

С. І. НАВАСЁЛАЎ

Трыганаметрыя

ПАДРУЧНІК
ДЛЯ 9—10 КЛАСАЎ
СЯРЭДНЯЙ ШКОЛЫ

Выдавецтва
„Народная асвета“
Мінск 1965

С. І. НАВАСЁЛАЎ

ТРЫГАНАМЕТРЫЯ

ПАДРУЧНІК
ДЛЯ 9—10 КЛАСАЎ
СЯРЭДНЯЙ ШКОЛЫ

*Зацверджан
Міністэрствам асветы РСФСР*

ВЫДАННЕ ВОСЬМАЕ
З ДЗЕВЯТАГА РУСКАГА

ВЫДАВЕЦТВА «НАРОДНАЯ АСВЕТА»
МІНСК 1965

На беларусском языке

Сергей Иосифович Новоселов

Тригонометрия

Учебник для 9—10 классов средней школы

Издательство «Народная асвета»
Государственного комитета
Совета Министров БССР по печати,
Минск, Ленинский проспект, 83а

Рэдактар *Т. М. Белая*
Тэхнічны рэдактар *В. Н. Жук*
Карэктар *В. П. Матукоўская*

Здадзена ў набор 25/IX 1964 г. Падпісана да друку 18/II 1965 г. Фармат $60 \times 90^{1/16}$. Друк.
арк. 6. Уч.-выд. арк. 5,4. Тыраж 26 000 экз. Цана 12 кап. Заказ 429.

Паліграфкамбінат імя Я. Коласа
Дзяржаўнага камітэта Савета Міністраў
БССР па друку, Мінск, Чырвоная, 23.

Раздзел I

ВУГЛЫ І ДУГІ; ІХ ВЫМЯРЭННЕ

§ 1. Вуглы адвольнай велічыні

У геаметрыі вуглом называюць фігуру, утвораную двума праменьнямі, якія зыходзяць з аднаго пункта.

Усякі вугал можа быць утворан вярчэннем у плоскасці праменя вакол пачатковага пункта. Так, пры вярчэнні праменя вакол пункта O ад пачатковага становішча OA да канечнага становішча OB утвараецца вугал AOB (чарц. 1).

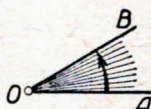
Пры вярчэнні праменя можа ўтварыцца вугал, большы за разгорнуты (чарц. 2).

Прамень, які верціцца, апісаўшы ў плоскасці некалькі поўных абаротаў вакол пункта O , супадзе з першапачатковым становішчам.

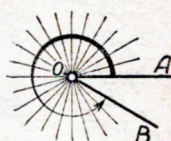
Паварот праменя можа складацца з некалькіх поўных абаротаў і вугла, які складае частку поўнага абароту (чарц. 3). Прыкладам можа служыць рух спіцы кола, якое верціцца.

Вярчэнне праменя ў плоскасці можа адбывацца ў двух узаемна процілеглых напрамках (чарц. 4). Так, напрыклад, два зубчастыя колы аднолькавага радыуса, счэпленыя адно з другім, як паказана на чарцяжы 5, верцяцца ва ўзаемна процілеглых напрамках і пры павароце аднаго з іх на некаторы вугал другое павярнецца на такі ж вугал, але ў процілеглым напрамку.

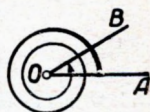
Адзін з двух магчымых напрамкаў вярчэння на плоскасці будзем лічыць дадатным, а другі адмоўным. Тады вугал, утвораны вярчэннем праменя ў дадатным напрамку, лічыцца да-



Чарц. 1.



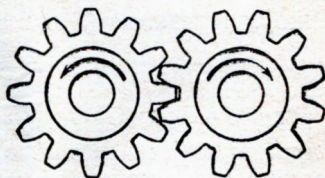
Чарц. 2.



Чарц. 3.



Чарц. 4.



Чарц. 5.

датным, а вугал, утвораны вярчэннем праменя ў адмоўным напрамку, — адмоўным.

Любы з двух магчымых напрамкаў вярчэння ў плоскасці можна прыняць за дадатны. У далейшым дадатным напрамкам вярчэння мы будзем лічыць напрамак, **процілеглы** вярчэнню стрэлкі гадзінніка, пакладзенага на плоскасць, у якой адбываецца вярчэнне, і павернутага цыферблатам да назіральніка.

Калі прамень OA , не зрабіўшы ніякага вярчэння, застаўся ў першапачатковым становішчы, то гавораць, што вугал павароту праменя роўны нулю.

Азначэнне. Пачатковае становішча праменя, які верціцца, называецца пачатковай стараной адпаведнага вугла павароту, а канечнае становішча праменя — канечнай стараной гэтага вугла.

Існуе бясконцае мноства вуглоў, для якіх пачатковая і канечная стораны маюць дадзенае становішча; усе гэтыя вуглы адрозніваюцца адзін ад другога цэлым лікам поўных (дадатных або адмоўных) абаротаў.

§ 2. Дугі акружнасці адвольнай велічыні

Усякаму вуглу, утворанаму двума радыусамі акружнасці, адпавядае дуга гэтай акружнасці, абмежаваная канцамі дадзеных радыусаў (чарц. 6). Калі радыус OA верціцца вакол цэнтра O , то канец A радыуса рухаецца па акружнасці. Гавораць, што **пункт рухаецца па акружнасці ў дадатным (або адмоўным) напрамку**, калі радыус, які злучае яго з цэнтрам, верціцца ў дадатным (адпаведна адмоўным) напрамку.



Чарц. 6.

Дуга, утвораная рухам пункта па акружнасці ў дадатным напрамку, лічыцца дадатнай, а ў адмоўным напрамку — адмоўнай (чарц. 7).

Калі радыус зробіць поўны (дадатны або адмоўны) абарот, то канец радыуса, апісаўшы поўную акружнасць, вернецца ў пачатковае становішча.

Можна разглядаць дугі, што змяшчаюць які хочаце лік дадатных або адмоўных поўных акружнасцей. Уяўленне аб такой дузе дае намотаная на шпульку тонкая нітка: яна можа змяшчаць любую колькасць віткоў, намотаных у тым або іншым напрамку.



Чарц. 7.

§ 3. Вымярэнне вуглоў і дуг

Паняцце аб вымярэнні вуглоў вядома з геаметрыі. Для вымярэння вуглоў прымаюць некаторы пэўны вугал за адзінку вымярэння і з яе дапамогай вымяраюць усе іншыя вуглы.

За адзінку вымярэння можна прыняць любы вугал.

На практыцы часта вуглы вымяраюць у градусах, прымаючы за адзінку вымярэння $\frac{1}{360}$ частку поўнага абароту, якая называецца градусам. Для вымярэнняў, якія патрабуюць вялікай дакладнасці, градус дзеліцца на 60 роўных частак — мінуты; мінута дзеліцца на 60 роўных частак — секунды.

У геаметрыі часам вуглы вымяраюць «у долях d », прымаючы за адзінку вымярэння прамы вугал.

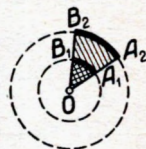
У тэхніцы часта за адзінку вымярэння вуглоў прымаюць поўны абарот. Так, паварот кола машыны або прапелера самалёта звычайна вымяраецца лікам абаротаў.

У артылерыі за адзінку вымярэння вуглоў прымаюць $\frac{1}{60}$ частку поўнага абароту, г. зн. $\frac{360^\circ}{60} = 6^\circ$; гэты вугал называюць вялікім дзяленнем вугламера. Для больш дакладнага вымярэння вуглоў вялікае дзяленне вугламера дзеляць на 100 роўных частак; вугал $\frac{6^\circ}{100} = 3'36''$ называюць малым дзяленнем вугламера.

Велічыня дадатнага вугла выражаецца дадатным лікам, а адмоўнага вугла — адмоўным лікам.

Вуглы, якія вывучаюцца ў трыганаметрыі, могуць вымярацца любымі сапраўднымі лікамі, бо пры вярчэнні праменя можа ўтварыцца вугал адвольнай велічыні (дадатны, адмоўны, нулявы, змяшчаючы любы лік поўных абаротаў).

Пры вымярэнні дуг дадзенай акружнасці за адзінку прымаюць дугу, на якую абавіраецца цэнтральны вугал, узяты за адзінку вымярэння вуглоў. Тады велічыня цэнтральнага вугла і велічыня дугі, на якую ён абавіраецца, выразяцца адным і тым жа лікам у вуглавых і ў дугавых адзінках (аднаводна).



Чарц. 8.

Радзяннае вымярэнне вуглоў і дуг. З геаметрыі вядома, што пры адным і тым жа цэнтральным вугле даўжыні дуг дзвюх акружнасцей адносяцца, як даўжыні іх радыусаў (чарц. 8)*:

$$\frac{\widehat{A_1B_1}}{\widehat{A_2B_2}} = \frac{R_1}{R_2}, \text{ або } \frac{\widehat{A_1B_1}}{R_1} = \frac{\widehat{A_2B_2}}{R_2}.$$

Такім чынам, пры адным і тым жа цэнтральным вугле адносіна даўжыні дугі акружнасці да яе радыуса не залежыць ад велічыні радыуса.

Пры змяненні цэнтральнага вугла велічыня гэтай адносіны змяняецца.

Азначэнне. Радзяннай мерай вугла называецца адносіна даўжыні дугі акружнасці, для якой дадзены вугал

* Сектары OA_1B_1 і OA_2B_2 падобныя.

З'яўляецца цэнтральным, да даўжыні радыуса гэтай дугі.

Пры радыянным вымярэнні вуглоў адзінкай вымярэння служыць дадатны цэнтральны вугал, які абаліраецца на дугу, роўную па даўжыні радыусу. Гэты вугал называецца радыянам (чарц. 9).



Чарц. 9.

Пры радыянным вымярэнні дуг акружнасці адзінкай служыць дугавы радыян; гэта ёсць дуга, роўная па даўжыні радыусу.

Пераход ад градуснай меры да радыянай. Радыянная мера поўнага (дадатнага) абароту роўна даўжыні акружнасці, падзеленай на радыус:

$$\frac{2\pi R}{R} = 2\pi = 6,283185...$$

Радыянная мера 1° роўна $\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180} = 0,017453...$

Калі вугал змяшчае A° , то яго радыянная мера α роўна:

$$\boxed{\alpha = \frac{A \pi}{180}} \quad (1)$$

Вылічым радыянную меру вугла $1'$:

$$1' = \frac{1}{60} \text{ (градуса)} = \frac{1}{60} \cdot \frac{\pi}{180} \text{ (радыянаў)} = 0,00029088... \text{ (радыяна)}.$$

Радыянная мера некаторых часта сустракаючыхся вуглоў дадзена ў наступнай табліцы:

Градусы	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Радыяны	$\frac{\pi}{6} \approx 0,5236$	$\frac{\pi}{4} \approx 0,7854$	$\frac{\pi}{3} \approx 1,0472$	$\frac{\pi}{2} \approx 1,5708$	$\pi \approx 3,1416$	$\frac{3\pi}{2} \approx 4,7124$	$2\pi \approx 6,2832$

Пераход ад радыянай меры да градуснай. З роўнасці (1) вынікае, што вугал, роўны α радыянаў, змяшчае

$$A^\circ = \frac{\alpha \cdot 180^\circ}{\pi}.$$

У прыватнасці,

$$1 \text{ радыян} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,295 \text{ (градуса)} \approx 3438' \approx 206265'' \approx 57^\circ 17' 45''.$$

Прыклад. Градусная мера (з дакладнасцю да хвілін) вугла ў 2 радыяны роўна

$$\frac{2 \cdot 180^\circ}{\pi} \approx 2 \cdot (57^\circ 17' 45'') \approx 114^\circ 36'$$

(секунды адкідаем па правілах акруглення).

