - \varphi^0| \leq \delta(\varepsilon, t_0)$, і для гэтых рашэнняў мае месца няроўнасць

$$|x(t, t_0, x^0) - \varphi(t, t_0, \varphi^0)| \leq \varepsilon, \quad t_0 \leq t \leq \infty.$$

Геаметрычна ўстойлівасць па Ляпунову азначае, што як патрэбна малая вузкая ε -трубка рашэння $\varphi(t)$ змяшчае ўсе рашэн-

ні $x(t)$ задачы (1), (2), якія ў пачатковы момант t_0 знаходзяцца ад φ^0 не больш чым за $\delta(\epsilon, t_0)$ (мал. 1).



Мал. 1

да пытання ўстойлівасці нулявога рашэння $y(t) \equiv 0$ іншай сістэмы, аналагічнай (1). Функцыя $y(t) = x(t) - \varphi(t)$ задавальняе ўраўненню

$$\dot{y}(t) = f(t, y + \varphi) - f(t, \varphi) = F(t, y), \quad F(t, 0) \equiv 0. \quad (3)$$

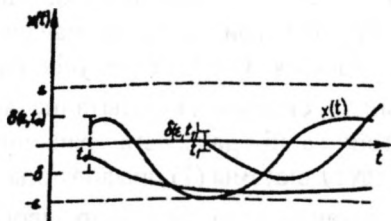
У далейшым будзем знаёміцца з метадамі даследавання на ўстойлівасць менавіта нулявога рашэння $x(t) \equiv 0$ або пункта спакою сістэмы (1), адразу мяркуючы, што $f(t, 0) \equiv 0$.

Азначэнне 2. Нулявое рашэнне $x(t) \equiv 0$ сістэмы (1) называецца ўстойлівым па Ляпунову, калі для любога $\epsilon > 0$ ($\epsilon < H$) знойдзецца $\delta(\epsilon, t_0) > 0$ такі, што няроўнасць $|x(t, t_0, x^0)| \leq \epsilon$ выконваецца пры ўсіх $t \geq t_0$, як толькі $|x^0| \leq \delta(\epsilon, t_0)$ (мал. 2).

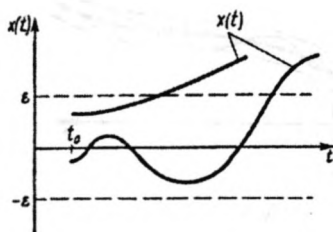
Азначэнне 3. Нулявое рашэнне $x(t) \equiv 0$ называецца няўстойлівым па Ляпунову, калі для некаторага $\epsilon > 0$ ($\epsilon < H$) і любога $\delta > 0$ знойдуцца рашэнне $x(t, t_0, x^0)$ і момант часу $t_1 > t_0$ такія, што $|x(t_1, t_0, x^0)| > \epsilon$, хоць $|x^0| \leq \delta$ (мал. 3).

Узмацненнем паняцця ўстойлівасці з'яўляецца ўстойлівасць, раўнамерная па пачатковаму моманту часу.

Азначэнне 4. Рашэнне $x(t) \equiv 0$ называецца раўнамерна ўстойлівым па t_0 ($t_0 \in I$), калі для любога ε ($0 < \varepsilon < H$) знойдзецца такі $\delta(\varepsilon) > 0$, незалежны ад t_0 , што $|x(t, t_0, x^0)| \leq \varepsilon$, $t \geq t_0$ ($t_0 \in I$), як толькі $|x^0| \leq \delta(\varepsilon)$.



Мал. 2



Мал. 3

Прыклад 1. Вызначыць устойліваць нулявога рашэння ўраўнення

$$\dot{x}(t) = t^{-2} x(t), \quad x(t_0) = x^0, \quad t_0 \in (0; \infty).$$

Рашэнне. Рашэнне ўраўнення будзе мець выгляд

$$x(t, t_0, x^0) = x^0 \exp(t_0^{-1} - t^{-1}).$$

У сілу таго, што $|x(t, t_0, x^0)| \leq |x^0| \exp(t_0^{-1} - t^{-1})$, для любога $\varepsilon > 0$, узяўшы $\delta(\varepsilon, t_0) = \varepsilon \exp(-t_0^{-1})$, атрымаем, што рашэнне $x(t) \equiv 0$ устойлівае ў сэнсе азначэння 2. Аднак раўнамернай устойлівасці няма, паколькі $\delta(\varepsilon, t_0) \rightarrow 0$ пры $t_0 \rightarrow 0$.

Другім узмацненнем паняцця ўстойлівасці з'яўляецца асімптатычная ўстойлівасць.

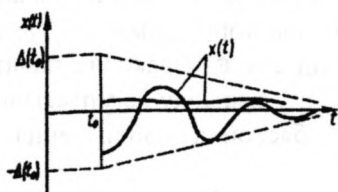
Азначэнне 5. Нулавое рашэнне $x(t) \equiv 0$ сістэмы (1) называецца асімптатычна ўстойлівым, калі:

1⁰. Яно ўстойлівае па Ляпунову.

2⁰. Для ўсякага $t_0 \in I$ існуе $\Delta = \Delta(t_0) > 0$ такі, што

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t, t_0, x^0)| = 0 \text{ пры } |x^0| \leq \Delta \text{ (мал. 4).}$$

Мноства $\Omega(t_0) \subset R^n$ усіх тых пачатковых умоў x^0 , для якіх



$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, t_0, x^0) = 0$, называюць абсягам прыцягнення нулявога рашэння ў пачатковы момант t_0 .

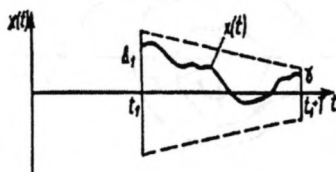
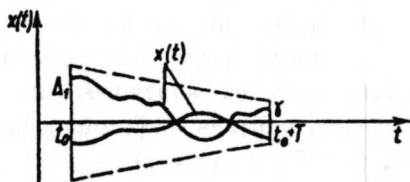
Калі $\Omega(t_0) = R^n$, то кажуць, што рашэнне $x(t) \equiv 0$ асімптатычна ўстойлівае ў цэлым (або глабальна асімптатычна ўстойлівае).

Мал. 4

Калі выконваецца толькі ўмова 2⁰ з азначэння 5, то будзем казаць, што нулявое рашэнне з'яўляецца прыцягальным (або атрактам). Наогул кажучы, з прыцягнення не вынікае ўстойлівасць. Аднак для скалярнага звычайнага дыферэнцыяльнага ўраўнення з прыцягнення заўсёды вынікае ўстойлівасць.

Практыкаванне 1. Прывесці прыклад сістэмы, для якой гэта не мае месца.

Азначэнне 6. Нулявое рашэнне сістэмы (1) называецца раўнамерна асімптатычна ўстойлівым, калі яно раўнамерна ўстойлівае і для любога ліку $\gamma > 0$ знойдуцца лікі Δ_γ ($0 < \Delta_\gamma < H$) і $I(\gamma)$ такія, што $|x(t, t_0, x^0)| \leq \gamma$ пры $t \geq t_0 + I(\gamma)$, $|x^0| \leq \Delta_\gamma$ (мал. 5).

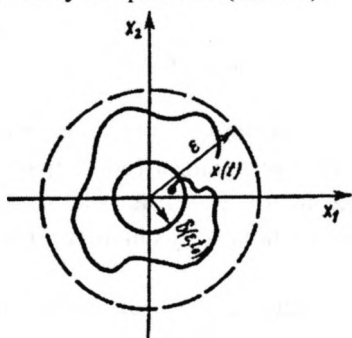


Мал. 5

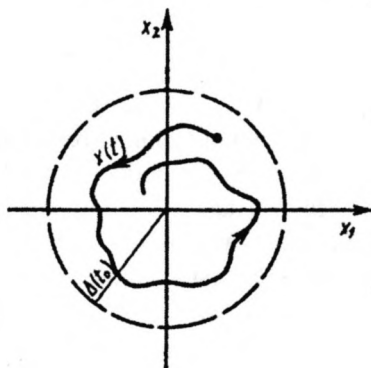
Устойлівасць нулявога рашэння дапускае зручнае геаметрычнае паясненне не толькі ў $(n+1)$ -мернай прасторы змен-

ных t, x , але і ў n -мернай фазавай прасторы зменных x .

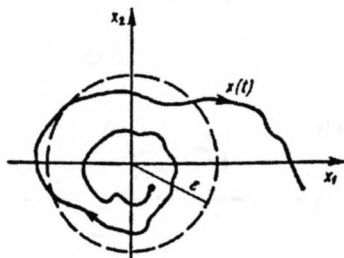
Геаметрычнае паняцце ўстойлівасці нулявога рашэння сістэмы (1) азначае наступнае: для любога $\varepsilon > 0$ знайдзецца $\delta > 0$ такі, што фазавая траекторыя, якая пачынаецца ў δ -наваколлі пачатку каардынат (нулявое рашэнне ў фазавай прасторы адлюстроўваецца пунктам – пачаткам каардынат), не выйдзе з ε -наваколля пачатку каардынат пры ўсіх $t > 0$ (мал. 6, $n = 2$); у выпадку асімптатычнай ўстойлівасці траекторыя пры $t \rightarrow \infty$ бясконца набліжаецца да пачатку каардынат (мал. 7).



Мал. 6



Мал. 7



Мал. 8

Фазавы партрэт няўстойлівай траекторыі адлюстраваны на мал. 8. Акрамя прыведзеных азначэнняў ўстойлівасці, існуюць і іншыя, такія, як экспаненцыяльная ўстойлівасць, абсалютная ўстойлівасць, ўстойлівасць на канечным інтэрвале часу, арбітальная ўстойлівасць і г.д. (гл. [7], с. 549, с. 562).

Прыклад 2. Карыстаючыся азначэннем ўстойлівасці па Ляпунову, устанавіць, ці будзе ўстойлівым рашэнне ўраўнення $\dot{x} = kx$ ($k = \text{const}$) з пачатковай умовай $x(t_0) = x_0$.

Рашэнне. Дадзенае ўраўненне мае рашэнне

$$x = x_0 e^{k(t-t_0)} \quad (4)$$

з пачатковымі дадзенымі (t_0, x_0) .

Пры $k \leq 0$ рашэнне (4) будзе ўстойлівым па Ляпунову, таму што пры ўсіх $t \geq t_0$

$$\left| x_1 e^{k(t-t_0)} - x_0 e^{k(t-t_0)} \right| = e^{k(t-t_0)} |x_1 - x_0| \leq |x_1 - x_0| < \varepsilon,$$

пры $|x_1 - x_0| < \delta = \varepsilon$.

Калі $k < 0$, то $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{k(t-t_0)} |x_1 - x_0| = 0$, і таму рашэнне асімптатычна ўстойлівае.

Калі $k = 0$, то пры $x_1 \neq x_0$ рознасць $|x_1 - x_0|$ не імкнецца да нуля пры $t \rightarrow +\infty$, гэта значыць рашэнне $x = x_0$ устойлівае па Ляпунову, але не асімптатычна.

Пры $k > 0$ і $x_1 \neq x_0$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{k(t-t_0)} |x_1 - x_0| = +\infty,$$

таму рашэнне $x = x_0 e^{k(t-t_0)}$ няўстойлівае.

Прыклад 3. Карыстаючыся азначэннем устойлівасці па Ляпунову, паказаць, што рашэнне сістэмы

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x, \quad (5)$$

якое задавальняе пачатковым умовам $x(0) = 0, y(0) = 0$, устойлівае.

Рашэнне. Любое рашэнне сістэмы (5), якое задавальняе пачатковым умовам $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, мае выгляд (гл. главу III)

$$x(t) = x_0 \cos t - y_0 \sin t, \quad y(t) = x_0 \sin t + y_0 \cos t.$$

Рашэнне сістэмы (5), якое задавальняе пачатковым умовам $x(0) = x_0 = 0, y(0) = y_0 = 0$, ёсць $x(t) \equiv 0, y(t) \equiv 0$. Возьмем адвольны $\varepsilon > 0$ і пакажам, што існуе $\delta(\varepsilon) > 0$ такі, што пры $|x_0 - 0| < \delta, |y_0 - 0| < \delta$ маюць месца няроўнасці

$$|x(t) - 0| = |x_0 \cos t - y_0 \sin t| < \varepsilon,$$

$$|y(t) - 0| = |x_0 \sin t + y_0 \cos t| < \varepsilon \quad \text{для ўсіх } t \geq 0.$$

Гэта значыць, згодна з азначэннем 2, што нулявое рашэнне $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$ сістэмы (5) устойлівае па Ляпунову. Відавочна, што

$$\begin{aligned} |x_0 \cos t - y_0 \sin t| &\leq |x_0 \cos t| + |y_0 \sin t| \leq |x_0| + |y_0|, \\ |x_0 \sin t + y_0 \cos t| &\leq |x_0 \sin t| + |y_0 \cos t| \leq |x_0| + |y_0| \end{aligned} \quad (6)$$

для ўсіх t .

Таму, калі $|x_0| + |y_0| < \varepsilon$, тады і тым больш

$$|x_0 \cos t - y_0 \sin t| < \varepsilon, \quad |x_0 \sin t + y_0 \cos t| < \varepsilon \quad (7)$$

для ўсіх t .

Такім чынам, калі, напрыклад, выбраць $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$, тады пры

$|x_0| < \delta$ і $|y_0| < \delta$ у сілу (6) будуць мець месца няроўнасці (7) для ўсіх $t \geq 0$, гэта значыць нулявое рашэнне сістэмы (5) устойлівае па Ляпунову, але не асімптатычна.

§ 2. Устойлівасць лінейных стацыянарных сістэм з пастаяннымі каэфіцыентамі

Разгледзім сістэму з n дыферэнцыяльных ураўненняў

$$\dot{x} = Ax, \quad (8)$$

дзе $A = \begin{pmatrix} a_{ij}, j = \overline{1, n} \\ i = \overline{1, n} \end{pmatrix}$ – пастаянная сапраўдная матрыца.

Няхай $\lambda_k = \mu_k + i\nu_k$, $k = \overline{1, m}$, $m \leq n$ – уласныя значэнні матрыцы A .

Маюць месца

Лема 1. Калі ўсе ўласныя значэнні матрыцы A маюць адмоўныя сапраўдныя часткі, то для любога рашэння $x = \varphi(t)$ сістэмы (8) існуюць такія дадатныя пастаянныя α, R , што пры $t \geq 0$

$$|\varphi(t)| \leq R e^{-\alpha t}.$$

Лема 2. Калі ўсе ўласныя значэнні матрыцы A маюць адмоўныя сапраўдныя часткі, то для рашэння $\varphi(t, x^0)$ сістэмы (8), якое задавальняе пачатковай умове $\varphi(0, x^0) = x^0$, існуюць такія пастаянныя $r > 0$ і $\alpha > 0$, што пры $t \geq 0$

$$|\varphi(t, x^0)| \leq r |x^0| e^{-\alpha t}.$$

Крытэрыў устойлівасці становішча раўнавагі $x = 0$ сістэмы (8) устанаўліваецца наступнай тэарэмай.

Тэарэма 1. Для таго, каб становішча раўнавагі $x = 0$ сістэмы (8) было асімптатычна ўстойлівым, неабходна і дастаткова, каб усе ўласныя значэнні матрыцы A мелі адмоўныя сапраўдныя часткі.

Заўвага 1. Для ўстойлівасці па Ляпунову становішча раўнавагі $x = 0$ сістэмы (8) неабходна і дастаткова, каб усе ўласныя значэнні λ_i матрыцы A задавальнялі ўмове $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$, прычым уласныя значэнні λ_i , для якіх $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$, мелі простыя элементарныя дзельнікі.

Практыкаванне 1. Прывесці прыклад сістэмы (8) другога парадку, калі ўласныя значэнні маюць недадатныя сапраўдныя часткі, а становішча раўнавагі $x = 0$ няўстойлівае па Ляпунову.

Практыкаванне 2. Выкарыстоўваючы тэарэму 3.4 аб прадстаўленні рашэнняў сістэмы (8), даказаць сцвярджэнне, сфармуляванае ў заўвазе 1.

Такім чынам, пры даследаванні асімптатычнай устойлівасці становішча раўнавагі $x = 0$ сістэмы (8) важна мець магчымасць устанавіць, што ўсе ўласныя значэнні сапраўднай матрыцы A , гэта значыць усе карані яе характарыстычнага палінома, маюць адмоўныя сапраўдныя часткі.

Прывядзём вядомыя з алгебры ўмовы адмоўнасці сапраўдных частак усіх каранёў паліномаў з сапраўднымі каэфіцыентамі.

1⁰. *Крытэрыі Рауса-Гурвіца* (гл. [25], глава XVI, § 6, с. 457).

Для таго, каб у палінома $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ з сапраўднымі каэфіцыентамі ўсе карані мелі адмоўныя сапраўдныя часткі, неабходна і дастаткова, каб усе галоўныя міноры матрыцы

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

(дзе $a_k = 0$, калі $k > n$) былі дадатнымі, гэта значыць, каб наступныя дэтэрмінанты падпарадкоўваліся ўмовам:

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \dots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \dots & a_n \end{vmatrix} = \Delta_{n-1} \cdot a_n > 0. \quad (9)$$

Апошнюю ўмову можна замяніць умовай $a_n > 0$.

2⁰. *Крытэрыі Лъенара-Шыпара* (гл. [25], глава XVI, § 13, с. 477). Неабходныя і дастатковыя ўмовы для таго, каб паліном $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ з сапраўднымі каэфіцыентамі меў усе карані з адмоўнымі сапраўднымі часткамі, могуць быць запісаны ў любым з наступных чатырох відаў:

- 1) $a_n > 0, a_{n-2} > 0, \dots; \Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \dots,$
- 2) $a_n > 0, a_{n-2} > 0, \dots; \Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \dots,$
- 3) $a_n > 0, a_{n-1} > 0, a_{n-3} > 0, \dots; \Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \dots,$
- 4) $a_n > 0, a_{n-1} > 0, a_{n-3} > 0, \dots; \Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \dots,$

дзе $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ задаюцца формуламі (9).

Адзначым, што ўмовы 1) – 4) маюць вядомую перавагу перад умовамі Рауса-Гурвіца, паколькі яны змяшчаюць амаль удвая менш дэтэрмінантных няроўнасцяў. З двух набораў дэтэрмінантных няроўнасцяў $\Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \dots$ і $\Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \dots$ практычна лепшы той, які запісваецца ў выглядзе $\Delta_{n-1} > 0, \Delta_{n-3} > 0, \dots$, таму што ён змяшчае дэтэрмінант меншага парадку.

3°. *Крытэрыі Міхайлава* (гл. [38], глава I, § 5, с. 32). Гэты крытэрыі дазваляе вырашыць пытанне аб размяшчэнні каранёў сапраўднага палінома $f(z)$ на камплекснай плоскасці.

Дапусцім, $z = i\omega$. Будзем мець

$$f(i\omega) = u(\omega) + iv(\omega),$$

дзе

$$u(\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \dots,$$

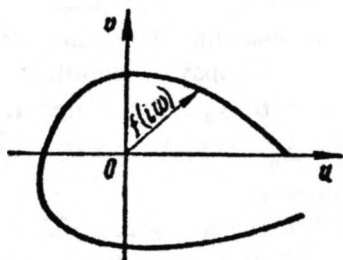
$$v(\omega) = a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + \dots$$

Велічыню $f(i\omega)$, так званы гадограф Міхайлава, пры зададзеным значэнні параметра ω можна адлюстравать у выглядзе вектара на камплекснай плоскасці u, v з пачаткам у пачатку каардынат.

Пры змяненні ω у інтэрвале $(-\infty, +\infty)$ канец гэтага вектара апіша нейкую крывую – так званую крывую Міхайлава. З-за таго, што функцыя $u(\omega)$ цотная, крывая Міхайлава сіметрычная адносна восі Ou , і таму дастаткова будаваць частку крывой, адпаведную змяненню параметра ω ад 0 да $+\infty$. Калі паліном $f(z)$ ступені n мае m каранёў з дадатнай сапраўднай часткай і $n-m$ каранёў з адмоўнай, то вугал φ павароту вектара $f(i\omega)$ пры змяненні ω ад 0 да $+\infty$ роўны $\varphi = (n-2m)\frac{\pi}{2}$. Крытэрыі Міхайлава фармулюецца так:

для таго, каб сапраўдны паліном

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$



меў усе карані з адмоўнымі сапраўднымі часткамі, неабходна і дастаткова, каб: 1) вектар $f(i\omega)$ пры змяненні ω ад 0 да $+\infty$ зробіў паварот на вугал $\varphi = n \frac{\pi}{2}$, гэта значыць зробіў $\frac{n}{4}$ абаротаў супраць

Мал. 9 гадзіннай стрэлкі;

2) гадэграф $f(i\omega)$ пры змяненні ω ад 0 да $+\infty$ не праходзіў праз пачатак каардынат $(0,0)$.

Адсюль вынікае, што для адмоўнасці сапраўдных частак усіх каранёў $f(z)$ неабходна, каб усе карані ўраўненняў $u(\omega) = 0$, $v(\omega) = 0$ былі сапраўднымі і чаргаваліся адзін з другім, гэта значыць паміж любымі двума каранямі аднаго ўраўнення павінен знаходзіцца корань другога ўраўнення.

Прыклад 1. Даследаваць на ўстойлівасць рашэнні сістэмы ўраўненняў

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x + 5y, \quad \frac{dy}{dt} = -x + 2y.$$

Рашэнне. Уласныя лікі матрыцы каэфіцыентаў сістэмы вызначаюцца з ураўнення

$$\begin{vmatrix} \alpha - \lambda & 5 \\ -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{або} \quad \lambda^2 - (2 + \alpha)\lambda + 2\alpha + 5 = 0.$$

Згодна з формуламі Віета, якія вызначаюць сувязь паміж каранямі квадратнага ўраўнення і яго каэфіцыентамі, маем, што $\lambda_1 + \lambda_2 = 2 + \alpha$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 2\alpha + 5$. Калі $2 + \alpha < 0$ і $2\alpha + 5 > 0$ адначасова, то карані гэтага ўраўнення маюць адмоўныя сапраўдныя часткі. Гэта значыць, што пры $-2,5 < \alpha < -2$ рашэнні дадзенай сістэмы ўраўненняў асімптатычна ўстойлівыя. Калі $2\alpha + 5 < 0$, гэта значыць $\alpha > -2,5$ або $\alpha > -2$, то характарыстычнае ўраўненне мае

адзін дадатны карань або пару камплексных каранёў з дадатнай сапраўднай часткай. У гэтым выпадку рашэнні дадзенай сістэмы няўстойлівыя.

Пры $\alpha = -2,5$ адзін з каранёў роўны нулю, а другі роўны $-0,5$. У гэтым выпадку рашэнні ўстойлівыя.

Рашэнні будуць устойлівымі і пры $\alpha = -2$, таму што карані характарыстычнага ўраўнення – уяўныя.

Прыклад 2. Пры якіх значэннях параметра a рашэнні сістэмы дыферэнцыяльных ураўненняў

$$\frac{dx}{dt} = z, \quad \frac{dy}{dt} = -3x, \quad \frac{dz}{dt} = ax + 2y - z$$

асімптатычна ўстойлівыя ?

Рашэнне. Характарыстычнае ўраўненне мае выгляд

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ -3 & -\lambda & 0 \\ a & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{або} \quad \lambda^3 + \lambda^2 - a\lambda + 6 = 0. \quad \text{Па крытэрыю}$$

Рауса-Гурвіца ўмовамі асімптатычнай устойлівасці будуць $a_1 > 0$, $a_1 a_2 - a_3 > 0$, $a_3 > 0$ (гл. (9)). Для нашага палінома $-a - 6 > 0$, адкуль $a < -6$. Гэта значыць, што пры $a < -6$ рашэнні дадзенай сістэмы асімптатычна ўстойлівыя.

Прыклад 3. Даследаваць на ўстойлівасць нулявое рашэнне ўраўнення $y^{IV} + 5y''' + 13y'' + 19y' + 10y = 0$.

Рашэнне. Характарыстычнае ўраўненне мае выгляд

$\lambda^4 + 5\lambda^3 + 13\lambda^2 + 19\lambda + 10 = 0$. Тут $a_1 = 5$, $a_2 = 13$, $a_3 = 19$, $a_4 = 10$. Выпішам галоўныя міноры, карыстаючыся ўмовамі Льена-Ра-Шыпара 1):

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 19 & 13 & 5 \\ 0 & 10 & 19 \end{vmatrix} = 424 > 0, \quad \Delta_1 = 5 > 0.$$

Нулявое рашэнне дадзенага ўраўнення асімптатычна ўстойлівае.

Прыклад 4. Даследаваць на ўстойлівасць нулявое рашэнне $y \equiv 0$ ураўнення $y^{IV} + y''' + 4y'' + y' + y = 0$, карыстаючыся крытэрыем Міхайлава.

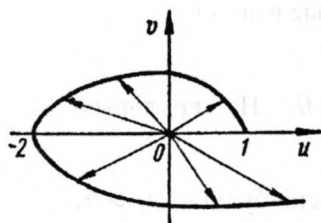
Рашэнне. Складзём характарыстычны паліном

$$f(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda + 1.$$

Далей $f(i\omega) = \omega^4 - i\omega^3 - 4\omega^2 + i\omega + 1 = u(\omega) + iv(\omega)$,

дзе $u(\omega) = \omega^4 - 4\omega^2 + 1$, $v(\omega) = -\omega^3 + \omega = \omega(1 - \omega)(1 + \omega)$.

Пабудуем кривую $\begin{cases} u = u(\omega), \\ v = v(\omega), \end{cases} 0 \leq \omega < +\infty$ (мал. 10) $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{v}{u} = 0$.



ω	0	$\sqrt{2 - \sqrt{3}}$	1	$\sqrt{2 + \sqrt{3}}$
u	1	0	-2	0
v	0	+	0	-1

Вугал павароту радыус-вектара

Мал. 10 $\varphi = 4 \frac{\pi}{2} = (n - 2m) \frac{\pi}{2}$. Адсюль $n - 2m = 4$, і

пры $n = 4$, $m = 0$, гэта значыць, што ўсе карані характарыстычнага ўраўнення ляжаць у левай паўплоскасці. Адкуль рашэнне $y \equiv 0$ асімптатычна ўстойлівае.

§ 3. Другі метад Ляпунова

Універсальным метадам даследавання ўстойлівасці розных класаў сістэм з дапамогай адпаведным чынам падабранай функцыі, так званай функцыі Ляпунова, з'яўляецца метад функцый Ляпунова. Пры гэтым не патрабуецца веданне рашэнняў сістэмы. Гэты метад яшчэ называюць другім метадам Ляпунова.

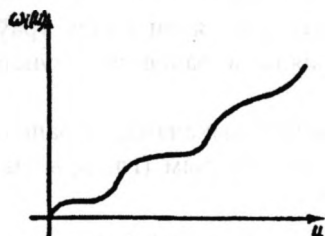
Прывядзём наступныя азначэнні.

Азначэнне 1. Функцыяй Ляпунова называюць сапраўдную непарыўна дыферэнцавальную функцыю $V(t, x)$, $V: I \times D_H \rightarrow R^1$, якая задавальняе ўмове $V(t, 0) \equiv 0$.

Азначэнне 2. Вытворнай $\dot{V}$ функцыі $V(t, x)$ у сілу сістэмы (1) называюць велічыню

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(t, x). \quad (10)$$

Калі $x = x(t)$ ёсць рашэнне сістэмы (1), то $\dot{V}$ уяўляе сабой поўную вытворную па часу складанай функцыі $V(t, x(t))$. Адзначым, што для вылічэння $\dot{V}$ фактычнага ведання рашэння $x(t)$ не патрабуецца.



Абзначым праз $\omega_i(u)$ ($u \geq 0$, $i = 1, 2, 3, 4$) скалярныя непарыўныя неспадальныя функцыі такія, што $\omega_i(0) = 0$ і $\omega_i(u) > 0$ пры $u > 0$ (мал. 11). Мае месца

Тэарэма 2 (першая тэарэма Ляпунова). Няхай існуе функцыя Ляпунова $V(t, x)$ такая, што

Мал. 11

$$\omega_1(|x|) \leq V(t, x), \quad (11)$$

$$\dot{V} \leq 0. \quad (12)$$

Тады нулявое рашэнне сістэмы (1) будзе ўстойлівым па Ляпунову. Функцыі $V(t, x)$, што задавальняюць умове (11), называюць дадатна вызначанымі. Вытворная $\dot{V}$, што задавальняе ўмове (12), называецца знакаадмоўнай.

А.М. Ляпуноў карыстаўся іншым, эквівалентным (11), азначэннем такіх функцый [48].

Тэарэма 3 (тэарэма К.П. Персіцкага). Калі ў дадатак да ўмоў тэарэмы 2 выконваецца няроўнасць

$$V(t, x) \leq \omega_2(|x|), \quad (13)$$

тады нулявое рашэнне сістэмы (1) раўнамерна ўстойлівае па пачатковаму моманту t_0 .

Пра функцыі Ляпунова, якія задавальняюць умове (13), будзем казаць, што яны дапускаюць бясконца малы вышэйшы ліміт.

Першапачаткова выкарыстоўвалася іншае эквівалентнае азначэнне [48].

Тэарэма 4 (другая тэарэма Ляпунова). Няхай існуе функцыя Ляпунова $V(t, x)$ такая, што

$$\omega_1(|x|) \leq V(t, x) \leq \omega_2(|x|), \quad (14)$$

$$\dot{V}(t, x) \leq -\omega_3(|x|). \quad (15)$$

Тады нулявое рашэнне сістэмы (1) раўнамерна асімптатычна ўстойлівае.

У класічнай рабоце А.М.Ляпунова [48] тэарэма 4 сфармулявана так: няхай існуе дадатна вызначаная функцыя $V(t, x)$, што дапускае бясконца малы вышэйшы ліміт, вытворная якой у сілу ўраўненняў (1) адмоўна вызначаная. Тады трывіяльнае рашэнне ўраўнення (1) асімптатычна ўстойлівае.

Калі не меркаваць, што няроўнасць (13) выканана, то рашэнне $x(t) \equiv 0$ можа не быць асімптатычна ўстойлівым (гл. прыклад Х.Л.Масэра, [38], глава I, § 2, с. 18 – 19).

Тэарэма 5 (тэарэма Я.А.Барбашына, М.М.Красоўскага).

Няхай выкананы ўсе ўмовы тэарэмы 4 і, акрамя таго,

$$\omega_1(u) \rightarrow \infty, \quad u \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Тады рашэнне $x(t) \equiv 0$ сістэмы (1) асімптатычна ўстойлівае ў цэлым.

Адзначым, што пры парушэнні ўмовы (16) асімптатычнай устойлівасці ў цэлым можа і не быць (гл. [49], глава I, § 3, с. 22 – 23).

Сфармулюем цяпер адну тэарэму аб няўстойлівасці. Возьмем непарыўна дыферэнцавальную функцыю $V(t, x)$ і абзначым праз

Q абсяг віду $Q = \{|x| < H, V(t, x) > 0\}$. Дапусцім, што абсяг Q валодае наступнымі ўласцівасцямі:

а) Q складаецца з некалькіх звязных адкрытых кампанент;

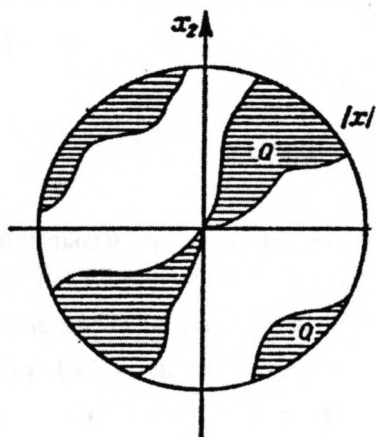
б) у Q ёсць пункты x з адвольна малой нормай $|x|$ (мал. 12).

Тэарэма 6 (тэарэма Чэтаева). Няхай існуе функцыя $V(t, x)$

такая, што абсяг $Q = \{|x| < H, V(t, x) > 0\}$ задавальняе ўмовам а) і б). Тады, калі ў абсягу Q функцыя $V(t, x)$ абмежаваная, а яе вытворная ў сілу сістэмы (1) дадатна вызначаная (гэта значыць

$$\dot{V}(t, x) \geq \omega_4(|x|), \quad x \in Q),$$

то нулявое рашэнне сістэмы (1) няўстойлівае.



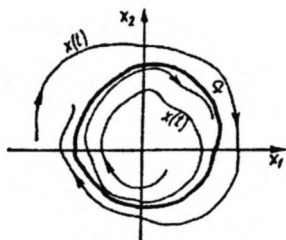
Мал. 12

Прыведзеныя вышэй тэарэмы поўнасю рашаюць большасць задач устойлівасці. Аднак іх прымяненне ў шэрагу выпадкаў ускладняецца цяжкасцю пабудовы функцый Ляпунова, што задавальняюць умовам гэтых тэарэм. Прывядзем цяпер тэарэму, якая выкарыстоўвае больш простыя функцыі Ляпунова. Разгледзім аўтаномную сістэму

$$\dot{x}(t) = f(x), \quad f(0) = 0, \quad x \in R^n, \quad (17)$$

$$x(t_0) = x^0.$$

Рашэнне сістэмы (17) абазначым праз $x(t, x^0)$. Пункт $y \in R^n$ будзем называць ω -лімітавым для пункта x^0 , калі існуе паслядоўнасць $\{t_n\}$, $t_n \rightarrow \infty$ такая, што $y = \lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n, x^0)$. Пакажам,



Мал. 13

што мноства Ω усіх лімітавых пунктаў

дадзенага пункта x^0 ёсць замкнутае мноства, якое складаецца з цэлых траекторый (мал. 13). Замкнутасць мноства Ω праверым наступным чынам.