Лік, атрыманы ў выніку вымярэння якой-небудзь велічыні, як правіла, суправаджаецца найменнем адзінкі вымярэння, напрыклад: 5 км, 10 руб., 7° і да т. п. Аднак для радыяннай меры вуглоў і дуг увайшло ў звычай выключэнне: *велічыня вугла (або дугі), выражаная ў радыянах, запісваецца лікам без наймення*. Замест слоў «вугал, які вымяраецца лікам α », каратка гавораць «вугал α ». Так, напрыклад, гавораць: «вугал 0,5» замест «вугал, велічыня якога роўна 0,5 радыяна».

Для пераходу ад градуснай меры да радыяннай можна карыстацца гатовымі табліцамі. У школьных табліцах У. М. Бразіса, у табліцы XVI, дадзены значэнні радыяннай меры вуглоў ад 0 да 90° праз кожныя 6 мінут. Гэтыя значэнні вылічаны набліжана з дакладнасцю да чацвёртага дзесятковага знака.

Прыклады. 1) Знайсці радыянную меру α вугла 130°26'.

Рашэнне. Дадзены вугал складаецца з вугла 90° і з вугла 40°26'. З табліцы знойдзем радыянную меру вуглоў: 90° і 40°24'; збоку ў табліцы змешчана папраўка на 2', якую трэба дадаць да апошняга дзесятковага знака:

$$\begin{array}{r} 90^\circ \quad - 1,5708 \\ 40^\circ 24' - 0,7051 \\ 2' \quad - \quad 6 \\ \hline \alpha = 2,2765 \end{array}$$

2) Знайсці градусную меру (з дакладнасцю да 1°) вугла, роўнага (набліжана) 1,25 радыяна.

Рашэнне. У табліцах У. М. Бразіса (стар. 48) знойдзем, што лік 1,2497 — найбліжэйшы да 1,2500; яму адпавядае вугал 71°36'.

Акруглім знойдзенае значэнне з дакладнасцю да 1°, тады атрымаем (набліжана) 72°.

Ведаючы радыус акружнасці R і радыянную меру α дугі, можна вылічыць даўжыню l гэтай дугі. На самай справе, па азначэнню радыяннай меры:

$$\alpha = \frac{l}{R}, \text{ адкуль } l = \alpha R.$$

Такім чынам, *даўжыня дугі акружнасці роўна здабытку яе радыяннай меры на радыус*.

Прыклад. Кола радыусам 2,2 м павярнулася на вугал 30,5°; знайсці даўжыню шляху, пройдзенага пунктам на вобадзе кола.

Рашэнне. Па формуле $l = \alpha R$ знойдзем даўжыню шляху:

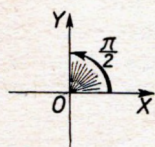
$$l \approx 2,2 \cdot 0,532 \approx 1,1704 \approx 1,2.$$

Заўвага. Радыянная мера вугла 30°30' узята з табліцы Бразіса: 0,5323. Паколькі набліжанае значэнне R дадзена з двума значачымі лічбамі, то і значэнне α трэба акругліць, захаваўшы толькі тры значачыя лічбы: $\alpha \approx 0,532$ (трэцяя лічба запасная).

§ 4. Каардынатная плоскасць, адзінкавы круг

Устанавім на плоскасці дадатны напрамак вярчэння і выберам на ёй восі каардынат. *Дадатны напрамак на восі ардынат заўсёды выбіраецца так, каб пры павароце дадатнага праменя ОХ восі абсцыс на дадатны прамы вугал ён сумясціўся з дадатным*

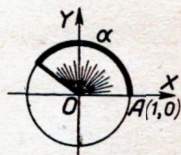
праменем OY восі ардынат. Так, на чарцяжы 10 дадзены: дадатны напрамак вярчэння — супраць гадзіннікавай стрэлкі, дадатны напрамак восі абсцыс — управа, дадатны напрамак восі ардынат — уверх.



Чарц. 10.

Вуглы на каардынатнай плоскасці прынята адкладваць так: за вяршыню вугла бярэцца пачатак каардынат, а за пачатковую старану — дадатная паўвось абсцыс. Каб атрымаць канечную старану вугла, які вымяраецца дадзеным лікам, трэба павярнуць прамень ад пачатковага становішча OX на вугал, які вымяраецца гэтым лікам (чарц. 11).

Прамень, які выходзіць з пачатку каардынат, служыць канечнай стараной для бясконцага мноства вуглоў, адкладзеных ад дадатнай паўвосі OX ; гэтыя вуглы адрозніваюцца адзін ад другога на цэлы лік поўных абаротаў: калі α — велічыня аднаго з такіх вуглоў, то велічыня адвольнага вугла β з гэтага мноства выразіцца лікам $\beta = 2k\pi + \alpha$, дзе k — любы цэлы лік, г. зн. $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Вугал β складаецца з вугла α і k поўных (дадатных або адмоўных) абаротаў. Так, напрыклад, прамень, нахілены да восі абсцыс пад вуглом у 30° , служыць канечнай стараной для вуглоў $30^\circ + 360^\circ k$, г. зн. для вуглоў 30° ($k = 0$), 390° ($k = 1$), -330° ($k = -1$), 750° ($k = 2$) і г. д.



Чарц. 11.

Азначэнне. Круг з цэнтрам у пачатку каардынат і з радыусам, роўным 1, называецца адзінкавым кругам, а яго акружнасць — адзінкавай акружнасцю.

Усякі сапраўдны лік α можна паказаць пунктам адзінкавай акружнасці; для гэтага прынята ад правага канца $A(1,0)$ гарызантальнага дыяметра адкладваць дугу, якая вымяраецца лікам α (гл. чарц. 11). Калі α ёсць радыянная мера дугі, то дастаткова ад пункта A адкласці пры $\alpha > 0$ у дадатным напрамку і пры $\alpha < 0$ у адмоўным напрамку дугу, па даўжыні роўную $|\alpha|$; канец гэтай дугі і паказвае лік α . Лік нуль, $\alpha = 0$, паказваецца пачатковым пунктам $A(1,0)$.



Чарц. 12.

На чарцяжы 12 дадзены пункты адзінкавай акружнасці, якія паказваюць розныя сапраўдныя лікі.

Два розныя сапраўдныя лікі α і β паказваюцца адным і тым жа пунктам адзінкавай акружнасці ў тым і толькі ў тым выпадку, калі дугі, якія вымяраюцца гэтымі лікамі, адрозніваюцца на цэлы лік поўных акружнасцей, г. зн. $\beta - \alpha = 2k\pi$, або

$$\beta = \alpha + 2k\pi,$$

дзе k — цэлы (дадатны або адмоўны) лік.

Каардынатныя восі дзеляць плоскасць, а разам з ёй адзінкавы круг і яго акружнасць на чатыры роўныя часткі, якія называюцца чвэрцямі (адпаведна плоскасці, круга або адзінкавай акружнасці).

Калі канечная старана вугла (або канец дугі) змяшчаецца ў некаторай чвэрці плоскасці (або адзінкавай акружнасці), то гавораць, што дадзены вугал (дуга) заканчваецца ў гэтай чвэрці.

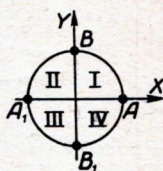
Чвэрці I і II адзінкавай акружнасці (чарц. 13) утвараюць абедзве разам верхнюю паўакружнасць, а чвэрці III і IV — ніжнюю паўакружнасць. Чвэрці I і IV утвараюць правую, а чвэрці II і III — левую паўакружнасць.

У правым канцы A гарызантальнага дыяметра заканчваецца дугі, якія вымяраюцца лікамі $2k\pi$ (або ў градусах $360^\circ k$), а ў левым канцы A_1 гэтага дыяметра — дугі, якія вымяраюцца лікамі $\pi + 2k\pi = (2k + 1)\pi$ (або ў градусах $(2k + 1) \cdot 180^\circ$), дзе k — любы цэлы лік.

Дугі $n\pi$, або $180^\circ n$ (дзе n — цэлы лік) заканчваецца ў канцах гарызантальнага дыяметра; пры цотным $n = 2k$ — у пункце A , а пры няцотным $n = 2k + 1$ — у пункце A_1 .

У пункце $B(0, 1)$ — верхнім канцы вертыкальнага дыяметра — заканчваецца дугі $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (або ў градусах $90^\circ + 360^\circ \cdot k$). У пункце $B_1(0, -1)$ — ніжнім канцы вертыкальнага дыяметра — заканчваецца дугі $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + (2k - 1)\pi$. Дугі $\frac{\pi}{2} + n\pi$ заканчваецца ў канцах вертыкальнага дыяметра: у пункце B пры цотным $n = 2k$ і ў пункце B_1 пры няцотным $n = 2k - 1$.

Дугі $k\frac{\pi}{2}$ (або $90^\circ k$) заканчваецца ў канцах або гарызантальнага, або вертыкальнага дыяметра. Пры $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ атрымаем паслядоўна пункты $A, B, A_1, B_1, A, \dots$, пры $k = -1, -2, -3, -4, \dots$ атрымаем паслядоўна пункты $B_1, A_1, B, A, \dots$.



Чарц. 13.

§ 5. Праекцыя вектара на вось*

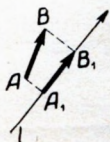
Вектарам называецца накіраваны прамалінейны адрэзак (чарц. 14). У абазначэнні вектара на першым месцы пішуць яго пачатак, а на другім — канец. Вектар $\overline{AB}$ можна разглядаць як шлях, пройдзены пунктам, які рухаецца прамалінейна з пачатковага становішча A ў канечнае становішча B . Вектарнымі з'яўляюцца многія фізічныя велічыні, як, напрыклад, сілы, скорасці, паскарэнні і да т. п.; гэтыя велічыні паказваюцца накіраванымі адрэзкамі.

* Пад воссю мы разумеем прамую лінію, на якой устаноўлен дадатны напрамак і выбрана адзінка маштабу для вымярэння даўжынь.

Азначэнне. Праекцыяй вектара $\overline{AB}$ на вось l называецца велічыня адрэзка A_1B_1 , які злучае праекцыю пачатку дадзенага вектара з праекцыяй яго канца на вось l (чарц. 15).



Чарц. 14.



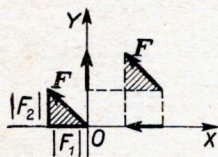
Чарц. 15.



Чарц. 16

Велічыня праекцыі лічыцца дадатнай (або адмоўнай), калі напрамак адрэзка A_1B_1 супадае (або процілеглы) з напрамкам восі l . Калі вектар перпендыкулярны да восі l , то яго праекцыя на гэту вось роўна нулю (чарц. 16). Часам тым жа словам «праекцыя» называюць не толькі велічыню адрэзка A_1B_1 восі l , але і вектар $\overline{A_1B_1}$.

Няхай $\vec{F}$ — вектар на каардынатнай плоскасці; абазначым праз F_1 і F_2 яго праекцыі на восі абсцыс і ардынат, а праз $|\vec{F}|$ яго даўжыню.



Чарц. 17.

Тэарэма. Квадрат даўжыні вектара роўны суме квадратаў яго праекцый на каардынатныя восі.

Доказ. Пры паралельным пераносе вектара яго праекцыя на вось не мяняецца (чарц. 17). Перанясём вектар так, каб яго пачатак супаў з пачатам каардынат. Апусцім перпендыкуляр на вось OX з канца вектара F ; тады атрымаем прамавугольны трохвугольнік, гіпатэнузу якога роўна даўжыні вектара, а катэты — абсалютным велічыням $|F_1|$ і F_2 яго праекцый на каардынатныя восі. Па тэарэме Піфагора:

$$|\vec{F}|^2 = |F_1|^2 + |F_2|^2.$$

Паколькі квадрат абсалютнай велічыні ліку роўны квадрату гэтага ліку, то знакі абсалютных велічынь у правай частцы лішня:

$$|\vec{F}|^2 = F_1^2 + F_2^2,$$

ш. т. д.