Калі $y^* = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n, y_n \in \Omega$, то $y_n = \lim_{k \rightarrow \infty} x(t_{n_k}, x^0)$ і таму $y^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} x(t_{n_k}, x^0) = \lim_{n_k \rightarrow \infty} x(t_{n_k}, x^0)$. Далей, калі $y \in \Omega$, то абавязкова $x(t, y) \in \Omega$ пры ўсіх $t \geq t_0$. Сапраўды, для любога $t > t_0$ маем

$$x(t, y) = x\left(t, \lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n, x^0)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n + t, x^0).$$

Таму $x(t, y) \in \Omega$.

Мноства, што складаецца з цэлых траекторый, называюць інварыянтным мноствам. Калі $V(x) \geq 0$ – некаторая функцыя Ляпунова, прычым $\dot{V} \leq 0$, то ўсе ω -лімітавыя пункты для дадзенага пункта x^0 ляжаць на адной паверхні ўзроўню функцыі $V(x)$, гэта значыць для $y_1, y_2 \in \Omega$ мае месца роўнасць $V(y_1) = V(y_2)$. Сапраўды, няхай $y_1, y_2 \in \Omega$. Згодна з азначэннем існуюць дзве паслядоўнасці $\{t_n\}, t_n \rightarrow +\infty$, і $\{\tau_n\}, \tau_n \rightarrow +\infty$, такія, што $x(t_n, x^0) \rightarrow y_1, x(\tau_n, x^0) \rightarrow y_2$ пры $n \rightarrow +\infty$. Выберам цяпер $\{t'_n\}$ з $\{t_n\}$ і $\{\tau'_n\}$ з $\{\tau_n\}$ такія, што $t'_n \leq \tau'_n \quad \forall n \geq 1$. Тады ў сілу няроўнасці $\dot{V}(x) \leq 0$ будзем мець:

$$V(x(t'_n, x^0)) \geq V(x(\tau'_n, x^0)).$$

Адсюль пры $n \rightarrow +\infty$ атрымліваем, што $V(y_1) \geq V(y_2)$. Аналагічна, выбіраючы паслядоўнасці $\{t''_n\}$ з $\{t_n\}$ і $\{\tau''_n\}$ з $\{\tau_n\}$ пры ўмове $t''_n \geq \tau''_n$, знаходзім $V(y_1) \leq V(y_2)$. Такім чынам, $V(y_1) = V(y_2)$ для ўсіх пунктаў y_1 і y_2 з ω -лімітавага мноства Ω .

Тэарэма 7 (тэарэма Я.А.Барбашына, М.М.Красоўскага).

Няхай існуе функцыя Ляпунова $V(x)$ такая, што $V(x) \geq \omega_1(|x|)$, $\dot{V} \leq 0$, прычым мноства $\{x: \dot{V} = 0\}$ не змяшчае цэлых траекторый сістэмы (17), акрамя пункта $x = 0$. Тады нулявое рашэнне ўраўнення (17) асімптатычна ўстойлівае.

Заўважым, што прыведзеная тэарэма 7 выконваецца і для перыядычных сістэм (1).

Практыкаванне 1. Паказаць, што тэарэма 7 мае месца, калі патрабаванне існавання функцыі $\omega_1(|x|)$ і няроўнасці $V(x) \geq \omega_1(|x|)$ замяніць умовамі $V(x) > 0$ для ўсіх $x \neq 0$ і $V(0) = 0$, пры гэтым астатнія ўмовы тэарэмы не мяняюцца.

Адзначым, што калі ўраўненне $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$ апісвае мноства $\dot{V} = 0$, то ўмова

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} f_i(x) \neq 0$$

будзе дастатковай для адсутнасці цэлых траекторый у мностве $\dot{V} = 0$.

Прыклад 1. Даследаваць, пры якіх значэннях параметраў a, b, c, d нулявое рашэнне сістэмы ўраўненняў $\frac{dx}{dt} = ax^3 + by$,

$\frac{dy}{dt} = cx + dy^5$ пры $bc < 0$ будзе ўстойлівым.

Рашэнне. Паколькі правая частка кожнага з дадзеных ураўненняў уяўляе сабой суму дзвюх функцый, адна з якіх залежыць толькі ад x , другая – толькі ад y , будзем спрабаваць адшукваць функцыю $V(x, y)$ у выглядзе $V(x, y) = V_1(x) + V_2(y)$, дзе $V_1(x)$ і $V_2(y)$ – непарыўна дыферэнцавальныя ў наваколлі пачатку каардынат функцыі, такія, што $V_1(0) = 0$, $V_2(0) = 0$.

Складзём поўную вытворную па t ад функцыі $V(x, y)$ у сілу зыходнай сістэмы. Будзем мець

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV_1}{dx}(ax^3 + by) + \frac{dV_2}{dy}(cx + dy^5).$$

Будзем патрабаваць, каб функцыя $\frac{dV}{dt}$ мела такую ж структуру, што і функцыя $V(x, y)$, гэта значыць, каб $\frac{dV}{dt}$ таксама была сумай дзвюх функцый, адна з якіх функцыя толькі ад x , другая – ад y . Для гэтага павінна выконвацца роўнасць

$$\frac{dV_1}{dx}by + \frac{dV_2}{dy}cx = 0 \quad \text{або} \quad \frac{by}{\frac{dV_2}{dy}} = -\frac{cx}{\frac{dV_1}{dx}}.$$

Апошняя роўнасць мае месца, калі выразы $\frac{by}{\frac{dV_2}{dy}}$ і $-\frac{cx}{\frac{dV_1}{dx}}$

ёсць пастаянныя, роўныя, напрыклад, 1. З роўнасцяў $\frac{dV_2}{dy} = by$ і

$$\frac{dV_1}{dx} = -cx \quad \text{знаходзім} \quad V_2(y) = \frac{by^2}{2}, \quad V_1(x) = -\frac{cx^2}{2}.$$

Функцыя $V(x, y)$ пры $bc < 0$ з'яўляецца знакавызначанай, яе вытворная мае

$$\text{выгляд} \quad \frac{dV}{dt} = -acx^4 + bdy^6.$$

Калі $a \leq 0$, $d \leq 0$, $bc < 0$, то выконваюцца ўмовы тэарэмы Ляпунова аб устойлівасці (гл. тэарэму 2). Таму пры такіх значэннях параметраў a, b, c, d нулявое рашэнне дадзенай сістэмы ўраўненняў устойлівае.

Прыклад 2. Даследаваць на ўстойлівасць нулявое рашэнне сістэмы $\dot{x} = y^3 + x^5$, $\dot{y} = x^3 + y^5$.

Рашэнне. Функцыя $V = x^4 - y^4$ задавальняе ўмовам тэарэ-

мы Чэтаева 6. Маём $V > 0$ пры $|x| > |y|$ і $\frac{dV}{dt} = 4(x^8 - y^8) -$

дадатна вызначаная функцыя ў абсягу $|x| > |y|$. У сілу гэтай тэарэмы нулявое рашэнне дадзенай сістэмы няўстойлівае.

Прыклад 3. Даследаваць на ўстойлівасць ураўненне ваган-
няў матэрыяльнага пункта пад уздзеяннем нелінейнай аднаўляльнай
сілы $f(x)$ у асяроддзі, супраціўленне якой нелінейна залежыць ад
скорасці x .

$$\ddot{x} + \varphi(\dot{x}) + f(x) = 0, \quad \varphi(0) = f(0) = 0. \quad (18)$$

Рашэнне. Запішам ураўненне (18) у выглядзе сістэмы $\dot{x} = y$,
 $\dot{y} = -f(x) - \varphi(y)$. Функцыю $V(x, y)$ будзем адшукваць у выглядзе
 $V(x, y) = A(x) + B(y)$. Вылічым вытворную гэтай функцыі па часу,
складзеную ў сілу атрыманай сістэмы. Будзем мець

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dA}{dx} y + \frac{dB}{dy} (-f(x) - \varphi(y)).$$

З умовы $\frac{dA}{dx} y - \frac{dB}{dy} f(x) = 0$ маем $\frac{y}{\frac{dB}{dy}} = \frac{f(x)}{\frac{dA}{dx}}$. З апошняй

роўнасці, прыраўняўшы, напрыклад, абедзве часткі да 1, знаходзім

$$B(y) = \frac{y^2}{2}, \quad A(x) = \int_0^x f(t) dt. \quad \text{Такім чынам, увядзём функцыю}$$

Ляпунова

$$V(x, y) = \frac{y^2}{2} + \int_0^x f(t) dt. \quad (19)$$

Няхай выконваюцца ўмовы

$$x f(x) > 0, \quad x \neq 0, \quad y \varphi(y) > 0, \quad y \neq 0. \quad (20)$$

Тады функцыя (19) з'яўляецца дадатна вызначанай, а яе вытворная
роўна $\dot{V} = -y \varphi(y)$.

Мноства $\dot{V} = 0$ у дадзеным выпадку мае выгляд $\{y = 0, x -$

адвольнае}. Але калі на некаторым рашэнні $y \equiv 0$, то і $\dot{y} \equiv 0$, а значыць, і $f(x) = 0$. Згодна з умовамі (20) пункт $x = 0$ з'яўляецца адзіным нулём функцыі $f(x)$. Значыць, ва мностве $\dot{V} = 0$ няма цэлых траекторый, акрамя пункта $x = 0$, $y = 0$.

Згодна з тэарэмай 7, нульовае рашэнне ўраўнення (18) асімптатычна ўстойлівае, калі выконваюцца няроўнасці (20).

Калі, акрамя таго, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_0^{|x|} f(t) dt = \infty$, то ў сілу тэарэм 7 і 5 нульовае рашэнне асімптатычна ўстойлівае ў цэлым.

§ 4. Устойлівасць па першаму набліжэнню

Няхай $x \equiv 0$ – становішча раўнавагі нармальнай сістэмы дыферэнцыяльных ураўненняў

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (21)$$

правая частка якой задавальняе ўмовам тэарэм існавання і адзінасці і мае выгляд

$$f(t, x) = A(t)x + F(t, x),$$

дзе $A(t)$ – матрыца, прычым

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} \frac{|F(t, x)|}{|x|} = 0.$$

Лінейную сістэму

$$\dot{x} = A(t)x$$

назваюць першым набліжэннем або лінеарызацыяй зыходнай сістэмы (21).

Адзначым, што згодна з дапушчэннямі

$$F(t, 0) = 0 \text{ і } A(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, 0), & j = \overline{1, n} \\ i = \overline{1, n} \end{pmatrix}.$$

Разгледзім выпадак, калі A – пастаянная матрыца.

Тэарэма 8 (тэарэма Ляпунова аб устойлівасці па першым набліжэнні). Няхай зададзена нармальная сістэма ўраўненняў

$$\dot{x} = Ax + F(t, x), \quad (F(t, 0) = 0), \quad (22)$$

дзе A – пастаянная матрыца, усе ўласныя значэнні якой маюць адмоўныя сапраўдныя часткі, і пры $t \geq t_0$ і дастаткова малым $|x|$

$$|F(t, x)| \leq M|x|^{1+\alpha},$$

дзе α і M – дадатныя пастаянныя. Тады становішча раўнавагі $x = 0$ сістэмы ўраўненняў (22) асімптатычна ўстойлівае.

Тэарэма 9 (тэарэма Ляпунова аб няўстойлівасці па першым набліжэнні). Няхай зададзена нармальная сістэма ўраўненняў (22), дзе A – пастаянная матрыца, якая мае хоць адно ўласнае значэнне з дадатнай сапраўднай часткай і пры $t \geq t_0$ і дастаткова малым $|x|$

$$|F(t, x)| \leq M|x|^{1+\alpha},$$

дзе α і M – дадатныя пастаянныя. Тады становішча раўнавагі $x = 0$ сістэмы ўраўненняў (22) няўстойлівае.

Практыкаванне 1. Самастойна даказаць тэарэму 9 (гл. [38], глава I, § 7, с. 48).

Прыклад 1. Разгледзім сістэму дыферэнцыяльных ураўненняў віду (22):

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - y + \frac{xy}{1+t}, \\ \dot{y} = 2x - 3y + \frac{y^2}{1+t^2}, \quad t > 0. \end{cases}$$

Пры $t > 0$ усе ўмовы тэарэмы Ляпунова аб устойлівасці па першым набліжэнні выкананы, таму што матрыца $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ мае ўласныя значэнні $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$. Таму становішча раўнавагі $x = y = 0$ будзе асімптатычна ўстойлівым.

Прыклад 2. Аварачальны рух снараду апісваецца ўраўненнямі

$$\begin{aligned} A\ddot{\beta} + A\dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta - Cn\dot{\alpha} \cos \beta &= eR \sin \beta \cos \alpha, \\ A\ddot{\alpha} \cos \beta - 2A\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta + Cn\dot{\beta} &= eR \sin \alpha, \end{aligned} \quad (23)$$

дзе α, β – некаторыя вуглы, што мяняюцца з часам, n – праекцыя вуглавой скорасці вярчэння снарада на яго вось, C – момант інерцыі снарада адносна яго восі, A – момант інерцыі адносна вертыкальнай восі, што праходзіць праз цэнтр цяжару, e – адлегласць ад цэнтра цяжару да цэнтра ціску (так называецца пункт, дзе прыкладаюцца сілы супраціўлення паветра), R – лабавое супраціўленне. Даследаваць на ўстойлівасць нулявое рашэнне ўраўненняў руху.

Рашэнне. Будзем меркаваць, што ў (23) $\sin \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$, $\sin \beta \approx \beta$, $\cos \beta \approx 1$. Адкінуўшы члены, парадку вышэй за першы, для (23), атрымаем ураўненні першага набліжэння

$$\begin{aligned} A\ddot{\beta} - Cn\dot{\alpha} &= eR\beta, \\ A\ddot{\alpha} + Cn\dot{\beta} &= eR\alpha. \end{aligned} \quad (24)$$

Характарыстычнае ўраўненне лінейнай сістэмы (24) мае выгляд

$$\begin{vmatrix} A\lambda^2 - eR & -Cn\lambda \\ Cn\lambda & A\lambda^2 - eR \end{vmatrix} = 0$$

або

$$(A\lambda^2 - eR)^2 + C^2 n^2 \lambda^2 = 0. \quad (25)$$

Ураўненне (25) мае карані

$$\lambda_{1,2,3,4} = (2A)^{-1} \left[\pm Cni \pm \sqrt{4AeR - C^2 n^2} \right]. \quad (26)$$

Калі $4AeR - C^2 n^2 > 0$, то два карані (26) маюць дадатную сапраўдную частку і рашэнне лінейнай сістэмы (24) няўстойлівае. Пры гэтым, у сілу тэарэмы 9, рашэнне нелінейнай сістэмы (23) таксама няўстойлівае.

Калі ж $4AeR - C^2 n^2 < 0$, то ўраўненне (25) мае дзве пары

чыста ўяўных каранёў. У гэтым крытычным выпадку ўраўненні першага набліжэння (24) не дазваляюць разважаць аб устойлівасці поўнай сістэмы (23).

Заўвага 1. Выкарыстоўваючы тэарэму Чэтаева, можна паказаць, што ў выпадку $4AeR - C^2 n^2 < 0$ рашэнне сістэмы (23) будзе ўстойлівым (гл. [38], глава I, § 3, с. 21 – 22).

Практыкаванне 2. Правесці поўнае даследаванне сістэмы (23) на ўстойлівасць.

Прыклад 3. Знайсці, пры якіх значэннях параметраў α і β рашэнне $x = y = z = 0$ сістэмы ўраўненняў $\frac{dx}{dt} = \alpha x - \cos y + e^{\beta z}$,

$\frac{dy}{dt} = \beta \sin x + \ln(1 + \alpha y) - xz^2$, $\frac{dz}{dt} = x^2 \cos z + \beta y + \sin \alpha z$ асімпта-тычна ўстойлівае.

Рашэнне. Ураўненні першага набліжэння, якія адпавядаюць дадзенай сістэме, маюць выгляд

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x + \beta z, \quad \frac{dy}{dt} = \beta + \alpha y, \quad \frac{dz}{dt} = \beta y + \alpha z.$$

Уласныя лікі матрыцы каэфіцыентаў апошняй сістэмы вызначацца з характарыстычнага ўраўнення

$$\begin{vmatrix} \alpha - \lambda & 0 & \beta \\ \beta & \alpha - \lambda & 0 \\ 0 & \beta & \alpha - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^3 - 3\alpha\lambda^2 + 3\alpha^2\lambda - \alpha^3 - \beta^3 = 0.$$

Для вызначэння значэнняў параметраў α і β , пры якіх сапраўдныя часткі каранёў характарыстычнага ўраўнення адмоўныя, выкарыстаем крытэрыі Рауса-Гурвіца (гл. § 2). Матрыца Гурвіца для характарыстычнага ўраўнення будзе такой:

$$\begin{pmatrix} -3\alpha & 1 & 0 \\ -\alpha^3 - \beta^3 & 3\alpha^2 & -3\alpha \\ 0 & 0 & -\alpha^3 - \beta^3 \end{pmatrix}.$$

Умовы адмоўнасці сапраўдных частак каранёў гэтага ўраўнення запішуцца ў выглядзе сістэмы няроўнасцяў

$$-3\alpha > 0, -9\alpha^3 + \alpha^3 + \beta^3 > 0, -\alpha^3 - \beta^3 > 0.$$

З гэтай сістэмы знаходзім $\alpha < 0, 2\alpha < \beta < -\alpha$. Гэта значыць, што, калі α і β задавальняюць умовам $\alpha < 0$, і $2\alpha < \beta < -\alpha$, тады рашэнне $x = y = z = 0$ зыходнай сістэмы з'яўляецца асімптатычна ўстойлівым (гл. тэарэму 8).

§ 5. Фазавая плоскасць

Даследаванне фазавога партрэта сістэмы дыферэнцыяльных ураўненняў з'яўляецца адной з задач так званай яснай тэорыі дыферэнцыяльных ураўненняў.

Разгледзім сістэму дыферэнцыяльных ураўненняў

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (27)$$

дзе $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ – непарыўна дыферэнцавальныя ў некаторым абсягу $D \in R^2$ (або ва ўсёй плоскасці) функцыі. Сістэму (27) часта называюць дынамічнай сістэмай, а каардынатную плоскасць Oxy – яе фазавай плоскасцю.

Даследаванне наваколля становішча раўнавагі сістэмы (27) – гэта лакальная задача яснай тэорыі дыферэнцыяльных ураўненняў. У асобных выпадках, даследаваўшы паводзіны фазавых крывых у наваколлі кожнага пункта раўнавагі, удаецца рашыць глабальную задачу яснай тэорыі – устанавіць паводзіны фазавых крывых сістэмы (27) на ўсёй фазавай плоскасці. У агульным выпадку гэтая задача даволі складаная.

У сістэме (27) могуць мець месца тры тыпы фазавых траекторый (гл. § 4.8): пункт, замкнутая крывая і незамкнутая крывая. Рашэнне, траекторыяй якога з'яўляецца пункт (x_0, y_0) (становішча раўнавагі), – пастаяннае $x(t) = x_0, y(t) = y_0$ для ўсіх $t \in R$. Замк-

нутая кривая адпавядае перыядычнаму рашэнню, а незамкнутая – непэрыядычнаму.

Каб пабудаваць траекторыі сістэмы (27) на фазавай плоскасці Oxy , можна або даследаваць непасрэдна паводзіны так званых асаблівых фазавых крывых гэтай сістэмы (пункт спакою, лімітавыя цыклы (гл. § 4.8) і незамкнутыя крывыя), або, падзяліўшы адно ўраўненне на другое, прывесці (27) да ўраўнення першага парадку

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}. \quad (28)$$

Траекторыі сістэмы (27) будуць інтэгральнымі крывымі ўраўнення (28). Іх можна пабудаваць, рашыўшы (28), або метадам ізаклін, пры гэтым неабходна даследаваць пункты спакою сістэмы (27).

Для даследавання пунктаў спакою сістэмы (27) патрэбна перанесці пачатак каардынат у даследуемы пункт і раскласці функцыі $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ у наваколлі гэтага пункта ў рады Тэйлара па x і y . Адкідаючы ўсе члены, пачынаючы з другога парадку, атрымаем лінейную сістэму

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_{11}x + a_{12}y, \\ \dot{y} &= a_{21}x + a_{22}y. \end{aligned} \quad (29)$$

Няхай λ_1 і λ_2 – уласныя значэнні матрыцы $\begin{pmatrix} a_{ij}, j = \overline{1, n} \\ i = \overline{1, n} \end{pmatrix}$.

Становішча раўнавагі $(0, 0)$ сістэмы (27) будзем называць нявыраджаным, калі лікі λ_1 і λ_2 не роўны паміж сабою і іх сапраўдныя часткі адрозніваюцца ад нуля. Паводзіны траекторый лінейнай сістэмы (29) былі апісаны ў § 3.8. За становішчам раўнавагі $(0, 0)$ сістэмы (27) захоўваецца назва, дадзеная ў § 3.8. Калі лікі λ_1 і λ_2 абодва сапраўдныя і адмоўныя, то становішча раўнавагі называецца ўстойлівым вузлом. Калі лікі λ_1 і λ_2 абодва сапраўдныя і дадатныя,

то становішча раўнавагі называецца няўстойлівым вузлом. Калі лікі λ_1 і λ_2 камплексна спалучаныя і маюць адмоўную сапраўдную частку, то становішча раўнавагі называецца ўстойлівым фокусам. Калі лікі λ_1 і λ_2 камплексна спалучаныя і маюць дадатную сапраўдную частку, то становішча раўнавагі называецца няўстойлівым фокусам. Калі лікі λ_1 і λ_2 сапраўдныя і маюць розныя знакі, то становішча раўнавагі называецца сядлом.

Найбольш простыя ўласцівасці паводзін траекторый паблізу становішчаў раўнавагі можна ўстанавіць, непасрэдна карыстаючыся тэарэмай 8. Так, можна сцвярджаць, што ўстойлівы вузел і ўстойлівы фокус з'яўляюцца асімптатычна ўстойлівымі становішчамі раўнавагі. Гэтае сцвярджэнне ў значнай ступені ўжо вырашае пытанне аб паводзінах траекторый паблізу вузла і фокуса. Сапраўды, калі вядома, што дадзенае становішча раўнавагі з'яўляецца асімптатычна ўстойлівым, то з пункту гледжання прыкладанняў ужо часта бывае не важна, якім менавіта чынам імкнучца да яго траекторыі.

Для прыдання больш простага віду сістэме (27) прыменім у фазавай плоскасці пераўтварэнне каардынат. Раскладаючы правыя часткі сістэмы (27) у рады Тэйлара па x і y з дакладнасцю да членаў другога парадку, атрымаем:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_{11}x + a_{12}y + F_1(x, y), \\ \dot{y} &= a_{21}x + a_{22}y + F_2(x, y),\end{aligned}\tag{30}$$

дзе астатковыя члены $F_1(x, y)$ і $F_2(x, y)$ у пункце $x = 0, y = 0$ ператвараюцца ў нуль разам са сваімі першымі вытворнымі па x і y і могуць быць запісаны ў выглядзе

$$\begin{aligned}F_1(x, y) &= r_{11}x^2 + 2r_{12}xy + r_{13}y^2, \\ F_2(x, y) &= r_{21}x^2 + 2r_{22}xy + r_{23}y^2,\end{aligned}\tag{31}$$

прычым каэфіцыенты r_{ij} гэтых «квадратычных форм» з'яўляюцца функцыямі зменных x, y , абмежаванымі паблізу пачатку каардынат. Выконваючы сапраўднае лінейнае пераўтварэнне велічынь x, y

у велічыні ξ, η , можна прывесці сістэму (30) да простага віду, прычым неабходна адрозніваць два выпадкі:

- 1) калі ўласныя значэнні λ_1 і λ_2 матрыцы $\begin{pmatrix} a_{ij}, j = \overline{1, n} \\ i = \overline{1, n} \end{pmatrix}$

сапраўдныя і розныя, тады сістэма ўраўненняў для ξ, η запісваецца ў выглядзе

$$\dot{\xi} = \lambda_1 \xi + \rho(\xi, \eta), \quad \dot{\eta} = \lambda_2 \eta + \sigma(\xi, \eta); \quad (32)$$

- 2) калі ўласныя значэнні матрыцы $\begin{pmatrix} a_{ij}, j = \overline{1, n} \\ i = \overline{1, n} \end{pmatrix}$ камплексна спалучаныя, гэта значыць маюць выгляд $\alpha + i\beta$ і $\alpha - i\beta$, то сістэма ўраўненняў для ξ, η запісваецца ў выглядзе

$$\dot{\xi} = \alpha \xi - \beta \eta + \rho(\xi, \eta), \quad \dot{\eta} = \beta \xi + \alpha \eta + \sigma(\xi, \eta). \quad (33)$$

У абодвух выпадках астаткавыя члены $\rho(\xi, \eta)$ і $\sigma(\xi, \eta)$ валодаюць тымі ж уласцівасцямі, якія былі адзначаны вышэй для функцый $F_1(x, y)$ і $F_2(x, y)$. У першым выпадку сістэма прыме выгляд (32), калі прыняць за восі напрамкі ўласных вектараў матрыцы

$$\begin{pmatrix} a_{ij}, j = \overline{1, n} \\ i = \overline{1, n} \end{pmatrix}.$$

Практыкаванне 1. Знайсці такое лінейнае пераўтварэнне каардынат x, y у каардынаты ξ, η , каб сістэма (30) прыняла выгляд адпаведна (32) або (33) (гл., напрыклад, [26], глава II, § 14, с. 98).

Прывядзём тэарэмы, якія вызначаюць паводзіны траекторый паблізу да пунктаў спакою.

Тэарэма 10. Дапусцім, што пачатак каардынат O сістэмы (27) уяўляе сабой фокус, гэта значыць уласныя значэнні матрыцы

$$\begin{pmatrix} a_{ij}, j = \overline{1, n} \\ i = \overline{1, n} \end{pmatrix} \quad \text{з'яўляюцца камплексна спалучанымі лікамі}$$

$\lambda = \alpha + i\beta$, $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$, прычым $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$. Калі $\alpha < 0$, то пры $t \rightarrow \infty$ усе траекторыі, што праходзяць паблізу пункта O , намотваюцца на пачатак каардынат O як спіралі, калі ж $\alpha > 0$, то пры $t \rightarrow -\infty$ усе траекторыі, што праходзяць паблізу пункта O , намотваюцца на пачатак каардынат O як спіралі.

Тэарэма 11. Няхай $O = (0, 0)$ – устойлівы вузел сістэмы (27) з уласнымі значэннямі λ_1 і λ_2 , прычым $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. У напрамку ўласнага вектара з уласным значэннем λ_1 правядзём праз O прамую l_1 , а ў напрамку ўласнага вектара з уласным значэннем λ_2 – прамую l_2 . Тады кожная траекторыя, што пачынаецца дастаткова блізка да пункта O , асімптатычна набліжаецца да O пры $t \rightarrow +\infty$ і мае ў пункце O датычную. Пры гэтым толькі дзве траекторыі датыкаюцца прамой l_2 , падыходзячы да пункта O з процілеглых бакоў, астатнія ж усе датыкаюцца прамой l_1 . У выпадку няўстойлівага вузла ($0 < \lambda_1 < \lambda_2$) паводзіны траекторый пры $t \rightarrow -\infty$ аналагічныя.

Практыкаванне 2. Даказаць самастойна тэарэму 11 аб паводзінах траекторый паблізу вузла (гл., напрыклад, [26], глава V, § 30, с. 261).

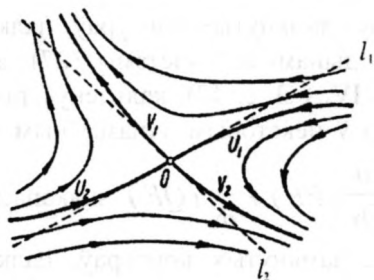
Тэарэма 12. Будзем меркаваць, што становішча раўнавагі $O = (0, 0)$ сістэмы (27) з'яўляецца сядлом. Няхай l_1 – прамая, што праходзіць праз пункт O у напрамку ўласнага вектара матрыцы

$\begin{pmatrix} a_{ij}, j = \overline{1, n} \\ i = \overline{1, n} \end{pmatrix}$ з адмоўным уласным значэннем, а l_2 – прамая, што

праходзіць праз пункт O у напрамку ўласнага вектара матрыцы

$\begin{pmatrix} a_{ij}, j = \overline{1, n} \\ i = \overline{1, n} \end{pmatrix}$ з дадатным уласным значэннем. Тады (мал. 14) існуюць роўна дзве траекторыі U_1 і U_2 сістэмы (27), якія пры $t \rightarrow +\infty$ асімптатычна набліжаюцца да пункта O . Гэтыя траекторыі разам з

пунктам O утвараюць непарыўную дыферэнцвальную кривую U , якая датыкаецца прамой l_1 у пункце O .



Мал. 14

(27), што праходзяць паблізу пункта O , паводзяць сябе, у агульным, так жа, як і ў выпадку лінейнага ўраўнення (гл. § 3.8).

Практыкаванне 3. Даказаць самастойна тэарэму 12 аб паводзінах траекторый паблізу сядла (гл., напрыклад, [26], глава V, § 30, с. 253).

Заўвага 1. У тым выпадку, калі для лінейнай сістэмы пункт $x = 0, y = 0$ з'яўляецца цэнтрам, для сістэмы (27) ён можа быць фокусам або цэнтрам. Для існавання цэнтра дастаткова, каб фазавыя крывыя мелі вось сіметрыі, якая праходзіць праз даследаванае становішча раўнавагі. Відавочна, што вось сіметрыі існуе, калі ўраўненне (28) не мяняецца пры замене x на $-x$ (або y на $-y$). Для існавання фокуса неабходна і дастаткова, каб становішча раўнавагі было асімптатычна ўстойлівым пры $t \rightarrow +\infty$ або $t \rightarrow -\infty$ (пра паняцце праблемы цэнтра і фокуса гл. [3], глава V, § 4, п. 143, с. 323, [35], глава I, с. 5).

Заўвага 2. Пры выясненні пытання існавання лімітавых цыклаў сістэмы ўраўненняў (27) часта карыстаюцца прынцыпам кольца, які быў прапанаваны Пуанкарэ (гл. прыклад 4.8.1), крытэрыем Бендзіксона, які ўказвае дастатковую ўмову адсутнасці лімітавых цыклаў (гл. [9], глава VII, § 55, с. 228): калі ў некаторым ад-

Гэтак жа сама існуюць роўна дзве траекторыі V_1 і V_2 сістэмы (27), якія пры $t \rightarrow -\infty$ асімптатычна набліжаюцца да пункта O , гэтыя траекторыі разам з пунктам O утвараюць непарыўную дыферэнцвальную кривую V , якая датыкаецца прамой l_2 у пункце

O . Астатнія траекторыі сістэмы

назв'язным абсягу на фазавай плоскасці выраз $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ знакапас-

таянны, тады ў гэтым абсягу не існуе замкнутых контураў, цалкам складзеных з фазавых траекторый дынамічнай сістэмы (27), або крытэрыем Дзюлака (гл. [39], глава IV, § 3, с. 47): калі існуе такая аналітычная функцыя $F(x, y)$, што ў некаторым адназв'язным аб-

сягу на фазавай плоскасці выраз $\frac{\partial}{\partial x}(PF) + \frac{\partial}{\partial y}(QF)$ знакапаста-

янны, то ў гэтым абсягу не існуе замкнутых контураў, цалкам складзеных з фазавых траекторый сістэмы (27).

Прыклад 1. Даследаваць тып усіх становішчаў раўнавагі сістэмы ўраўненняў

$$\frac{dx}{dt} = -2xy, \quad \frac{dy}{dt} = x^2 + y^2 - 1.$$

Рашэнне. З сістэмы алгебраічных ураўненняў $-2xy = 0$, $x^2 + y^2 - 1 = 0$ знаходзім усе становішчы раўнавагі разглядаемай сістэмы: $O_1(-1, 0)$, $O_2(1, 0)$, $O_3(0, 1)$, $O_4(0, -1)$. Характарыстычнае ўраўненне, якое адпавядае становішчу раўнавагі (x_0, y_0) , мае выгляд

$$\begin{vmatrix} -2y_0 - \lambda & -2x_0 \\ 2x_0 & 2y_0 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 4(x_0^2 - y_0^2) = 0.$$

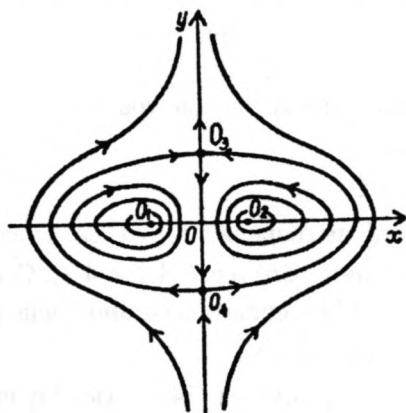
Пры $x_0 = 0$, $y_0 = \pm 1$ гэтае ўраўненне мае сапраўдныя карані розных знакаў $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$, таму становішчы раўнавагі O_3 і O_4 з'яўляюцца сёдламі. Прычым вось ардынаты складаецца з фазавых крывых, тры з якіх з'яўляюцца сепаратрысамі гэтых сёдлаў:

$$x = 0, y < -1; x = 0, -1 < y < 1;$$

$$x = 0, y > 1,$$

да таго ж сепаратрыса $x = 0$, $-1 < y < 1$ з'яўляецца агульнай для двух сёдлаў (выходзіць для сядла O_3 і ўваходзіць для сядла O_4).

Пры $x_0 = \pm 1, y_0 = 0$ карані характарыстычнага ўраўнення з'яўляюцца чыста ўяўнымі: $\lambda_{1,2} = \pm 2i$, таму становішчы раўнавагі O_1 і



Мал. 15

O_2 зыходнай сістэмы могуць быць або цэнтрамі, або фокусамі. Паколькі ўраўненне фазавых крывых

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2 - 1}{-2xy}$$

не мяняецца пры замене $y = -y$, фазавыя крывыя зыходнай сістэмы сіметрычныя адносна восі абсцыс. Адсюль вынікае, што пункты O_1 і O_2 з'яўляюцца цэнтра-

мі. Напрамак руху па замкнутых

фазавых крывых у наваколлі гэтых цэнтраў можна вызначыць наступным чынам. З другога ўраўнення сістэмы заключаем, што фазавы пункт перасякае вось абсцыс так, што $\dot{y}(t) = x^2(t) - 1$. Значыць, яго ардыната ў гэты момант узрастае, калі фазавы пункт перасякае вось абсцыс у пунктах, для якіх $|x| > 1$, і ўбывае, калі $|x| < 1$ (мал. 15).

§ 6. Прыклады даследавання сістэм дыферэнцыяльных ураўненняў, як матэматычных мадэляў, метадамі якаснай тэорыі

Прыклад 1. Кансерватыўная механічная сістэма з адной ступенню свабоды. Такая сістэма (без трэння) апісваецца ўраўненнем другога парадку

$$\ddot{x} = f(x). \quad (34)$$

Будзем меркаваць, што $f(x)$ – функцыя непарыўная разам са сваёй

вытворнай на некаторым інтэрвале $I = (a; b)$. Патэнцыяльнай энергіяй механічнай сістэмы называюць функцыю

$$U(x) = - \int_c^x f(\xi) d\xi \quad (a < c < b). \quad (35)$$

Ураўненне (34) будзе эквівалентным сістэме ўраўненняў

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p, \\ \dot{p} &= -U'(x). \end{aligned} \quad (36)$$

Патрабаванне непарыўнасці вытворнай $f'(x)$ забяспечвае існаванне рашэнняў сістэмы ўраўненняў (36) (гл. § 4.2, § 4.3). Становішчу раўнавагі $x = x_0$ ураўнення (34) адпавядае становішча раўнавагі $x = x_0$, $p = 0$ сістэмы ўраўненняў (36).

Становішча раўнавагі $x = x_0$ ураўнення (34) будзе з'яўляцца стацыянарным пунктам патэнцыяльнай энергіі $U(x)$. Сапраўды, калі $x = x_0$ – становішча раўнавагі, то $f(x_0) = 0$ і, згодна з (35), $U'(x_0) = -f(x_0) = 0$.

Дапусцім цяпер, што $f(x)$ – двойчы непарыўна дыферэнцавальная на інтэрвале $(a; b)$ функцыя. Не парушаючы агульнасці, будзем лічыць $x_0 = 0$ (гэта можна атрымаць, зрабіўшы замену зменных $y = x - x_0$). Няхай $x = 0$ – пункт строгага мінімуму патэнцыяльнай энергіі, тады ў некаторым наваколлі пункта O ($U(x) > U(0)$ пры $x \neq 0$).

Пабудуем функцыю $V(x, p) = U(x) - U(0) + \frac{p^2}{2}$, якую называюць поўнай энергіяй механічнай сістэмы. Відавочна,

$$\frac{\partial V}{\partial x} p + \frac{\partial V}{\partial p} (-U'(x)) = 0,$$

і тады, у сілу тэарэмы 2, становішча раўнавагі $x = 0$, $p = 0$ устойлівае па Ляпунову.

Няхай $x = 0$ – пункт строгага максімуму патэнцыяльнай

энергіі $U(x)$ і $f'(0) > 0$, тады $U'(0) = 0$, $U''(0) = -f'(0) < 0$.

Па формуле Тэйлара атрымаем

$$U'(x) = U'(0) + U''(0)x + \frac{1}{2}U'''(\theta x)x^2 = U''(0)x - \frac{1}{2}f''(\theta x)x^2, \\ (0 < \theta < 1).$$

Абазначыўшы $F(x) = \frac{1}{2}f''(\theta x)x^2$, сістэму (36) запішам у

выглядзе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p, \\ \dot{p} &= -U''(0)x + F(x), \end{aligned} \quad (37)$$

прычым пры дастаткова малых x

$$|F(x)| \leq M|x^2|.$$

Адпаведная (37) лінейная сістэма мае выгляд

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p, \\ \dot{p} &= -U''(0)x. \end{aligned}$$

Матрыца $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -U''(0) & 0 \end{pmatrix}$ мае сапраўдныя ўласныя значэнні

$\lambda = \pm \sqrt{-U''(0)}$, адно з якіх дадатнае. У сілу тэарэмы 9, становішча раўнавагі $x = 0$, $p = 0$ няўстойлівае.

Разгледзім цяпер ураўненне руху матэматычнага маятніка ў асяроддзі без супраціўлення

$$\ddot{x} + k \sin x = 0, \quad k - \text{дадатная пастаянная.} \quad (38)$$

Ураўненне (38) з'яўляецца частковым выпадкам ураўнення (34), таму яго можна разглядаць як ураўненне, што апісвае прамалінейны рух без трэння цела адзінкавай масы пад уздзеяннем нелінейнай пружыны.

Сістэма, адпаведная ўраўненню (38), запішацца ў выглядзе

$$\frac{dx}{dt} = p, \quad \frac{dp}{dt} = -k \sin x. \quad (39)$$

Становішчамі раўнавагі тут будуць $(0,0), (\pm\pi,0), (\pm2\pi,0), \dots$, а дыферэнцыяльнае ўраўненне фазавых траекторый сістэмы (39) мае выгляд

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{k \sin x}{p}.$$

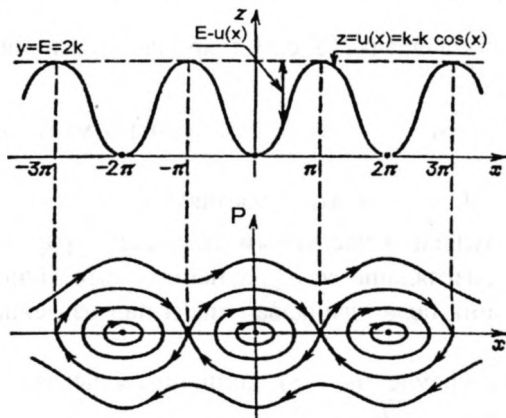
Падзяляючы зменныя ў апошнім ураўненні і інтэгруючы, атрымаем ураўненне фазавых траекторый

$$\frac{1}{2}p^2 + k(1 - \cos x) = E.$$

У апошнім ураўненні патэнцыяльная энергія, што вызначаецца формулай (35), задаецца судачыненнем

$$U(x) = \int_0^x f(\xi) d\xi = k(1 - \cos x).$$

Адлюструем у плоскасці (x, y) графік функцыі $y = V(x)$ і прамую $y = E = 2k$. Вызначыўшы значэнні $E - U(x)$ і карыстаючыся судачыненнем $y = \pm\sqrt{2(E - V(x))}$, атрымаем схематычна карціну паводзін траекторый на фазавай плоскасці (мал. 16).



Мал. 16

Атрыманы фазавы партрэт паказвае, што калі энергія E мяняецца ад 0 да $2k$, то адпаведныя фазавыя траекторыі будуць замкнутымі і ўраўненне (38) мае перыядычныя рашэнні. Калі ж $E > 2k$, то адпаведныя фазавыя траекторыі не

з'яўляюцца замкнутымі і ўраўненне (38) не мае перыядычных рашэнняў. Нарэшце, значэнню $E = 2k$ на фазавай плоскасці адпавядае фазавая траекторыя, што аддзяляе два розных тыпы рухаў, гэта значыць з'яўляецца сепаратрысай. Хвалістыя фазавыя траекторыі, размешчаныя па-за сепаратрысамі, адпавядаюць аварачальнаму руху маятніка, а замкнутыя траекторыі, размешчаныя ў абсягах, абмежаваных сепаратрысамі, – яго вагальным рухам. Пункты $(\pm 2\pi n, 0)$, дзе $n = 0, 1, 2, \dots$, з'яўляюцца цэнтрамі, а пункты $(\pm \pi n, 0)$, дзе $n = 1, 2, \dots$, – гэта пункты тыпу сядло.

Прыклад 2. Задача Жукоўскага аб палёце планёра.

Разгледзім палёт планёра ў вертыкальнай плоскасці Oxz (вось Oz накіравана ўверх). Будзем меркаваць, што сіла супраціўлення паветра прапарцыянальная квадрату скорасці палёту і вугал атакі планёра застаецца пастаянным незалежна ад рэжыму палёту. Пры такіх дапушчэннях аэрадынамічныя каэфіцыенты сілы супраціўлення паветра C_1 і пад'ёмнай сілы крылаў планёра C_2 будуць пастаяннымі. Ураўненні руху цэнтра мас планёра ў праекцыях на датычную і нармаль да яго траекторыі маюць выгляд

$$m \frac{dv}{dt} = -mg \sin \theta - \frac{1}{2} \rho S C_1 v^2,$$

$$mv \frac{d\theta}{dt} = -mg \cos \theta + \frac{1}{2} \rho S C_2 v^2.$$

Тут m – маса планёра, v – скорасць руху, θ – вугал паміж датычнай да траекторыі і воссю Ox , g – паскарэнне сілы цяжару, ρ – шчыльнасць паветра, S – плошча крылаў планёра.

Увёўшы беспамерныя велічыні

$$y = v \sqrt{\frac{\rho S C_2}{2mg}}, \quad \tau = t \sqrt{\frac{\rho g S C_2}{2mg}}, \quad a = \frac{C_1}{C_2},$$

ураўненні руху запішам у выглядзе

$$\dot{y} = -\sin \theta - ay^2, \quad \dot{\theta} = \frac{y^2 - \cos \theta}{y}, \quad (40)$$

дзе дыферэнцаванне вядзецца па беспамернаму часу τ . З ураўненняў (40) вынікае, што дынаміка палёту планёра характарызуецца адным істотным дадатным параметрам a , які роўны стасунку сілы супраціўлення руху планёра да яго пад'ёмнай сілы.

Паколькі значэнні (θ, y) і $(\theta + 2\pi, y)$ адпавядаюць аднаму і таму ж стану, фазавай прасторай разглядаемай дынамічнай сістэмы з'яўляецца паверхня цыліндра, на якім уздоўж утваральнай адкладзена велічыня y , а ўздоўж накіравальнай – вугал θ . Будзем разглядаць толькі абсяг $y \geq 0$, у якім фазавыя траекторыі сістэмы (40) задавальняюць ураўненню

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{y(\sin \theta + ay^2)}{\cos \theta - y^2}. \quad (41)$$

Інтэгральная крывая $y = 0$ з'яўляецца асаблівай фазавай траекторыяй сістэмы ўраўненняў (40) і адпавядае імгненнаму перакульванню планёра са становішча $\theta = \frac{\pi}{2}$ у становішча $\theta = -\frac{\pi}{2}$ пры ператварэнні скорасці ў нуль.

Разгледзім спачатку частковы выпадак $a = 0$, калі сілы супраціўлення адсутнічаюць і разглядаемая сістэма аказваецца кансерватыўнай. Ураўненні руху (40) у гэтым выпадку прымаюць выгляд

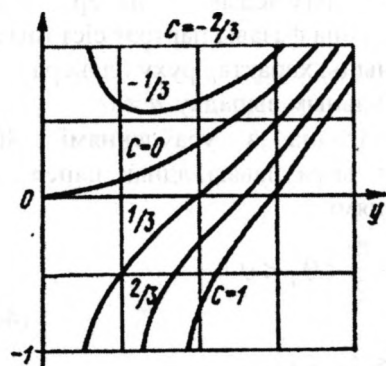
$$\dot{y} = -\sin \theta, \quad \dot{\theta} = \frac{y^2 - \cos \theta}{y}. \quad (42)$$

Адзінае становішча раўнавагі сістэмы (42) знаходзіцца ў пункце $\theta = 0$, $y = 1$ і адпавядае рэжыму гарызантальнага палёту планёра з пастаяннай скорасцю. Фазавыя траекторыі вызначаюцца судачыненнем

$$\frac{y^3}{3} - y \cos \theta = \text{const}, \quad (43)$$

якое з'яўляецца першым інтэгралам ураўнення (41) пры $a = 0$. Згодна з (43) на фазавым цыліндры знаходзяцца два іншыя асаблівыя

пункты з каардынатамі $\theta = \frac{\pi}{2}, y = 0$ і $\theta = -\frac{\pi}{2}, y = 0$. Аднак яны не будуць з'яўляцца становішчамі раўнавагі сістэмы (42), паколькі ў гэтых пунктах вытворная $\dot{y}$ не роўна нулю. Пры пастроенні інтэгральных крывых на фазавым цыліндры будзем карыстацца крывымі (43) на дапаможнай плоскасці, дзе па восях каардынат адкладзены велічыні y і $\cos \theta$ (мал. 17). Значэнню $C = -\frac{2}{3}$ адпавядае асаблівы пункт $\theta = 0, y = 1$ тыпу цэнтра. Для значэнняў C на інтэрвале $-\frac{2}{3} < C < 0$ фазавыя траекторыі ўяўляюць сабой замкнутыя крывыя,



Мал. 17.

што ахопліваюць цэнтр, і для значэнняў $C > 0$ – замкнутыя крывыя, якія ахопліваюць фазавы цыліндр. Інтэгральная крывая, якая адпавядае значэнню $C = 0$, падзяляе гэтыя два тыпы замкнутых траекторый. Яна складаецца з сепаратрыс седлавых асаблі-

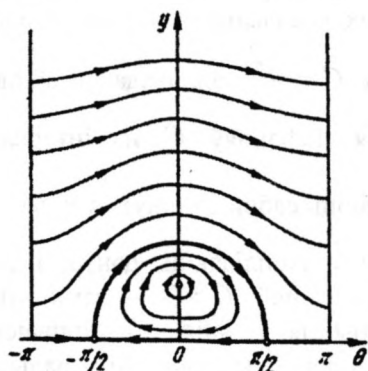
лівых пунктаў $\theta = \frac{\pi}{2}, y = 0$

і $\theta = -\frac{\pi}{2}, y = 0$, вызначаных

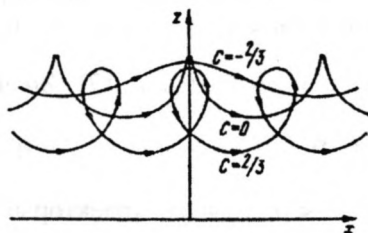
ураўненнем $y = 0, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ і

$y^2 = 3 \cos \theta$. Разбіўка фазовага цыліндра на траекторыі прыведзена на мал. 18, дзе адлюстравана разгортка цыліндра на плоскасць. Траекторыі руху планёра, якія адпавядаюць розным тыпам фазавых траекторый, прыведзены на мал. 19.

Такім чынам, рух пункта па замкнутых фазавых траекторыях, што ахопліваюць становішча раўнавагі на фазавым цыліндры, адпавядае палёту планёра па хвалістых лініях, а пры руху па крывых, што ахопліваюць фазавы цыліндр, – палёту, пры якім планёр робіць мёртвыя петлі.



Мал. 18



Мал. 19

Разгледзім цяпер, як мяняецца фазавы партрэт сістэмы а, значыць, характар руху планёра ў агульным выпадку $a \neq 0$.

Згодна з ураўненнямі (40) сістэма, як і раней, мае адно становішча раўнавагі, аднак, цяпер яго каардынаты вызначаюцца судачыненнямі

$$\begin{aligned} \theta_0 &= -\arctg a \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta_0 < 0 \right), \\ y_0 &= \frac{1}{\sqrt[4]{1+a^2}} \quad (0 < y_0 < 1). \end{aligned} \quad (44)$$

Становішча раўнавагі (44) адпавядае палёту планёра па сыходнай прамой з пастаяннай скорасцю $y_0 < 1$. Устойлівасць гэтага становішча раўнавагі вызначаецца каранямі характарыстычнага ўраўнення

$$\lambda^2 + 3a\lambda + 2 = 0,$$

адкуль вынікае, што раўнавага заўсёды ўстойлівая: пры значэннях

$$a < \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ асаблівы пункт – фокус, а пры } a > \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ – вузел.}$$

Пакажам, што ў разглядаемым выпадку на фазавым цыліндры не можа быць замкнутых фазавых траекторый ні пры якім значэнні параметра $a \neq 0$.

Для гэтага выкарыстаем крытэрыі Дзюлака (гл. заўвагу 5.1), узяўшы y ў якасці функцыі F :

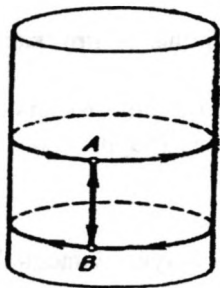
$$\frac{\partial(yP)}{\partial y} + \frac{\partial(yQ)}{\partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial y}(y \sin \theta + ay^3) + \frac{\partial}{\partial \theta}(y^2 - \cos \theta) = -3ay^2.$$

Гэты выраз ператвараецца ў нуль толькі на акружнасці $y = 0$, якая ахоплівае фазавы цыліндр. Значыць, у абсягу $y > 0$ замкнутыя фазавыя траекторыі адсутнічаюць.

Упэўнімся ў тым, што ў абсягу $y > 0$ не можа быць замкнутых траекторый, якія ахопліваюць фазавы цыліндр. Сапраўды, дапусцім, што такая траекторыя існуе. Тады, злучыўшы гэтую замкнутую фазавую крывую з інтэгральнай крывой $y = 0$ пры дапамозе

адрэзка ўтваральнай, атрымаем замкнуты контур (мал. 20), які абмяжоўвае абсяг, заключаны паміж інтэгральнымі крывымі.

Інтэграл $\int y(Pdy - Qdx)$, узяты ўздоўж гэтага контура, роўны нулю, таму што адрэзак AB на мал. 20 праходзіцца два разы (у прамым і зваротным напрамку), а астатнія ўчасткі гэтага замкнутага контура складаюцца з інтэгральных крывых. Таму



Мал. 20

выраз $\frac{\partial(yP)}{\partial y} + \frac{\partial(yQ)}{\partial x}$ павінен быць бы ў разглядаемым абсягу пера-

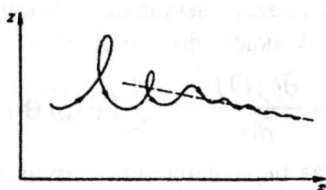
тварацца ў нуль, што немагчыма. Значыць, у выпадку $a \neq 0$ усе фазавыя траекторыі асімптатычна набліжаюцца да ўстойлівага становішча раўнавагі. Фазавы партрэт сістэмы адлюстраваны на мал. 21.

Такім чынам, калі прысутнічаюць сілы супраціўлення паветра, планёр пры любых пачатковых умовах прыходзіць да адзінага ўстойлівага раўнаважнага рэжыму. Калі пачатковая скорасць планё-

ра дастаткова вялікая, то планёр зробіць спачатку адну або некалькі мёртвых петляў, затым па хваліста згасальнай траекторыі будзе набліжацца да траекторыі прамалінейнага палёту.



Мал. 21



Мал. 22

Адна з магчымых траекторый палёту планёра паказана на мал. 22.

Прыклад 3. Лінейны асцылятар з вязкім трэннем.

Малыя ваганні асцылятара ў тым выпадку, калі сіла вязкага трэння будзе прапарцыянальнай скорасці, апісваюцца ўраўненнем

$$m\ddot{z} + h\dot{z} + kz = 0,$$

дзе m – маса, h – каэфіцыент трэння, k – каэфіцыент пругкасці асцылятара.

Электрычным аналагам гэтай сістэмы служыць вагальны контур з амічным супраціўленнем R , які задавальняе ўраўненню

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0,$$

тут q – зарад кандэнсатару, C – ёмістасць, L – індуктыўнасць. У

беспамерных велічынях $x = \frac{z}{z_0} \left(= \frac{q}{q_0} \right)$, $\tau = \sqrt{\frac{k}{m}} t \left(= t(\sqrt{LC})^{-1} \right)$,

$$2\delta = R\sqrt{\frac{C}{L}} \left(= \frac{h}{\sqrt{mk}} \right) \text{ абодва гэтыя ўраўненні запішуцца ў выглядзе}$$

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + x = 0, \quad (45)$$

дзе на гэты раз кропка азначае вытворную па τ , а не па t , як у папярэднім выпадку.

У адсутнасці вязкага трэння ($\delta = 0$) атрымліваем кансерватыўную сістэму. Фазавыя траекторыі на плоскасці $Ox\dot{x}$ уяўляюць сабой канцэнтрычныя акружнасці з цэнтрам у пачатку каардынат. Аднак для любога як патрэбна малога δ ($0 < \delta \ll 1$) у фазавым партрэце адбываюцца якасныя змяненні. Сапраўды, агульным рашэннем ураўнення (45) пры $0 < \delta \ll 1$ з'яўляецца

$$x = Ae^{-\delta\tau} \cos(\omega\tau + \alpha),$$

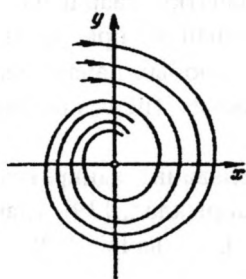
дзе $\omega = \sqrt{1 - \delta^2}$; A, α – адвольныя пастаянныя. Згодна з гэтым рашэннем параметрычныя ўраўненні траекторый на фазавай плоскасці Oxy маюць выгляд

$$\begin{aligned} x &= Ae^{-\delta\tau} \cos(\omega\tau + \alpha), \\ y &= \dot{x} = -Ae^{-\delta\tau} [\delta \cos(\omega\tau + \alpha) + \omega \sin(\omega\tau + \alpha)]. \end{aligned} \quad (46)$$

Калі ўвесці зменныя $u = \omega x$, $v = y + \delta x$, то ўраўненні фазавых траекторый на плоскасці Ouv у палярных каардынатах ρ, φ ($u = \rho \cos \varphi$, $v = \rho \sin \varphi$) прымаюць выгляд

$$\rho = \omega A e^{-\delta\tau}, \quad \varphi = -(\omega\tau + \alpha),$$

а пасля вылучэння часу τ , $\rho = C \exp \frac{\delta}{\omega} \varphi$, дзе C – новая адвольная пастаянная.



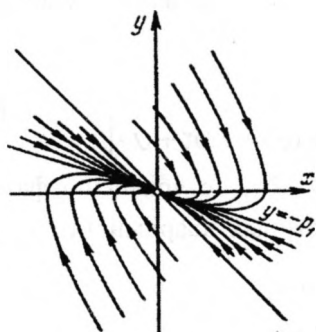
Мал. 23

Такім чынам, на плоскасці Ouv фазавымі траекторыямі служыць сямейства лагарыфмічных спіраляў з асімптатычным пунктам у пачатку каардынат. На плоскасці Oxy фазавыя траекторыі таксама ўяўляюць сабой спіралі, што скручваюцца да пачатку каардынат (мал. 23). Пры руху па любой з гэтых фазавых траекторый пункт асімптатычна (пры $t \rightarrow +\infty$) набліжаецца да пачатку каардынат, дзе знаходзіцца асаблівы пункт –

устойлівы фокус. Пункт $x = 0, y = 0$ уяўляе сабой асобную фазавую траекторыю, якая адпавядае асімптатычна ўстойліваму становішчу раўнавагі асцылятара. Калі каэфіцыент вязкага трэння дастаткова вялікі ($\delta > 1$), то агульнае рашэнне ўраўнення (45) запісваецца ў выглядзе

$$x = Ae^{+p_1 t} + Be^{+p_2 t}, \quad p_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 1} \right),$$

дзе A, B – адвольныя пастаянныя. Значыць, пры любых пачатковых



Мал. 24

ўяўляе сабой устойлівы вузел.

У гранічным выпадку ($\delta = 1$) таксама атрымліваем сямейства крывых парабалічнага тыпу, а ў пачатку каардынат – устойлівы асаблівы пункт тыпу вузла. Такім чынам, пры любых значэннях фізічных параметраў у абсягу $\delta > 0$ і любых пачатковых умовах разглядаемая сістэма выконвае згасальныя (перыядычныя або аперыядычныя) рухі.

Заўвага 1. Аб іншых прыкладах даследавання канкрэтных сістэм віду (27) метадамі якаснай тэорыі гл., напрыклад, [39], глава III, с. 40–64 [40], с. 79–230; [41], с. 80–152; [42], глава IV, § 28, с. 348; [43], глава II, § 4, с. 53 і інш.

умовах рух затухае па экспаненцыяльнаму закону. У гэтым выпадку сямейства інтэгральных крывых $(y + p_1 x)^{p_1} = C(y + p_2 x)^{p_2}$ уяўляе сабой на плоскасці Oxy дэфармаваныя парабалы, якія датыкаюцца прамой $y = -p_1 x$ (мал. 24, стрэлкамі адзначаны напрамак руху пункта). Адзіны асаблівы пункт гэтага сямейства, як і ў папярэднім выпадку, знаходзіцца ў пачатку каардынат і

§ 7. Устойлівасць лінейных нестацыянарных сістэм

1. Прывядзём спачатку галоўныя паняцці тэорыі ўстойлівасці Ляпунова ў прымяненні да лінейных сістэм. Разгледзім неаднароднае ўраўненне

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \quad (47)$$

дзе, як і раней, $A(t)$ – непарыўная $(n \times n)$ – матрыца, $f(t)$ – непарыўны n – вектар-слупок, зменная t мяняецца на дадатнай паўпрамой $R_+ = \{t \in R: t \geq 0\}$.

Няхай $t_0 \in R_+$, $x^0(y^0) \in R^n$; $x(t, t_0, x^0)$ ($x(t, t_0, y^0)$) – рашэнне сістэмы (47) з пачатковай умовай $x(t_0) = x^0$ ($x(t_0) = y^0$).

Выкарыстоўваючы § 1, увядзём наступныя азначэнні.

Азначэнне 1. Сістэму (47) назавём устойлівай, калі для любога дадатнага ліку ε і любога $t_0 \in R_+$ знойдзецца велічыня $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$, што з няроўнасці $|x^0 - y^0| < \delta$ вынікае судачыненне $|x(t, t_0, x^0) - x(t, t_0, y^0)| < \varepsilon$, справядлівае пры $t \geq t_0$. Калі лік δ можна выбраць незалежным ад $t_0 \in R_+$, то сістэма (47) называецца раўнамерна ўстойлівай.

Ясна, што з раўнамернай устойлівасці вынікае ўстойлівасць. Адваротнае, наогул кажучы, няправільна.

Прыклад 1. Разгледзім скалярнае ўраўненне

$$\dot{x} = (4t \sin t - 2t)x, \quad (48)$$

сукупнасць рашэнняў якога апісваецца формулай

$$x(t, t_0, x^0) = x^0 \exp \left[-(t^2 - t_0^2) + 4(\sin t - \sin t_0) - 4(t \cos t - t_0 \cos t_0) \right],$$

з якой вынікае, што ўраўненне (48) устойлівае. Аднак, дапускаючы $t_0 = 2\pi n$, $t = \pi + 2\pi n$, атрымаем $x(t, t_0, x^0) = x^0 \exp[\pi(4 - \pi)(4n + 1)]$.

У сілу таго, што паслядоўнасць $\{ \exp[\pi(4 - \pi)(4n + 1)] \}$ неабмежаваная, то ўраўненне (48) раўнамерна ўстойлівым не з'яўляецца.

Азначэнне 2. Сістэма (47) асімптатычна ўстойлівая, калі для любога $t_0 \in R_+$ і любых $x^0, y^0 \in R^n$ мае месца ўмова

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t, t_0, x^0) - x(t, t_0, y^0)| = 0. \quad (49)$$

Калі ліміт раўнамерны па $t_0 \in R_+$, гэта значыць для кожнага ліку $\eta > 0$ знойдзецца велічыня $N = N(\eta, x^0, y^0) > 0$, якая не залежыць ад t_0 , што $|x(t, t_0, x^0) - x(t, t_0, y^0)| < \eta$ пры $t \geq t_0 + N$, то сістэма (47) раўнамерна асімптатычна ўстойлівая.

Прыклад 2. Для скалярнага ўраўнення

$$\dot{x} = -\frac{x}{t}$$

агульнае рашэнне мае від $x(t, t_0, x^0) = \frac{x^0 t_0}{t}$ ($t \geq t_0 > 0$). Таму яно асімптатычна ўстойлівае, але не раўнамерна асімптатычна ўстойлівае.

З формулы (3.4.31') вынікае, што вектарнае ўраўненне (47) (далей проста ўраўненне) ўстойлівае, раўнамерна ўстойлівае, асімптатычна ўстойлівае, раўнамерна асімптатычна ўстойлівае тады і толькі тады, калі гэтымі ўласцівасцямі валодае адпаведнае аднароднае ўраўненне

$$\dot{x} = A(t)x. \quad (50)$$

Таму далей будзем разглядаць толькі аднародныя сістэмы (50).

У сілу таго, што адлюстраванне $x_0 \rightarrow x(t, t_0, x^0)$ для сістэмы (50) лінейнае (гл. формулу (3.4.31') пры $f \equiv 0$), то азначэнні 1 і 2 можна эквівалентным чынам перафармуляваць пры $y^0 = 0$, гэта значыць $x(t, t_0, y^0) \equiv 0$.

Адзначым, што вызначэнне ўмоў ўстойлівасці ўраўнення (50)

з'яўляецца цяжкай, дагэтуль не вырашанай да канца, задачай. Часта ў тэхнічных прыкладаннях выкарыстоўваюць так званы метад «замарожаных» каэфіцыентаў. Гэты метад заключаецца ў наступным. Пры кожным t ($t_0 \leq t < \infty$) знаходзім усе ўласныя значэнні $\lambda_i(t)$ матрыцы $A(t)$. Калі яны задавальняюць умове $\operatorname{Re} \lambda_i(t) \leq -\sigma < 0$ ($1 \leq i \leq n$, $t_0 \leq t \leq \infty$), то лічым, што сістэма (50) асімптатычна ўстойлівая. Калі ж для некаторага s выконваецца ўмова $\operatorname{Re} \lambda_s(t) \geq \sigma > 0$, то сістэма (50) няўстойлівая. Гэтыя сцвярджэнні без дадатковых меркаванняў няправільныя, што паказваюць наступныя прыклады.

Прыклад 3. Сістэма

$$\dot{x}_1 = (-1 - 9 \cos^2 6t + 6 \sin 12t)x_1 + (12 \cos^2 6t + 4,5 \sin 12t)x_2,$$

$$\dot{x}_2 = (-12 \sin^2 6t + 4,5 \sin 12t)x_1 - (1 + 9 \sin^2 6t + 6 \sin 12t)x_2$$

мае рашэнне

$$x_1(t) = Ce^{2t}(\cos 6t + 2 \sin 6t),$$

$$x_2(t) = Ce^{2t}(\cos 6t - \sin 6t),$$

дзе C – адвольная пастаянная, і таму з'яўляецца няўстойлівай. Аднак уласнымі значэннямі матрыцы $A(t)$ служаць $\lambda_1(t) = -1$, $\lambda_2(t) = -10$.

Прыклад 4. Для сістэмы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (-5,5 + 7,5 \sin 12t)x_1 + 7,5 \cos 12t \cdot x_2, \\ \dot{x}_2 &= 7,5 \cos 12t \cdot x_1 + (-5,5 - 7,5 \sin 12t)x_2 \end{aligned} \quad (51)$$

уласныя значэнні матрыцы $A(t)$ наступныя: $\lambda_1(t) = 2$, $\lambda_2(t) = -13$.

Разам з тым нармаваная фундаментальная матрыца $X(t)$ ($X(0) = E$) рашэнняў сістэмы (51) мае элементы віду

$$x_{11}(t) = 0,5e^{-t}(\cos 6t + 3 \sin 6t) + 0,5e^{-10t}(\cos 6t - 3 \sin 6t),$$

$$x_{12}(t) = \frac{1}{6}e^{-t}(\cos 6t + 3 \sin 6t) - \frac{1}{6}e^{-10t}(\cos 6t - 3 \sin 6t),$$

$$x_{21}(t) = 0,5e^{-t}(3 \cos 6t - \sin 6t) - 0,5e^{-10t}(3 \cos 6t + \sin 6t),$$

$$x_{22}(t) = \frac{1}{6}e^{-t}(3 \cos 6t - \sin 6t) + \frac{1}{6}e^{-10t}(3 \cos 6t + \sin 6t).$$

Значыць, сістэма (51) асімптатычна ўстойлівая.

У агульным выпадку мае месца наступнае сцвярдженне.

Тэарэма 13. Няхай $\mu_j(t) \leq -\delta < 0$ ($j = \overline{1, n}; t_0 \leq t < \infty$),

дзе $\mu_j(t)$ – уласныя значэнні матрыцы $H(t) = \frac{1}{2}[A(t) + A'(t)]$.

Тады сістэма (50) асімптатычна ўстойлівая.

Прыклад 5. Разгледзім сістэму (50), дзе

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 + ae^{-t} \sin t & 2 - b \sin t \\ -2 + b \cos t & -1 + ae^{-t} \cos t \end{pmatrix}. \quad (52)$$

У сілу таго, што найбольшае ўласнае значэнне матрыцы

$$H(t) = \frac{1}{2}[A(t) + A'(t)]$$
 роўна $\mu_{\max}(t) = -1 - \frac{a}{2}e^{-t}(\cos t - \sin t) + \frac{1}{2}[b^2(\cos t - \sin t)^2 + a^2e^{-2t}(\cos t + \sin t)^2]^{\frac{1}{2}}$, то пры $b < \sqrt{2}$ сіс-

тэма (50) з матрыцай (52) асімптатычна ўстойлівая.