Заўвага. Калі вектар $\vec{F}$ ляжыць на адной з каардынатных восей, то трохвугольнік ператвараецца ў адрэзак, але і ў гэтым выпадку тэарэма правільная. Так, калі вектар ляжыць на восі абсцыс, то $F_2 = 0$, а $|\vec{F}| = |F_1|$; тое ж самае атрымаем і па формуле:

$$|\vec{F}| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{F_1^2} = |F_1|.$$

§ 6. Адлегласць паміж двума пунктамі на каардынатнай плоскасці

Тэарэма. Квадрат адлегласці d паміж двума пунктамі $M(x_1, y_1)$ і $N(x_2, y_2)$ на каардынатнай плоскасці роўны суме квадратаў рознасцей аднайменных каардынат гэтых пунктаў:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Доказ. Дадзены пункты M і N (чарц. 18); разгледзім вектар на каардынатнай плоскасці з пачаткам і з канцом у гэтых пунктах. Праекцыя вектара $\overline{MN}$ на вось абсцыс роўна велічыні адрэзка (накіраванага) M_1N_1 на восі OX . Па правілу складання велічынь накіраваных адрэзкаў на адной восі маем: $OM_1 + M_1N_1 = ON_1$, адкуль $M_1N_1 = ON_1 - OM_1$.

Паколькі

$OM_1 = x_1$, а $ON_1 = x_2$, то $\text{пр}_x \overline{MN} = M_1N_1 = x_2 - x_1$.

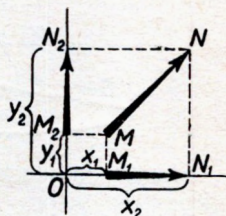
Спраектаваўшы вектар $\overline{MN}$ на вось ардынат, зусім гэтак жа атрымаем:

$$\text{пр}_y \overline{MN} = M_2N_2 = y_2 - y_1.$$

Паколькі квадрат даўжыні вектара роўны суме квадратаў яго праекцый на восі каардынат (гл. § 5), то

$$d^2 = (M_1N_1)^2 + (M_2N_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2, \quad \text{ш. т. д.}$$

Заўвага. Выведзеная формула правільная пры любым размяшчэнні пунктаў M і N на плоскасці (а не толькі пры тым, якое дадзена на чарцяжы 18). На самай справе, правіла складання велічынь накіраваных адрэзкаў восі, на аснове якога былі вылічаны велічыні адрэзкаў M_1N_1 і M_2N_2 , справядліва пры адвольным становішчы пачатковых і канечных пунктаў адрэзкаў (на дадзенай восі).



Чарц. 18.

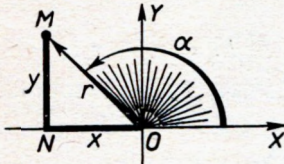
Раздел II

ТРИГОНАМЕТРИЧНЫЯ ФУНКЦЫИ

§ 7. Вызначэнне трыганаметрычных функцый адвольнага вугла

Няхай M — адвольны пункт плоскасці, адрозны ад пачатку каардынат (чарц. 19).

Азначэнне. Вектар $\overline{OM}$, які злучае пачатак каардынат з пунктам M , называецца радыусам-вектарам пункта M або рухомым радыусам.



Чарц. 19.

Абазначым праз x і y абсцысу і ардынату канца рухомага радыуса $\overline{OM}$, а праз r — яго даўжыню.

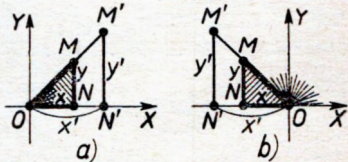
Тэарэма. Калі рухомы радыус $\overline{OM}$ утварае дадзены вугал з воссю абсцыс, то адносіны

$$\frac{x}{r} \text{ і } \frac{y}{r} \quad (1)$$

не залежаць ад даўжыні радыуса-вектара $\overline{OM}$.

Доказ. Адкладзём на каардынатнай плоскасці дадзены вугал α , прыняўшы за пачатковую старану дадатную паўвось абсцыс. На канечнай старане вугла α возьмем два адвольныя,

але адрозныя адзін ад другога і ад пачатку каардынат пункты M і M' . Дакажам, што адпаведныя адносіны (1), складзеныя для радыусаў-вектараў $\overline{OM}$ і $\overline{OM'}$, роўныя паміж сабой. Спраектаваўшы пункты M і M' на вось абсцыс (чарц. 20, a і b), атрымаем два падобныя трохвугольнікі OMN і $OM'N'$. Даўжыні катэтаў трох-



Чарц. 20.

вугольніка OMN роўны абсалютным велічыням каардынат пункта M , г. зн. $|x|$ і $|y|$, а даўжыня гіпатэнузы роўна r . Даўжыні катэтаў і гіпатэнузы трохвугольніка $OM'N'$ ёсць $|x'|$, $|y'|$ і r' . З падобнасці трохвугольнікаў OMN і $OM'N'$ маем: $\frac{|x|}{r} = \frac{|x'|}{r'}$ (адносіны падобных старон роўныя).

Адносіны $\frac{x}{r}$ і $\frac{x'}{r'}$ аднолькавыя і па знаку. На самай справе, адрэзкі ON і ON' ёсць праекцыі аднолькава накіраваных радыусаў-вектараў $\overline{OM}$ і $\overline{OM'}$. Значыць, яны таксама аднолькава накіраваныя, і іх велічыні x і x' маюць адзін і той жа знак (на чарцяжы 20, a x і x' дадатныя, а на чарцяжы 20, b адмоўныя). Значыць,

$$\frac{x}{r} = \frac{x'}{r'}.$$

Гэтак жа даказваецца роўнасць адносін $\frac{y}{r}$ і $\frac{y'}{r'}$ (спраектаваць M і M' на вось OY), ш. т. д.

Заўвага. Калі канечная старана вугла α накіравана ўздоўж адной з каардынатных восей, то трохвугольнікі OMN і $OM'N'$ ператвараюцца ў адрэзкі, але тэарэма правільная і ў гэтым выпадку. Так, напрыклад, калі канечная старана вугла накіравана ўздоўж дадатнай паўвосі абсцыс, то $\frac{x}{r} = 1$, а $\frac{y}{r} = 0$; калі ж канечная старана накіравана ўздоўж адмоўнай паўвосі абсцыс, то $\frac{x}{r} = -1$, а $\frac{y}{r} = 0$.

Азначэнні. 1) *Косінусам вугла α называецца адносіна абсцысы канца рухомага радыуса, які ўтварае вугал α з воссю абсцыс, да даўжыні гэтага радыуса:*

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}.$$

2) *Сінусам вугла α называецца адносіна ардынаты канца рухомага радыуса, які ўтварае вугал α з воссю абсцыс, да даўжыні гэтага радыуса:*

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}.$$

✓ 3) *Тангенсам вугла α называецца адносіна сінуса вугла α да косінуса гэтага вугла:*

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

4) *Катангенсам вугла α называецца адносіна косінуса вугла α да сінуса гэтага вугла:*

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Значэнні адносін $\cos \alpha$, $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ не залежаць ад даўжыні рухомага радыуса.

З азначэнняў тангенса і катангенса вынікае, што **тангенс вугла α роўны адносіне ардынаты да абсцысы канца рухомага радыуса, які ўтварае вугал α з воссю OX , а катангенс роўны адносіне абсцысы да ардынаты канца гэтага рухомага радыуса:**

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x} \quad \text{і} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}} = \frac{x}{y}.$$

Адносіну $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$ можна скласці, калі $x \neq 0$. Калі ж $x = 0$, то дадзенай адносіны скласці нельга (на нуль дзяліць нельга); у гэтым апошнім выпадку канечная старана вугла накіравана ўздоўж восі ардынат і $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, або ў градусах $90^\circ + 180^\circ k$

(дзе k — любы цэлы лік). Значыць, $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right)$ не існуе.

Для вуглоў $k\pi$ (або ў градусах $180^\circ k$) канечная старана накіравана ўздоўж восі абсцыс, адносіна $\frac{x}{y}$ траціць сэнс, паколькі $y = 0$; для гэтых вуглоў катангенс не існуе.

Усякаму вуглу α адпавядае некаторае значэнне кожнай з адносін (калі толькі яно мае сэнс):

$\cos \alpha$, $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$.

Значыць, дадзеныя адносіны ёсць функцыі вугла α . Гэтыя функцыі называюцца трыганаметрычнымі функцыямі; вугал α з'яўляецца іх аргументам.

Апрача дадзеных чатырох функцый, часам разглядаюцца яшчэ дзве трыганаметрычныя функцыі — секанс і касеканс:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{r}{x} \quad \text{і} \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{r}{y}.$$

Аднак гэтыя дзве апошнія функцыі не маюць шырокага ўжывання.

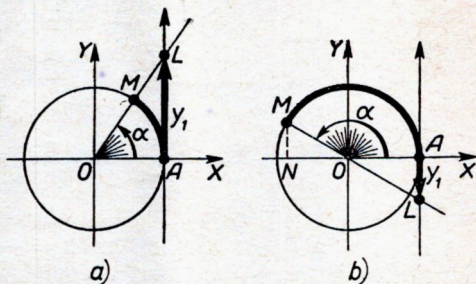
Паколькі значэнні трыганаметрычных функцый не залежаць ад даўжыні рухомага радыуса, то можна гэты радыус заўсёды браць адной і той жа даўжыні. Звычайна лічаць $r = 1$; тады канец рухомага радыуса знаходзіцца на адзінкавай акружнасці, а вугал утвараецца двума яе радыусамі (чарц. 21). У гэтым выпадку

$$\cos \alpha = x, \quad \sin \alpha = y, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}.$$

Такім чынам, косінус і сінус вугла α роўны абсцысе і ардынаце канца рухомага радыуса адзінкавай акружнасці, які ўтварае вугал α з пачатковым радыусам, а тангенс і катангенс роўны адносінам ардынаты да абсцысы і абсцысы да ардынаты канца рухомага радыуса.

Аргументам трыганаметрычных функцый можна лічыць не толькі вугал, але і дугу адзінкавай акружнасці. Па дадзенай дузе можна пабудаваць адпаведны пункт на адзінкавай акружнасці (канец рухомага радыуса) і знайсці значэнні трыганаметрычных функцый.

Датычная да адзінкавай акружнасці ў канцы $A(1,0)$ гарызонтальнага дыяметра называецца восьцю тангенсаў. Дадатны напрамак на восі тангенсаў устанаўліваецца такі ж, як на восі ардынат (на чарцяжы 22 знізу ўверх).



Чарц. 22.

Няхай M — пункт адзінкавай акружнасці, які адпавядае вуглу α . Прадоўжыўшы радыус OM да перасячэння з восьцю тангенсаў, атрымаем на гэтай восі пункт L (гэтага пабудавання нельга выканаць, калі пункт M ляжыць на восі ардынат).

Тангенс вугла α роўны ардынаце адпаведнага пункта восі тангенсаў.

На самай справе, калі вугал α заканчваецца ў правай паўакружнасці, то, узяўшы OL за рухомы радыус, атрымаем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AL}{OA} = \frac{AL}{1} = y_1,$$

дзе y_1 — ардыната пункта L (чарц. 22, а).

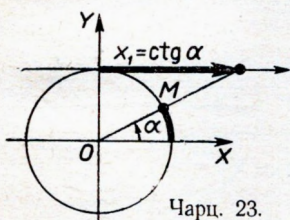
Калі вугал α заканчваецца ў левай паўакружнасці (чарц. 22, б), то аднайменныя каардынаты пунктаў M і L процілеглыя па знаку, а адносіны ардынаты да абсцысы для абодвух гэтых пунктаў аднолькавыя (трохвугольнікі OMN і OAL падобныя):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{NM}{ON} = \frac{AL}{OA} = \frac{y_1}{1} = y_1.$$

Заўвага. Калі пункт M ляжыць на восі ардынат, то пункт L не існуе, $\operatorname{tg} \alpha$ таксама не існуе.