Тэарэма 14. Сістэма (50) раўнамерна асімптатычна ўстой-
лівая тады і толькі тады, калі яна экспаненцыяльна ўстойлівая, гэта
значыць калі існуюць такія дадатныя пастаянныя C і α , што для
любых $t_0 \in R_+$, $x^0 \in R^n$ выконваецца няроўнасць

$$|x(t, t_0, x^0)| < C|x^0| \exp[-\alpha(t - t_0)] \quad (t \geq t_0). \quad (53)$$

Няхай $X(t)$ – фундаментальная матрыца сістэмы (50), нар-
маваная ў пункце $t = t_0$.

Тэарэма 15. Сістэма (50)

1) устойлівая тады і толькі тады, калі $\|X(t)\| \leq C$ для $t \geq t_0$, дзе C –
некаторая дадатная пастаянная;

2) раўнамерна ўстойлівая ў тым і толькі тым выпадку, калі

$$\|X(t)X^{-1}(\tau)\| \leq C \text{ пры любых } t \geq \tau \geq t_0;$$

3) асімптатычна ўстойлівая, тады і толькі тады, калі $\|X(t)\| \rightarrow 0$ пры $t \rightarrow \infty$;

4) раўнамерна асімптатычна ўстойлівая тады і толькі тады, калі знойдуцца дадатныя пастаянныя C і α , што $\|X(t)X^{-1}(\tau)\| \leq C \exp[-\alpha(t-\tau)]$ для $t \geq \tau \geq t_0$.

З тэарэмы 15 вынікае, што скалярнае ўраўненне $\dot{x} = a(t)x$ з непарыўнай на R_+ функцыяй $a(t)$ асімптатычна ўстойлівае тады і толькі тады, калі

$$\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \rightarrow -\infty$$

пры $t \rightarrow \infty$; раўнамерна ўстойлівае, калі і толькі калі

$$\int_{\tau}^t a(s) ds \leq M$$

для любых $t \geq \tau \geq t_0$, дзе M – дадатная пастаянная.

2. *Устойлівасць сістэм з амаль пастаяннай матрыцай.* Пад ураўненнем з амаль пастаяннай матрыцай будзем разумець лінейную сістэму

$$\dot{x} = (A + B(t))x, \quad (54)$$

у якой A – пастаянная матрыца, а непарыўная матрыца $B(t)$ задавальняе ўмове

$$\int_0^{\infty} \|B(t)\| dt = \int_0^{\infty} \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |b_{ij}(t)| dt < \infty. \quad (55)$$

У гэтым выпадку мае месца наступнае сцвярджэнне.

Тэарэма 16 (Р.Белман). Няхай сістэма $\dot{y} = Ay$ устойлівая і выконваецца ўмова (55). Тады сістэма (54) таксама ўстойлівая.

Заўвага. Аналагічна высвятляецца, што з асімптатычнай устойлівасці сістэмы $\dot{y} = Ay$ вынікае асімптатычная ўстойлівасць сістэм (54), (55).

Калі матрыца A залежыць ад t , то тэарэма 16, наогул кажучы, няправільная. Гэта пацвярджае прыклад сістэмы

$$\dot{x} = (A(t) + B(t))x, \text{ дзе}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & \sin \ln t + \cos \ln t - 2\alpha \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{-\alpha t} & 0 \end{pmatrix},$$

а α падпарадкоўваецца ўмове $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-\pi}$.

Практыкаванне 1. Паказаць, што тэарэма 16 для ўказанага прыкладу не мае месца.

У разглядаемым прыкладзе матрыца $A(t)$ такая, што сістэма (50) асімптатычна ўстойлівая, але не з'яўляецца раўнамерна ўстойлівай. Наступная тэарэма паказвае, што менавіта раўнамерная ўстойлівасць неаўтаномнай сістэмы (50) захоўваецца пры ўзрушэнні яе каэфіцыентаў, якія задавальняюць няроўнасці (55).

Тэарэма 17. Калі сістэма (50) раўнамерна ўстойлівая і матрыца $B(t)$ задавальняе ўмове (55), то ўзрушаная сістэма

$$\dot{x} = (A(t) + B(t))x \quad (56)$$

таксама раўнамерна ўстойлівая.

3. *Устойлівасць сістэм Лапа-Данілеўскага.* Разгледзім сістэму (50), для якой выконваецца ўмова камутатывнасці (3.9.63) для любых $0 \leq t_0 \leq t$ і існуе ліміт

$$A_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau.$$

Калі ўсе ўласныя значэнні $\lambda_j(A_0)$ матрыцы A_0 маюць адмоўныя сапраўдныя часткі, то сістэма (50) асімптатычна ўстойлівая.

Сапраўды, з § 3.9 вынікае, што матрыца $A(t)$ функцыянальна камутатывная, гэта значыць $A(t)A(\tau) = A(\tau)A(t)$ пры $t, \tau \in R_+$.

Таму

$$\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \cdot \int_{t_0}^s A(\tau) d\tau = \int_{t_0}^s A(\tau) d\tau \cdot \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau,$$

адкуль непасрэдна вынікае, што матрыца A_0 перастановачная з

інтэгралам $\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau$ і, значыць, з матрыцай

$$B(t) = \frac{1}{t} \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau - A_0.$$

Паколькі адвольнае рашэнне $x(t) = x(t, t_0, x^0)$ сістэмы Лапа-Данілеўскага вызначаецца формулай (гл. § 3.9)

$$x(t) = \exp \left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right) x^0 = e^{A_0 t} \cdot e^{B(t) \cdot t} x^0$$

і $\|B(t)\| \rightarrow 0$ пры $t \rightarrow \infty$, то, абазначыўшы праз α максімальны з лікаў $\operatorname{Re} \lambda_j(A_0)$ і выбраўшы $\delta > 0$ так, што $\nu = \alpha + 2\delta < 0$, можна ўказаць дадатныя велічыні N і c , для якіх

$$|x(t)| \leq c e^{(\alpha+\delta)t} e^{\delta t} |x^0| = c e^{\nu t} |x^0| \quad (t \geq N).$$

Значыць, $|x(t)| \rightarrow 0$, калі $t \rightarrow \infty$, гэта значыць сістэма (50) асімпта-тычна ўстойлівая.

4. *Устойлівасць лінейных сістэм з перыядычнымі каэфіцыентамі.* Няхай зададзена сістэма (50) з непарыўнай перыядычнай матрыцай $A(t)$ перыяду ω , гэта значыць $A(t + \omega) = A(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Абазначым праз $X(t)$ фундаментальную нармаваную пры $t = 0$ матрыцу рашэнняў ураўнення (50). Вядома (гл. § 3.7), што ўласныя значэнні ρ_j матрыцы манадрамii $X(\omega)$ называюцца мультыплікатарамі Флоке сістэмы (50), гэта значыць

$$\det(X(\omega) - \rho_j E) = 0. \quad (57)$$

Тэарэма 18. Ураўненне (50) з непарыўнай перыядычнай матрыцай $A(t)$ перыяду ω асімптатычна ўстойлівае, калі ўсе яго мультыплікатары Флоке ρ_j належаць ўнутранасці адзінкавага круга $|\rho_j| < 1$. Калі ж $|\rho_j| \leq 1$, прычым мультыплікатары ρ_l , якія ляжаць на адзінкавай акружнасці $|\rho_l| = 1$, маюць простыя элементарныя дзельнікі, то ўраўненне (50) устойлівае. У іншых выпадках ураўненне (50) няўстойлівае.

Прыклад 6. Разгледзім ураўненне другога парадку

$$\ddot{x}(t) + p(t)x(t) = 0, \quad p(t + \omega) = p(t). \quad (58)$$

Адзначым, што з дапамогай падстаноўкі $z(t) = x(t) \times$

$\times \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^t a(s) ds\right)$ да гэтага ўраўнення прыводзіцца і больш агульнае ўраўненне $\ddot{z} + a(t)\dot{z} + b(t)z = 0$.

Запішам ураўненне (58) у выглядзе сістэмы (50):

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -p(t)x, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p(t) & 0 \end{pmatrix}. \quad (59)$$

Фундаментальная матрыца $X(t)$ наступная:

$$X(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) & \psi(t) \\ \dot{\varphi}(t) & \dot{\psi}(t) \end{pmatrix}, \quad \varphi(0) = 1, \quad \dot{\varphi}(0) = 0, \quad \psi(0) = 0, \quad \dot{\psi}(0) = 1.$$

Ураўненне (57) у дадзеным выпадку мае выгляд

$$\rho^2 - a\rho + \det X(\omega) = 0. \quad (60)$$

Згодна з формуламі Віета, Астраградскага-Ліувіля і (60) атрымаем

$$\det X(\omega) = 1, \quad a = \varphi(\omega) + \dot{\psi}(\omega), \quad \rho_{1,2} = \frac{1}{2} \left(a \pm \sqrt{a^2 - 4} \right).$$

Велічыня $a = \varphi(\omega) + \dot{\psi}(\omega)$ называецца канстантай Ляпунова і вы-

значае ўстойлівасць ураўнення (58). Могуць мець месца тры выпадкі:

а) $|a| > 2$; у гэтым выпадку абодва мультыплікатары ρ_1 і ρ_2 сапраўдныя, прычым $|\rho_1| > 1$, а $|\rho_2| < 1$; у сілу тэарэмы 18 ураўненне (58) няўстойлівае;

б) $|a| < 2$; у гэтым выпадку мультыплікатары ёсць розныя камплексна-спалучаныя лікі і $|\rho_1| = |\rho_2| = 1$; ураўненне (58) устойлівае;

в) $|a| = 2$ – двухкратны карань $\rho_1 = \rho_2$; гэта крытычны выпадак, які патрабуе больш дакладнага даследавання.

Такім чынам, калі

$$|\varphi(\omega) + \psi(\omega)| < 2, \quad (61)$$

то ўраўненне (58) устойлівае. Судачыненне (61) дазваляе для кожнага канкрэтнага ўраўнення з дапамогай лікавага рашэння (гл. главу VIII) дзвюх задач Кашы знайсці $\varphi(\omega)$ і $\psi(\omega)$ і тым самым вызначыць устойлівасць ураўнення (58).

5. *Устойлівасць прыводных па Ляпунову лінейных сістэм.* Разгледзім сістэму (50). Непарыўна дыферэнцавальную функцыянальную матрыцу L , вызначаную пры $t \geq t_0$, назавём матрыцай Ляпунова, калі матрыцы $L(t), \dot{L}(t)$ абмежаваныя на $[t_0; \infty)$ і $|\det L(t)| \geq m > 0$ для ўсіх $t \geq t_0$.

З азначэння матрыцы Ляпунова вынікае, што матрыца, адваротная да матрыцы Ляпунова, таксама з'яўляецца матрыцай Ляпунова.

Лінейнае пераўтварэнне

$$x = L(t)y$$

з матрыцай Ляпунова L называюць пераўтварэннем Ляпунова. Скажам, што лінейнае аднароднае ўраўненне (50), вызначанае на прамежку $I = [t_0; \infty)$, прыводная па Ляпунову (далей каратка – прыводная), калі існуе пераўтварэнне Ляпунова, якое прыводзіць ураўненне (50) да лінейнага ўраўнення

$$\dot{y} = By, \quad (62)$$

дзе B – пастаянная матрыца.

Тэарэма 19 (тэарэма М.П.Яругіна) Лінейнае аднароднае ўраўненне (50) прыводнае тады і толькі тады, калі існуе такая фундаментальная матрыца X ураўнення (50), што

$$X(t) = L(t)e^{Bt}, \quad (63)$$

дзе L – матрыца Ляпунова, B – пастаянная матрыца.*)

Азначэнне 3. Характарыстычным паказчыкам Ляпунова (паказчыкам Ляпунова) ненулявога рашэння x сістэмы (50) назавём велічыню

$$w(x) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |x(t)|.$$

Лема 3. Пераўтварэнне Ляпунова $x = Ly$ ураўнення (50) не мяняе паказчыкаў Ляпунова адпаведных рашэнняў.

З лемы 3 непасрэдна вынікае, што калі ўраўненне (50) прыводнае да ўраўнення (62), то паказчыкі Ляпунова рашэнняў ураўнення (50) супадаюць з паказчыкамі Ляпунова адпаведных рашэнняў ураўнення (62).

Абазначым $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ ($i = \sqrt{-1}$) уласныя значэнні матрыцы B .

Лема 4. Паказчыкі Ляпунова рашэнняў прыводнага ўраўнення не перавышаюць ліку $\alpha = \max_k \operatorname{Re} \lambda_k$.

Тэарэма 20. Прыводнае лінейнае ўраўненне (50) асімптатычна ўстойлівае тады і толькі тады, калі паказчыкі Ляпунова яго рашэнняў адмоўныя.

Прыклад 7. Разгледзім сістэму другога парадку

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (2 \cos^2 t + 2 - 2 \sin 2t)x_1 - (2 \cos^2 2t + \sin 2t)x_2, \\ \dot{x}_2 &= -(2 \cos^2 2t + \sin 2t)x_1 + (2 \sin^2 t + 2 + 2 \sin 2t)x_2. \end{aligned} \quad (64)$$

Яе фундаментальную матрыцу

*) М.П.Яругіным устаноўлена таксама кананічная форма і атрыманы іншыя значныя вынікі для прыводных сістэм (гл. Еругін Н.П. Приводимые системы. – М.: Изд-во АН СССР, 1946).

$$X(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}e^t(\sin t + \cos t) & e^{5t}(\sin t - 3\cos t) \\ \frac{1}{4}e^t(\cos t - \sin t) & e^{5t}(\cos t + 3\sin t) \end{pmatrix}$$

можна записати так:

$$X(t) = L(t)e^{Bt},$$

дзе

$$L(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(\sin t + \cos t) & \sin t - 3\cos t \\ \frac{1}{4}(\cos t - \sin t) & \cos t + 3\sin t \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},$$

гэта значыць сістэма (64) з дапамогай пераўтварэння $x = L(t)y$ прыводная да лінейнай сістэмы

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_1, \\ \dot{y}_2 &= 5y_2. \end{aligned} \tag{65}$$

Паказчыкі Ляпунова рашэнняў сістэмы (65), а значыць, і рашэнняў нестацыянарнай сістэмы (64) супадаюць з лікамі 1 і 5. Таму з тэарэмы 20 вынікае, што сістэма (64) не з'яўляецца асімптатычна ўстойлівай.

Вынік, аналагічны тэарэме 20, можна сфармуляваць і для вызначэння ўстойлівасці прыводных лінейных ураўненняў (50) (гл. заўвагу 2.1).

Варыянты заданняў для самастойнай працы

- I. 1. З дапамогай азначэння ўстойлівасці па Ляпунову даследаваць на ўстойлівасць рашэнне ўраўнення $\frac{dx}{dt} = 1 + t - x$, якое задавальняе пачатковай умове $x(0) = 0$.

2. Вызначыць характар пункта спакою сістэмы $\frac{dx}{dt} = 3x + y, \frac{dy}{dt} = -2x + y$.
3. Метадам функцый Ляпунова даследаваць на ўстойлівасць нулявое рашэнне сістэмы $\frac{dx}{dt} = -3y - 2x^3, \frac{dy}{dt} = 2x - 3y^3$.
4. Даследаваць устойлівасць нулявога рашэння ўраўнення $\ddot{x} + \ddot{x} + \dot{x} + 2x = 0$.
5. Начарціць на фазавай плоскасці траекторыі сістэмы $\dot{x} = y^2 - 4x^2, \dot{y} = 4y - 8$ і даследаваць асаблівыя пункты.

II. 1. З дапамогай азначэння ўстойлівасці па Ляпунову даследаваць на ўстойлівасць рашэнне ўраўнення $\frac{dx}{dt} = t + x$, якое задавальняе пачатковай умове $x(0) = 1$.

2. Пры якіх значэннях α пункт спакою $(0,0)$ сістэмы $\frac{dx}{dt} = -3x + \alpha y, \frac{dy}{dt} = 2x + y$ устойлівы?
3. Метадам функцый Ляпунова даследаваць на ўстойлівасць трывіяльнае рашэнне сістэмы $\frac{dx}{dt} = -xy^4, \frac{dy}{dt} = x^4 y$.
4. Даследаваць на ўстойлівасць па першаму набліжэнню нулявое рашэнне сістэмы $\dot{x} = x + 2y - \sin y^2, \dot{y} = -x - 3y + x(e^{\frac{x^2}{2}} - 1)$.
5. Для ўраўнення $\ddot{x} - x = 0$ начарціць траекторыі на фазавай плоскасці. Па чарцяжы зрабіць вывады аб паводзінах рашэнняў пры $t \rightarrow +\infty$.

III. 1. З дапамогай азначэння ўстойлівасці па Ляпунову даследаваць

на ўстойлівасць рашэнне ўраўнення $\frac{dx}{dt} = 2t(x+1)$, $x(0) = 0$.

2. Ці будзе ўстойлівым пункт спакою $(0,0,0)$ сістэмы

$$\frac{dx}{dt} = -x + y + 5z, \quad \frac{dy}{dt} = -2y + z, \quad \frac{dz}{dt} = -3z ?$$

3. Ці ўстойлівае нулявое рашэнне сістэмы $\dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2$, $\dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2$, калі вядома, што $a_{11}(t) + a_{22}(t) \rightarrow b > 0$ пры $t \rightarrow +\infty$?

4. Пры якіх значэннях α будзе ўстойлівым нулявое рашэнне ўраўнення $x^{IV} + 2\ddot{x} + 2\ddot{x} + \dot{x} + 3x = 0$?

5. Даследаваць паводзіны фазавых крывых сістэмы ўраўненняў $\frac{dx}{dt} = x - y$, $\frac{dy}{dt} = 2(y - x)$.

- IV. 1. З дапамогай азначэння ўстойлівасці па Ляпунову даследаваць на ўстойлівасць рашэнне ўраўнення $\frac{dx}{dt} = -x + t^2$, $x(1) = 1$.

2. Вызначыць характар пункта спакою сістэмы $\frac{dx}{dt} = -2x + \frac{5}{7}y$, $\frac{dy}{dt} = 7x - 3y$.

3. Даследаваць на ўстойлівасць трывіяльнае рашэнне сістэмы метадам функцый Ляпунова: $\frac{dx}{dt} = x + 2xy^2$, $\frac{dy}{dt} = -2y + 4x^2y$.

4. Даследаваць устойлівасць нулявога рашэння ўраўнення $x^{IV} + 2\ddot{x} + 4\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0$.

5. Пры якіх умовах сістэма $\frac{d\rho}{dt} = f(\rho)$, $\frac{d\varphi}{dt} = 1$, дзе $f(\rho)$ – непарыўная функцыя, мае лімітавы цыкл ? Пры якіх умовах гэты цыкл устойлівы ? няўстойлівы ?

V. 1. З дапамогай азначэння ўстойлівасці па Ляпунову даследаваць

устойлівасць рашэння ўраўнення $\frac{dx}{dt} = 2 + t, x(0) = 1$.

2. Даследаваць асаблівыя пункты сістэмы $\dot{x} = 2x - y, \dot{y} = x$.

3. Даследаваць устойлівасць нулявога рашэння сістэмы, пабудаваўшы функцыю Ляпунова: $\dot{x} = x^3 - y, \dot{y} = x + y^3$.

4. Даследаваць на ўстойлівасць па першаму набліжэнню нулявое рашэнне $x = 0, y = 0$ сістэмы $\dot{x} = -2x + 8 \sin^2 y, \dot{y} = x - 3y + 4x^3$.

5. Начарціць на фазавай плоскасці траекторыі сістэмы $\dot{x} = 1 - x^2 - y^2, \dot{y} = 2x$ і даследаваць асаблівыя пункты.

VI. 1. З дапамогай азначэння ўстойлівасці па Ляпунову даследаваць

устойлівасць рашэння сістэмы ўраўненняў $\frac{dx}{dt} = x - 13y,$

$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{4}x - 2y, x(0) = y(0) = 0$.

2. Даследаваць асаблівыя пункты ўраўнення $\dot{x} = \frac{2t + x}{3t + 4x}$.

3. Даследаваць устойлівасць нулявога рашэння сістэмы, пабудаваўшы функцыю Ляпунова: $\dot{x} = y - x + xy, \dot{y} = x - y - x^2 - y^3$.

4. Даследаваць на ўстойлівасць нулявое рашэнне ўраўнення $x^{IV} + 2\ddot{x} + 5\dot{x} + 6x = 0$.

5. Начарціць на фазавай плоскасці траекторыі сістэмы

$\frac{dr}{dt} = r(r-1)(r-2), \frac{d\varphi}{dt} = 1$ і даследаваць, ці мае гэтая сістэма

лімітавыя цыклы.

VII. 1. З дапамогай азначэння ўстойлівасці па Ляпунову даследаваць устойлівасць рашэння сістэмы $\frac{dx}{dt} = -x - 9y, \frac{dy}{dt} = x - y,$
 $x(0) = y(0) = 0.$

2. Даследаваць асаблівыя пункты ўраўнення $\dot{x} = \frac{t - 4x}{2x - 3t}.$

3. Даследаваць, ці ўстойлівае рашэнне $x = -t^2, y = t$ сістэмы ўраўненняў $\dot{x} = y^2 - 2ty - 2y - x, \dot{y} = 2x + 2t^2 + e^{2t-2y}.$

4. Даследаваць устойлівасць нулявога рашэння ўраўнення $x^{IV} + 13\ddot{x} + 16\ddot{x} + 55\dot{x} + 76x = 0.$

5. Начарціць на фазавай плоскасці траекторыі сістэмы $\dot{x} = 1 - x^2 - y^2, \dot{y} = 2x$ і даследаваць асаблівыя пункты.

VIII. 1. З дапамогай азначэння ўстойлівасці па Ляпунову даследаваць устойлівасць рашэння сістэмы $\frac{dx}{dt} = -2x, \frac{dy}{dt} = -3y,$
 $x(0) = y(0) = 0.$

2. Вызначыць характар пункта спакою сістэмы $\frac{dx}{dt} = -x + 2y,$
 $\frac{dy}{dt} = x + y.$

3. З дапамогай тэарэмы Ляпунова па першаму набліжэнню даследаваць на ўстойлівасць нулявое рашэнне сістэмы $\dot{x} = e^{x+2y} - \cos 3x, \dot{y} = \sqrt{4+8x} - 2e^y.$

4. Даследаваць, пры якіх значэннях параметраў a, b нулявое рашэнне ўраўнення $x^{IV} + a\ddot{x} + 4\ddot{x} + 2\dot{x} + bx = 0$ асімптатычна ўстойлівае.

5. Даследаваць паводзіны фазавых крывых сістэмы ўраўненняў $\dot{x} = -x + 2y, \dot{y} = 0.$

IX. 1. З дапамогай азначэння ўстойлівасці па Ляпунову даследаваць на ўстойлівасць нулявое рашэнне сістэмы ўраўненняў

$$\frac{dx}{dt} = 3x + y, \quad \frac{dy}{dt} = -2x + y.$$

2. Знайсці і даследаваць асаблівыя пункты ўраўнення $\dot{x} = \frac{2x-t}{3t+6}$.

3. Даследаваць, пры якіх значэннях параметраў a, b асімптатычна ўстойлівае нулявое рашэнне сістэмы $\dot{x} = y + \sin x, \dot{y} = ax + by$.

4. Даследаваць устойлівасць нулявога рашэння ўраўнення

$$x^V + 5x^{IV} + 15\ddot{x} + 48\ddot{x} + 44\dot{x} + 74x = 0.$$

5. Начарціць на фазавай плоскасці траекторыі сістэмы

$$\frac{dr}{dt} = r(1-r^2), \quad \frac{d\phi}{dt} = 1 \text{ і даследаваць, ці мае гэтая сістэма лімітавыя цыклы.}$$

X. 1. З дапамогай азначэння ўстойлівасці па Ляпунову даследаваць

$$\text{на ўстойлівасць рашэнне сістэмы ўраўненняў } \frac{dx}{dt} = 3x + y,$$

$$\frac{dy}{dt} = -2x + y, \quad x(0) = y(0) = 0.$$

2. Знайсці і даследаваць асаблівыя пункты ўраўнення

$$\dot{x} = \frac{2t+x}{t-2x-5}.$$

3. Знайсці ўсе пункты спакою сістэмы $\dot{x} = (x-1)(y-1), \dot{y} = xy-2$ і даследаваць іх на ўстойлівасць.

4. Даследаваць, пры якіх значэннях параметраў a і b нулявое рашэнне ўраўнення $x^{IV} + \ddot{x} + a\ddot{x} + \dot{x} + bx = 0$ асімптатычна ўстойлівае.

5. Для ўраўнення $\ddot{x} - x + x^2 = 0$ начарціць траекторыі на фазавай плоскасці. Па чарцяжы зрабіць вывады аб паводзінах рашэнняў пры $t \rightarrow +\infty$.

XI. 1. Даследаваць на ўстойлівасць рашэнне $x = \frac{1}{t}, t \geq 1$ ураўнення

$$\frac{dx}{dt} = -\left(x - \frac{2}{t}\right)^2.$$

2. Вывзначыць характар пункта спакою сістэмы $\frac{dx}{dt} = 3x - y,$

$$\frac{dy}{dt} = x + y.$$

3. Даследаваць устойлівасць нулявога рашэння сістэмы, пабудоваўшы функцыю Ляпунова: $\dot{x} = xy - x^3 + y^3, \dot{y} = x^2 - y^3$.

4. Даследаваць на ўстойлівасць па першаму набліжэнню нулявое рашэнне сістэмы

$$\dot{x} = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\sin 2y - x^3y, \dot{y} = -y - 2x + x^4 - y^7.$$

5. Начарціць на плоскасці фазавыя траекторыі сістэмы $\dot{x} = 2 + y - x^2, \dot{y} = 2x(x - y)$ і даследаваць асаблівыя пункты.

XII. 1. Даследаваць на ўстойлівасць нулявое рашэнне сістэмы $\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = xy$, карыстаючыся азначэннем устойлівасці па Ляпунову.

2. Даследаваць устойлівасць нулявога рашэння сістэмы $\dot{x} = y - 3x - x^3, \dot{y} = 6x - 2y$, пабудоваўшы функцыю Ляпунова і выкарыстаўшы тэарэмы Ляпунова або Чэтаева.

3. Вывзначыць характар пункта спакою сістэмы $\frac{dx}{dt} = -2x - y,$

$$\frac{dy}{dt} = 3x - y.$$

4. Пры якіх значэннях α будзе ўстойлівым нулявое рашэнне ўраўнення $x^{IV} + \alpha \ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0$?
5. На фазавай плоскасці начарціць траекторыі для ўраўнення $\ddot{x} + 2x^3 - 2x = 0$. Па чарцяжы вызначыць паводзіны рашэння пры $t \rightarrow +\infty$.

XIII. 1. Даказаць, што для ўстойлівасці рашэнняў ураўнення

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x, \text{ дзе } a(t) - \text{непарыўная пры } t \geq 0 \text{ функцыя, неаб-}$$

ходна і дастаткова, каб $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t a(\tau) d\tau < +\infty$.

2. Даследаваць асаблівыя пункты ўраўнення $\dot{x} = \frac{x - 2t}{x}$.
3. Даказаць, што калі ў сістэме $\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = -f(x)$ функцыя $f(x)$ такая, што $f(0) = 0, x f(x) > 0, x \neq 0$, то становішча раўнавагі сістэмы ўстойлівае.
4. Пры якіх значэннях параметраў a і b нулявое рашэнне ўраўнення $x^{IV} + 2\ddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} + x = 0$ асімптатычна ўстойлівае?
5. Начарціць на фазавай плоскасці траекторыі сістэмы $\dot{x} = 1 - x^2 - y^2, \dot{y} = 2xy$ і даследаваць яе асаблівыя пункты.

XIV. 1.3 дапамогай азначэння ўстойлівасці па Ляпунову вызначыць,

$$\text{ці ўстойлівае рашэнне ўраўнення } \frac{dx}{dt} = \frac{a}{t}x \text{ пры } x(1) = 0.$$

2. Даследаваць асаблівыя пункты сістэмы $\dot{x} = -2x - 5y, \dot{y} = 2x + 2y$.
3. Даследаваць на ўстойлівасць нулявое рашэнне ўраўнення $\frac{dx}{dt} = ax^m + g(x)$, дзе m – натуральны лік, $a \neq 0$, а $g(0) = 0$ і

раскладанне $g(x)$ у рад Тэйлара ў наваколлі пункта $x = 0$ пачынаецца з членаў ступені $k \geq m + 1$.

4. Даследаваць устойлівасць нулявога рашэння ўраўнення

$$\ddot{x} + 2\ddot{x} + 2\dot{x} + 3x = 0.$$

5. Даследаваць паводзіны фазавых траекторый сістэмы $\dot{x} = 2x$,

$$\dot{y} = x + y.$$

XV. 1. З дапамогай азначэння ўстойлівасці па Ляпунову вызначыць,

ці ўстойлівае рашэнне ўраўнення $\frac{dx}{dt} = \sin^2 x$ пры $x(0) = 0$.

2. Знайсці і даследаваць асаблівыя пункты ўраўнення $\dot{x} = \frac{t - 2x}{3t - 4x}$.

3. Даследаваць на ўстойлівасць нулявое рашэнне сістэмы

$$\dot{x} = -x - xy, \dot{y} = y^3 - x^3, \text{ пабудаваўшы функцыю Ляпунова.}$$

4. Даследаваць на ўстойлівасць па першаму набліжэнню нулявое

$$\text{рашэнне сістэмы } \dot{x} = 7x + 2 \sin y - y^4, \dot{y} = e^x - 3y - 1 + \frac{5}{2}x^2.$$

5. Начарціць на фазавай плоскасці траекторыі сістэмы

$$\dot{x} = x - 2y, \dot{y} = 3x + 4y.$$

Доказы тэарэм, прыведзеных у главах I — V

Тэарэма 1.2. Заменім задачу Кашы

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (1)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (2)$$

эквівалентным інтэгральным ураўненнем

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tilde{t}, x(\tilde{t})) d\tilde{t}. \quad (3)$$

Сапраўды, калі некаторая непарыўна дыферэнцавальная функцыя $x = \tilde{x}(t)$, $t \in I$ ператварае ў тоеснасць ураўненне (1) і задавальняе ўмову (2), то, інтэгруючы гэтую тоеснасць і ўлічваючы ўмову (2), атрымаем, што $x = \tilde{x}(t)$, $t \in I$ ператварае ў тоеснасць і ўраўненне (3). Калі ж некаторая непарыўна дыферэнцавальная функцыя $x = \tilde{x}(t)$, $t \in I$ ператварае ўраўненне (3) у тоеснасць, то яна, відавочна, задавальняе і ўмову (2), а, дыферэнцуючы тоеснасць (3) (функцыі f і x — непарыўныя, непарыўнай з'яўляецца і функцыя

$$f(t, x(t)) \text{ пры } t \in I, \text{ а значыць, функцыя } \int_{t_0}^t f(\tilde{t}, x(\tilde{t})) d\tilde{t}$$

дыферэнцавальная), атрымаем, што $x = \tilde{x}(t)$, $t \in I$ ператварае ў тоеснасць і ўраўненне (1).

Дакажам спачатку існаванне непарыўных рашэнняў інтэгральнага ўраўнення (3), прымяняючы для гэтага метады паслядоўных набліжэнняў Пікара.

За зыходнае (нулявое) набліжэнне $x_0(t)$ прымем функцыю, роўную тоесна адпаведнаму пачатковаму значэнню шуканай функцыі: $x_0(t) \equiv x_0$.

Заменім у падынтэгральнай функцыі ўраўнення (3) зменную $x(\tilde{t})$ нулявым набліжэннем. Атрыманую функцыю возьмем у якасці

першага набліжэння, гэта значыць

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tilde{t}, x_0(\tilde{t})) d\tilde{t}. \quad (4)$$

За другое набліжэнне возьмем

$$x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tilde{t}, x_1(\tilde{t})) d\tilde{t}. \quad (5)$$

Наогул, у якасці n -га набліжэння возьмем функцыю, вызначаную судачыненнем

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tilde{t}, x_{n-1}(\tilde{t})) d\tilde{t}, \quad n = 3, \dots \quad (6)$$

Такім чынам, пабудавана паслядоўнасць функцый $\{x_n(t)\}$.

Пакажам спачатку, карыстаючыся метадам матэматычнай індукцыі, што ўсе функцыі паслядоўнасці $\{x_n(t)\}$ вызначаныя і непарыўныя ў некаторым прамежку $|t - t_0| \leq \delta$ і не выходзяць з замкнутага абсягу $R_0 = \{t - t_0 \leq \delta; |x - x_0| \leq b\}$, гэта значыць, што выконваюцца няроўнасці

$$|x_n(t) - x_0| \leq b \quad \text{пры} \quad |t - t_0| \leq \delta, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7)$$

З формулы (4) вынікае, што функцыя x_1 вызначаная і непарыўная на ўсім інтэрвале $|t - t_0| \leq a$, бо функцыя $f(t, x_0(t))$ непарыўная ў гэтым інтэрвале, а вызначаны інтэграл, як вядома, са зменным верхнім лімітам ад непарыўнай функцыі ўяўляе сабою непарыўную функцыю свайго верхняга ліміту ў гэтым жа інтэрвале. Дадзім цяпер ацэнку рознасці $x_1(t) - x_0$. Карыстаючыся вядомай формулай

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt \quad (\text{гл., напрыклад, [4], глава IV, § 2, п. 3,}$$

с. 357), атрымаем

$$\begin{aligned} |x_1(t) - x_0| &= \left| \int_{t_0}^t f(\tilde{t}, x_0(\tilde{t})) d\tilde{t} \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(\tilde{t}, x_0(\tilde{t}))| d\tilde{t} \right| \leq \\ &\leq M |t - t_0|. \end{aligned} \quad (8)$$

Такім чынам, калі патрабаваць, каб $M |t - t_0| \leq b$, гэта значыць $|t - t_0| \leq \frac{b}{M}$, тады функцыя $x_1(t)$ не пакіне абсягу R_0 . Таму пры $|t - t_0| < \delta$, $\delta = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ функцыя $x_1(t)$ будзе вызначанай, непарыўнай і змешчанай у абсягу R_0 .