Восьцю катангенсаў называецца датычная да адзінкавай акружнасці ў канцы $B(0,1)$ вертыкальнага дыяметра; дадатны напрамак на гэтай восі такі ж, як на восі абсцыс.

Катангенс вугла α ёсць абсцыса x адпаведнага пункта восі катангенсаў (чарц. 23).

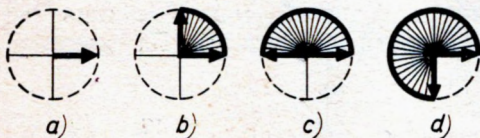


Чарц. 23.

§ 8. Значенні тригонометричних функцій ад некаторых вуглоў

Калі вугал $\alpha = 0$ (чарц. 24, а), то канец рухомага радыуса адзінкавай акружнасці мае каардынаты $x = 1$, $y = 0$, а таму $\cos 0 = 1$;

$\sin 0 = 0$; $\operatorname{tg} 0 = \frac{y}{x} = 0$; $\operatorname{ctg} 0$ не існуе.



Чарц. 24.

Калі вугал $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (або ў градусах $\alpha = 90^\circ$), то канец рухомага радыуса мае каардынаты (чарц. 24, б)

$x = 0$, $y = 1$, а таму

$\cos \frac{\pi}{2} = \cos 90^\circ = 0$; $\sin \frac{\pi}{2} = \sin 90^\circ = 1$; $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \operatorname{tg} 90^\circ$ не існуе;

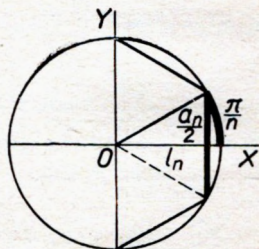
$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = \operatorname{ctg} 90^\circ = 0$.

Калі $\alpha = \pi$ (чарц. 24, с), то $x = -1$, $y = 0$, а таму $\cos \pi = \cos 180^\circ = -1$; $\sin \pi = \sin 180^\circ = 0$; $\operatorname{tg} \pi = \operatorname{tg} 180^\circ = 0$; $\operatorname{ctg} \pi = \operatorname{ctg} 180^\circ$ не існуе.

Калі $\alpha = \frac{3}{2}\pi$ (чарц. 24, д), то $x = 0$, $y = -1$, а таму $\cos \frac{3}{2}\pi = \cos 270^\circ = 0$; $\sin \frac{3}{2}\pi = \sin 270^\circ = -1$; $\operatorname{tg} \frac{3}{2}\pi = \operatorname{tg} 270^\circ$ не існуе; $\operatorname{ctg} \frac{3}{2}\pi = \operatorname{ctg} 270^\circ = 0$.

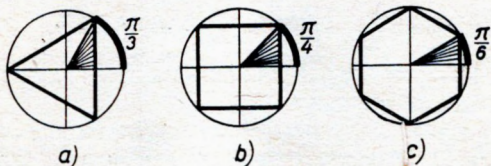
Няхай a_n — старана, а l_n — апафема правільнага n -вугольніка, упісанага ў адзінкавы круг. Размесцім n -вугольнік так, каб дадатная паўвось абсцыс дзяліла папалам адну з яго старон; тады з чарцяжа 25 знойдзем:

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{n} &= \cos \frac{180^\circ}{n} = l_n \text{ і } \sin \frac{\pi}{n} = \\ &= \sin \frac{180^\circ}{n} = \frac{a_n}{2}. \end{aligned}$$



Чарц. 25.

Пры $n = 3$ атрымаем упісаны трохвугольнік (чарц. 26, а). З геаметрыі вядома, што $a_3 = \sqrt{3}$, $l_3 = \frac{1}{2}$; значыць,



Чарц. 26.

$$\cos \frac{\pi}{3} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}; \quad \sin \frac{\pi}{3} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}; \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Пры $n = 4$ атрымаем упісаны квадрат (чарц. 26, б); маем:

$$a_n = \sqrt{2}, l_n = \frac{\sqrt{2}}{2}; \text{ а таму}$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \sin \frac{\pi}{4} = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \operatorname{tg} 45^\circ = 1; \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = \operatorname{ctg} 45^\circ = 1.$$

Пры $n = 6$ атрымаем упісаны шасцівугольнік (чарц. 26, с); маем:

$$a_6 = 1, l_6 = \frac{\sqrt{3}}{2}; \text{ значыць,}$$

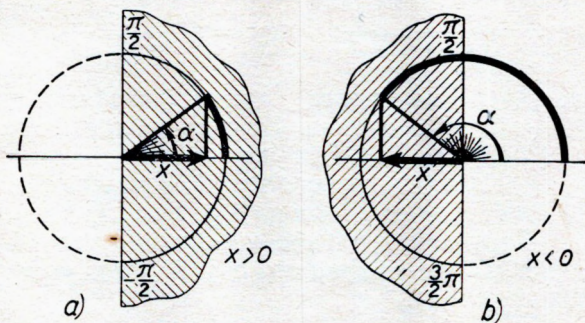
$$\cos \frac{\pi}{6} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \sin \frac{\pi}{6} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}; \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}.$$

§ 9. Знакі трыганаметрычных функцый

Паколькі $\cos \alpha$ ёсць абсцыса канца радыуса адзінкавага круга, утвараючага вугал α з воссю OX , то значэнні косінуса дадатныя (адмоўныя) для вуглоў, якія заканчваюцца ў тых чвэрцях, у якіх абсцысы пунктаў дадатныя (адмоўныя).

Значыць, **косінусы вуглоў (дуг), якія заканчваюцца ў правай паўплоскасці (I і IV чвэрці), дадатныя, а косінусы вуглоў, якія заканчваюцца ў левай паўплоскасці (II і III чвэрці), адмоўныя** (чарц. 27).



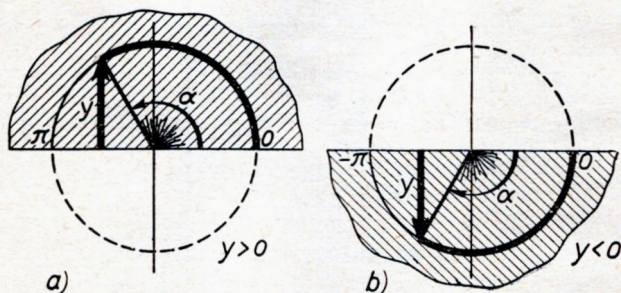
Чарц. 27.

У прыватнасці, для вуглоў, заключаных паміж $-\frac{\pi}{2}$ і $\frac{\pi}{2}$, г. зн. $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (або ў градусах $-90^\circ < \alpha < 90^\circ$), маем $\cos \alpha > 0$.

Для вуглоў, заключаных паміж $\frac{\pi}{2}$ і $\frac{3\pi}{2}$, г. зн. $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, маем $\cos \alpha < 0$.

Паколькі $\sin \alpha$ ёсць ардыната канца радыуса адзінкавага круга, утвараючага вугал α з воссю OX , то значэнні сіноса дадатныя (адмоўныя) для вуглоў, якія заканчваюцца ў тых чвэрцях, у якіх ардынаты пунктаў дадатныя (адмоўныя).

Значыць, **сінусы вуглоў (дуг), якія заканчваюцца ў верхняй паўплоскасці (I і II чвэрці), дадатныя, а сінусы вуглоў, якія заканчваюцца ў ніжняй паўплоскасці (III і IV чвэрці), адмоўныя** (чарц. 28).



Чарц. 28.

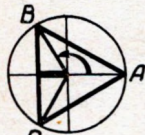
У прыватнасці, для вуглоў, заключаных паміж 0 і π , г. зн. $0 < \alpha < \pi$ (або ў градусах $0^\circ < \alpha < 180^\circ$), маем $\sin \alpha > 0$. Для вуглоў, заключаных паміж $-\pi$ і 0 , г. зн. $-\pi < \alpha < 0$, маем $\sin \alpha < 0$.

Паколькі $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$ ёсць адносіны каардынат канца рухомага радыуса:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{y}{x}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{x}{y},$$

то значэнні тангенса і катангенса дадатныя (адмоўныя) для вуглоў, якія заканчваюцца ў тых чвэрцях, у якіх каардынаты пунктаў аднолькавыя (процілеглыя) па знаку.

Значыць, **тангенсы і катангенсы вуглоў, якія заканчваюцца ў I і III чвэрцях, дадатныя, а тангенсы і катангенсы вуглоў, якія заканчваюцца ў II і IV чвэрцях, адмоўныя**.



Чарц. 29

Прыклад. Разглядаючы вяршыні B і C роўнастаронняга трохвугольніка, размешчанага, як паказана на чарцяжы 29, атрымаем:

$$\cos \frac{2\pi}{3} = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}; \quad \sin \frac{2\pi}{3} = \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} = \operatorname{tg} 120^\circ = -\sqrt{3}.$$

$$\cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}; \quad \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

§ 10. Асноўныя трыганаметрычныя тоеснасці і іх вынікі

Устанавім асноўныя суадносіны, з якімі звязаны значэнні чатырох трыганаметрычных функцый пры дадзеным значэнні аргумента.

I. Сума квадратаў косінуса і сінуса аднаго і таго ж аргумента роўна адзінцы:

$$\boxed{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1} \quad (I)$$

Доказ Няхай α — адвольны вугал (дуга); праекцыі радыуса OM адзінкавага круга, утвараючага вугал α з воссю абсцыс на восі OX і OY , ёсць:

$$x = \cos \alpha \text{ і } y = \sin \alpha.$$

Паколькі даўжыня OM роўна 1, то (гл. чарц. 20)

$$x^2 + y^2 = 1, \text{ або } \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1, \quad \text{ш. т. д.}$$

II. Па азначэнню тангенса і катангенса маем:

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} \quad (II)$$

Вынікі. Перамножыўшы пачленна тоеснасці (II), атрымаем наступную тоеснасць:

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1} \quad (III)$$

Падзяліўшы пачленна тоеснасць (I) на $\cos^2 \alpha$, а затым на $\sin^2 \alpha$, атрымаем тоеснасці:

$$1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \text{ і } \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha},$$

або

$$\boxed{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}} \quad \text{і} \quad \boxed{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}} \quad (IV)$$

Інакш гэтыя тоеснасці можна запісаць так:

$$\sec^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \text{ і } \operatorname{cosec}^2 \alpha = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha.$$

Растлумачэнне Усякая трыганаметрычная тоеснасць ёсць роўнасць, справядлівая пры ўсіх дапушчальных значэннях аргумента α , г. зн. пры ўсіх тых значэннях аргумента, пры якіх левая і правая часткі (кожная) маюць сэнс. Так, напрыклад, роўнасць $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$ выконваецца пры ўсіх значэннях α , пры якіх $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$ абодва маюць сэнс, г. зн. пры ўсіх α , за выключэннем вуглоў (дуг) $k\frac{\pi}{2}$, якія заканчваюцца ў канцах або гарызанталь-

нага, або вертикальнаго дияметра (для вуглоў $k \frac{\pi}{2}$ або тангенс, або катангенс траціць сэнс).

Асноўныя трыганаметрычныя тоеснасці дазваляюць рабіць тоесныя пераўтварэнні выразаў, якія маюць трыганаметрычныя функцыі, і даказваюць розныя іншыя трыганаметрычныя тоеснасці. Для гэтага выкарыстоўваюцца агульныя правілы дзеянняў над алгебраічнымі выразамі, асноўныя трыганаметрычныя тоеснасці і іх вынікі.

Прыклады: 1) Даказаць тоеснасць:

$$\frac{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha - 1}.$$

Доказ. Пераўтворым левую частку, замяніўшы ў лічніку 1 сумай $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$. Маём паслядоўна:

$$\begin{aligned} \frac{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} &= \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \\ &= \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}{(\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin \alpha + \cos \alpha)} = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}. \end{aligned}$$

Падзелім лічнік і назоўнік на $\cos \alpha$:

$$\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha - 1}.$$

Такім чынам, атрымаўся той жа выраз, які знаходзіцца у правай частцы, ш. т. д.