Дапусцім, што такое ж сцвярджэнне мае месца для функцыі $x_{n-1}(t)$, і пакажам, што яно выконваецца тады і для функцыі $x_n(t)$.

Згодна з формулай (6), функцыя $x_n(t)$ вызначана і непарыўная ў інтэрвале $|t - t_0| \leq \delta$ з-за таго, што ў гэтым інтэрвале вызначана і непарыўная функцыя $x_{n-1}(t)$, а, значыць, гэтай жа ўласцівасцю валодае складаная функцыя $f(t, x_{n-1}(t))$.

$$\text{Маем } |x_n(t) - x_0| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(\tilde{t}, x_{n-1}(\tilde{t}))| d\tilde{t} \right| \leq M |t - t_0| \leq b$$

пры $|t - t_0| \leq \delta$. Гэта значыць $x_n(t)$ не выходзіць з R_0 .

Пакажам цяпер, што паслядоўнасць $\{x_n(t)\}$ раўнамерна збягаецца ў інтэрвале $|t - t_0| \leq \delta$.

Разгледзім рад

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0(t) + (x_1(t) - x_0(t)) + (x_2(t) - x_1(t)) + \dots + \\ &+ (x_n(t) - x_{n-1}(t)) + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Яго частковыя сумы роўны $x_0(t), x_1(t), \dots, x_n(t), \dots$, так што збежнасць гэтага рада эквівалентная збежнасці паслядоўнасці $\{x_n(t)\}$ (коратка $\{x_n\}$).

З роўнасцяў (5) і (4) знаходзім, што

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= \int_{t_0}^t f(\tilde{t}, x_1(\tilde{t})) d\tilde{t} - \int_{t_0}^t f(\tilde{t}, x_0(\tilde{t})) d\tilde{t} = \\ &= \int_{t_0}^t [f(\tilde{t}, x_1(\tilde{t})) - f(\tilde{t}, x_0(\tilde{t}))] d\tilde{t}. \end{aligned}$$

Адсюль

$$|x_2 - x_1| \leq \left| \int_{t_0}^t [f(\tilde{t}, x_1(\tilde{t})) - f(\tilde{t}, x_0(\tilde{t}))] d\tilde{t} \right|.$$

Улічваючы, што $|x_1 - x_0| \leq M |t - t_0|$ і карыстаючыся ўмовай Ліпшыца, атрымаем

$$\begin{aligned} |x_2 - x_1| &\leq L \left| \int_{t_0}^t [x_1(\tilde{t}) - x_0(\tilde{t})] d\tilde{t} \right| \leq LM \left| \int_{t_0}^t |\tilde{t} - t_0| d\tilde{t} \right| = \\ &= LM \frac{|t - t_0|^2}{2!}. \end{aligned}$$

Дапусцім цяпер, што мае месца ацэнка

$$|x_n - x_{n-1}| \leq M L^{n-1} \frac{|t - t_0|^n}{n!}. \quad (10)$$

Пакажам, што тады

$$|x_{n+1} - x_n| \leq M L^n \frac{|t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Сапраўды, маем

$$x_{n+1} - x_n = \int_{t_0}^t [f(\tilde{t}, x_n(\tilde{t})) - f(\tilde{t}, x_{n-1}(\tilde{t}))] d\tilde{t}.$$

Адсюль

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(\tilde{t}, x_n(\tilde{t})) - f(\tilde{t}, x_{n-1}(\tilde{t}))| d\tilde{t} \right| \leq \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^t |x_n(\tilde{t}) - x_{n-1}(\tilde{t})| d\tilde{t} \right| \leq L \left| \int_{t_0}^t M L^{n-1} \frac{|\tilde{t} - t_0|^n}{n!} d\tilde{t} \right| \leq \\ &\leq M L^n \frac{|t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

У сілу таго, што ацэнка (10) мае месца для $n = 1$ і $n = 2$, то з вышэй сказанага і метаду матэматычнай індукцыі вынікае, што яна выконваецца для ўсіх $n \geq 3$ (10) маем

$$|x_n - x_{n-1}| \leq M L^{n-1} \frac{\delta^n}{n!}.$$

Згодна з гэтай формулай можна сцвярджаць, што модулі членаў рада (9) не большыя за адпаведныя члены збежнага рада з дадатнымі

членамі: $|x_0| + M\delta + Mh \frac{\delta^2}{2!} + Mh^2 \frac{\delta^3}{3!} + \dots$. Згодна з прыметай

Вейерштраса (гл. [4], глава III, § 1, с. 109) рад (9) збягаецца і прытым раўнамерна ў прамежку $|t - t_0| \leq \delta$. А значыць, па тэарэме аб непарыўнасці сумы рада (гл. [6], глава XI, § 2, с. 633) функцыя $x(t)$, як сума рада (9) або лімітавая функцыя паслядоўнасці $\{x_n(t)\}$, будзе непарыўнай пры $|t - t_0| \leq \delta$.

Пакажам цяпер, што лімітавая функцыя $x(t)$ задавальняе ўмовы

$$|x(t) - x_0| \leq b \text{ пры } |t - t_0| \leq \delta \quad (11)$$

і інтэгральнаму ўраўненню (3).

Сапраўды, пераходзячы да ліміту ў няроўнасці (7), атрымаем няроўнасць (11).

Каб паказаць, што лімітавая функцыя $x(t)$ ёсць рашэнне ўраўнення (3), адзначым адразу, што

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(\tilde{t}, x_n(\tilde{t})) d\tilde{t} = \int_{t_0}^t f(\tilde{t}, x(\tilde{t})) d\tilde{t} \quad (12)$$

пры $|t - t_0| \leq \delta$. Сапраўды,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{t_0}^t f(\tilde{t}, x_n(\tilde{t})) d\tilde{t} - \int_{t_0}^t f(\tilde{t}, x(\tilde{t})) d\tilde{t} \right| \leq \\ & \leq \left| \int_{t_0}^t |f(\tilde{t}, x(\tilde{t})) - f(\tilde{t}, x_n(\tilde{t}))| d\tilde{t} \right| \leq L \left| \int_{t_0}^t |x_n(\tilde{t}) - x(\tilde{t})| d\tilde{t} \right|. \end{aligned}$$

У сілу таго, што $x_n(t)$ збягаецца раўнамерна да $x(t)$ у інтэрвале

$|t - t_0| \leq \delta$, для любога наперад зададзенага дадатнага ліку ε знойдзеца нумар N_ε такі, што пры $n > N_\varepsilon$ выканаецца няроўнасць

$|x_n - x| < \varepsilon$ для ўсіх t з інтэрвалу $|t - t_0| \leq \delta$. Таму будзем мець

$$\left| \int_{t_0}^t f(\tilde{t}, x_n(\tilde{t})) d\tilde{t} - \int_{t_0}^t f(\tilde{t}, x(\tilde{t})) d\tilde{t} \right| \leq L \varepsilon |t - t_0| \leq L \varepsilon \delta \rightarrow 0 \text{ пры}$$

$\varepsilon \rightarrow 0$.

Такім чынам, судаачыненне (12) даказана. Пераходзячы цяпер у роўнасці (6) да ліміту пры $n \rightarrow \infty$, атрымаем (3). Значыць, $x(t)$ — непарыўнае пры $|t - t_0| \leq \delta$ рашэнне ўраўнення (3). Яно і ўяўляе сабою рашэнне дыферэнцыяльнага ўраўнення (1) пры пачатковай

умове (2), визначанає і непарыўна дыферэнцавальнає ў інтэрвале $|t - t_0| \leq \delta$.

Дакажам цяпер, што гэтае рашэнне ва ўказаным сэнсе адзінае. Дапусцім, што існуе іншае рашэнне $y(t)$ (коратка y), якое задавальняе тым жа умовам (2), визначанає і непарыўнає ў некаторым інтэрвале $|t - t_0| \leq \bar{\delta}$, дзе $0 < \bar{\delta} \leq \delta$, і якое не выходзіць пры такіх t з абсягу R_0 . Тады пры $|t - t_0| \leq \bar{\delta}$ будзем мець

$$y = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tilde{t}, y(\tilde{t})) d\tilde{t}. \quad (13)$$

Ацэнім рознасць $x_n - y$. Карыстаючыся формуламі (6), (13) і ўмовай Ліпшыца, атрымаем

$$\begin{aligned} |x_n - y| &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(\tilde{t}, x_{n-1}(\tilde{t})) - f(\tilde{t}, y(\tilde{t}))| d\tilde{t} \right| \leq \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^t |x_{n-1}(\tilde{t}) - y(\tilde{t})| d\tilde{t} \right|. \end{aligned} \quad (14)$$

З (13) маем

$$|x_0 - y| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(\tilde{t}, y(\tilde{t}))| d\tilde{t} \right| \leq M |t - t_0|.$$

Улічваючы гэта і дапускаючы ў (14) $n = 1$, атрымаем

$$|x_1 - y| \leq LM \frac{|t - t_0|^2}{2}. \quad (15)$$

Дапускаючы ў (14) $n = 2$, з улікам (15) будзем мець

$$|x_2 - y| \leq L^2 M \frac{|t - t_0|^3}{3!}.$$

Працягваючы аналагічныя разважанні, далей атрымаем

$$|x_n - y| \leq L^n M \frac{|t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (16)$$

Правыя часткі няроўнасці (16) імкнуцца да нуля пры $n \rightarrow \infty$ (як агульны член збежнага рада). Таму $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = y(t)$ пры

$|t - t_0| \leq \bar{\delta}$. Вышэй было даказана, што $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x(t)$ пры

$|t - t_0| \leq \delta$. Таму $y(t) \equiv x(t)$ пры $|t - t_0| \leq \bar{\delta}$, гэта значыць рашэнне $y(t)$ супадае з рашэннем $x(t)$, што і даказвае яго адзінасць. Тэарэма 1.2 даказана.

Тэарэма 1.3. Няхай $k = 1$. Падстаўляючы $x(t)$ ва ўраўненне $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$, атрымаем тоеснасць

$$\frac{dx(t)}{dt} \equiv f(t, x(t)), \quad (17)$$

і таму, у сілу тэарэмы 1.2, рашэнне $x(t)$ мае ў некаторым наваколлі пункта t_0 непарыўную вытворную $f(t, x(t))$.

Згодна з тэарэмай аб дыферэнцавальнасці складанай функцыі (гл. [8], глава III, § 9, с. 79), функцыя ад адной зменнай $f(t, x(t))$ будзе непарыўна дыферэнцавальнай у сілу непарыўнай дыферэнцавальнасці па сукупнасці зменных функцый $f(t, x)$ і $x(t)$ у разглядаемым наваколлі пункта t_0 . Такім чынам, правая частка тоеснасці (17) непарыўна дыферэнцавальная ва ўказаным наваколлі пункта t_0 , гэта значыць існуе непарыўная другая вытворная $\frac{d^2 x}{dt^2}$.

Няхай $k = 2$. Прадыферэнцаваўшы тоеснасць (17) па t , атрымаем

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \frac{\partial f(t, x(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t, x(t))}{\partial x} \cdot \frac{dx(t)}{dt}.$$

У сілу існавання непарыўных вытворных другога парадку функцыі f можна, дыферэнцуючы яшчэ раз тоеснасць (17), паказаць існаванне і непарыўнасць трэцяй вытворнай рашэння $x(t)$:

$$\frac{d^3 x}{dt^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} f + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f^2 + \frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} f \right).$$

Разважаючы аналагічна k разоў, даказваецца сцвярдженне тэарэмы.

Тэарэма 1.4. Непарыўнасць рашэння, як функцыі параметра, будзе азначаць, што для $\forall \varepsilon > 0 \exists h(\varepsilon) > 0$ такое, што пры $|\Delta \mu| < h$ выконваецца няроўнасць

$$|x(t, \mu + \Delta \mu) - x(t, \mu)| < \varepsilon$$

для любых μ і $\mu + \Delta \mu$ з некаторага інтэрвалу $|\mu - \mu_0| \leq \bar{\delta}$. Доказ праводзіцца па схеме, аналагічнай доказу тэарэмы 1.2.

Задача Кашы

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \mu), \quad x(t_0, \mu) = x_0$$

замяняецца інтэгральным ураўненнем

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tilde{t}, x, \mu) d\tilde{t}. \quad (18)$$

Будуецца бясконцая паслядоўнасць функцый $\{x_n(t, \mu)\}$ па формулах

$$x_n(t, \mu) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tilde{t}, x_{n-1}, \mu) d\tilde{t}. \quad (19)$$

Паслядоўнасць будзе раўнамерна збягацца адносна t, μ у разглядаемым абсягу, таму што агульны член рада

$x_0 + [x_1(t, \mu) - x_0] + [x_2(t, \mu) - x_1(t, \mu)] + \dots + [x_n(t, \mu) - x_{n-1}(t, \mu)] + \dots$ мае ацэнку

$$|x_n(t, \mu) - x_{n-1}(t, \mu)| \leq ML^{n-1} \frac{\delta^n}{n!}$$

(гл. формулу (10)), дзе $|f(t, x, \mu)| \leq M$. Сума гэтага рада, функцыя $x(t, \mu)$, што супадае з лімітавай функцыяй паслядоўнасці, будзе непарыўнай адносна t, μ у абсягу $|t - t_0| \leq \delta$, $|\mu - \mu_0| \leq \bar{\delta}$, таму што члены рада непарыўныя адносна t, μ у гэтым абсягу і рад у ім збягаецца адносна t, μ раўнамерна. Пераходзячы да ліміту ў (19), упэўнімся, што $x(t, \mu)$ задавальняе (18). Аналагічна, як і ў доказе тэарэмы 1.2, можна паказаць адзінасць такога рашэння.

Тэарэма 1.5. Няхай $k = 1$, а $x = \varphi(t, \mu)$ — рашэнне задачы Кашы (1.67). Функцыя $x = \varphi(t, \mu + \Delta\mu)$ задавальняе ўраўненню $\frac{dx}{dt} = f(t, x, \mu + \Delta\mu)$ і дадзеным Кашы $x(t_0, \mu) = x_0$, а функцыя $\Delta\varphi = \varphi(t, \mu + \Delta\mu) - \varphi(t, \mu)$ будзе тады задавальняць ураўненню

$$\frac{d \Delta\varphi}{dt} = f(t, \varphi(t, \mu + \Delta\mu), \mu + \Delta\mu) - f(t, \varphi(t, \mu), \mu).$$

Прымяняючы да правай часткі гэтага ўраўнення лему Адамара (гл. тэарэму 4.8), перапішам яго так:

$$\frac{d \Delta\varphi}{dt} = \Delta\varphi\Phi_1 + \Delta\mu\Phi_2,$$

дзе Φ_1 і Φ_2 — непарыўныя функцыі ад зменных $\varphi(t, \mu + \Delta\mu)$, $\mu, \mu + \Delta\mu$. Падзяліўшы апошняю роўнасць на $\Delta\mu$, для вызначэння

$\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}$ атрымліваем лінейнае ўраўненне

$$\frac{d\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}\right)}{dt} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}\Phi_1 + \Phi_2. \quad (20)$$

Акрамя таго, $\left. \frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu} \right|_{t=t_0} = 0$ (функцыі $\varphi(t, \mu)$ і $\varphi(t, \mu + \Delta\mu)$ задавальняюць адным і тым жа дадзеным Кашы). Правая частка ўраўнення (20) непарыўная па зменных $t, \Delta\mu$ і непарыўна дыферэнцавальная па зменнай $\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}$ (згодна з лемай Адамара функцыі Φ_1, Φ_2 – інтэгралы ад непарыўных функцый $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial t}$). Згодна з тэарэмай 1.4 рашэнне $\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}$ ураўнення (20) з’яўляецца непарыўным па $\Delta\mu$ пры ўсіх дастаткова малых па абсалютнай велічыні $\Delta\mu$. Таму пры $\Delta\mu \rightarrow 0$ велічыня $\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}$ імкнецца да вызначанага ліміту, а гэта азначае існаванне вытворнай па μ ад $\varphi(t, \mu)$.

З лемы Адамара пры $\Delta\mu \rightarrow 0$ вынікае $\Phi_1 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial \varphi}, \Phi_2 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial \mu}$.

Таму вытворная $\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}$ задавальняе дыферэнцыяльнаму ўраўненню

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right) = \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + \frac{\partial f}{\partial \mu} \quad (21)$$

пры пачатковай умове $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right|_{t=0} = 0$. Згодна з дадзенымі ўмовамі тэарэмы, знаходзім, што $\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}$ — непарыўная па сукупнасці зменных t, μ .

Калі $f(t, x, \mu)$ мае непарыўныя вытворныя па t, x і μ да

k -га парадку ўключна, дзе $k \geq 2$, то, прымяняючы да ўраўнення (21) тыя ж разважанні, што і вышэй, дакажам існаванне і непарыўнасць вытворных $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial \mu}$. Працягваючы гэтыя разважанні,

поўнасю дакажам тэарэму.

Тэарэма 2.2. Зададзім сістэму n пачатковых умоў віду

$$\begin{aligned} x(t_0) &= 1, \quad \dot{x}(t_0) = 0, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = 0; \\ x(t_0) &= 0, \quad \dot{x}(t_0) = 1, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = 0; \\ &\dots\dots\dots \\ x(t_0) &= 0, \quad \dot{x}(t_0) = 0, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = 1, \end{aligned} \quad (22)$$

дзе $t_0 \in I$, $I = (a; b)$. Кожнаму i -му радку гэтых пачатковых умоў будзе адпавядаць адзінае рашэнне $x_i(t)$, $i = \overline{1, n}$. Прычым рашэнні $x_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, што задавальняюць умовам (22), будуць лінейна незалежнымі ў сілу таго, што вранскія гэтага рашэнняў $W[x_1, \dots, x_n]$ у пункце t_0 роўны 1 і, значыць, не роўны нулю. Такім чынам, для лінейнага аднароднага дыферэнцыяльнага ўраўнення n -га парадку знойдзены n лінейна незалежных рашэнняў (для іх атрымання не абавязкова задаваць пачатковыя ўмовы (22), можна браць адвольную сістэму ўмоў, толькі б $W(t_0) \neq 0$).

Пакажам цяпер, што любое рашэнне гэтага ўраўнення з'яўляецца лінейнай камбінацыяй знойдзеных рашэнняў, гэта значыць мае выгляд

$$x(t) = \sum_{i=1}^n C_i x_i(t). \quad (23)$$

Няхай $\tilde{x}(t)$, $t \in I$ – адвольнае рашэнне ураўнення $L(x) = 0$. Дадзім, што $\tilde{x}(t_0) = x_0, \dot{\tilde{x}}(t_0) = \dot{x}_0, \dots, \tilde{x}^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}$, дзе $x_0, \dot{x}_0, \dots, x_0^{(n-1)}$ – некаторыя лікі, $t_0 \in (a; b)$. У сілу таго, што

$W(t_0) \neq 0$, з роўнасцяў

$$x(t_0) = x_0 = C_1 x_1(t_0) + C_2 x_2(t_0) + \dots + C_n x_n(t_0),$$

$$\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 = C_1 \dot{x}_1(t_0) + C_2 \dot{x}_2(t_0) + \dots + C_n \dot{x}_n(t_0),$$

$$x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)} = C_1 x_1^{(n-1)}(t_0) + C_2 x_2^{(n-1)}(t_0) + \dots + C_n x_n^{(n-1)}(t_0)$$

пры дадзеных $x_0, \dot{x}_0, \dots, x_0^{(n-1)}$ знойдзем адзіны набор $C_1, C_2, \dots, C_n$, пры якім функцыя (23) задавальняе ўказаным пачатковым умовам. А гэта значыць, згодна з тэарэмай 2.1, што $\tilde{x}(t) \equiv x(t)$, $t \in (a; b)$. Такім чынам, роўнасць (23) вызначае агульнае рашэнне лінейнага аднароднага ўраўнення.

Тэарэма 2.3. З умовы тэарэмы вынікае, што $L(x^*) = f(t)$, а $L(x^0) = 0$. Тады, у сілу лінейнасці апэратара, маем $L(x^* + x^0) = L(x^*) + L(x^0) = f(t) + 0 = f(t)$, гэта значыць функцыя

$$x(t) = x^*(t) + x^0(t) = x^*(t) + C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_n x_n, \quad (24)$$

дзе $x_1, x_2, \dots, x_n$ — фундаментальная сістэма рашэнняў адпаведнага аднароднага ўраўнення, ёсць рашэнне неаднароднага ўраўнення.

Пакажам, што любое рашэнне ўраўнення $L(x) = f(t)$ можна атрымаць з формулы (24) адпаведным выбарам пастаянных $C_1, C_2, \dots, C_n$. Няхай $\tilde{x}(t)$ — адвольнае рашэнне разглядаемага ўраўнення, якое задавальняе пачатковым умовам

$$\tilde{x}(t_0) = x_0, \tilde{\dot{x}}(t_0) = \dot{x}_0, \dots, \tilde{x}^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}. \quad (25)$$

Падстаноўка ўмоў (25) у функцыю (24) прывядзе да сістэмы лінейных ураўненняў

$$C_1 x_1(t_0) + \dots + C_n x_n(t_0) = x_0 - x^*(t_0),$$

$$C_1 \dot{x}_1(t_0) + \dots + C_n \dot{x}_n(t_0) = \dot{x}_0 - \dot{x}^*(t_0),$$

$$C_1 x_1^{(n-1)}(t_0) + \dots + C_n x_n^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)} - x^{*(n-1)}(t_0).$$

Дэтэрмінант гэтай сістэмы мае значэнне дэтэрмінанта Вронскага $W(t)$ пры $t = t_0$, пры гэтым $W(t_0) \neq 0$, таму што па дапушчэнні сістэма $x_1, x_2, \dots, x_n$ – фундаментальная. Значыць, сістэма (26) мае адзінае рашэнне $C_1, C_2, \dots, C_n$, таму функцыя (24) пры знойдзеных $C_1, C_2, \dots, C_n$ і функцыя $\tilde{x}(t)$ задавальняе разглядаемаму ўраўненню і адным і тым жа пачатковым умовам (25). Функцыя (24) будзе з'яўляцца агульным рашэннем, таму што адпаведным выбарам пастаянных з гэтай функцыі можна атрымаць любое рашэнне ўраўнення $L(x) = f(t)$.

Тэарэма 2.4. Дапусцім, што некаторае рашэнне $x_I(t)$ ураўнення

$$\ddot{x} + Q(t)x = 0$$

мае, прынамсі, два нулі t_0, t_1 і $t_0 < t_1$. Будзем лічыць, што ў інтэрвале $(t_0; t_1)$ функцыя $x_I(t)$ не мае іншых нулёў. Гэтае дапушчэнне можа мець месца, таму што нулі ўсякага рашэння ўраўнення (2.30) – ізаляваныя. (Калі рашэнне $x(t)$ мае бясконцы лік нулёў на адрэзку $[\alpha; \beta]$, то ў пункце $\tilde{t}$, што будзе лімітавым для мноства нулёў $x(\tilde{t}) = 0$, а значыць, па тэарэме 2.1 $x \equiv 0$, што супярэчыць дапушчэнню.) Тады $x_I(t)$, як непарыўная функцыя, захоўвае пастаянны знак у інтэрвале $(t_0; t_1)$; заўсёды можна дапусціць, што ў гэтым інтэрвале $x_I(t) > 0$ (у процілеглым выпадку можна ўзяць $-x_I(t)$). Маём $\dot{x}_I(t_0) > 0$ (x_I узростае ўправа ад t_0 , пры гэтым $\dot{x}_I(t_0) \neq 0$, бо тады $x_I \equiv 0$).

Калі $Q(t) \leq 0$, то з ураўнення $\ddot{x} + Q(t)x = 0$ вынікае, што $\ddot{x}_I(t) \geq 0$ ва ўсім інтэрвале $(t_0; t_1)$. Маём, што $\dot{x}_I(t)$ не ўбывае ў інтэрвале $(t_0; t_1)$, гэта значыць $\dot{x}_I(t) \geq \dot{x}_I(t_0)$ для $t_0 < t \leq t_1$, адкуль, у сілу тэарэмы Лагранжа аб канечных прыростах (гл. [15], глава I, § 11, п. 11.2, с. 277), маём

$x_1(t) \geq x_1(t_0) + \dot{x}_1(t_0)(t_1 - t_0) = \dot{x}_1(t_0)(t_1 - t_0) > 0$,
што супярэчыць умове $x_1(t_1) = 0$. Гэта і даказвае тэарэму.

Тэарэма 2.5. У сілу лінейнай незалежнасці рашэнняў $x_1(t)$ і $x_2(t)$, рашэнне $x_2(t)$ не будзе ператварацца ў нуль пры $t = t_0$ і $t = t_1$, калі дапусціць, што ва ўсім інтэрвале $(t_0; t_1)$ гэтае рашэнне не мае нулёў. Сапраўды, калі б $x_2(t_0) = 0$, то тады

$$W(t_0) = \dot{x}_1(t_0)x_2(t_0) - \dot{x}_2(t_0)x_1(t_0) = 0,$$

што супярэчыць уласцівасці дэтэрмінанта Вронскага. У сілу таго, што $W(t) \neq 0$, ён захоўвае пастаянны знак. Дапусцім, для дакладнасці $W(t) > 0$. У сілу таго, што

$$\frac{W(t)}{[x_2(t)]^2} = \frac{\dot{x}_1(t)x_2(t) - \dot{x}_2(t)x_1(t)}{[x_2(t)]^2},$$

то $\frac{d}{dx} \left(\frac{x_1(t)}{x_2(t)} \right) = \frac{W(t)}{[x_2(t)]^2}$. Інтэгруючы апошнюю роўнасць, атрымаем

$$\left[\frac{x_1(t)}{x_2(t)} \right]_{t=t_0}^{t=t_1} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{W(t)}{[x_2(t)]^2} dt \quad (27)$$

($x_2(t) \neq 0$, значыць, функцыя справа непарыўная).

Левая частка (27) роўная нулю, таму што $x_1(t_0) = x_1(t_1) = 0$, а правая – дадатная велічыня. Атрыманая супярэчнасць даказвае, што паміж двума паслядоўнымі нулямі $x_1(t)$ існуе, прынамсі, адзін нуль $x_2(t)$. Калі б іх было два, гэта значыць $x_2(t_0^*) = x_2(t_1^*) = 0$, $t_0 < t_0^* < t_1^* < t_1$, то, памяняўшы ролі x_1 і x_2 , было б даказана існаванне нуля функцыі $x_1(t)$ паміж t_0^* і t_1^* , а гэта супярэчыць умове, што $x_1(t)$ не мае нулёў паміж t_0 і t_1 . Тэарэма даказана.

Тэарэма 2.6. Няхай t_0 і t_1 — два паслядоўныя нулі функцыі

$x(t)$, і дапусцім, што паміж імі няма ніводнага нуля функцыі $y(t)$. Не парушаючы агульнасці, можна дапусціць, што $x(t) > 0$, $y(t) > 0$ у інтэрвале $(t_0; t_1)$. Тады $x(t)$ будзе ўзрастаць управа ад t_0 і ўбываць улева ад t_1 . Значыць, $\dot{x}(t_0) > 0$, $\dot{x}(t_1) < 0$. Памножым $\ddot{x} + Q_1(t)x = 0$ на $y(t)$, а $\ddot{y} + Q_2(t)y = 0$ на $x(t)$ і адымем ад першага другое. Будзем мець

$$\ddot{x}(t)y(t) - \ddot{y}(t)x(t) = [Q_2(t) - Q_1(t)]x(t)y(t).$$

Інтэгруючы ў апошняй роўнасці абедзве часткі ад t_0 да t_1 , атрымаем

$$[\dot{x}(t)y(t) - \dot{y}(t)x(t)]_{t=t_0}^{t=t_1} = \int_{t_0}^{t_1} (Q_2 - Q_1)xy dt.$$

У сілу прыведзеных дапушчэнняў інтэграл у правай частцы не адмоўны. У левай частцы $\dot{x}(t_1)y(t_1) - \dot{x}(t_0)y(t_0)$ з улікам, што $y(t) > 0$, $\dot{x}(t_0) > 0$, $\dot{x}(t_1) < 0$, атрымліваем адмоўны лік. Атрыманая супярэчнасць даказвае тэарэму.

Тэарэма 3.1. Дакажам спачатку першую частку тэарэмы. Дапусцім, што $|X(t_0)| \neq 0$, а рашэнні $x^1, \dots, x^n$ сістэмы (1) лінейна залежныя. Згодна з азначэннем адно з гэтых рашэнняў, напрыклад, x^n , будзе лінейнай камбінацыяй астатніх (гл. роўнасць 3.1.3), а гэта значыць

$$|X(t)| = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n-1} & \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n-1} & \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn-1} & \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k x_{nk} \end{vmatrix} \equiv 0, \quad t \in (a; b)$$

(гл. уласцівасці дэтэрмінантаў [12], раздз. 1, п. 4.1, с. 49). Тады і $|X(t_0)| = 0$. Атрымалі супярэчнасць. Значыць, дапушчэнне, што рашэнні $x^1, \dots, x^n$ лінейна залежныя, — няправільнае.

Для доказу другой часткі тэарэмы дапусцім, што існуе пункт $\tilde{t}_0 \in (a; b)$, у якім $|X(\tilde{t}_0)| = 0$. Гэта значыць, што слупкі матрыцы $X(\tilde{t}_0)$ лінейна залежныя і, згодна з азначэннем, роўнасць $\alpha_1 x^1(\tilde{t}_0) + \alpha_2 x^2(\tilde{t}_0) + \dots + \alpha_n x^n(\tilde{t}_0) = 0$ выконваецца не пры ўсіх нулявых α_i , $i = \overline{1, n}$.

Разгледзім функцыю $x = \sum_{k=1}^n \alpha_k x^k$. Гэтая функцыя ў сілу ўласцівасці 3.1.2⁰ таксама будзе рашэннем сістэмы. Будзем мець:

$$x(\tilde{t}_0) = \sum_{k=1}^n \alpha_k x^k(\tilde{t}_0) = 0, \text{ а ў сілу ўласцівасці 3.1.1}^0: x(t) = 0$$

$\forall t \in (a; b)$. Значыць, $\sum_{k=1}^n \alpha_k x^k(t) \equiv 0$ не пры ўсіх α_k , роўных нулю, таму $x^1, \dots, x^n$ — лінейна залежныя на $(a; b)$. І, згодна з першай часткай тэарэмы, у гэтым выпадку $|X(t)| \equiv 0$, $t \in (a; b)$.

Тэарэма 3.3. Няхай $x = colon(x_1, \dots, x_n)$ — некаторае рашэнне ўраўнення $L(p)x = 0$, вызначанае на інтэрвале $I = (t_1, t_2)$; пакажам, што на гэтым інтэрвале яго можна запісаць у выглядзе $x = x^1 + \dots + x^m$. Вядома, што кожная функцыя x_s , $s = \overline{1, n}$ на інтэрвале I задавальняе ўраўненню $D(p)x_s = 0$ (гл. § 3.2) і таму ў сілу § 2.5 можа быць запісана на гэтым інтэрвале ў выглядзе

$$x_s = \sum_{i=1}^m g_i^s(t) e^{\lambda_i t}, s = \overline{1, n},$$

дзе $g_i^s(t)$ — паліном ступені $k_i - 1$, пры гэтым k_i — кратнасць ко-
раня λ_i .

Такім чынам, кожнае рашэнне x ураўнення $L(p)x = 0$ на
інтэрвале I запісваецца ў выглядзе: $x = g^1(t)e^{\lambda_1 t} + \dots + g^m(t)e^{\lambda_m t}$,
дзе $g^i(t)$ — вектар, кампаненты якога — паліномы ступені $k_i - 1$.

Дастаткова паказаць цяпер, што кожны складнік $g^i(t)e^{\lambda_i t}$ у апош-
няй роўнасці з'яўляецца рашэннем разглядаемага ўраўнення. Пасля
падстаноўкі ва ўраўненне будзем мець:

$$0 = L(p)(g^1(t)e^{\lambda_1 t} + \dots + g^m(t)e^{\lambda_m t}) = e^{\lambda_1 t} L(p + \lambda_1)g^1(t) + \dots +$$

$$+ e^{\lambda_m t} L(p + \lambda_m)g^m(t).$$

У сілу таго, што лікі $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ папарна розныя, а значыць, функцыі
 $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_m t}$ лінейна незалежныя, з гэтай роўнасці атрымаем

$$e^{\lambda_i t} L(p + \lambda_i)g^i(t) = 0, \quad i = \overline{1, m},$$

або, інакш,

$$L(p)g^i(t)e^{\lambda_i t} = 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Адсюль вынікае, што $x^i = g^i(t)e^{\lambda_i t}$ ёсць рашэнне ўраўнення
(3.2.14). Тэарэма 3.3 даказана.

Тэарэма 3.4. Пакажам спачатку, што функцыі $x^1, \dots, x^n$ з'яў-
ляюцца рашэннямі сістэмы (3.3.20). Увядзём паслядоўнасць вектар-
ных функцый

$$\omega^r(t) = \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} h^1 + \frac{t^{r-2}}{(r-2)!} h^2 + \dots + h^r, \quad r = \overline{1, k}.$$

Тады аказваецца, што вектарныя функцыі

$$x^r = \omega^r(t)e^{\lambda t}, \quad r = \overline{1, k}$$

з'яўляюцца рашэннем сістэмы (3.3.20), прычым $x^r(0) = h^r$. Такім
чынам, кожнаму жарданаву ланцужку з k вектароў адпавядае сістэ-

ма з k рашэнняў. Шляхам правядзення элементарных вылічэнняў лёгка праверыць, што маюць месца тоеснасці

$$\dot{\omega}^r(t) = \omega^{r-1}(t), \quad r = \overline{1, k},$$

$$A \omega^r(t) = \lambda \omega^r(t) + \omega^{r-1}(t), \quad r = \overline{1, k},$$

дзе $\omega^0(t) = 0$.