2) Спрасціць выраз:

$$P = \sqrt{\frac{2}{1 + \sin \alpha} + \frac{2}{1 - \sin \alpha}}.$$

Рашэнне. Выканаем пераўтварэнні:

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{\frac{2}{1 + \sin \alpha} + \frac{2}{1 - \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{2(1 - \sin \alpha) + 2(1 + \sin \alpha)}{1 - \sin^2 \alpha}} = \\ &= \sqrt{\frac{4}{\cos^2 \alpha}} = \frac{2}{\sqrt{\cos^2 \alpha}} = \frac{2}{|\cos \alpha|}. \end{aligned}$$

Значыць, $P = \frac{2}{\cos \alpha}$, калі $\cos \alpha > 0$, г. зн. α заканчваецца ў правай паўплоскасці, і $P = -\frac{2}{\cos \alpha}$, калі $\cos \alpha < 0$, г. зн. α заканчваецца ў левай паўплоскасці.

§ 11. Вылічэнне значэнняў трыганаметрычных функцый па значэнню адной з іх

Пры дапамозе асноўных тоеснасцей можна кожную з трыганаметрычных функцый (ад аднаго і таго ж аргумента) выразіць праз любую другую трыганаметрычную функцыю.

Выражэнне трыганаметрычных функцый праз косінус. З тоеснасці (I) (стар. 19) можна выразіць сінус праз косінус:

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha};$$

падставіўшы $\sin \alpha$ у тоеснасць (II), атрымаем выражэнні тангенса і катангенса праз косінус:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}.$$

Выражэнне трыганаметрычных функцый праз сінус. З тоеснасцей (I) і (II) атрымаем (вылічэнні такія ж, як у папярэднім выпадку):

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \pm \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}.$$

Выражэнне трыганаметрычных функцый праз тангенс. З тоеснасцей (IV) і (II) (першых) атрымаем:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}; \quad \sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha.$$

З гэтых роўнасцей і з тоеснасці (III) знойдзем:

$$\cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}; \quad \sin \alpha = \pm \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Выражэнне трыганаметрычных функцый праз катангенс. З тоеснасцей (IV), (II) і (III) знойдзем:

$$\cos \alpha = \pm \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}; \quad \sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}.$$

Атрыманыя формулы дазваляюць, ведаючы значэнне адной з трыганаметрычных функцый, вылічыць значэнні астатніх функцый пры тым жа значэнні аргумента.

У формулах, якія змяшчаюць радыкалы, знак $+$ або $-$ трэба ставіць у залежнасці ад таго, у якой чвэрці заканчваецца вугал (дуга) α .

Прыклад. Дадзена: $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, вылічыць значэнні іншых трыганаметрычных функцый, калі $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Рашэнне. Вугал α заканчваецца ў II чвэрці, у якой косінус, тангенс і катангенс адмоўныя; таму

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{3}{4}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{4}{3}.$$

§ 12. Цотнасць і няцотнасць трыганаметрычных функцый

Функцыя называецца цотнай, калі яе значэнне y не змяняецца пры замене адвольнага значэння аргумента x процілеглым яму значэннем $-x$. Прыкладам цотнай функцыі можа служыць функцыя $y = x^2$, паколькі

$$(-x)^2 = x^2 = y.$$

Функцыя называецца няцотнай, калі яе значэнне y замяняецца процілеглым лікам — y пры замене адвольнага значэння аргумента x процілеглым яму значэннем — x . Прыкладам няцотнай функцыі можа служыць функцыя x^3 , паколькі

$$(-x)^3 = -x^3 = -y.$$

Прыкладам функцыі, якая не з'яўляецца ні цотнай, ні няцотнай, можа служыць функцыя $x^2 + x$. На самай справе, замяніўшы x на $-x$, атрымаем:

$$(-x)^2 + (-x) = x^2 - x,$$

што (пры $x \neq 0$) не роўна ні $x^2 + x$, ні $-(x^2 + x)$.

Тэарэма. Косінус з'яўляецца цотнай функцыяй:

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha;$$

сінус, тангенс і катангенс з'яўляюцца няцотнымі функцыямі:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha; \quad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha; \quad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

Кратка гэту тэарэму можна сфармуляваць так: *знак мінус у аргумента косінуса можа быць апушчан, а ў аргумента сінуса, тангенса і катангенса можа быць вынесен за знак функцыі*

Доказ. Няхай α — дадзены вугал; разгледзім вугал — α . Узаемна процілеглыя вуглы α і — α утвараюцца аднолькавым паваротам рухомага радыуса ад агульнага пачатковага становішча OA , але ва ўзаемна процілеглых напрамках; таму іх канечныя стораны OM і ON сіметрычныя адносна восі абсцыс (чарц. 30). Значыць, абсцысы пунктаў M і N роўныя, а ардынаты процілеглыя. Параўнаўшы каардынаты пункта $M(x, y)$:

$$x = \cos \alpha \quad \text{і} \quad y = \sin \alpha,$$

з каардынатамі пункта $N(x, -y)$:

$$x = \cos(-\alpha) \quad \text{і} \quad -y = \sin(-\alpha),$$

атрымаем:

$$\cos \alpha = \cos(-\alpha); \quad \sin(-\alpha) = -\sin \alpha.$$

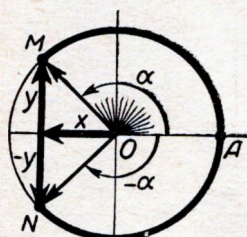
Далей знойдзем:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha, \quad \text{ш. т. д.}$$

Прыклады.

$$1) \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2};$$



Чарц. 30

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}.$$

$$2) \cos(-135^\circ) = \cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \sin(-135^\circ) = -\sin 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

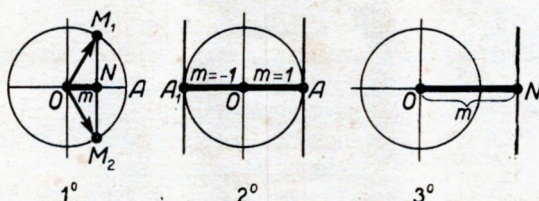
$$\operatorname{tg}(-135^\circ) = -\operatorname{tg} 135^\circ = 1; \quad \operatorname{ctg}(-135^\circ) = -\operatorname{ctg} 135^\circ = 1.$$

§ 13. Пабудаванне вугла па дадзенаму значэнню яго трыганаметрычнай функцыі

Задача 1. Дадзен лік m , пабудоваць вугал (дугу) α , косінус якога роўны m .

Рашэнне. Пабудуем на восі OX пункт N з абсцысай $x = m$ і правядзём праз яго прамую, паралельную восі OY .

Магчымы наступныя выпадкі (чарц. 31):



Чарц. 31.

Выпадак 1°. $|m| < 1$, тады пункт $N(m, 0)$ ляжыць унутры адзінкавага круга. Паралель восі OY перасячэ адзінкавую акружнасць у двух розных пунктах, адзін з якіх M_1 змяшчаецца ў верхняй, а другі M_2 — у ніжняй паўакружнасці. Усякі вугал α , для якога OM_1 або OM_2 з'яўляецца канечнай стараной, мае косінус, роўны m :

$$\cos \alpha = m.$$

Выпадак 2°. $m = \pm 1$, тады пункт $N(m, 0)$ супадае з адным з канцоў гарызантальнага дыяметра, паралельнаму восі ардынаты датыкаецца да адзінкавай акружнасці (чарц. 31, 2°). Для канечнай стараны шукаемага вугла магчыма толькі адно становішча: OA пры $m = 1$ і OA_1 пры $m = -1$. Маём адпаведна $\alpha = 2k\pi$ (пры $m = 1$) і $\alpha = (2k + 1)\pi$ (пры $m = -1$), дзе k — любы цэлы лік: $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Выпадак 3°. $|m| > 1$, тады пункт $N(m, 0)$ ляжыць па-за адзінкавым кругам і паралель восі ардынаты, праведзеная праз пункт N , не перасякае адзінкавай акружнасці, а таму вуглоў, косінус якіх роўны m , не існуе.

З усіх вуглоў (дуг), косінус якіх роўны m (дзе $|m| \leq 1$), найменшы неадмоўны α_0 заключан у прамежку ад 0 да π (верхняя паўпласкасць); гэты вугал (дуга) называецца галоўным вуглом (дугой) і абазначаецца так: $\alpha_0 = \arccos m$.

* Першыя тры літары $\arccos$ з'яўляюцца скарачэннем лацінскага слова *arcus* — дуга, $\arccos m$ чытаць так: арккосінус ліку m .

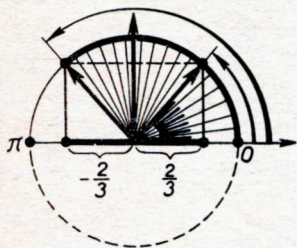
Азначэнне. Галоўны вугал (дуга) $\arccos t$ ёсць вугал (дуга), які змяшчаецца ў прамежку ад 0 да π :

$$0 \leq \arccos t \leq \pi,$$

косінус якога роўны t .

Калі $|t| > 1$, то выраз $\arccos t$ не мае сэнсу, бо вуглоў, косінус якіх роўны t , не існуе.

Прыклады. 1) $\arccos 1 = 0$; $\arccos(-1) = \pi$; $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$; $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$; $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi$; $\arccos 5$ не мае сэнсу.



Чарц. 32.

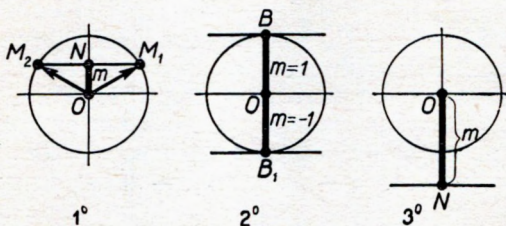
2) На чарцяжы 32 паказаны вуглы $\arccos \frac{2}{3}$ і $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$.

Задача II. Дадзен лік t , пабудаваць вугал α , сінус якога роўны t .

Рашэнне аналагічнае рашэнню папярэдняй задачы: пункт $N(0, t)$ будзеца на восі ардынат, і праз яго праводзіцца паралель восі абсцыс (чарц. 33).

Выпадак 1°. $|t| < 1$, тады паралель восі OX перасячэ адзінкавую акружнасць у двух пунктах, адзін з якіх M_1 знаходзіцца ў правай, а другі M_2 — у левай паўакружнасці. Радыусы-вектары $\overline{OM_1}$ і $\overline{OM_2}$ вызначаюць два розныя становішчы канечнай стараны шукаемых вуглоў.

Выпадак 2°. $t = \pm 1$, тады для канечнай стараны вугла α магчыма адно становішча: OB пры $t = 1$ і OB_1 пры $t = -1$.



Чарц. 33.

Маем адпаведна $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (пры $t = 1$) і $\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (пры $t = -1$), дзе k — любы цэлы лік.

Выпадак 3°. $|t| > 1$, тады задача не мае рашэння: вуглоў, сінус якіх роўны t , не існуе.

З усіх вуглоў (дуг), сінус якіх роўны t , дзе $|t| \leq 1$, галоўным лічыцца найменшы па абсалютнай велічыні; гэты вугал заключан у прамежку ад $-\frac{\pi}{2}$ да $\frac{\pi}{2}$ (правая паўплоскасць).

Азначэнне. Галоўны вугал (дуга) $\arcsin t$ ёсць вугал (дуга), які знаходзіцца ў прамежку ад $-\frac{\pi}{2}$ да $\frac{\pi}{2}$:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin t \leq \frac{\pi}{2},$$

сінус якога роўны t .

Калі $|t| > 1$, то выраз $\arcsin t$ не мае сэнсу.