З дапамогай гэтых тоеснасцяў непасрэдна правяраецца, што функцыі $x^r = \omega^r(t)e^{\lambda t}$, $r = \overline{1, k}$ з'яўляюцца рашэннямі разглядаемай сістэмы. Сапраўды, маем

$$\begin{aligned} \dot{x}^r &= \dot{\omega}^r(t)e^{\lambda t} + \lambda \omega^r(t)e^{\lambda t} = (\omega^{r-1}(t) + \lambda \omega^r(t))e^{\lambda t} = \\ &= A \omega^r(t)e^{\lambda t} = A x^r(t). \end{aligned}$$

Цяпер, у сілу таго, што функцыі $x^1, \dots, x^n$ з'яўляюцца рашэннямі сіс-тэмы (3.3.20) і згодна з уласцівасцю 2.2.3⁰, формула (3.3.28) заўсёды дае рашэнне сістэмы (3.3.20).

Пакажам, што кожнае рашэнне сістэмы (3.3.20) пры азначаным падборы канстант $C_1, \dots, C_n$ запісваецца ў выглядзе $x = C_1 x^1 + \dots + C_n x^n$. Няхай $\varphi(t)$ – адвольнае рашэнне сістэмы (3.3.20). Рашэнне $\varphi(t)$ можна лічыць зададзеным на ўсёй прамой $-\infty < t < \infty$, і таму вектар $\varphi(0) = x^0$ вызначаны.

Раскладзём гэты вектар па базісе $h^1, \dots, h^n$:

$$x^0 = C_1 h^1 + \dots + C_n h^n.$$

Калі цяпер падставіць знойдзеныя канстанты $C_1, \dots, C_n$ у судаачыненне (3.3.28), то атрымаем рашэнне $x(t)$, што задавальняе пачатковым умовам

$$x(0) = C_1 x^1(0) + \dots + C_n x^n(0) = C_1 h^1 + \dots + C_n h^n = x^0.$$

Такім чынам, рашэнні $\varphi(t)$ і $x(t)$ маюць агульныя пачатковыя значэнні і таму супадаюць. Тэарэма 3.4 даказана.

Тэарэма 3.5. Пакажам спачатку, што функцыя e^{At} з'яўляецца

ца рашэннем сістэмы (3.3.20). Пераносячы на матрычныя функцыі азначэнні і ўласцівасці вектарных функцый скалярнага аргумента (гл. [15], глава I, п. 15.2, с. 340), знаходзім

$$\frac{d}{dt}(e^{At}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [e^{A(t+\Delta t)} - e^{At}] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Delta t} (e^{A \Delta t} - E) e^{At} \right].$$

Адсюль і з азначэння экспаненты (3.3.29) атрымаем

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A \cdot e^{At},$$

а гэта значыць, што e^{At} ёсць рашэнне разглядаемай сістэмы.

Далей пры $t=0$ маем $e^{A \cdot 0} = E$. У сілу таго, што $|E| \neq 0$, атрымаем, $|e^{At}| \neq 0$ для ўсіх $t \in I$, а гэта значыць, што e^{At} – фундаментальная матрыца (гл. тэарэму 3.1).

Тэарэма 3.7. Разгледзім спачатку частковы выпадак сістэмы

$\dot{x} = Ax + P_m(t)e^{\mu t}$, калі $A = J_k$ – жарданава клетка віду (3.3.24). У разгорнутым выглядзе гэту сістэму запішам так:

$$\dot{y}_1 = \lambda y_1 + y_2 + P_m^1(t)e^{\mu t},$$

$$\dot{y}_2 = \lambda y_2 + y_3 + P_m^2(t)e^{\mu t},$$

.....

$$\dot{y}_{k-1} = \lambda y_{k-1} + y_k + P_m^{k-1}(t)e^{\mu t},$$

$$\dot{y}_k = \lambda y_k + P_m^k(t)e^{\mu t}.$$

Інтэгруючы гэтую сістэму знізу ўверх, карыстаючыся формуламі (2.4.18), калі $\mu \neq \lambda$ і (2.4.19) пры $\mu = \lambda$, адпаведна атрымаем, што частковае рашэнне будзе мець выгляд $y_i^* = Q_m^i(t)e^{\mu t}$, $i = \overline{1, k}$ пры $\mu \neq \lambda$ і $y_k^* = tQ_m^k(t)e^{\mu t}$, $y_{k-1}^* = tQ_{m+1}^{k+1}(t)e^{\mu t}$, ..., $y_1^* = tQ_{m+k-1}^1(t)e^{\mu t}$. Запісваючы апошнія судачыненні ў вектарнай форме, атрымаем формулы $y^* = Q_{m+k}(t)e^{\mu t}$.

У агульным выпадку разглядаемую сістэму з дапамогай пераўтварэння $x = Ty$ (матрыца T прыводзіць матрыцу A да жарданавай нармальнай формы) прыводзім да выгляду

$$\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_s \end{pmatrix} y + \tilde{P}_m(t)e^{\mu t},$$

дзе $\tilde{P}_m(t) = T^{-1}P_m(t)$.

Апошняя сістэма распадаецца на s падсістэм $\frac{d\bar{y}_i}{dt} = J_i\bar{y}_i + \tilde{P}_m^{(i)}e^{\mu t}$, $i = \overline{1, s}$, прычым калі μ супадае з некаторым λ_i кратнасці k , то гэтаму λ_i адпавядаюць клеткі Жардана памернасці не больш за k . Інтэгруючы кожную з атрыманых сістэм, будзем мець, згодна са сказаным вышэй, формулы частковых іх рашэнняў віду $\bar{y}_i^* = \tilde{Q}_{m+k}^i(t)e^{\mu t}$, дзе $\tilde{Q}_{m+k}^i(t)$ — паліномы ступені не больш за $m+k$, прычым $k=0$, калі $\mu \neq \lambda_i$ і k супадае з кратнасцю λ_i , калі $\mu = \lambda_i$. Пераўтвораная сістэма будзе мець частковае рашэнне $y^* = colon(y_1^*, \dots, y_s^*) = \tilde{Q}_{m+k}(t)e^{\mu t}$, дзе $\tilde{Q}_{m+k}(t) = colon(\tilde{Q}_{m+k}^1(t), \tilde{Q}_{m+k}^2(t), \dots, \tilde{Q}_{m+k}^s(t))$, а зыходнае частковае рашэнне $x^* = Ty^* = T\tilde{Q}_{m+k}(t)e^{\mu t} = Q_{m+k}(t)e^{\mu t}$, што і патрэбна было паказаць.

Тэарэма множання (Э. Барэль) 3.8. $\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ з'яў-

ляецца арыгіналам у сілу таго, што ўласцівасці 1), 2) азначэння арыгінала відавочныя, а для доказу 3) адзначым, што калі ўзяць лік s_0 , роўны найбольшаму з паказнікаў росту $f(t)$ і $g(t)$, то тады

$$\left| \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \right| < M \left| \int_0^t e^{s_0\tau} e^{s_0(t-\tau)} d\tau \right| = Mte^{s_0t}.$$

Разгледзім цяпер $\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^\infty e^{-pt} dt \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$.

Двайны інтэграл, які стаіць справа пры $\operatorname{Re} p > s_0$, абсалютна збягаецца, таму ў ім можна замяніць парадак інтэгравання, і, замяняючы t на $t_1 = t - \tau$, атрымаем

$$\begin{aligned} \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau &\doteq \int_0^\infty f(\tau)d\tau \int_\tau^\infty e^{-pt} g(t-\tau)dt = \\ &= \int_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau}d\tau \int_0^\infty g(t_1)e^{-pt_1}dt_1 = F(p)G(p). \end{aligned}$$

Тэарэма 3.9 (Флоке-Ляпунова). Спачатку вызначым функцыю $\ln A$ (лагарыфм) квадратнай матрыцы A . Няхай $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ ($s \leq n$) – розныя ўласныя значэнні $(n \times n)$ -матрыцы A , прычым $\lambda_j \neq 0 \quad \forall j$, гэта значыць $\det A \neq 0$. Правядзём з пункта $\lambda = 0$ камплекснай плоскасці прамень (разрэз), які не праходзіць ні праз адзін з пунктаў $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$. З дапамогай гэтага разрэзу вызначым розныя галіны $(\ln z)_k$ мнагазначнай функцыі $\ln z$ камплекснай зменнай z (гл. [45], глава III, § 9, с. 181) $(\ln z)_k = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k)$, $k = 0, \pm 1, \dots$, дзе $\arg z$ ёсць адназначная функцыя (калі разрэз зроблены па промні $\arg z = \varphi_0$, то можна ўзяць $\varphi_0 \leq \arg z < \varphi_0 + 2\pi$). Возьмем акружнасці S_j з цэнтрам у пунктах λ_j так, каб яны не перасякаліся і не мелі агульных пунктаў з промнем разрэза. Абзначым праз K_j адкрытыя кругі, абмежаваныя акружнасцямі S_j , і вызначым у абсягу $K = \bigcup_{j=1}^s K_j$ кускова-аналітычную (гл. [15], глава III, § 30, с. 624) функцыю $\ln z = (\ln z)_{k_j}$ пры $z \in K_j$ (цэлыя лікі k_j –

адвольныя). Адпаведна (гл. [25], глава V, § 5, с. 111) функцыя $\ln A$ ад матрыцы A вызначаецца так:

$$\ln A = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^s \int_{S_j} (\lambda E - A)^{-1} (\ln \lambda)_{k_j} d\lambda.$$

Лёгка бачыць, што матрыца $F = \ln A$ задавальняе судачыненню $e^F = A$. Формула для вызначэння $\ln A$ паказвае, што для заданай нявыраджанай матрыцы A існуе бясконцае мноства матрыц F , якія задавальняюць судачыненню $e^F = A$, у сілу таго, што выбар лікаў k_j адвольны.

Дакажам цяпер тэарэму 3.9. Няхай $X(\omega)$ – матрыца манадрамii

$$A_t = \frac{1}{\omega} \ln X(\omega),$$

дзе пад $\ln X(\omega)$ разумеецца адно са значэнняў уведзенай мнагазначнай функцыі. Вызначым матрычную функцыю $G(t)$ так:

$G(t) = X(t) e^{-A_t t}$. Тады роўнасць $X(t) = G(t) e^{A_t t}$ выконваецца аўтаматычна. Пакажам, што $G(t + \omega) = G(t)$. Маем $G(t + \omega) = X(t + \omega) e^{-A_t(t + \omega)} = X(t + \omega) e^{-A_t \omega} e^{-A_t t} = X(t) X(\omega) e^{-A_t \omega} e^{-A_t t} = X(t) e^{-A_t t} = G(t)$. Тэарэма 3.9 даказана.

Тэарэма 3.10. Няхай μ – мультыплікатар сістэмы (3.7.50), тады існуе такі вектар $x^0 \neq 0$, што $X(\omega)x^0 = \mu x^0$. Разгледзім ненульовае рашэнне сістэмы (3.7.50) $\varphi(t) = X(t)x^0$. У сілу таго, што $X(t + \omega) = X(t)X(\omega)$, будзем мець $\varphi(t + \omega) = X(t + \omega)x^0 = X(t)X(\omega)x^0 = X(t)\mu x^0 = \mu X(t)x^0 = \mu\varphi(t)$. Неабходнасць даказана.

Дакажам дастатковасць. З судачынення $\varphi(t + \omega) = \mu\varphi(t)$ пры $t = 0$ атрымаем $\varphi(\omega) = \mu\varphi(0)$. У сілу тэарэмы адзінасці

$\varphi(t) = X(t)\varphi(0)$, прычым $\varphi(0) \neq 0$, таму што ў процілеглым выпадку рашэнне $\varphi(t)$ было бы нулявым. З апошняй роўнасці атрымаем $X(\omega)\varphi(0) = \varphi(\omega) = \mu\varphi(0)$. Такім чынам, $\varphi(0)$ – уласны вектар матрыцы $X(\omega)$, а μ – мультыплікатар сістэмы (3.7.50).

Тэарэма 3.11. Каб рашэнне $\dot{x} = A(t)x + f(t)$, дзе $A(t)$ – непарыўная перыядычная матрыца з перыядам ω , $f(t)$ – непарыўная ω -перыядычная вектар-функцыя, было ω -перыядычным, відавочна, што неабходна, каб $\varphi(0) = \varphi(\omega)$. Для доказу дастатковасці разгледзім функцыю $\psi(t) = \varphi(t + \omega)$, якая ў сілу перыядычнасці $A(t)$ і $f(t)$ з'яўляецца рашэннем дадзенай сістэмы, прычым $\psi(0) = \varphi(\omega) = \varphi(0)$. А ў сілу тэарэмы адзінасці $\psi(t)$ і $\varphi(t)$ супадаюць пры ўсіх t . Гэта і даказвае тэарэму.

Тэарэма 3.12. У § 3.4 была атрымана формула, па якой вызначаецца рашэнне задачы Кашы для неаднароднай сістэмы. Гэтая формула мае выгляд

$$x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x^0 + X(t)\int_{t_0}^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau,$$

дзе $X(t)$ — фундаментальная матрыца адпаведнай аднароднай сістэмы. Калі выбраць фундаментальную матрыцу $X(t)$ так, каб $X(0) = E$, то гэтая формула прыме від (пры $t_0 = 0$)

$$x(t) = X(t)x^0 + X(t)\int_0^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau. \quad (28)$$

Будзем патрабаваць, каб рашэнне $x(t)$ мела перыяд ω , гэта значыць

$$x(t + \omega) = x(t),$$

а пры $t = 0$

$$x(\omega) = x(0). \quad (29)$$

Калі для некаторага рашэння $x(t)$ выканана ўмова (29), то яно мае перыяд ω . Сапраўды, $x(t+\omega)$ і $x(t)$ – два рашэнні сістэмы $\dot{x} = A(t)x + f(t)$, якія задавальняюць у сілу (29) адной і той жа пачатковай умове пры $t = 0$. У сілу тэарэмы адзінасці гэтыя рашэнні супадаюць, гэта значыць мае месца $x(t+\omega) = x(t)$. Такім чынам, умову таго, што рашэнне $x(t)$ мае перыяд ω , можна запісаць так:

$$X(\omega)x^0 + X(\omega)\int_0^\omega X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau = x^0,$$

або

$$(X(\omega) - E)x^0 = -X(\omega)\int_0^\omega X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau. \quad (30)$$

Па ўмове тэарэмы 3.12 усе мультыплікатары аднароднай сістэмы не роўныя адзінцы, гэта значыць, што характарыстычнае ўраўненне $|X(\omega) - \mu E| = 0$ не мае караня $\mu = 1$. Значыць, ва ўмове (30) $|X(\omega) - E| \neq 0$ і гэтая сістэма лінейных алгебраічных ураўненняў адназначна вырашаецца адносна x^0 . Такім чынам, адзінае рашэнне зададзенай неаднароднай сістэмы з перыядам ω вызначаецца формулай (28) і пачатковым значэннем x^0 , знойдзеным з (30). Тэарэма даказана.

Тэарэма 4.1. Спачатку дакажам так званую лему Гронуала, якая фармулюецца так: няхай $u(t), v(t)$ – неадмоўныя непарыўныя пры $t \geq t_0$ функцыі, звязаныя няроўнасцю

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^t v(\tau)u(\tau)d\tau, \quad (31)$$

дзе c – дадатная пастаянная; тады пры $t \geq t_0$ мае месца ацэнка

$$u(t) \leq c \exp \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau. \quad (32)$$

Доказ лемы. Помножым (31) на $v(t)$ і дапусцім

$$\psi(t) = \int_{t_0}^t v(s)u(s)ds. \text{ Тады } \dot{\psi}(t) \leq v(t) [c + \psi(t)], \text{ адкуль}$$

$$\frac{\dot{\psi}(t)}{c + \psi(t)} \leq v(t). \quad (33)$$

Праінтэграваўшы няроўнасць (33) ад t_0 да t , маем

$$c + \psi(t) \leq c \exp \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau,$$

што з улікам (31) і прывядзе да судачынення (32). Лема даказана.

Заўвага. Калі перайсці ў формулах (31) і (32) да ліміту пры $c \rightarrow +0$, то пераконваемся, што лема Гронуала выконваецца ў выпадку $c = 0$.

Для доказу тэарэмы патрэбна паказаць, што калі $x = \varphi(t)$ і $x = \psi(t)$ – два рашэнні задачы Кашы (4.2.12), (4.2.13), вызначаныя адпаведна на інтэрвалах Δ_1 і Δ_2 , то $\varphi(t) = \psi(t)$ для $t \in \Delta_1 \cap \Delta_2$. Дакажам спачатку, што калі ў некаторым пункце t_1 маем $\varphi(t_1) = \psi(t_1) = x^1$ (рашэнні супадаюць у пункце t_1), то $\varphi(t) = \psi(t)$ у некаторым наваколлі $|t - t_1| < h$ гэтага пункта. З інтэгральнага ўраўнення (4.2.14) для рашэнняў $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ атрымаем:

$$\varphi(t) = x^1 + \int_{t_1}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau, \quad (34)$$

$$\psi(t) = x^I + \int_{t_I}^t f(\tau, \psi(\tau)) d\tau. \quad (35)$$

Адымаючы ад (34) роўнасць (35), будзем мець

$$\varphi(t) - \psi(t) = \int_{t_I}^t [f(\tau, \varphi(\tau)) - f(\tau, \psi(\tau))] d\tau. \quad (36)$$

У сілу таго, што мноства G адкрытае, у ім будзе існаваць цыліндр $|t - t_I| \leq h_1$, $|x - x^I| \leq r$. Тады будзе існаваць такое h_2 , што пры $|t - t_I| \leq h_2$ маем, у сілу непарыўнасці функцый $\varphi(t)$, $\psi(t)$,

$$|\varphi(t) - x^I| \leq r, |\psi(t) - x^I| \leq r. \quad (37)$$

Калі выбраць $h = \min(h_1, h_2)$, то цыліндр

$$|t - t_I| \leq h, |x - x^I| \leq r \quad (38)$$

будзе цалкам змяшчацца ў мностве G і (37) выконваецца пры $|t - t_I| \leq h$. Пераходзячы цяпер у роўнасці (36) да нормаў, будзем мець

$$|\varphi(t) - \psi(t)| \leq \left| \int_{t_I}^t |f(\tau, \varphi(\tau)) - f(\tau, \psi(\tau))| d\tau \right| \quad (39)$$

(гл., напрыклад, [14], глава I, § 5, с. 48).

Для ацэнкі рознасці пад знакам інтэграла ў (39) выкарыстаем умову Ліпшыца. Гэта можна зрабіць таму, што пры выкананні ўмоў (37) пункты $(\tau, \varphi(\tau))$ і $(\tau, \psi(\tau))$ будуць змяшчацца ў цыліндры (38). Такім чынам, маем

$$|f(\tau, \varphi(\tau)) - f(\tau, \psi(\tau))| \leq L|\varphi(\tau) - \psi(\tau)|.$$

Значыць, у няроўнасці (39) атрымаем

$$|\varphi(t) - \psi(t)| \leq L \left| \int_{t_1}^t |\varphi(\tau) - \psi(\tau)| d\tau \right|.$$

У сілу лемы Гронуала для функцыі $x(t) = \varphi(t) - \psi(t)$ выконваецца для ўсіх $t \in [t_1 - h; t_1 + h]$ няроўнасць $|x(t)| \leq 0$ (у нашым выпадку $u(t) = |x(t)|$, $v(t) = L$, $c = 0$). Гэта і даказвае, што $\varphi(t) \equiv \psi(t)$ пры $|t - t_1| < h$.

Няхай цяпер рашэнні $x = \varphi(t)$ і $x = \psi(t)$ вызначаны на інтэрвале $(a; b)$ і $\varphi(t_0) = \psi(t_0)$ пры $t_0 \in (a; b)$. Дакажам, што $\varphi(t) = \psi(t)$ на ўсім інтэрвале $(a; b)$. Доказ правядзём ад процілеглага. Дапусцім, што існуе такі $t_1 \in (a; b)$, для якога $\varphi(t_1) \neq \psi(t_1)$. Для пэўнасці будзем лічыць $t_1 > t_0$. Пакажам, што мноства M пунктаў $t < t_1$ інтэрвалу $(a; b)$, якія задавальняюць умове $\varphi(t) = \psi(t)$, будзе замкнутым (азначэнне гл. у [4], глава VII, § 1, с. 414). Сапраўды, калі $\tilde{t}$ — лімітавы пункт мноства M , а t_m — любая паслядоўнасць пунктаў мноства M , якія збягаюцца да $\tilde{t}$, то $\varphi(t_m) = \psi(t_m)$. У сілу непарыўнасці функцый $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ маем $\varphi(\tilde{t}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi(t_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \psi(t_m) = \psi(\tilde{t})$. Пункт $\tilde{t}$ будзе належаць M , таму што пры $t_m < t_1$ маем $\tilde{t} < t_1$ ($\tilde{t} \neq t_1$, таму што $\varphi(t_1) \neq \psi(t_1)$). Такім чынам, M — замкнутае мноства, і, згодна з азначэннем, абмежаванае зверху. Дапусцім, што $\tilde{\tilde{t}} = \sup M$, і ў сілу замкнутасці $\tilde{\tilde{t}} \in M$, $\varphi(\tilde{\tilde{t}}) = \psi(\tilde{\tilde{t}})$. Як было паказана вышэй, у некаторым наваколлі $|t - \tilde{\tilde{t}}| < \delta$ пункта $\tilde{\tilde{t}}$ будзе $\varphi(t) = \psi(t)$, гэта значыць знойдзецца такі пункт $t_2 > \tilde{\tilde{t}}$, што $\varphi(t_2) = \psi(t_2)$. Гэта

немагчыма ў сілу таго, што $\tilde{t} = \sup M$. Атрыманая супярэчнасць даказвае тэарэму.

Тэарэма 4.2. Замест задачы Кашы

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (40)$$

$$x(t_0) = x^0 \quad (41)$$

будзем разглядаць вектарнае інтэгральнае ўраўненне

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau. \quad (42)$$

Рашэнне ўраўнення (42) пабудуем метадам паслядоўных набліжэнняў Пікара (аб гэтым метадзе ў выпадку аднаго ўраўнення гл. у доказе тэарэмы 1.2).

У якасці нулявога набліжэння шуканага рашэння возьмем функцыю $x^0(t) = x^0$, а паслядоўныя набліжэнні будзем вызначаць так:

$$x^{k+1}(t) = x^0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x^k(\tau)) d\tau, \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (43)$$

Па аналогіі з доказам тэарэмы 1.2 па індукцыі можна ўстанавіць, што ўсе функцыі $x^k(t)$ належаць мноству Π , вызначаныя і непарыўныя на адрэзку $[t_0 - h; t_0 + h]$, прычым

$$|x^{k+1}(t) - x^k(t)| \leq \frac{ML^k |t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!} \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (44)$$

Значыць, паслядоўнасць $\{x^k(t)\}$ збягаецца раўнамерна на адрэзку $[t_0 - h; t_0 + h]$ да некаторай непарыўнай функцыі $x(t)$ і таму $f(t, x^k(t)) \rightarrow f(t, x(t))$ пры $k \rightarrow \infty$ раўнамерна па $t \in [t_0 - h; t_0 + h]$. Такім чынам, у роўнасці (43) можна перайсці да ліміту пад знакам інтэграла і атрымаць судачыненне (42), якое па-

казвае, што $x(t)$ ёсць рашэнне задачы Кашы (40), (41). Тэарэма 4.2 даказана.

Сцвярджэнне 4.1. Неабходнасць існавання ліміту $\lim_{t \rightarrow b-0} \varphi(t) = \delta$, $(b, \delta) \in G$ непасрэдна вынікае з азначэння рашэння і яго працягу.

Дакажам дастатковасць. Няхай $\varphi_I(t)$ — рашэнне (31), вызначанае на некаторым інтэрвале $(\alpha; \beta) \subset I$, $b \in (\alpha; \beta)$ і задавальняе пачатковым дадзеным (b, δ) . Па тэарэме 4.2 гэтае рашэнне будзе існаваць. Вызначым функцыю $\psi(t)$ на $[a; \beta) \subset I$ наступным чынам:

$$\psi(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{пры } t \in [a; b), \\ \varphi_I(t) & \text{пры } t \in [b; \beta). \end{cases}$$

Дапусцім, $J(t) = \varphi(a) + \int_a^t f(\tau, \psi(\tau)) d\tau$. Згодна з азначэннем $\psi(t)$ і з эквівалентнасцю задачы Кашы (40), (41) сістэме інтэгральных ураўненняў (42) (гл. § 4.2) $J(t) = \varphi(t) = \psi(t)$ пры $t \in [a; b)$. Пры $t \in [b; \beta)$ маем:

$$\begin{aligned} J(t) &= \varphi(a) + \int_a^b f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau + \int_b^t f(\tau, \varphi_I(\tau)) d\tau = \\ &= \delta + \int_b^t f(\tau, \varphi_I(\tau)) d\tau = \varphi_I(t) = \psi(t) \end{aligned}$$

па азначэнні $\varphi_I(t)$ і $\psi(t)$. Таму, пры $t \in [a; \beta)$ функцыя $\psi(t)$ з'яўляецца рашэннем інтэгральнага ўраўнення (42), а, значыць, рашэннем сістэмы (40), звужэнне якога на $[a; b)$ ёсць $\varphi(t)$. Таму $\varphi(t)$ з'яўляецца доўжаным управа.

Тэарэма 4.3. 1) Пакажам, што існуе $x = \varphi(t)$ — нядоўжанае рашэнне сістэмы ўраўненняў (40), якое задавальняе пачатковай умове $\varphi(t_0) = x^0$, (t^0, x^0) — любы пункт з G . Разгледзім сукупнасць усіх рашэнняў сістэмы ўраўненняў (40), якія задавальняюць умове $x(t_0) = x^0$. Кожнаму рашэнню гэтай сукупнасці адпавядае свой інтэрвал вызначэння. Мноства ўсіх левых канцоў гэтых інтэрвалаў абазначым M_1 , а мноства іх правых канцоў — M_2 .

Дакладную верхнюю мяжу мноства M_2 абазначым праз m_2 , $\sup M_2 = m_2$, а дакладную ніжнюю мяжу мноства M_1 абазначым праз m_1 , $\inf M_1 = m_1$. Калі M_2 неабмежаванае зверху, то мяркуем, што $m_2 = +\infty$, калі M_1 неабмежаванае знізу, то $m_1 = -\infty$. Пабудуем рашэнне $x = \varphi(t)$, якое задавальняе ўмове $\varphi(t_0) = x^0$ і вызначаецца на ўсім інтэрвале $m_1 < t < m_2$. Няхай t^* — адвольны пункт гэтага інтэрвалу. У сілу таго, што m_2 і m_1 ёсць адпаведна дакладная верхняя мяжа і дакладная ніжняя мяжа, то існуе рашэнне $x = \psi(t)$, якое задавальняе ўмове $\psi(t_0) = x^0$ і вызначаецца на некаторым інтэрвале $(t_1; t_2)$, які змяшчае пункт t^* . Дапусцім, $\varphi(t^*) = \psi(t^*)$. Атрыманае значэнне функцыі φ у пункце t^* не залежыць ад выпадкова выбранага рашэння $\psi(t)$. Сапраўды, калі $x = \chi(t)$ — якое-небудзь іншае рашэнне, што задавальняе ўмове $\chi(t_0) = x^0$ і вызначаецца на інтэрвале, які змяшчае пункт t^* , то $\psi(t^*) = \chi(t^*)$ па тэарэме адзінасці 4.1, таму што $\psi(t_0) = \chi(t_0)$. Такім чынам, функцыя $x = \varphi(t)$ адназначна вызначаецца на ўсім інтэрвале (m_1, m_2) і ў той жа час з'яўляецца рашэннем сістэмы (40) з пачатковымі значэннямі (t_0, x^0) , таму што ў наваколлі любога пункта t^* з інтэрвалу (m_1, m_2) гэтая функцыя супадае з некаторым

рашэннем сістэмы. Пакажам цяпер, што $x = \varphi(t)$ – нядоўжанае рашэнне. Няхай $x = \psi(t)$ ($t_1 < t < t_2$) — працяг рашэння $x = \varphi(t)$, тады $t_1 \leq m_1, m_2 \leq t_2$, $\psi(t_0) = x^0$ і $\varphi(t) = \psi(t)$ пры $m_1 < t < m_2$. З самой пабудовы рашэння $\varphi(t)$ вынікае, што $\varphi(t)$ служыць працягам рашэння $\psi(t)$, таму $m_1 \leq t_1$ і $t_2 \leq m_2$. Значыць, $t_1 = m_1$, $t_2 = m_2$ і $\varphi(t) = \psi(t)$ пры $m_1 < t < m_2$, гэта значыць $\varphi(t)$ – нядоўжанае рашэнне.

2) Пакажам цяпер, што калі $x = \varphi(t)$ — нядоўжанае рашэнне, а $x = \psi(t)$ – некаторае рашэнне сістэмы (40) з аднолькавымі пачатковымі значэннямі (t_0, x^0) , то $x = \varphi(t)$ – працяг рашэння $x = \psi(t)$.

Дапусцім, што рашэнне $x = \varphi(t)$ вызначаецца пры $t_1 < t < t_2$, а рашэнне $x = \psi(t)$ – пры $t_1^* < t < t_2^*$. У сілу тэарэмы адзінасці 4.1 рашэнні $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ будуць супадаць на агульнай частцы інтэрвалаў $(t_1; t_2)$ і $(t_1^*; t_2^*)$. Пры $t_2^* > t_2$ функцыя
$$x = \begin{cases} \varphi(t), & t_1 < t \leq t_0, \\ \psi(t), & t_0 \leq t \leq t_2^* \end{cases}$$
 была б працягам рашэння $x = \varphi(t)$, які адрозніваецца ад $\varphi(t)$, што немагчыма, таму што $\varphi(t)$ – нядоўжанае рашэнне. Значыць, $t_2^* \leq t_2$. Аналагічна даказваецца, што $t_1 \leq t_1^*$. Такім чынам, $\varphi(t)$ — працяг рашэння $\psi(t)$.

3) Няхай рашэнне $x = \varphi(t)$ вызначаецца на інтэрвале $(t_1; t_2)$, а $x = \psi(t)$ — на інтэрвале $(t_1^*; t_2^*)$. Пакажам, што калі гэта нядоўжаныя рашэнні сістэмы (40) з аднолькавымі пачатковымі значэннямі (t_0, x^0) , то яны будуць вызначацца на адным і тым жа інтэрвале і супадаць на ім. Сапраўды, у сілу даказанага ў пункце 2), рашэнне $x = \varphi(t)$ ёсць працяг рашэння $x = \psi(t)$, прычым $t_1 \leq t_1^*$,

$t_2^* \leq t_2$ і $\varphi(t) = \psi(t)$ пры $t_1^* < t < t_2^*$. Гэтак жа і $x = \psi(t)$ — працяг рашэння $x = \varphi(t)$. Таму $t_1^* \leq t_1, t_2 \leq t_2^*$. Значыць, $t_1^* = t_1, t_2 = t_2^*$ і $\varphi(t) = \psi(t)$ на інтэрвале $(t_1; t_2)$.

Тэарэма 4.4. Дапусцім, што $\Delta \neq R$. Значыць $\Delta = (\alpha; \beta)$, дзе хоць бы адзін з лікаў α, β канечны; для дакладнасці лічым $\beta < \infty$. Возьмем некаторы адрэзак $[\beta_1; \beta_2]$, задавальняючы ўмове $\beta_1 < \beta < \beta_2$, і абазначым праз M максімум функцыі $|f(t, x)|$ на мностве $[\beta_1; \beta_2] \times K$. З таго, што для любых $t, \tau \in [\beta_1; \beta_2] \cap (\alpha; \beta)$ выконваецца роўнасць

$$\varphi(t) - \varphi(\tau) = \int_{\tau}^t f(s, \varphi(s)) ds,$$

вынікае, што $|\varphi(t) - \varphi(\tau)| \leq M |t - \tau|$. Таму існуе $\lim_{t \rightarrow \beta} \varphi(t) = z^0$, прычым $z^0 \in K \subset D$. Няхай $r_1 > 0$ такое, што шар $\{x: |x - z^0| < r_1\}$ змяшчаецца ў абсягу D . Па тэарэмах існавання і адзінасці задача Кашы для ўраўнення (40) з умовай $x(\beta) = z^0$ мае адзінае рашэнне $\psi(t)$, вызначанае на інтэрвале $(\beta - h; \beta + h)$. Паколькі ўраўненне (40) валодае ўласцівасцю існавання і адзінасці рашэнняў на мностве $G = R \times D$, то $\varphi(t) = \psi(t)$ для $t \in (\beta - h; \beta)$, а адсюль вынікае, што функцыя

$$\rho(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in (\alpha; \beta), \\ \psi(t), & t \in (\beta - h; \beta + h) \end{cases}$$

з'яўляецца працягам рашэння $\varphi(t)$, а гэта супярэчыць яго нядоўжнасці. Такім чынам, дапушчэнне $\Delta \neq R$ няправільнае і таму рашэнне $\varphi(t)$ неабмежавана доўжанае. Тэарэма даказана.

Тэарэма 4.5. Няхай $\varphi(t)$ – адвольнае нядоўжанае рашэнне ўраўнення (40). У сілу таго, што

$$\frac{d}{dt}(|\varphi(t)|^2) = \frac{d}{dt}(\varphi_1(t)^2 + \dots + \varphi_n(t)^2) = 2(\varphi_1(t)f_1(t, \varphi(t)) + \dots + \varphi_n(t)f_n(t, \varphi(t))) = 2(\varphi(t), f(t, \varphi(t))),$$

дзе (c, d) – скалярны здабытак вектараў c, d з R^n , маем

$$\frac{d}{dt}(|\varphi(t)|^2) = 2|\varphi(t)| |f(t, \varphi(t))| \leq 2|\varphi(t)| \Phi(|\varphi(t)|),$$

адкуль $d|\varphi(t)| \leq \Phi(|\varphi(t)|)dt$ і таму

$$\int_{|x^0|}^{|\varphi(t)|} \frac{ds}{\Phi(s)} \leq |t - t_0| \quad (x^0 = \varphi(t_0)). \quad (45)$$

Далучым цяпер, што рашэнне $\varphi(t)$ не з'яўляецца неабмежавана доўжаным. Тады яго абсяг вызначэння $\Delta = (\alpha; \beta)$ не супадае з R і таму мае месца хоць бы адно з патрабаванняў (4.4.19). У сілу таго, што $D = R^n$, то другая ўмова з (4.4.19) выконвацца не можа. Пакажам, што не можа выконвацца і першая ўмова. Сапраўды, няхай $\beta < \infty$ (выпадак $\alpha > -\infty$ разглядаецца аналагічна) і $|\varphi(t_n)| \rightarrow \infty$ для некаторай паслядоўнасці $\{t_n\}$ момантаў часу, якая імкнецца да β . Тады з (45) у сілу (4.4.20) маем $|t_n - t_0| \rightarrow \infty$, а гэта супярэчыць умове $\beta < \infty$. Значыць, рашэнне $\varphi(t)$ неабмежавана доўжанае. Тэарэма даказана.

Тэарэма 4.6. Мноства пунктаў (t, x, μ) , якія задавальняюць умовам

$$a \leq t \leq b, \quad |\varphi(t, \mu_0) - x| \leq r, \quad |\mu - \mu_0| \leq \sigma, \quad (46)$$

абазначым праз F . Гэтае мноства пры дастаткова малых r і σ будзе змяшчацца ў $\tilde{G}$ у сілу таго, што мноства пунктаў $(t, \varphi(t, \mu_0), \mu_0)$, дзе $a \leq t \leq b$ уяўляе сабой замкнутае абмежаванае

мноства, што цалкам ляжыць у адкрытым мностве $\tilde{G}$. Няхай r і σ ужо выбраны так, каб $F \subset \tilde{G}$. Відавочна, F – замкнутае абмежаванае мноства. Па ўмове 1⁰ тэарэмы функцыя $f(t, x, \mu)$ задавальняе ўмове Ліпшыца на мностве F , гэта значыць

$$|f(t, x^1, \mu) - f(t, x^2, \mu)| \leq L|x^1 - x^2| \quad (47)$$

для любых двух пунктаў (t, x^1, μ) , (t, x^2, μ) з F , прычым канстанта L залежыць ад r, σ .

Для тых значэнняў t, μ , для якіх функцыі $\varphi(t, \mu)$ і $\varphi(t, \mu_0)$ вызначаюцца, ацнім рознасць $|\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu_0)|$.

Функцыі $\varphi(t, \mu)$ і $\varphi(t, \mu_0)$ задавальняюць інтэгральным ураўненням

$$\varphi(t, \mu) = x^0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau, \mu), \mu) d\tau,$$

$$\varphi(t, \mu_0) = x^0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau, \mu_0), \mu_0) d\tau.$$

Адымаючы з першага ўраўнення другое і прымяняючы вядомую няроўнасць, атрымаем

$$|\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu_0)| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(\tau, \varphi(\tau, \mu), \mu) - f(\tau, \varphi(\tau, \mu_0), \mu_0)| d\tau \right| \quad (48)$$

(гл. [4], глава IV, § 2, п. 3, с. 357).

Ацнім падынтэгральны выраз

$$\begin{aligned} & |f(\tau, \varphi(\tau, \mu), \mu) - f(\tau, \varphi(\tau, \mu_0), \mu_0)| = \\ & = |f(\tau, \varphi(\tau, \mu), \mu) - f(\tau, \varphi(\tau, \mu_0), \mu) + f(\tau, \varphi(\tau, \mu_0), \mu) - \\ & \quad - f(\tau, \varphi(\tau, \mu_0), \mu_0)| \end{aligned}$$

$$-f(\tau, \varphi(\tau, \mu_0), \mu_0) \leq |f(\tau, \varphi(\tau, \mu), \mu) - f(\tau, \varphi(\tau, \mu_0), \mu)| + \\ + |f(\tau, \varphi(\tau, \mu_0), \mu) - f(\tau, \varphi(\tau, \mu_0), \mu_0)|. \quad (49)$$

У сілу няроўнасці (47)

$$|f(\tau, \varphi(\tau, \mu), \mu) - f(\tau, \varphi(\tau, \mu_0), \mu)| \leq L|\varphi(\tau, \mu) - \varphi(\tau, \mu_0)|. \quad (50)$$

З азначэння раўнамернай непарыўнасці функцыі $f(\tau, x, \mu)$ на абмежаваным замкнутым мностве F (гл. [15], глава II, § 19, п. 19.7, с. 444) вынікае: для любога $\varepsilon_I > 0$ знойдзецца такі $\sigma > 0$, што якімі б ні былі пункты (τ, x, μ) і (τ, x, μ_0) з F , што задавальняюць умове $|\mu - \mu_0| < \sigma$, выконваецца няроўнасць

$$|f(\tau, x, \mu) - f(\tau, x, \mu_0)| < \varepsilon_I.$$

(Будзем лічыць, што σ з няроўнасці (46) задавальняе ўказаным умовам.)

Тады, у прыватнасці,

$$|f(\tau, \varphi(\tau, \mu_0), \mu) - f(\tau, \varphi(\tau, \mu_0), \mu_0)| < \varepsilon_I. \quad (51)$$

У сілу (50) і (51) з няроўнасці (49) атрымаем

$$|f(\tau, \varphi(\tau, \mu), \mu) - f(\tau, \varphi(\tau, \mu_0), \mu_0)| < \varepsilon_I + L|\varphi(\tau, \mu) - \varphi(\tau, \mu_0)|. \quad (52)$$

Падстаўляючы няроўнасць (52) у (48), атрымаем

$$|\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu_0)| < \left| \int_{t_0}^t (\varepsilon_I + L|\varphi(\tau, \mu) - \varphi(\tau, \mu_0)|) d\tau \right| \leq \\ \leq \varepsilon_I |t - t_0| + L \left| \int_{t_0}^t |\varphi(\tau, \mu) - \varphi(\tau, \mu_0)| d\tau \right| \leq \varepsilon_I (b - a) + \\ + L \left| \int_{t_0}^t |\varphi(\tau, \mu) - \varphi(\tau, \mu_0)| d\tau \right|.$$

Прымяняючы да апошняй няроўнасці лему Гронуала (гл. доказ тэарэмы 4.1, у якасці функцыі $u(t)$ выступае $|\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu_0)|$), пры $|\mu - \mu_0| \leq \sigma$ атрымаем

$$|\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu_0)| \leq \varepsilon_I(b-a) e^{L|t-t_0|} \leq \varepsilon_I(b-a) e^{L(b-a)}. \quad (53)$$

Згодна з тэарэмай 4.4 нядоўжанае рашэнне $x = \varphi(t, \mu)$ павінна выйсці за межы мноства F пры ўзрастанні (або ўбыванні) t .

Абзначым праз $t_I = t_I(\mu)$ тое значэнне $t > t_0$ (або $t < t_0$), пры якім пункт $(t, \varphi(t, \mu), \mu)$ ($|\mu - \mu_0| < \sigma$) упершыню пападае на мяжу мноства F .

Выберам ε_I так, каб $\varepsilon_I < \frac{r}{(b-a) e^{L(b-a)}}$, тады, у прыватнасці пры $t = t_I$, з няроўнасці (53) атрымаем

$$|\varphi(t_I, \mu) - \varphi(t_I, \mu_0)| < r \text{ пры } |\mu - \mu_0| < \sigma. \quad (54)$$

Аднак, паколькі пункт $(t_I, \varphi(t_I, \mu), \mu)$ ляжыць на мяжы мноства F , то тады хоць адна з няроўнасцяў у (46) павінна ператварацца ў роўнасць. У сілу (54) гэта магчыма толькі пры $t_I = b$ (або пры $t_I = a$, калі $t_I < t_0$). Значыць, рашэнне $x = \varphi(t, \mu)$ вызначана пры ўсіх $a \leq t \leq b$, калі $|\mu - \mu_0| \leq \sigma$.

Калі ў якасці ε_I узяць $\varepsilon_I < \frac{\min(\varepsilon, r)}{(b-a) e^{L(b-a)}}$, дзе ε – адвольны дадатны лік, а адпаведны гэтаму ε_I лік σ абзначыць праз δ , то, у сілу няроўнасці (53), маем $|\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu_0)| < \varepsilon$ пры $|\mu - \mu_0| < \delta$. Тэарэма даказана.

Тэарэма 4.8. Спачатку ўстанавім адно дапаможнае сцвярджэнне (што часта называюць лемай Адамара), у фармулёўцы якога выкарыстоўваецца паняцце выпуклага мноства. Таму нагадаем, што

непустое мноства $U \subset R^n$ называецца выпуклым, калі для любых пунктаў x^1 і x^2 з U адрэзак $sx^1 + (1-s)x^2$, $0 \leq s \leq 1$, які іх злучае, цалкам належыць U .

Лема Адамара. Няхай функцыя $f(t, x)$ вызначаная і непарыўная пры $(t, x) \in G = I \times D$. Калі абсяг D выпуклы, а функцыя $f(t, x)$ мае непарыўныя частковыя вытворныя $f_{x_i}'(t, x) = \frac{\partial f(t, x)}{\partial x_i}$,

то існуюць такія непарыўныя функцыі $h_i(t, x, y)$, што

$$h_i(t, x, x) = f_{x_i}'(t, x),$$

$$f(t, x) - f(t, y) = \sum_{i=1}^n h_i(t, x, y)(x_i - y_i) = H(t, x, y)(x - y)$$

(x_i, y_i – каардынаты вектараў x і y адпаведна, $H = (h_1, \dots, h_n)$).

Доказ лемы. Улічваючы выпукласць мноства D , вызначым сямейства вектараў $F(s) = f(t, sy + (1-s)x)$, дзе $0 \leq s \leq 1$. У сілу таго, што

$$\frac{dF(s)}{ds} = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) f_{x_i}'(t, sy + (1-s)x),$$

відавочна, функцыя

$$h_i(t, x, y) = \int_0^1 f_{x_i}'(t, sy + (1-s)x) ds$$

задавальняе ўсім неабходным патрабаванням.

Пяройдзем цяпер непасрэдна да доказу тэарэмы. Адзначым, што ўмова Ліпшыца выконваецца на любым замкнутым абмежаваным мностве, што змяшчаецца ў G пры існаванні і непарыўнасці

частковых вытворных $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ ($j = \overline{1, n}$) (гл., § 4.1).

Тады, як вынікае з тэарэмы 4.6, функцыя $\varphi(t, \mu)$ непарыў-

ная пры $a \leq t \leq b$, $|\mu - \mu_0| < \sigma$.

Выберам на інтэрвале $|\mu - \mu_0| < \sigma$ любыя лікі μ і δ такія, што інтэрвал $(\mu - \delta; \mu + \delta)$ змесціцца ў інтэрвале $|\mu - \mu_0| < \sigma$. Няхай $|\Delta\mu| < \delta$. Будзем мець

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}(t, \mu) &= f(t, \varphi(t, \mu), \mu), \\ \dot{\varphi}(t, \mu + \Delta\mu) &= f(t, \varphi(t, \mu + \Delta\mu), \mu + \Delta\mu).\end{aligned}$$

Рознасць атрыманых роўнасцяў запішацца так:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} [\varphi(t, \mu + \Delta\mu) - \varphi(t, \mu)] &= f(t, \varphi(t, \mu + \Delta\mu), \mu + \Delta\mu) - \\ &- f(t, \varphi(t, \mu), \mu).\end{aligned}\quad (55)$$

Згодна з даказанай лемай, існуюць такія непарыўныя матрычная функцыя $H(t, \mu, \Delta\mu)$ і вектарная $h(t, \mu, \Delta\mu)$

$$\begin{aligned}f(t, \varphi(t, \mu + \Delta\mu), \mu + \Delta\mu) - f(t, \varphi(t, \mu), \mu) &= \\ &= H(t, \mu, \Delta\mu) [\varphi(t, \mu + \Delta\mu) - \varphi(t, \mu)] + h(t, \mu, \Delta\mu) \Delta\mu.\end{aligned}\quad (56)$$

Цяпер роўнасць (55) з дапамогай (56) запішацца

$$\frac{d}{dt} (\Delta\varphi) = H(t, \mu, \Delta\mu) \Delta\varphi + h(t, \mu, \Delta\mu) \Delta\mu,$$

дзе $\Delta\varphi = \varphi(t, \mu + \Delta\mu) - \varphi(t, \mu)$.

Апошняя роўнасць пры $\Delta\mu \neq 0$ прыме выгляд

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu} \right) = H(t, \mu, \Delta\mu) \frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu} + h(t, \mu, \Delta\mu).$$

Атрыманае судачыненне паказвае, што пры $\Delta\mu \neq 0$ функцыя $\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}$ задавальняе нармальнай сістэме лінейных дыферэнцыяльных ураўненняў

$$\dot{y} = H(t, \mu, \Delta\mu) y + h(t, \mu, \Delta\mu).$$

Допустим, что $y = \psi(t, \mu, \Delta\mu)$ – рашэнне гэтай сістэмы дыферэнцыяльных ураўненняў, якое задавальняе пачатковай умове

$$\psi(t_0, \mu, \Delta\mu) = 0.$$

Згодна з тэарэмай 4.6 функцыя $\psi(t, \mu, \Delta\mu)$ будзе непарыўнай пры $a \leq t \leq b$, $\mu_0 - \sigma < \mu < \mu_0 + \sigma$, $|\Delta\mu| < \delta$.

З-за таго, што

$$\left. \frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu} \right|_{t=t_0} = \frac{\varphi(t_0, \mu + \Delta\mu) - \varphi(t_0, \mu)}{\Delta\mu} = \frac{x_0 - x_0}{\Delta\mu} = 0,$$

у сілу тэарэмы адзінасці пры $\Delta\mu \neq 0$ маем $\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu} = \psi(t, \mu, \Delta\mu)$.

Пераходзячы ў гэтай роўнасці да ліміту пры $\Delta\mu \rightarrow 0$, атрымліваем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}(t, \mu) = \lim_{\Delta\mu \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu} = \lim_{\Delta\mu \rightarrow 0} \psi(t, \mu, \Delta\mu) = \psi(t, \mu, 0).$$

Такім чынам, вытворная $\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}$ існуе і непарыўная пры

$a \leq t \leq b$, $\mu_0 - \sigma < \mu < \mu_0 + \sigma$, паколькі непарыўнай з'яўляецца функцыя $\psi(t, \mu, 0)$. Тэарэма даказана.

Тэарэма 4.10. Перыядычнае рашэнне сістэмы

$$\dot{x} = Ax + f(t) + \mu F(t, x, \mu) \quad (57)$$

будзем адшукваць у выглядзе $x(t, x^0, \mu)$, дзе x^0 – пачатковае значэнне, што адпавядае $t = 0$. Паколькі $\bar{x}(t)$ вызначаецца пры ўсіх t , то згодна з уласцівасцю працягу рашэнняў (гл. § 4.4) пры дастаткова малых $|\mu|$ і $|x^0 - \bar{x}(0)|$ рашэнне $x(t, x^0, \mu)$ будзе доўжаным па t на прамежак $[0; \omega]$.

Аналагічна, як і ў тэарэме 3.4, можна даказаць, што неабходная і дастатковая ўмова ω -перыядычнасці $x(t, x^0, \mu)$ мае выгляд

$$x(\omega, x^0, \mu) = x(0, x^0, \mu) = x^0,$$

$$\text{або} \quad X(x^0, \mu) = x(\omega, x^0, \mu) - x_0 = 0. \quad (58)$$

Дапусцім, $\bar{x}^0 = \bar{x}(0)$. Згодна з тэарэмай 4.9 функцыя $X(x^0, \mu)$ будзе непарыўна дыферэнцавальнай у некаторым наваколлі пункта $(\bar{x}^0, 0)$, прычым $X(\bar{x}^0, 0) = 0$, таму што $\bar{x}(t)$ ёсць ω -перыядычнае рашэнне параджальнага ўраўнення. Маём далей

$$\frac{\partial X}{\partial x^0}(\bar{x}^0, \mu) = \frac{\partial x}{\partial x^0}(\omega, \bar{x}^0, 0) - E_n.$$

Згодна з тэорыяй § 4.6 $\frac{\partial x}{\partial x^0}(t, x^0, \mu)$ ёсць нармаваная пры $t = 0$ фундаментальная матрыца ўраўнення ў варыяцыях

$$\dot{y} = \left[A + \mu \frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t, x^0, \mu), \mu) \right] y.$$

Такім чынам, $\frac{\partial x}{\partial x^0}(\omega, \bar{x}^0, 0) = e^{\omega A}$. А тады $\frac{\partial X}{\partial x^0}(\bar{x}^0, 0) = e^{\omega A} - E_n$.

Пры ўмове $\lambda_j \neq \frac{2\pi i}{\omega} k$, $k \in \mathbb{Z}$, $i = \sqrt{-1}$ матрыца $\frac{\partial X}{\partial x^0}(\bar{x}^0, 0)$ не мае ўласных лікаў, роўных нулю, таму яе дэтэрмінант не роўны нулю. Ураўненне (58) мае адзінае рашэнне $x^0(\mu)$, непарыўна дыферэнцавальнае ў наваколлі пункта $\mu = 0$ і такое, што $x^0(0) = \bar{x}^0$ (гл. тэарэму аб няўняўнай функцыі [27], глава II, § 1, п. 6, с. 48). Згодна з тэарэмай 4.8 рашэнне $x(t, x^0(\mu), \mu)$ будзе непарыўна дыферэнцавальным па μ у наваколлі пункта $\mu = 0$, ω -перыядычным па t у сілу (58) і будзе адзіным у сілу адзінасці рашэння $x^0(\mu)$ ураўнення (58). Тэарэма даказана.

Тэарэма 4.11. Няхай рашэнне $x = \varphi(t)$ вызначаецца пры $\alpha < t < \beta$. Згодна з умовай тэарэмы, траекторыя рашэння сама сябе перасякае, гэта значыць існуюць такія лікі $t_1 \in (\alpha; \beta)$, $t_2 \in (\alpha; \beta)$ ($t_1 > t_2$), што

$$\varphi(t_1) = \varphi(t_2).$$

Згодна з уласцівасцю 4.8.2⁰ траекторыі, якія маюць агульны пункт, павінны супадаць, гэта значыць

$$\varphi(t) = \varphi(t + \gamma), \quad (59)$$

дзе $\gamma = t_1 - t_2 > 0$.

Функцыя $x = \varphi(t + \gamma)$ з'яўляецца рашэннем аўтаномнай сістэмы

$$\dot{x} = f(x), \quad (60)$$

вызначаным пры $\alpha - \gamma < t < \beta - \gamma$, і, акрамя таго, у сілу (59) гэтыя рашэнні супадаюць на агульнай частцы іх абсягаў вызначэння, гэта значыць пры $\alpha < t < \beta - \gamma$. Значыць, рашэнне

$$x = \psi(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \alpha < t < \beta, \\ \varphi(t + \gamma), & \alpha - \gamma < t \leq \alpha \end{cases}$$

з'яўляецца працягам рашэння $x = \varphi(t)$ на інтэрвал $(\alpha - \gamma; \beta)$. Паслядоўна паўтараючы апісаныя вышэй дзеянні, атрымаем працяг рашэння $x = \varphi(t)$, вызначаны на інтэрвале $(-\infty; \beta)$. Затым, замяніўшы ў роўнасці (59) t на $t - \gamma$, з дапамогай роўнасці $\varphi(t) = \varphi(t - \gamma)$ атрымліваем працяг рашэння $x = \varphi(t)$ з інтэрвалу $(-\infty; \beta)$ на ўсю лікавую вось $(-\infty; +\infty)$. Такім чынам, рашэнне $x = \varphi(t)$ вызначаецца на $-\infty < t < +\infty$, а пастаянная $\gamma = t_1 - t_2 > 0$ — перыяд гэтага рашэння. Разгледзім цяпер мноства P перыядаў рашэння $x = \varphi(t)$. Мноства P або змяшчае як патрэбна малыя дадатныя лікі, або ў P знойдзецца найменшы дадатны лік T . У першым выпадку будзе існаваць збежная да нуля паслядоўнасць дадатных перыядаў τ_n .

Няхай t — адвольны сапраўдны лік. Дробныя часткі $\alpha_n = \frac{t}{\tau_n} - \left[\frac{t}{\tau_n} \right]$

лікаў $\frac{t}{\tau_n}$ (квадратнымі дужкамі абазначана цэлая частка ліку)

утвараюць абмежаваную паслядоўнасць, і ў сілу таго, што $\tau_n \rightarrow 0$, маем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ t - \left[\frac{t}{\tau_n} \right] \tau_n \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n \tau_n) = 0.$$

Лікі $\left[\frac{t}{\tau_n} \right] \tau_n$, што з'яўляюцца цэлымі кратнымі перыядаў τ_n , самі

з'яўляюцца перыядамі рашэння $\varphi(t)$. Таму $\varphi(t) = \varphi\left(t - \left[\frac{t}{\tau_n} \right] \tau_n\right)$.

Пераходзячы ў гэтай роўнасці да ліміту пры $n \rightarrow \infty$, атрымаем

$$\varphi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi\left(t - \left[\frac{t}{\tau_n} \right] \tau_n\right) = \varphi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(t - \left[\frac{t}{\tau_n} \right] \tau_n\right)\right) = \varphi(0).$$

Такім чынам, $x = \varphi(t)$ ёсць становішча раўнавагі.

Разгледзім цяпер выпадак, калі мноства P змяшчае найменшы дадатны лік T . Маем $\varphi(t+T) = \varphi(t)$. Пакажам, што $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$ пры $0 < |t_1 - t_2| < T$. Дапусцім процілеглае. Тады знойдуцца такія t_1 і t_2 ($0 < |t_1 - t_2| < T$), што $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$. Згодна з уласцівасцю 4.8.2⁰ $\varphi(t) = \varphi(t + \gamma)$, дзе $\gamma = t_1 - t_2 \neq 0$. Такім чынам, $\gamma = t_1 - t_2$ служыць перыядам рашэння $\varphi(t)$. А ў сілу ўласцівасці 1 мноства P дадатны лік $|t_1 - t_2| = \pm \gamma$ таксама з'яўляецца перыядам, а гэта супярэчыць меркаванню, што T — найменшы дадатны перыяд рашэння $\varphi(t)$. Тэарэма даказана.

Тэарэма 4.12. Дапусцім, што ў першым інтэграле $\Psi(t, x_1, \dots, x_n) = C$ замест $x_1, \dots, x_n$ падстаўлена якое-небудзь рашэнне сістэмы $\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \dots, x_n)$, $i = \overline{1, n}$, тады згодна з азначэннем левая частка ператвараецца ў функцыю ад t , тоесна роўную пастаяннай. Дыферэнцуючы абедзве часткі гэтай тоеснасці па t , атрымаем

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt} = 0. \quad (61)$$

У сілу таго, што $x_1, \dots, x_n$ ёсць рашэнні разглядаемай сістэмы, то вытворныя $\frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}$ можна ў апошняй роўнасці замяніць роўнымі ім правымі часткамі ўраўненняў гэтай сістэмы. У выніку гэтага атрымаем

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + f_1(t, x_1, \dots, x_n) \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \dots + f_n(t, x_1, \dots, x_n) \frac{\partial \psi}{\partial x_n} = 0. \quad (62)$$

У роўнасці (62) $x_1, \dots, x_n$ функцыі ад t , якія з'яўляюцца некаторым рашэннем разглядаемай сістэмы; такім чынам, значэнні $(t, x_1, \dots, x_n)$ у гэтай роўнасці – каардынаты пункта з прасторы R^{n+1} , праз які праходзіць разглядаемае рашэнне. У сілу таго, што вынік дыферэнцавання ψ не залежыць ад C , роўнасць (62) выконваецца для пункта $(t, x_1, \dots, x_n)$, што ляжыць на любой інтэгральнай крывой у разглядаемым абсягу. Згодна з тэарэмай існавання, праз кожны пункт $(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)$ гэтага абсягу праходзіць інтэгральная кривая, значыць, роўнасць (62) мае месца для любога пункта разглядаемага абсягу, таму левая частка кожнага першага інтэграла $\psi(t, x_1, \dots, x_n) = C$ задавальняе тоесна судачыненню (62).

Наадварот, некаторая функцыя ψ ператварае ўраўненне (62) у тоеснасць, тады ўздоўж любой інтэгральнай крывой разглядаемай сістэмы мае месца роўнасць (61), а значыць, $\psi(t, x_1, \dots, x_n) = C$. Такім чынам, уздоўж кожнай інтэгральнай крывой функцыя ψ прымае пастаяннае значэнне.

Роўнасць (62) ёсць неабходная і дастатковая ўмова для таго, каб ψ з'яўлялася першым інтэгралам дадзенай сістэмы.

Тэарэма 4.13. Прадставім φ у выглядзе $\varphi = \sum_{k=2}^{\infty} \varphi^{(k)}$, дзе

$$\varphi^{(k)} = colon(\varphi_1^{(k)}, \dots, \varphi_n^{(k)}), \quad \varphi_i^{(k)}(y) = \sum_{q_1 + \dots + q_n = k} \varphi_i^{(q_1, \dots, q_n)} y_1^{q_1} \dots y_n^{q_n}.$$

У сілу формулы (4.10.59) атрымаем

$$\frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial y} Ay - A\varphi^{(k)} = F^{(k)}(\varphi^{(m)}, Y^{(j)}, X^{(i)}) - Y^{(k)}, \quad (63)$$

дзе $m < k$, $j < k$, $i \leq k$, $F^{(k)}$ — вядомая функцыя сваіх аргументаў.

Такім чынам, пры $k = 2$ правая частка роўнасці (63) з'яўляецца вядомай вектарнай функцыяй і, наогул, калі $\varphi^{(2)}, \dots, \varphi^{(k-1)}$ вядомыя, то вядомай будзе і гэтая правая частка.

Каб упэўніцца ў тым, што ўласнымі лікамі аператара левай часткі роўнасці (63) з'яўляюцца лікі $q_1\lambda_1 + \dots + q_n\lambda_n - \lambda_k$, дакажам наступную лему.

Лема 4.1. Аператар $L\varphi^{(k)} = \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial y} Py - Q\varphi^{(k)}$, дзе P і Q —

квадратныя матрыцы з камплекснымі элементамі адпаведна парадку m і n , мае ўласныя лікі

$$\Lambda_i^{(q_1, \dots, q_n)} = q_1\lambda_1 + \dots + q_n\lambda_n - \chi_i \quad (i = \overline{1, n}), \quad (64)$$

дзе $q_1 + \dots + q_n = k$, $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — уласныя лікі матрыцы P ;

$\chi_1, \dots, \chi_n$ — уласныя лікі матрыцы Q ; q_i — цэлыя неадмоўныя.

Доказ. Лічачы $\varphi^{(k)}(y)$ ненулявым вектарным паліномам ступені k , а B і T — неасаблівымі матрыцамі з камплекснымі элементамі парадку m і n адпаведна, дапусцім $y = Bx$, $\varphi^{(k)}(y) = T\psi^{(k)}(x)$. Пры гэтым будзем мець

$$L\varphi^{(k)}(y) = T \frac{\partial \psi^{(k)}(x)}{\partial x} B^{-1} Py - QT\psi^{(k)}(x). \quad (65)$$

Ураўненне $L\varphi^{(k)}(y) = \Lambda\varphi^{(k)}y$ ($\Lambda = \text{diag}(\lambda_1^{(q_1, \dots, q_n)}, \dots, \lambda_n^{(q_1, \dots, q_n)})$)

для вызначэння ўласных лікаў аператара L у сілу формулы (65) для

вызначэння ўласных лікаў аператара L у сілу формулы (65) запішацца ў выглядзе

$$\frac{\partial \Psi^{(k)}(x)}{\partial x} B^{-1} P B x - T^{-1} Q T \Psi^{(k)}(x) = \Lambda \Psi^{(k)}(x).$$

А гэта значыць, што ўласныя лікі аператара L будуць супадаць з уласнымі лікамі аператара $\bar{L}$, які задаецца роўнасцю

$$\bar{L} \Psi^{(k)}(x) = \frac{\partial \Psi^{(k)}(x)}{\partial x} B^{-1} P B x - T^{-1} Q T \Psi^{(k)}(x).$$

Выберам цяпер B і T так, каб $B^{-1} P B = J_1$ і $T^{-1} Q T = J_2$ былі ніжнетрохвугольнымі жарданавымі матрыцамі. Пабудуем матрыцу аператара $\bar{L}$. Мяркуючы $\bar{L} \varphi^{(k)} = f^{(k)}$, атрымаем

$$f_i^{(k)}(x) = \sum_{v=1}^m \frac{\partial \varphi_i^{(k)}}{\partial x_v} (\lambda_v x_v + \omega_v x_{v-1}) - \chi_i \varphi_i^{(k)} - \delta_i \varphi_{i-1}^{(k)},$$

дзе ω_v, δ_i — адпаведна недыяганальныя элементы матрыц J_1, J_2 .

Яны роўныя або нулю, або адзінцы. Абазначыўшы

$$f_i^{(k)}(x) = \sum_{q_1 + \dots + q_m = k} f_i^{(q_1, \dots, q_m)} x_1^{q_1} \dots x_m^{q_m},$$

атрымаем

$$\begin{aligned} f_i^{(q_1, \dots, q_m)} &= (q_1 \lambda_1 + \dots + q_m \lambda_m - \chi_i) \varphi_i^{(q_1, \dots, q_m)} + \\ &+ \sum_{v=2}^m (1 + q_v) \omega_v \varphi_i^{(q_1, \dots, q_{v-1}-1, q_v+1, \dots, q_m)} - \delta_i \varphi_{i-1}^{(q_1, \dots, q_m)}. \end{aligned}$$

Такім чынам, пры лексікаграфічным пералічэнні каэфіцыентаў (гл. [21], с. 234) матрыца аператара $\bar{L}$ — ніжнетрохвугольная з лікамі (64) па галоўнай дыяганалі. Лема даказана.

Такім чынам, у сілу даказанай лемы, аператар левай часткі • (63) будзе мець уласныя лікі $q_1 \lambda_1 + \dots + q_n \lambda_n - \lambda_k$. Згодна з умовай (4.10.60) тэарэмы гэтыя ўласныя лікі не роўныя нулю. Таму $\varphi^{(k)}$ вызначаюцца ўраўненнямі (63) адзіным чынам. Тэарэма даказана.

Лема 5.1. У § 3.3 было показана, што любое рашэнне $x = \varphi(t)$ сістэмы ўраўненняў

$$\dot{x} = Ax, \quad (66)$$

дзе A — пастаянная сапраўдная матрыца, мае выгляд:

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^m g^k(t) e^{\lambda_k t}, \quad (67)$$

дзе $g^k(t)$ — вектар-функцыя, кожная каардыната якой ёсць некаторы паліном.

Згодна з умовай лемы $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$, $k = \overline{1, m}$. Няхай $\alpha > 0$ та-
кое, што

$$\operatorname{Re} \lambda_k = \mu_k < -\alpha < 0, \quad k = \overline{1, m}. \quad (68)$$

З судачынення (67) вынікае, што

$$|\varphi(t)| \leq \sum_{k=1}^m |g^k(t)| |e^{(\mu_k + i\nu_k)t}| = \sum_{k=1}^m |g^k(t)| e^{\mu_k t}. \quad (69)$$

Памножым няроўнасць (69) на $e^{\alpha t}$, атрымаем

$$|\varphi(t)| e^{\alpha t} \leq \sum_{k=1}^m |g^k(t)| e^{(\mu_k + \alpha)t}. \quad (70)$$

У сілу няроўнасці (68) $\mu_k + \alpha < 0$ і з-за таго, што кожная каардына-
та вектара $g^k(t)$ уяўляе сабою паліном, маем

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^m |g^k(t)| e^{(\mu_k + \alpha)t} = 0. \quad (71)$$

З роўнасці (71) вынікае, што пры $t \geq 0$ функцыя $\sum_{k=1}^m |g^k(t)| e^{(\mu_k + \alpha)t}$

абмежаваная. Калі

$$\sum_{k=1}^m |g^k(t)| e^{(\mu_k + \alpha)t} \leq R,$$

тады, у сілу (70) $|\varphi(t)|e^{\alpha t} \leq R$, гэта значыць $|\varphi(t)| \leq Re^{-\alpha t}$ пры $t \geq 0$.

Лема 5.2. Няхай $x = \varphi^j(t)$ — рашэнне сістэмы (66), якое задавальняе пачатковай умове $\varphi^j(0) = h^j$, дзе h^j — адзінкавы каардынаты вектар $colon(\delta_1^j, \delta_2^j, \dots, \delta_n^j)$. Згодна з тэарэмай адзінасці

$$\varphi(t, x^0) = \sum_{j=1}^n \varphi^j(t) x_j^0, \quad (72)$$

дзе $x^0 = colon(x_1^0, \dots, x_n^0)$. Сапраўды, у правай частцы (72) стаіць рашэнне сістэмы (66), якое задавальняе пры $t = 0$ той жа самай пачатковай умове, што і $\varphi(t, x^0)$.