Прыклады. 1) $\arcsin 0 = 0$; $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$;

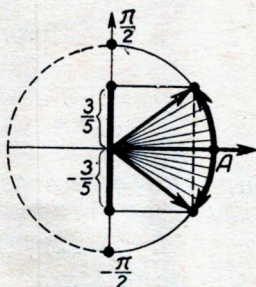
$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}; \quad \arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}; \quad \arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}.$$

2) На чарцяжы 34 паказана пабудаванне вуглоў $\arcsin \frac{3}{5}$ і

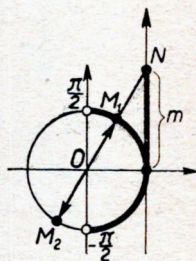
$$\arcsin \left(-\frac{3}{5}\right).$$

3) Знайсці (набліжана) $\arcsin 0,4226$. Па табліцах (гл. табліцы Брадзіса, табл. VIII) знаходзім (у градуснай меры): $\arcsin 0,4226 \approx 25^\circ$.

Задача III. Дадзены лік t , пабудаваны вугал (дугу) α , тангенс якога роўны t .



Чарц. 34.



Чарц. 35.

Рашэнне. Пабудуем на восі тангенсаў пункт $N(1, t)$ з ардынатай, роўнай t (чарц. 35). Прамая, якая злучае пункт N з пачаткам каардынат, перасячэ адзінкавую акружнасць у двух дыяметральна процілеглых пунктах M_1 і M_2 , радыусы-вектары якіх даюць два розныя становішчы канечнай стараны шукаемага вугла.

З усіх вуглоў (дуг), якія маюць дадзены тангенс, галоўным лічыцца вугал, найменшы па абсалютнай велічыні; гэты вугал заключан паміж $-\frac{\pi}{2}$ і $\frac{\pi}{2}$.

Азначэнне. Галоўны вугал (дуга) $\arctg t$ ёсць вугал (дуга), які змяшчаецца паміж $-\frac{\pi}{2}$ і $\frac{\pi}{2}$:

$$-\frac{\pi}{2} < \arctg t < \frac{\pi}{2},$$

тангенс якога роўны t .

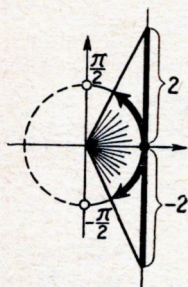
Прыклады. 1) $\arctg 0 = 0$; $\arctg \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$;

$$\arctg (-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}; \quad \arctg 1 = \frac{\pi}{4}; \quad \arctg (-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

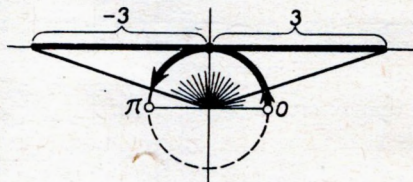
2) На чарцяжы 36 паказана пабудаванне вуглоў $\arctg 2$ і $\arctg (-2)$.

Задача IV. Дадзен лік m , пабудоваць вугал (дугу) α , катангенс якога роўны m .

Рашэнне аналагічна рашэнню папярэдняй задачы; трэба правесці прамую праз пачатак каардынат і праз пункт $N(m, 1)$, які ляжыць на восі катангенсаў, і знайсці пункты яе перасячэння з адзінкавай акружнасцю. З усіх вуглоў (дуг), якія маюць дадзены катангенс, галоўным лічыцца найменшы дадатны вугал, ён заключан паміж 0 і π .



Чарц. 36.



Чарц. 37.

Азначэнне. Галоўны вугал (дуга) $\arcsin m$ ёсць вугал (дуга), які змяшчаецца паміж 0 і π :

$$0 < \arcsin m < \pi,$$

катангенс якога роўны m .

Прыклад. 1) $\arcsin 0 = \frac{\pi}{2}$; $\arcsin 1 = \frac{\pi}{4}$; $\arcsin(-\sqrt{3}) = \frac{5}{6}\pi$.

2) На чарцяжы 37 паказана пабудаванне вуглоў $\arcsin 3$ і $\arcsin(-3)$.

З выкладзенага вынікае, што **функцыі $\cos \alpha$ і $\sin \alpha$ могуць прымаць любое сапраўднае значэнне m , не большае за 1 па абсалютнай велічыні.** Такім чынам:

$$|\cos \alpha| \leq 1; |\sin \alpha| \leq 1,$$

або, што тое ж: $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$; $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$.

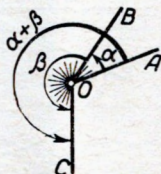
Функцыі $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$ могуць прымаць любое сапраўднае значэнне.

Раздзел III

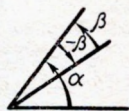
ТЭАРЭМЫ СКЛАДАННЯ І ІХ ВЫНІКІ

§ 14. Складанне і адыманне вуглоў

Разгледзім два вуглы, якія вымяраюцца лікамі α і β . Дапусцім, што прамень OA , павярнуўшыся на вугал α вакол пункта O , заняў становішча OB , а затым ад становішча OB , як ад пачатковага, павярнуўся на вугал β і заняў становішча OC . Паслядоўнае выкананне гэтых двух паваротаў можна замяніць адным паваротам на вугал з пачатковай старонай OA і з канечнай старонай OC , які вымяраецца лікам $\alpha + \beta$; гэты апошні вугал называецца сумай вуглоў α і β (чарц. 38).



Чарц. 38



Чарц. 39

Адыманне вуглоў ёсць дзеянне, адваротнае складанню: *рознасць $\alpha - \beta$ двух вуглоў α і β ёсць такі вугал, які ў суме з вуглом β дае вугал α* . Рознасць вуглоў α і β можна прадставіць як суму вугла α і вугла $-\beta$, процілеглага вуглу β . На самай справе, калі прамень павернецца спачатку на вугал α , затым на вугал $-\beta$, а потым на вугал β , то яго канечная старана вернецца ў становішча канечнай стараны вугла α (чарц. 39):

$$[\alpha + (-\beta)] + \beta = \alpha.$$

Дугі акружнасці складваюцца і адымаюцца па тых жа правілах, па якіх складваюцца і адымаюцца адпаведныя ім цэнтральныя вуглы.

§ 15. Тэарэма складання для косінуса

Тэарэмы складання ў трыганаметрыі ўстанаўліваюць формулы, па якіх можна, ведаючы значэнні трыганаметрычных функцый ад аргументаў α і β , вылічаць трыганаметрычныя функцыі ад сумы і рознасці $\alpha \pm \beta$ гэтых аргументаў.

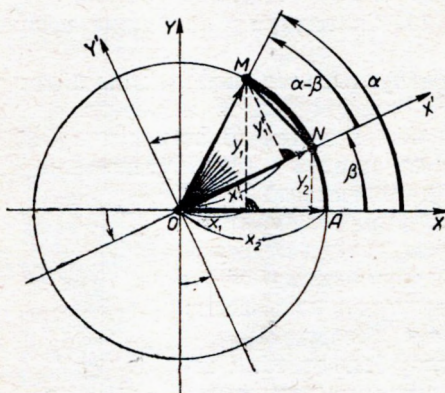
Тэарэма. Косінус сумы (рознасці) двух аргументаў роўны здабытку косінусаў мінус (плюс) здабытак сінусаў дадзеных аргументаў:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta; \quad (I)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta. \quad (II)$$

Доказ. Дакажам формулу (II). Доказ грунтуецца на тым, што пры вярчэнні каардынатных восей XOY вакол пункта O даўжыні адрэзкаў не змяняюцца. Дадзены дугі α і β ; няхай M і N — пункты адзінкавай акружнасці, у якіх заканчваюцца гэтыя дугі:

$\angle AOM = \alpha$ і $\angle AON = \beta$ (чарц. 40).



Чарц. 40.

У сістэме XOY пункты M і N маюць наступныя каардынаты:

$$x_1 = \cos \alpha, \quad y_1 = \sin \alpha; \quad x_2 = \cos \beta, \quad y_2 = \sin \beta;$$

квадрат адлегласці паміж пунктамі M і N роўны:

$$\begin{aligned} d^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (\cos \beta - \cos \alpha)^2 + (\sin \beta - \sin \alpha)^2 = \\ &= (\cos^2 \beta + \cos^2 \alpha - 2 \cos \beta \cos \alpha) + (\sin^2 \beta + \sin^2 \alpha - 2 \sin \beta \sin \alpha) = \\ &= (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) + (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = \\ &= 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta). \end{aligned}$$

Павернем восі каардынат на вугал β . У новым становішчы напрамак OX' восі абсцыс супадае з напрамкам радыуса ON . Радыус OM складзе з воссю OX' вугал, роўны $\alpha - \beta$. Сапраўды, $\angle XOX' + \angle X'OM = \angle XOM$, або $\beta + \angle X'OM = \alpha$, адкуль $\angle X'OM = \alpha - \beta$.

Пункты M і N у сістэме $X'OY'$ будуць мець наступныя каардынаты:

$$x'_1 = \cos(\alpha - \beta), \quad y'_1 = \sin(\alpha - \beta); \quad x'_2 = 1, \quad y'_2 = 0.$$

Вылічым квадрат адлегласці паміж пунктамі M і N , ведаючы іх каардынаты ў сістэме $X'OY'$:

$$\begin{aligned} d^2 &= (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 = [1 - \cos(\alpha - \beta)]^2 + \sin^2(\alpha - \beta) = \\ &= [\cos^2(\alpha - \beta) + \sin^2(\alpha - \beta)] + 1 - 2\cos(\alpha - \beta) = \\ &= 2 - 2\cos(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

Прыраўняем два знойдзеныя выразы для d^2 :

$$2 - 2\cos(\alpha - \beta) = 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta),$$

адкуль і атрымаем формулу (II):

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Для вываду формулы (I) заменім у формуле (II) аргумент β на $-\beta$:

$$\cos[\alpha - (-\beta)] = \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta).$$

Выкарыстаўшы ўласцівасці цотнасці косінуса і няцотнасці сінуса, атрымаем:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \quad \text{ш. т. д.}$$

Даказаныя формулы (I) і (II) справядлівыя для адвольных вуглоў α і β . Сапраўды, гэтыя формулы даказаны на аснове агульнага правіла складання і адымання вуглоў і дуг і формулы адлегласці паміж двума пунктамі, а гэта апошняя формула справядліва пры адвольным размяшчэнні пунктаў.

Прыклад. Вылічыць $\cos 15^\circ$.

Рашэнне. Паколькі $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$ і вядомы

$$\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{і} \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

то

$$\begin{aligned} \cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} + 1) \approx 0,9659. \end{aligned}$$

§ 16. Формулы дапаўняльных аргументаў

Вуглы (дугі) α і β называюцца дапаўняльнымі да $\frac{\pi}{2}$, калі іх сума роўна $\frac{\pi}{2}$, г. зн. $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, або, што тое ж, $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$.

Лема. Косінус аднаго з двух дапаўняльных да $\frac{\pi}{2}$ аргументаў роўны сінусу другога: $\cos\beta = \sin\alpha$; $\cos\alpha = \sin\beta$.

Доказ. Выкарыстаўшы формулу косінуса рознасці, атрымаем:

$$\cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha$$

і

$$\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\beta + \sin\frac{\pi}{2}\sin\beta.$$

Падставіўшы $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, атрымаем даказваемыя тоеснасці, ш. т. д.

Прыклады. 1) $\cos \frac{\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$;

2) $\cos \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = \sin \frac{2}{3} \pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

§ 17. Тэарэма складання для сінуса

Тэарэма. *Сінус сумы (рознасці) двух аргументаў роўны здабытку сінуса першага аргумента на косінус другога плюс (мінус) здабытак косінуса першага аргумента на сінус другога:*

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta; \quad (\text{III})$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta. \quad (\text{IV})$$

Доказ. Сінус сумы $\alpha + \beta$ роўны косінусу дапаўняльнага аргумента $\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)$; апошні можна прадставіць у выглядзе рознасці аргумента, дапаўняльнага да $\frac{\pi}{2}$ адносна α , і аргумента β , г. зн.

$$\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta.$$

Значыць,

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \cos \left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right] = \cos \left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right] = \\ &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \beta + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \beta = \\ &\quad \text{(па формуле косінуса рознасці)} \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \text{ (па формулах дапаўняльных аргументаў)}. \end{aligned}$$

Замяніўшы ў выведзенай формуле (III) β на $-\beta$, атрымаем формулу для сінуса рознасці:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \sin[\alpha + (-\beta)] = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta) = \\ &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta, \end{aligned} \quad \text{ш. т. д.}$$

Прыклад. Вылічыць $\sin 15^\circ$.

Рашэнне. Маем:

$$\begin{aligned} \sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1) \approx 0,2588. \end{aligned}$$

§ 18. Тэарэма складання для тангенса

Тэарэма. *Пры ўсіх дапушчальных значэннях аргументаў α і β мае месца формула:*

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}}. \quad (V)$$

Растлумачэнне. Дапушчальнымі значэннямі α і β з'яўляюцца ўсе тэя іх значэнні, пры якіх тангенсы дуг α , β і $\alpha + \beta$ маюць сэнс. Значыць, гэтыя дугі не павінны заканчвацца ў канцах вертыкальнага дыяметра і тады для кожнай з трох разглядаемых дуг значэнне косінуса не роўна нулю.

Доказ. Маём:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}.$$

Падзяліўшы пачленна лічнік і назоўнік на $\cos \alpha \cos \beta \neq 0$, атрымаем формулу (V):

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \text{ ш. т. д.}$$

Заменім у формуле (V) β на $-\beta$ і выкарыстаем уласцівасць няцотнасці тангенса, тады атрымаем:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \operatorname{tg}[\alpha + (-\beta)] = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(-\beta)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(-\beta)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Такім чынам:

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}}. \quad (VI)$$

Прыклад. Вылічыць

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right).$$

Рашэнне.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha}.$$

§ 19. Аб формулах складання для некалькіх аргументаў

Шляхам паслядоўнага ўжывання тэарэм складання для выпадку двух аргументаў можна вывесці формулы складання для трыганаметрычных функцый ад сумы трох, чатырох і г. д. аргументаў. Так, для трыганаметрычных функцый ад сумы трох аргументаў атрымаем:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta + \gamma) &= \sin[(\alpha + \beta) + \gamma] = \sin(\alpha + \beta) \cos \gamma + \cos(\alpha + \beta) \sin \gamma = \\ &= (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \cos \gamma + (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \sin \gamma = \\ &= \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma; \end{aligned}$$

і аналогічна

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta + \gamma) &= \cos(\alpha + \beta) \cos \gamma - \sin(\alpha + \beta) \sin \gamma = \\ &= \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma; \end{aligned}$$

і, нарэшце,

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}{\cos(\alpha + \beta + \gamma)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma}.$$

§ 20. Формулы привядзення

Формуламі привядзення называюцца формулы, якія выражаюць трыганаметрычныя функцыі ад аргументай:

$$-\alpha; \frac{\pi}{2} \pm \alpha; \pi \pm \alpha; \frac{3}{2}\pi \pm \alpha; 2\pi \pm \alpha,$$

праз функцыі ад аргумента α , дзе α — адвольнае (дапушчальнае) значэнне аргумента. Усе гэтыя формулы выпісаны ў табліцу, змешчаную на старонцы 33.

Табліцай формул привядзення карыстаюцца наступным чынам.

Няхай, напрыклад, патрабуецца вылічыць $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$. Бяром радок (другі) з паметкай $\frac{\pi}{2} + \alpha$ і слупок (трэці) з паметкай tg ; на іх перасячэнні напісана $-\operatorname{ctg} \alpha$. Адпаведная формула пішацца так: $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg} \alpha$.

Для формул привядзення асобы доказ не патрэбен. Формулы першага радка выражаюць уласцівасці цотнасці і няцотнасці трыганаметрычных функцый (гл. § 12), іншыя ж формулы вынікаюць з тэарэм складання для косінуса і сінуса. Для ўзору выведзем формулы для аргумента $\frac{3}{2}\pi + \alpha$. Прыняўшы пад увагу,

што $\cos \frac{3}{2}\pi = 0$; $\sin \frac{3}{2}\pi = -1$, атрымаем:

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = \cos \frac{3}{2}\pi \cos \alpha - \sin \frac{3}{2}\pi \sin \alpha = -(-1) \sin \alpha = \sin \alpha;$$

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = \sin \frac{3}{2}\pi \cos \alpha + \cos \frac{3}{2}\pi \sin \alpha = -\cos \alpha;$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)}{\cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)} = \frac{-\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha;$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = \frac{\cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)}{\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)} = \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha^*.$$

* Формула тангенса сумы неўжывальная, таму што $\operatorname{tg} \frac{3}{2}\pi$ не існуе.

Аргумент Радыаны (градусы)	Функция	cos	sin	tg	ctg	
1	$-\alpha$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	
2	$\frac{\pi}{2} + \alpha \quad (90^\circ + \alpha)$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	
3	$\frac{\pi}{2} - \alpha \quad (90^\circ - \alpha)$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	
4	$\pi + \alpha \quad (180^\circ + \alpha)$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	
5	$\pi - \alpha \quad (180^\circ - \alpha)$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	
6	$\frac{3}{2}\pi + \alpha \quad (270^\circ + \alpha)$	$\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	
7	$\frac{3}{2}\pi - \alpha \quad (270^\circ - \alpha)$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	
8	$2\pi + \alpha \quad (360^\circ + \alpha)$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	
9	$2\pi - \alpha \quad (360^\circ - \alpha)$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	

У апошнім слупку табліцы дадзена геаметрычнае тлумачэнне формул прывядзення 1—9 для вострага вугла α (роўныя трохвугольнікі заштрыхаваны).

Формулы чацвёртага і восьмага радкоў можна вывесці таксама і геаметрычна. Калі да вугла α дадаць π , г. зн. палавіну поўнага абароту, то рухомы радыус зойме дыяметрыльна процілеглае становішча. Абсцыса x і ардыната y канца рухомага радыуса, г. зн. косінус і сінус вугла, змяняць знакі (не змяняючы абсалютнай велічыні) на процілеглыя:

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha; \quad \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha,$$

а іх адносіны не змяняцца:

$$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha; \quad \operatorname{ctg}(\pi + \alpha) = \frac{-\cos \alpha}{-\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

Калі да вугла α дадаць любы цэлы лік поўных абаротаў, то рухомы радыус зойме ранейшае становішча і каардынаты яго канца не змяняцца. Таму значэнні трыганаметрычных функцый ад аргументаў α і $\alpha + 2k\pi$ пры любым цэлым $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$ роўныя паміж сабой:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + 2k\pi) &= \cos \alpha; & \sin(\alpha + 2k\pi) &= \sin \alpha; \\ \operatorname{tg}(\alpha + 2k\pi) &= \operatorname{tg} \alpha; & \operatorname{ctg}(\alpha + 2k\pi) &= \operatorname{ctg} \alpha. \end{aligned}$$

Пры $k = 1$ атрымаюцца формулы, выпісаныя ў восьмым радку табліцы.

Формулы прывядзення паказваюць, што ў *практычных вылічэннях дастаткова ведаць значэнні трыганаметрычных функцый толькі вострых вуглоў (і нават не большых 45°)*.

На самай справе, няхай β — адвольны вугал. Калі вугал β адмоўны, то (выкарыстаўшы ўласцівасць цотнасці і няцотнасці) можна выразіць значэнні яго трыганаметрычных функцый вугла праз іх значэнні ад дадатнага вугла $-\beta$.

Няхай β — любы дадатны вугал. Калі $\beta > 360^\circ$, то можна выключыць цэлы лік поўных абаротаў і выразіць трыганаметрычныя функцыі вугла β праз трыганаметрычныя функцыі дадатнага вугла, меншага 360° .

Няхай β — любы дадатны вугал, меншы 360° . Разгледзім два вострыя вуглы, якія ўтварае канечная старана вугла β з восямі каардынат. Абазначым праз α які-небудзь з гэтых вуглоў (найменшы з іх не больш 45°). Пры дапамозе адпаведных формул прывядзення можна выразіць трыганаметрычныя функцыі вугла β праз трыганаметрычныя функцыі вугла α .

Прыклад. Вылічыць $\cos(-1000^\circ)$.

$$\begin{aligned} \text{Рашэнне: } \cos(-1000^\circ) &= \cos 1000^\circ = \\ &= \cos(2 \cdot 360^\circ + 280^\circ) = \cos 280^\circ = \\ &= \cos(270^\circ + 10^\circ) = \sin 10^\circ \approx \\ &\approx 0,1736 \end{aligned}$$

(цотнасць косінуса)
(выключэнне поўных абаротаў)
(па формуле прывядзення)
(табліца VIII У. М. Брадзіса).

Пры карыстанні формуламі прывядзення можна кіравацца наступным правілам.

Правіла. Калі вугал α адкладваецца ад гарызантальнага дыяметра (формулы для вуглоў — α , $\pi \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$), то функцыі ў абедзвюх частках роўнасці маюць адно і тое ж найменне; калі вугал α адкладваецца ад вертыкальнага дыяметра (формулы для вуглоў $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3}{2}\pi \pm \alpha$), то функцыі ў абедзвюх частках роўнасці маюць падобныя найменні (сінус і косінус, тангенс і катангенс); каб вызначыць знак, з якім трэба ўзяць трыганаметрычную функцыю ў правай частцы, дастаткова, лічачы вугал α вострым, вызначыць шукаемы знак па знаку левай часткі.

Прыклад. Складзі формулу прывядзення для $\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)$.

Рашэнне. Паколькі вугал α адкладваецца ад вертыкальнага дыяметра, то ў правай частцы неабходна паставіць катангенс. Будучы правільнай пры ўсіх (дапушчальных) значэннях α , формула правільная і для вострага вугла, але калі α востры вугал, то вугал $\frac{3}{2}\pi - \alpha$ заканчваецца ў III чвэрці, у якой тангенс дадатны; значыць, $\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = \operatorname{ctg} \alpha$ (праверыць па табліцы).

§ 21. Формулы падваення аргумента

Формулы падваення аргумента выражаюць трыганаметрычныя функцыі ад двойнога аргумента 2α праз трыганаметрычныя функцыі ад аргумента α .

Паклаўшы ў формулах складання для косінуса $\alpha = \beta$, атрымаем: $\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$.

Такім чынам, **косінус двойнога аргумента роўны рознасці квадратаў косінуса і сінуса дадзенага аргумента:**

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha. \quad (\text{VII})$$

Паклаўшы $\alpha = \beta$ у формулах складання для сінуса, атрымаем: $\sin 2\alpha = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$.

Такім чынам, **сінус двойнога аргумента роўны падвое-
наму здабытку сінуса і косінуса дадзенага аргумента:**

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha. \quad (\text{VIII})$$

Аналагічна выводзіцца формула падваення аргумента для тангенса:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}. \quad (\text{IX})$$

Приклад.

$$\cos 120^\circ = \cos^2 60^\circ - \sin^2 60^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}.$$

Шляхам паслядоўнага ўжывання формул складання можна атрымаць формулы для трыганаметрычных функцый кратнага аргумента, г. зн. 3α , 4α і г. д.