Згодна з лемай 5.1 існуюць такія $R_j > 0$, $j = \overline{1, n}$ і $\alpha > 0$, што пры $t \geq 0$

$$|\varphi^j(t)| \leq R_j e^{-\alpha t}.$$

Дапусцім, $R = \max\{R_1, \dots, R_n\}$. Тады пры $t \geq 0$

$$|\varphi^j(t)| \leq R e^{-\alpha t}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Згодна з (72)

$$|\varphi(t, x^0)| \leq \sum_{j=1}^n |\varphi^j(t)| |x_j^0| \leq \sum_{j=1}^n R e^{-\alpha t} |x_j^0| = nR |x^0| e^{-\alpha t}.$$

Абазначыўшы $r = nR$, атрымаем для $t \geq 0$

$$|\varphi(t, x^0)| \leq r |x^0| e^{-\alpha t}.$$

Тэарэма 5.1. Дастатковасць. Няхай ε — адвольны дадатны лік, а $x = \psi(t) = \varphi(t, x^0)$ — рашэнне сістэмы (66), якое задавальняе пачатковай умове $\psi(0) = x^0$. У сілу лемы 5.2 існуюць такія $r > 0$, $\alpha > 0$, што $\forall t \geq 0$.

$$|\psi(t)| = |\varphi(t, x^0)| \leq r |x^0| e^{-\alpha t}.$$

Дапущім, $\delta = \frac{\varepsilon}{r}$, тады пры $|x^0| < \delta$ для $t \geq 0$ маем

$$|\psi(t)| < r \frac{\delta}{r} e^{-\alpha t} \leq \varepsilon,$$

гэта значыць, становішча раўнавагі $x = 0$ устойлівае па Ляпунову.

Відавочна, $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\psi(t)| = 0$, таму што $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\alpha t} = 0$. Значыць, становішча раўнавагі $x = 0$ асімптатычна ўстойлівае.

Неабходнасць. Калі хоць адно ўласнае значэнне матрыцы A мае неадмоўную сапраўдную частку, то становішча раўнавагі $x = 0$ не можа быць асімптатычна ўстойлівым.

Сапраўды, калі, напрыклад, $\operatorname{Re} \lambda_I = \mu_I \geq 0$ і $\gamma \neq 0$ — уласны вектар матрыцы A , які адпавядае ўласнаму значэнню λ_I , тады $x = \operatorname{Re}(\gamma e^{\lambda_I t})$ — рашэнне сістэмы (66). Няхай $\gamma = \gamma^1 + i\gamma^2$; тады

$$x = \operatorname{Re}\left[(\gamma^1 + i\gamma^2) e^{(\mu_I + i\nu_I)t}\right] = e^{\mu_I t} (\gamma^1 \cos \nu_I t - \gamma^2 \sin \nu_I t)$$

не імкнецца да нуля пры $t \rightarrow +\infty$.

Гэтай уласцівасцю, відавочна, валодае любое рашэнне

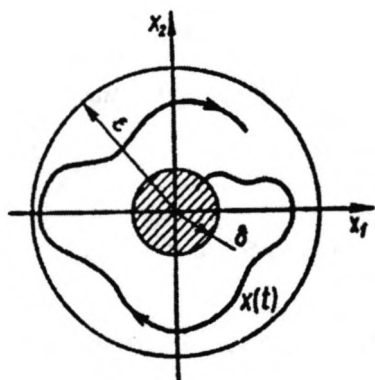
$$x = C \operatorname{Re}(\gamma e^{\lambda_I t}), \quad C \neq 0. \quad (73)$$

Пры дастаткова малым C рашэнне (73) у момант $t = 0$ як патрэбна блізкае да становішча раўнавагі $x = 0$, але пры $t \rightarrow +\infty$ яно не імкнецца да нуля. Такім чынам, становішча раўнавагі $x = 0$ не будзе асімптатычна ўстойлівым.

Тэарэма 5.2. Возьмем любы лік ε ($0 < \varepsilon < H$) і любы лік $t_0 \in I$. У якасці $\delta(\varepsilon, t_0)$ выберам такі лік, што

$$\max_{|x^0| \leq \delta(\varepsilon, t_0)} V(t_0, x^0) \leq \omega_I(\varepsilon).$$

Такі лік $\delta(\varepsilon, t_0)$ будзе абавязкова існаваць, таму што $V(t, x)$ — не-



Мал. 1

парыўная функцыя і мае месца $V(t_0, 0) = 0$ (мал. 1). Умова

$\dot{V} \leq 0$ азначае, што функцыя

$V(t, x(t))$ не ўзрастае ўздоўж

рашэнняў сістэмы (5.1.1). З умовы тэарэмы, выкарыстоўваючы няроўнасці (5.3.11), (5.3.12) пры

$|x^0| \leq \delta(\epsilon, t_0)$ і $t \geq t_0$, атрымаем

$$\omega_1(|x(t)|) \leq V(t, x(t)) \leq V(t_0, x^0) \leq \max_{|x^0| \leq \delta(\epsilon, t_0)} V(t_0, x^0) \leq \omega_1(\epsilon).$$

Адсюль у сілу манатоннасці функцыі $\omega_1(u)$ вынікае, што

$$|x(t, t_0, x^0)| \leq \epsilon. \text{ Тэарэма даказана.}$$

Тэарэма 5.3. Па зададзенаму ϵ ($0 < \epsilon < H$) вызначым лік $\delta = \delta(\epsilon)$ (δ не залежыць ад t_0) такім чынам, што $\omega_1(\epsilon) = \omega_2(\delta)$. Карыстаючыся няроўнасцямі з умоў тэарэм 5.2 і 5.3 (гл. формулы (5.3.11) – (5.3.13) і манатоннасцю $\omega_2(u)$, пры $t \geq t_0$ і $|x^0| \leq \delta(\epsilon)$, атрымаем

$$\omega_1(|x(t)|) \leq V(t, x(t)) \leq V(t_0, x^0) \leq \omega_2(|x^0|) \leq \omega_2(\delta) = \omega_1(\epsilon).$$

У сілу манатоннасці $\omega_1(u)$ адсюль вынікае, што $|x(t)| \leq \epsilon$.

Тэарэма 5.4. У сілу тэарэмы 5.3 рашэнне $x(t) \equiv 0$ раўнамерна ўстойлівае. Пакажам, што выконваецца і другая ўмова азначэння 5.1.6. Возьмем $\gamma > 0$ і вызначым δ з судачынення $\omega_1(\gamma) = \omega_2(\delta)$. У якасці $I(\gamma)$ возьмем лік $I(\gamma) = \frac{2\omega_2(\Delta_1)}{\omega_1(\delta)}$. На адрэзку

$[t_0, t_0 + I(\gamma)]$ знойдзеца момант t_1 такі, што $t_0 < t_1 \leq t_0 + I(\gamma)$ і $|x(t_1, t_0, x^0)| \leq \delta$ пры $|x^0| \leq \Delta_1$. Калі гэта не так, то атрымаем

$$\begin{aligned} & V(t_0 + I(\gamma), x(t_0 + I(\gamma), t_0, x^0)) - V(t_0, x^0) = \\ & = \int_{t_0}^{t_0 + I(\gamma)} \dot{V}(s, x(s, t_0, x^0)) ds \leq - \int_{t_0}^{t_0 + I(\gamma)} \omega_3(|x(s)|) ds \leq -\omega_3(\delta) I(\gamma). \end{aligned}$$

Адсюль $0 \leq V(t_0 + I(\gamma), x(t_0 + I(\gamma))) \leq V(t_0, x_0) - \omega_3(\delta) I(\gamma) \leq \leq \omega_2(\Delta_1) - \omega_3(\delta) I(\gamma)$.

Калі $I(\gamma) = \frac{2\omega_2(\Delta_1)}{\omega_3(\delta)}$, тады апошняя няроўнасць не будзе

мець месца. Значыць, знойдзеца $t_1 \in [t_0, t_0 + I(\gamma)]$ такі, што $|x(t_1, t_0, x^0)| \leq \delta$. Але тады, у сілу раўнамернай устойлівасці, пры ўсіх $t \geq t_0 + I(\gamma) \geq t_1 \geq t_0$ маем $|x(t, t_0, x^0)| \leq \varepsilon$.

Тэарэма 5.5. Возьмем адвольную пачатковую ўмову $x^0 \in R^n$ і вызначым такі k , што $\omega_1(k) = \omega_2(|x^0|)$. У сілу ўмовы тэарэмы $\omega_1(u) \rightarrow \infty$, $u \rightarrow \infty$, такі k абавязкова знойдзеца. Пры гэтым таксама, як і ў тэарэме 5.3, устанаўліваецца, што рашэнне $x(t, t_0, x^0)$ не пакіне шар D_k пры $t \geq t_0$. Прымяняючы да шара D_k тэарэму 5.4, атрымаем сцвярдженне тэарэмы 5.5.

Тэарэма 5.6. Згодна з умовай, у як патрэбна малым наваколлі $|x| < \lambda$ пачатку каардынат знойдзеца пункт x^0 такі, што $V(t_0, x^0) = V_0 > 0$. На рашэнні $x(t, t_0, x^0)$ функцыя $V(t, x(t, t_0, x^0))$ не ўбывае: $V(t, x(t, t_0, x^0)) \geq V_0 > 0$. Гэта азначае, што праз мяжу $V=0$ гэтае рашэнне не можа пакінуць абсяг Q . Рашэнне $x(t, t_0, x^0)$

не можа заўсёды заставацца ў абсягу Q . Сапраўды, у гэтым выпадку пры $V(t) \geq V_0$, згодна з умовай тэарэмы, знойдзецца такі лік $\alpha > 0$, што $\dot{V}(t) \geq \alpha$ пры $t > t_0$. Тады б мела месца няроўнасць

$$V(t) - V(t_0) = \int_{t_0}^t \dot{V}(s) ds \geq \alpha(t - t_0) \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \infty.$$

Але гэта немагчыма, паколькі V абмежаваная ў абсягу Q . Значыць, рашэнне $x(t, t_0, x^0)$ абавязкова пападзе на мяжу $|x| = H$ абсягу Q за канечны час. Тэарэма даказана.

Тэарэма 5.7. У сілу тэарэмы 5.2 рашэнне $x(t) \equiv 0$ устойлівае, гэта значыць для зададзенага $\varepsilon > 0$ знойдзецца такі $\delta > 0$, што з $|x^0| < \delta$ вынікае $|x(t, x^0)| \leq \varepsilon$, $x^0 \in D_\delta$. Няхай $\Omega \subset D_\varepsilon$ — мноства ω -лімітавых пунктаў для некаторага $x^0 \in D_\delta$. Пакажам, што $\Omega = \{0\}$. Будзем меркаваць, што гэта не так. Тады існуе $y \neq 0$, $y \in \Omega$. Паколькі V дадатна вызначаная, маем $V(y) > 0$. У сілу таго, што Ω — замкнутае мноства, якое складаецца з цэлых траекторый, траекторыя $x(t, y) \in \Omega$; значыць, $V(x(t, y)) = V(y)$. Адсюль $\dot{V} = 0$ уздоўж траекторый $x(t, y)$, гэта значыць $x(t, y)$ павінна належаць такому мноству, дзе $\dot{V} = 0$. Але па ўмове мноства $\dot{V} = 0$ не змяшчае цэлых траекторый. З атрыманай супярэчнасці вынікае сцвярджэнне тэарэмы.

Тэарэма 5.8. Няхай $x = x(t)$ — рашэнне сістэмы

$$\dot{x} = Ax + F(t, x) \quad (F(t, 0) = 0), \quad (74)$$

A — пастаянная $n \times n$ -матрыца.

Абазначым праз B рашэнне ўраўнення $A'B + BA = -E$, дзе A' — транспанаваная да A матрыца, E — адзінкавая матрыца (гл. [25], глава VIII, § 3, с. 194). Увядзём функцыю Ляпунова $V(x) = x'Bx$ і знойдзем яе вытворную $\dot{V}$ у сілу сістэмы (74). Маем

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \dot{x}'Bx + x'B\dot{x} = (x'A' + F'(t, x))Bx + x'B(Ax + F(t, x)) = \\ &= x'(A'B + BA)x + F'Bx + x'BF \leq -|x|^2 + 2M\|B\||x|^{2+\alpha} \leq \\ &\leq |x|^2(-1 + 2M\|B\||x|^\alpha) \leq -\frac{1}{2}|x|^2\end{aligned}$$

для такіх малых $|x|$, што

$$2M\|B\||x|^\alpha < \frac{1}{2}.$$

Такім чынам, функцыя $V(x) = x'Bx$ задавальняе тэарэме 5.4 аб асімптатычнай устойлівасці, і, значыць, трывіяльнае рашэнне сістэмы (74) асімптатычна ўстойлівае. Тэарэма 5.8 даказана.

Тэарэма 5.10. Для доказу будзем карыстацца кананічным відам (5.5.33), замяніўшы ў ім зменныя ξ, η на зменныя x, y . Такім чынам, будзем даследаваць сістэму ўраўненняў

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y) = \alpha x - \beta y + F_1(x, y), \\ \dot{y} &= Q(x, y) = \beta x + \alpha y + F_2(x, y).\end{aligned}\tag{75}$$

Увядзём палярныя каардынаты, гэта значыць будзем меркаваць

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi.\tag{76}$$

Дыферэнцуючы суадносіны (76) і падстаўляючы атрыманыя выразы ў сістэму (75), будзем мець

$$\begin{aligned}\dot{\rho} \cos \varphi - \rho \dot{\varphi} \sin \varphi &= \alpha \rho \cos \varphi - \beta \rho \sin \varphi + R_1(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi), \\ \dot{\rho} \sin \varphi + \rho \dot{\varphi} \cos \varphi &= \beta \rho \cos \varphi + \alpha \rho \sin \varphi + R_2(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi).\end{aligned}$$

Вырашыўшы атрыманую сістэму ўраўненняў адносна $\dot{\rho}$ і $\dot{\varphi}$, атрымаем

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \alpha \rho + \rho^2 f(\rho, \varphi), \\ \dot{\varphi} = \beta + \rho g(\rho, \varphi), \end{cases}\tag{77}$$

дзе $f(\rho, \varphi), g(\rho, \varphi)$ — функцыі, абмежаваныя пры малых ρ і перыядычныя па φ з перыядам 2π . Будзем для пэўнасці лічыць, што $\alpha < 0$. Разгледзім траекторыю сістэмы (77), якая пачынаецца ў пун-

кце (ρ_0, φ_0) , дзе $0 < \rho_0 < \varepsilon$, а ε – дастаткова малы лік. З ураўненняў (77) вынікае, што гэтая траекторыя асімптатычна набліжаецца да восі $\rho = 0$, прычым φ імкнецца або да $+\infty$, або да $-\infty$ у залежнасці ад таго, дадатны лік β або адмоўны. З гэтага вынікае, што адпаведная траекторыя ў плоскасці (x, y) намотваецца, як спіраль, на пачатак каардынат. Тэарэма даказана.

Тэарэма 5.13. Адзначым, што таму што матрыца $H(t)$ сіметрычная, то функцыі $\mu_j(t)$ прымаюць толькі сапраўдныя значэнні. Разгледзім квадратычную форму $v(t, x) = x'H(t)x$. З лінейнай алгебры вядома (гл. напрыклад, [25], глава X, § 7, с. 269), што форма $v(t, x)$ задавальняе няроўнасцям

$$\mu_{\min}(t)|x|^2 \leq x'H(t)x \leq \mu_{\max}(t)|x|^2,$$

дзе $\mu_{\min}(t)$, $\mu_{\max}(t)$ – найменшы і найбольшы ўласныя лікі матрыцы $H(t)$.

З іншага боку, для любога рашэння $x(t) = x(t, t_0, x^0)$ сістэмы (5.7.50) маем

$$\frac{d}{dt}|x(t)|^2 = \frac{d}{dt}(x'(t)x(t)) = \dot{x}'(t)x(t) + x'(t)\dot{x}(t) = 2x'(t)H(t)x(t).$$

Таму

$$2\mu_{\min}(t)|x(t)|^2 \leq \frac{d}{dt}|x(t)|^2 \leq 2\mu_{\max}(t)|x(t)|^2.$$

Інтэгруючы гэтую няроўнасць, атрымаем так званую няроўнасць Важэўскага:

$$|x^0| \exp \int_{t_0}^t \mu_{\min}(\tau) d\tau \leq |x(t)| \leq |x^0| \exp \int_{t_0}^t \mu_{\max}(\tau) d\tau. \quad (78)$$

З няроўнасці (78) і вынікае сцвярдженне тэарэмы 5.13.

Тэарэма 5.14. Відавочна, з ацэнкі (5.7.53) вынікае, што $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t, t_0, x^0)| = 0$ раўнамерны па t_0 , гэта значыць з экспаненцыйнай устойлівасці вынікае раўнамерная асімптатычная ўстойлі-

васць. Няхай цяпер сістэма (5.7.50) раўнамерна асімптатычна ўстойлівая. Абазначым праз S^l адзінкавую сферу ў прасторы R^n , гэта значыць $S^l = \{x \in R^n : |x| = 1\}$, і няхай $X(t, t_0) = \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau$ – матрыцант сістэмы (5.7.50). У сілу раўнамернай асімптатычнай устойлівасці існуе такі лік $N > 0$, які не залежыць ні ад t_0 , ні ад $x^0 \in S^l$, што $|x(t, t_0, x^0)| = |X(t, t_0)x^0| \leq \frac{1}{2}$ пры $t \geq t_0 + N$.

Значыць, $\|X(t, t_0)\| \leq \frac{1}{2^n}$ для $t \geq t_0 + N$. Паколькі для $n = 1, 2, \dots$ мае месца роўнасць

$$X(t_0 + nN, t_0) = X(t_0 + nN, t_0 + (n-1)N) \times \\ \times X(t_0 + (n-1)N, t_0 + (n-2)N) \times \dots \times X(t_0 + N, t_0),$$

то $\|X(t, t_0)\| \leq \frac{1}{2^n}$ для $t \geq t_0 + nN$. Таму знойдзецца такая дадатная пастаянная C , што $\|X(t, t_0)\| \leq C \cdot 2^{-n}$ для $t \geq t_0 \geq 0$, адкуль $\|X(t, t_0)\| \leq C \exp[-\alpha(t - t_0)]$, дзе $\alpha = \frac{\ln 2}{N}$, гэта значыць няроўнасць (5.7.53) выконваецца. Тэарэма даказана.

Тэарэма 5.15. У сілу таго, што любое рашэнне $x(t, t_0, x^0)$ сістэмы (5.7.50) мае від $X(t, t_0)x^0 = X(t)X^{-1}(t_0)x^0$, то сцвярджэнні 1), 2), 3) тэарэмы відавочныя. Сцвярджэнне 4) устаноўлена пры доказе тэарэмы 5.14.

Тэарэма 5.16. Фундаментальная матрыца $Y(t)$ ($Y(0) = E$) сістэмы $\dot{y} = Ay$ па тэарэме 5.15 абмежаваная, гэта значыць $\|Y(t)\| \leq M$ пры $t \geq 0$. Разгледзеўшы складнік $B(t)x$ у (5.7.54) як правую частку $f(t)u$ (5.7.47) і прымяніўшы формулу Кашы, атрымаем

$$x(t) = Y(t)x^0 + \int_0^t Y(t-s)B(s)x(s)ds.$$

Адсюль

$$|x(t)| \leq M|x^0| + \int_0^t M\|B(s)\| |x(s)| ds. \quad (79)$$

Згодна з лемай Гронуала (гл. доказ тэарэмы 4.1), з (79) маем

$$|x(t)| \leq M|x^0| \exp \left[M \int_0^t \|B(s)\| ds \right] = C|x^0|, \quad (80)$$

дзе $C = M \exp \left[M \int_0^\infty \|B(s)\| ds \right]$.

Такім чынам, рашэнне $x(t) \equiv 0$ устойлівае. Тэарэма даказана.

Тэарэма 5.17. Паколькі сістэма (5.7.50) раўнамерна ўстойлівая, то па тэарэме 5.15 яе фундаментальная матрыца $X(t)$, нармаваная ў пункце t_0 , задавальняе наступным умовам: $\|X(t)\| \leq M$, $\|X(t)X^{-1}(\tau)\| \leq M$ пры $t \geq \tau \geq t_0 \geq 0$. Акрамя таго, для адвольнага рашэння $x(t) = x(t, t_0, x^0)$ сістэмы (5.7.56) выконваецца роўнасць

$$x(t) = X(t)x^0 + \int_{t_0}^t X(t)X^{-1}(\tau)B(\tau)x(\tau)d\tau,$$

з якой атрымліваем

$$|x(t)| \leq M|x^0| + M \int_{t_0}^t \|B(s)\| |x(s)| ds \leq M|x^0| + M \int_0^t \|B(s)\| |x(s)| ds,$$

гэта значыць няроўнасць (79), а з яе маем няроўнасць (80). Таму пры любым $\varepsilon > 0$ няроўнасць $|x(t)| < \varepsilon$ ($t \geq t_0$) можна забяспечыць незалежна ад t_0 , калі выбраць велічыню $|x^0|$ дастаткова малой, а

гэта і азначае раўнамерную ўстойлівасць сістэмы (5.7.56). Тэарэма даказана.

Тэарэма 5.18. З ураўнення (5.7.57), формулы Віета і тэарэмы Астраградскага-Ліувіля вынікае, што

$$\sum_{j=1}^n \rho_j = Sp X(\omega) = \sum_{i=1}^n x_{ii}(\omega),$$

$$\prod_{j=1}^n \rho_j = \det X(\omega) = \exp \left[\int_0^{\omega} Sp A(t) dt \right].$$

Далей (гл. § 3.7) для любога мультыплікатара ρ_j існуе рашэнне $\varphi^j(t) \neq 0$ ураўнення (5.7.50) такое, што $\varphi^j(t + \omega) = \rho_j \varphi^j(t)$. Гэтае рашэнне можна пабудаваць наступным чынам. Няхай φ_0^j – уласны вектар матрыцы $X(\omega)$, які адпавядае ρ_j , гэта значыць $X(\omega)\varphi_0^j = \rho_j \varphi_0^j$. Тады шуканае рашэнне мае від

$$\begin{aligned} \varphi^j(t) &= X(t)\varphi_0^j, \quad \varphi^j(t) = p(t)e^{\lambda_j t}, \quad \lambda_j = \frac{1}{\omega} \ln \rho_j, \\ p(t + \omega) &= p(t). \end{aligned} \quad (81)$$

Калі ρ_j – кратнае ўласнае значэнне матрыцы $X(\omega)$ з жарданавай клеткай памеру m , то яму адпавядае m рашэнняў Флоке выгляду

$$\begin{aligned} \varphi^{j_1}(t) &= p^{j_1}(t)e^{\lambda_{j_1} t}, \\ \varphi^{j_2}(t) &= [tp^{j_1}(t) + p^{j_2}(t)]e^{\lambda_{j_2} t}, \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned} \quad (82)$$

$$\varphi^{j_m}(t) = \left[\frac{t^{m-1}}{(m-1)!} p^{j_1}(t) + \dots + p^{j_m}(t) \right] e^{\lambda_{j_m} t},$$

$$p^{j_k}(t + \omega) = p^{j_k}(t), \quad \lambda_j = \frac{1}{\omega} \ln \rho_j.$$

Раскладаючы пачатковае значэнне $x^0 = x(0)$ па базісу, які складаецца з уласных і далучаных вектараў матрыцы $X(\omega)$, можна атрымаць прадстаўленне агульнага рашэння сістэмы (5.7.50) з перыядычнай непарыўнай матрыцай $A(t)$ у выглядзе лінейнай камбінацыі рашэнняў (81), (82). Лёгка бачыць таксама, што $\operatorname{Re} \lambda_j = \frac{1}{\omega} \operatorname{Re} \ln \rho_j < 0$, калі $|\rho_j| < 1$, і $\operatorname{Re} \lambda_j > 0$, калі $|\rho_j| > 1$. Адсюль і з судачыненняў (81), (82) і вынікае справядлівасць тэарэмы 5.18.

Тэарэма 5.19. Няхай ураўненне (5.7.50) прыводнае. Тады існуе пераўтварэнне Ляпунова $x = Ly$, якое прыводзіць (5.7.50) да стацыянарнага ўраўнення (5.7.62). У сілу таго, што $Y(t) = e^{Bt}$ – фундаментальная матрыца гэтага ўраўнення, то існуе фундаментальная матрыца $X(t)$ ураўнення (5.7.50), якая мае выгляд (5.7.63).

Наадварот, няхай выконваецца судачыненне (5.7.63). З яго знаходзім $L(t) = X(t)e^{-Bt}$. Выканаем ва ўраўненні (5.7.50) замену

$$x = L(t)y = X(t)e^{-Bt}y. \quad (83)$$

Атрымаем

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{d}{dt} (e^{Bt} X^{-1}(t)x) = B e^{Bt} X^{-1}(t)x - e^{Bt} X^{-1}(t)A(t)X(t)X^{-1}(t)x + \\ &+ e^{Bt} X^{-1}(t)A(t)x = By. \end{aligned}$$

Такім чынам, атрымалі сістэму (5.7.62). Значыць, ураўненне (5.7.50) прыводнае. Тэарэма даказана.

Лема 5.3. З абмежаванасці матрыцы Ляпунова L вынікае, што

$$w(x) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |x(t)| \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \|L(t)\| + \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |y(t)| = w(y),$$

дзе $\|L(t)\| = \sup_{|y|=1} |L(t)y|$. Аналагічна, з абмежаванасці матрыцы L^{-1}

атрымаем $w(y) \leq w(x)$. Значыць, $w(y) = w(x)$. Лема даказана.

Лема 5.4. Покажам, што паказчыкі Ляпунова рашэнняў ураўнення (5.7.62) не перавышаюць α . Сапраўды, усякае ненулявое рашэнне сістэмы (5.7.62) можна запісаць так (гл. § 3.3):

$$y(t) = \sum_{k=1}^m P^k(t) e^{\lambda_k t},$$

дзе $m \leq n$, а $P^k(t)$ – палінаміяльныя вектарныя функцыі, прычым, прынамсі, адна з іх ненулявая. Тады

$$y(t) = \sum_{k=1}^m P^k(t) e^{\alpha_k t} e^{i\beta_k t} = e^{\alpha t} \sum_{k=1}^m P^k(t) e^{(\alpha_k - \alpha)t} e^{i\beta_k t},$$

$$|y(t)| \leq e^{\alpha t} \sum_{k=1}^m |P^k(t)| e^{(\alpha_k - \alpha)t} \leq e^{\alpha t} \sum_{k=1}^m |P^k(t)|.$$

Таму

$$w(y) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left(\alpha t + \ln \sum_{k=1}^m |P^k(t)| \right) = \alpha.$$

Лема 5.4. даказана.

Тэарэма 5.20. Няхай прыводнае ўраўненне (5.7.50) асімптатычна ўстойлівае, гэта значыць, у сілу азначэння 5.7.2, што ўсе яго рашэнні імкнуцца да нуля пры $t \rightarrow \infty$, а таму ўсе рашэнні статыянарнага ўраўнення (5.7.62) таксама імкнуцца да нуля пры $t \rightarrow \infty$. Значыць, ураўненне (5.7.62) асімптатычна ўстойлівае, што ў сілу тэарэмы 5.1 эквівалентна адмоўнасці сапраўдных частак усіх уласных значэнняў матрыцы B . Такім чынам, $\alpha < 0$, а тады ў сілу лемы 5.4 маем, што паказчыкі Ляпунова рашэнняў ураўнення (5.7.50) адмоўныя.

Няхай цяпер x – адвольнае ненулявое рашэнне ўраўнення (5.7.50), паказчык Ляпунова $w(x)$ якога роўны λ . Згодна з умовай $\lambda < 0$. Выберам $\varepsilon > 0$ настолькі малым, каб $\lambda + \varepsilon < 0$. З азначэння паказчыка Ляпунова вынікае існаванне настолькі вялікага T , што

$$|x(t)| \leq e^{(\lambda + \varepsilon)t} \quad \text{пры } t \geq T.$$

Адсюль маем, што $x(t) \rightarrow 0$ пры $t \rightarrow \infty$. Такім чынам, усе рашэнні ўраўнення (5.7.50) імкнуцца да нуля пры $t \rightarrow \infty$. Тэарэма даказана.

ЛІТАРАТУРА

1. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969. — 424 с.
2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.–Л.: ГОНТИ, 1939. – 384 с.
3. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Высшая школа, 1967. – 564 с.
4. Зорич В.А. Математический анализ. Ч. I. – М.: Наука, 1981. – 544 с.
5. Матвеев Н.М. Дифференциальные уравнения. – Мн.: Вышэйшая школа, 1976. – 368 с.
6. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. – М.: Наука, 1973. – 720 с.
7. Математический энциклопедический словарь. – М.: Сов. энциклопедия, 1988. – 847 с.
8. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1. – М.: Наука, 1985. – 432 с.
9. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений/ Под ред. А.Д.Мышкиса, О.А.Олейник – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 296 с.
10. Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Высшая школа, 1983. – 128 с.
11. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика. Ч. III. – Мн.: Вышэйшая школа, 1985. – 208 с.
12. Милованов М.В., Тышкевич Р.И., Феденко А.С. Алгебра и аналитическая геометрия. Ч. 1. – Мн.: Вышэйшая школа, 1984. – 302 с.
13. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. – М.: Наука, 1978. – 416 с.
14. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1982. – 488 с.
15. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1. – М.: Высшая школа, 1988. – 712 с.
16. Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – Мн.: Наука и техника, 1979. – 744 с.
17. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика. Ч. II. – Мн.: Вышэйшая школа, 1985. – 221 с.

18. Карташев А.П., Рождественский Б.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. – М.: Наука, 1979. – 288 с.
19. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1985. – 448 с.
20. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 2. – М.: Высшая школа, 1988. – 576 с.
21. Математическая энциклопедия / Под ред. И.М.Виноградова. Т. 3. – М.: Сов. энциклопедия, 1982. – 1184 с.
22. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 3. – М.: Высшая школа, 1989. – 352 с.
23. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1985. – 231 с.
24. Русак В.М. і інш. Курс вищэйшай матэматыкі: Алгебра і геаметрыя. Аналіз функцый адной зменнай. – Мн.: Вышэйшая школа, 1994. – 431 с.
25. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – 4-е изд. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
26. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1982. – 332 с.
27. Библиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Высшая школа, 1991. – 303 с.
28. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
29. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика. Ч. IV. – Мн.: Вышэйшая школа, 1987. – 240 с.
30. Иосида К. Операционное исчисление: Теория гиперфункций/ Под ред. Я.В.Радыно – Мн.: Университетское, 1989. – 168 с.
31. Зорич В.А. Математический анализ. Ч. II. – М.: Наука, 1984. – 640 с.
32. Тер-Криков А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. – М.: Наука, 1988. – 816 с.
33. Богданов Ю.С., Мазаник С.А., Сыроид Ю.Б. Курс дифференциальных уравнений. – Мн.: Універсітэцкае, 1996. – 287 с.
34. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые её приложения. – М.: Наука, 1985. – 392 с.

35. Амелькин В.В., Лукашевич Н.А., Садовский А.П. Нелинейные колебания в системах второго порядка. – Мн.: Изд-во БГУ, 1982. – 208 с.
36. Математическая энциклопедия / Под ред. И.М.Виноградова Т. 1. – М.: Сов. энциклопедия, 1977. – 1151 с.
37. Математическая энциклопедия / Под ред. И.М.Виноградова Т. 5. – М.: Сов. энциклопедия, 1985. – 1246 с.
38. Афанасьев В.Н., Колмоновский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. – М.: Высшая школа, 1989. – 448 с.
39. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 382 с.
40. Амелькин В.В., Садовский А.П. Математические модели и дифференциальные уравнения. – Мн.: Вышэйшая школа, 1982. – 272 с.
41. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. – М.: Наука, 1987. – 158 с.
42. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. – М.: Высшая школа, 1989. – 384 с.
43. Хапаев М.М. Асимптотические методы и устойчивость в теории нелинейных колебаний. – М.: Высшая школа, 1988. – 184 с.
44. Lavrentjev M.A. Sur une équation différentielle du premier ordre. Mathematische Zeitschrift, Bd. 23, 1925. S. 197 – 209.
45. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч. I. Функции одного переменного. – 3-е издание. – М.: Наука, 1985. – 336 с.
46. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
47. Богданов Ю.С., Сыроид Ю.Б. Дифференциальные уравнения. – Мн.: Вышэйшая школа, 1983. – 239 с.
48. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. – М.-Л.: Изд-во ОНТИ. – 1935. – 386 с.
49. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. – М.: Наука, 1970. – 240 с.

Вучэбнае выданне

Бярозкіна Наталія Серафімаўна,
Мінюк Сцяпан Андрэевіч

**ДЫФЕРЭНЦЫЯЛЬНЫЯ І ІНТЭГРАЛЬНЫЯ
ЎРАЎНЕННІ**

Вучэбны дапаможнік для студэнтаў
фізіка-матэматычных і тэхнічных спецыяльнасцяў
вышэйшых навучальных устаноў

У 2 тамах
Том 1

Рэдактар Н. П. Дудко

Здадзена ў набор 27.12.99. Падпісана да друку 28.02.2000.
Фармат 60x84/16. Папера афсетная №1.
Друк афсетны. Гарнітура Школьная.
Ум.друк.арк. 25,28. Ул.-выд.арк. 23,98.
Тыраж 500 экз. Заказ 970.

Гродзенскі дзяржаўны ўніверсітэт
імя Янкі Купалы.
ЛВ № 96 ад 02.12.97 г.
Вул. Ажэшкі, 22, 230023, г. Гродна.



Надрукавана ў Баранавіцкай узбуйненай друкарні.
Вул. Савецкая, 80, 225320, г. Баранавічы.

ВЕРХНЕУФАЛСКИЙ РАЙОН