Приклад.

$$\begin{aligned} \cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha = \\ &= (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cos \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \alpha = \cos^3 \alpha - 3 \sin^2 \alpha \cos \alpha. \end{aligned}$$

Замяніўшы $\sin^2 \alpha$ на $1 - \cos^2 \alpha$, атрымаем:

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$$

$$\begin{aligned} \sin 3\alpha &= \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha = \\ &= 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \sin \alpha = 3 \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha. \end{aligned}$$

Замяніўшы $\cos^2 \alpha$ на $1 - \sin^2 \alpha$, атрымаем:

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha.$$

§ 22. Формулы дзялення аргумента папалам

Формулы дзялення аргумента папалам выражаюць трыганаметрычныя функцыі палавіннага аргумента $\frac{\alpha}{2}$ праз трыганаметрычныя функцыі аргумента α .

Заменім у формуле косінуса двайнога аргумента аргумент α палавінным аргументам $\frac{\alpha}{2}$:

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (1)$$

Далучыўшы асноўную тоеснасць

$$1 = \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \quad (2)$$

складзём і адымем пачленна тоеснасці (1) і (2); тады атрымаем:

$$2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha; \quad 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha,$$

адкуль знойдзем:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \quad (X)$$

і

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}. \quad (XI)$$

Падзяліўшы пачленна тоеснасць (XI) на (X), атрымаем:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}. \quad (XII)$$

Знакі перад радыкалами выбіраюцца ў адпаведнасці з тым, у якой чвэрці заканчваецца вугал $\frac{\alpha}{2}$.

Прыклады. 1) Вылічыць

$$\sin \frac{\pi}{8} = \sin 22^\circ,5 \quad \text{і} \quad \cos \frac{\pi}{8} = \cos 22^\circ,5.$$

Рашэнне. Паколькі $\cos \frac{\pi}{4} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то

$$\cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2};$$

$$\sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

Знак перад радыкаламі +, таму што вугал $\frac{\pi}{8}$ востры.

2) Дадзена $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$, дзе $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$; вылічыць $\cos \frac{\alpha}{2}$, $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

Рашэнне. Знаходзім $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$. Паколькі вугал $\frac{\alpha}{2}$

заканчваецца ў другой чвэрці, то $\cos \frac{\alpha}{2} < 0$, $\sin \frac{\alpha}{2} > 0$ і $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} < 0$. Маем:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \left(-\frac{4}{5}\right)}{2}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}; \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)}{2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -3.$$

§ 23. Формулы пераўтварэння здабытку трыганаметрычных функцый у суму

Складзём пачленна тоеснасці:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (\text{II})$$

і

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta; \quad (\text{I})$$

затым пераставім паміж сабой левую і правую часткі атрыманай роўнасці і падзелім іх на 2.

Такім чынам, мы атрымаем наступную формулу пераўтварэння здабытку двух косінусаў у суму:

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}. \quad (\text{XIII})$$

Здабытак двух косінусаў роўны паўсуме косінуса рознасці і косінуса сумы іх аргументаў.

Калі ад тоеснасці (II) адняць пачленна тоеснасць (I), то атрымаем формулу пераўтварэння здабытку сінусаў:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)}{2}. \quad (\text{XIV})$$

Здабытак двух сінусаў роўны паўрознасці косінуса рознасці і косінуса сумы іх аргументаў.

Склаўшы пачленна формулы $\sin (\alpha + \beta)$ і $\sin (\alpha - \beta)$, атрымаем формулу пераўтварэння здабытку сінуса на косінус:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)}{2}. \quad (\text{XV})$$

Здабытак сінуса на косінус роўны паўсуме сінуса сумы і сінуса рознасці іх аргументаў.

Вынік. Калі $\alpha = \beta$, то атрымаюцца формулы:

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha; \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}; \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

Паслядоўным ужываннем выведзеных формул можна пераўтварыць у суму любы здабытак сінусаў і косінусаў і іх ступеней (з цэлымі дадатнымі паказчыкамі).

Прыклады. 1) Пераўтварыць у суму здабытак $\cos 2\alpha \cos 4\alpha$.

$$\text{Р а ш э н н е.} \quad \cos 4\alpha \cos 2\alpha = \frac{\cos 6\alpha + \cos 2\alpha}{2}.$$

2) Пераўтварыць у суму $\sin^4 \alpha \cos^2 \alpha$.

$$\begin{aligned} \text{Р а ш э н н е.} \quad \sin^4 \alpha \cos^2 \alpha &= \sin^2 \alpha (\sin \alpha \cos \alpha)^2 = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \cdot \frac{\sin^2 2\alpha}{4} = \\ &= \frac{1}{8} (1 - \cos 2\alpha) \left(\frac{1 - \cos 4\alpha}{2} \right) = \frac{1}{16} (1 - \cos 2\alpha - \cos 4\alpha + \cos 2\alpha \cos 4\alpha) = \\ &= \frac{1}{16} \left(1 - \cos 2\alpha - \cos 4\alpha + \frac{\cos 6\alpha + \cos 2\alpha}{2} \right) = \frac{1}{16} - \frac{\cos 2\alpha}{32} - \frac{\cos 4\alpha}{16} + \frac{\cos 6\alpha}{32} \end{aligned}$$

§ 24. Формулы пераўтварэння сумы трыганаметрычных функцый у здабытак

Формулы пераўтварэння сумы трыганаметрычных функцый у здабытак дазваляюць прадставіць суму і рознасць дзвюх трыганаметрычных функцый у выглядзе здабытку трыганаметрычных функцый (але ад некаторых іншых аргументаў).

Формула сумы двух косінусаў:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}. \quad (\text{XVI})$$

Сума двух косінусаў роўна падвоенаму здабытку косінуса паўсумы на косінус паўрознасці іх аргументаў.

Для доказу достаткова здабытак, які знаходзіцца ў правай частцы, пераўтварыць у суму:

$$2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \\ = 2 \frac{\cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right)}{2} = \cos \alpha + \cos \beta, \text{ ш.т. д.}$$

Такім жа спосабам даказваюцца наступныя тры формулы:

Формула сумы двух сіносаў:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}. \quad (\text{XVII})$$

Сума двух сіносаў роўна падвоенаму здабытку сіноса паўсумы на косінус паўрознасці іх аргументаў.

Формула рознасці косінусаў:

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}. \quad (\text{XVIII})$$

Рознасць двух косінусаў роўна мінус падвоенаму здабытку сіноса паўсумы на сінус паўрознасці іх аргументаў.

Формула рознасці сіносаў:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}. \quad (\text{XIX})$$

Рознасць двух сіносаў роўна падвоенаму здабытку косінуса паўсумы на сінус паўрознасці іх аргументаў.

Формулы сумы і рознасці тангенсаў:

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} \quad (\text{XX})$$

і

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin (\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}. \quad (\text{XXI})$$

Для вуглоў (дуг) α і β дапушчальнымі з'яўляюцца адвольныя значэнні, адрозныя ад $\frac{\pi}{2} + k\pi$. Пры ўсіх дапушчальных значэннях α і β функцыі $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{tg} \beta$ маюць сэнс і $\cos \alpha \neq 0$, $\cos \beta \neq 0$.

Для доказу виконаємо наступні перетворення:

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}.$$

Тим же способом докажемо тотожність (XXI).

Формули (XVI) — (XXI) називаються таксами формулами прикладення до логарифмічного вигляду, тому що при виведенні з допоміжних логарифмічних таблиць і логарифмічної лінійки зручно вилучати збудовки, але не суми і різниці.

Сума $1 \pm \cos \alpha$ перетворюється у збудовку за формулами (XVI) і (XVIII). Приймаючи до уваги, що $1 = \cos 0$, отримуємо $1 \pm \cos \alpha = \cos 0 \pm \cos \alpha$ і канчаткова

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}; \quad 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Приклади. Перетворимо у збудовку:

$$1) \sin 24^\circ + \sin 22^\circ = 2 \sin 23^\circ \cos 1^\circ;$$

$$\begin{aligned} 2) \sin \alpha + \cos \beta &= \sin \alpha + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) = \\ &= 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha + \beta}{2} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) 1 - \sin \alpha &= \sin \frac{\pi}{2} - \sin \alpha = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) = \\ &= 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \end{aligned}$$

(аргументи $\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ і $\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$ дають другий до $\frac{\pi}{2}$).

§ 25. Перетворення у збудовку виразу $a \sin \alpha + b \cos \alpha$

Допустимо, що ліки a і b не рівні нулю. Побудуємо на площині точку $M(a, b)$ з абсцисою, рівною a , і ординатою, рівною b . Довжина радіус-вектора OM рівна $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Косинус і синус кута φ , утвореного OM з оссю абсцис, рівні:

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Виконаємо наступні перетворення:

$$\begin{aligned} a \sin \alpha + b \cos \alpha &= \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \alpha \right) = \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} (\sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi). \end{aligned}$$

Таким чином:

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \sin (\alpha + \varphi).$$

Кут φ називається допоміжним кутом.

Прыклады.

$$1) \sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \left(\sin \alpha \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos \alpha \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \\ = \sqrt{2} \left(\sin \alpha \cos \frac{\pi}{4} + \cos \alpha \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right);$$

$$2) 2 \sin \alpha - 3 \cos \alpha = \sqrt{13} \left(\frac{2}{\sqrt{13}} \sin \alpha - \frac{3}{\sqrt{13}} \cos \alpha \right) = \sqrt{13} \sin (\alpha - \varphi),$$

дзе:

$$\varphi = \arccos \frac{2}{\sqrt{13}} = \arccos \frac{2\sqrt{13}}{13} \approx \arccos 0,5547 \approx 56^\circ 18'$$

(знаходзім па табліцах).

§ 26. Формулы, якія выражаюць трыганаметрычныя функцыі праз тангенс палавіннага аргумента

Тэарэма. Калі $\alpha \neq (2k+1)\pi$ (дзе k — цэлы лік), то $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ і $\operatorname{tg} \alpha$ выражаюцца рацыянальна* праз $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ па наступных формулах:

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Доказ. Па формулах падваення маем:

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}; \quad \cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2};$$

$$\sin \alpha = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \cos \alpha = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

(назоўнік тоесна роўны 1). Паколькі $\alpha \neq \pi + 2k\pi$, то $\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, значыць, $\cos \frac{\alpha}{2} \neq 0$. Падзяліўшы лічнікі і назоўнікі правых частак апошніх тоеснасцей на $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$, атрымаем дзве першыя тоеснасці. Падзяліўшы адну на другую падзялення гэтых тоеснасцей, атрымаем трэцюю формулу (у гэтай формуле $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$).

* Рацыянальна, г. зн. у выглядзе алгебраічных выразаў, якія не змяшчаюць радыкалы.

Раздзел IV

АСНОЎНЫЯ ЎЛАСЦІВАСЦІ ТРЫГАНАМЕТРЫЧНЫХ ФУНКЦЫЙ

§ 27. Трыганаметрычныя функцыі лікавага аргумента і вобласці іх вызначэння

У папярэдніх раздзелах аргументам трыганаметрычнай функцыі лічылася дуга або вугал, але можна разглядаць гэты аргумент і як лік, а іменна: *лічыць аргументам трыганаметрычнай функцыі не сам вугал (дугу), а лік, які выражае яго велічыню*. Пры гэтым прынята дугі і вуглы вымяраць у радыянах. Так, напрыклад, $\cos 2$ (г. зн. косінус ліку 2) ёсць косінус вугла, які вымяраецца двума радыянамі; $\sin 20$ ёсць сінус вугла, які вымяраецца дваццацю радыянамі.

У гэтым раздзеле мы будзем вывучаць уласцівасці трыганаметрычных функцый лікавага аргумента.

Паняцце функцыі вядома з алгебры. Сцверджанне, што y ёсць функцыя ад аргумента x , азначае наступнае: існуе закон адпаведнасці, па якому ўсякаму значэнню аргумента x адпавядае некаторае пэўнае значэнне функцыі y .

Мноства ўсіх значэнняў аргумента называецца вобласцю вызначэння дадзенай функцыі.

Трыганаметрычныя функцыі маюць наступныя вобласці вызначэння.

1°. Кожная з функцый $\cos \alpha$ і $\sin \alpha$ мае пэўнае значэнне пры адвольным лікавым значэнні аргумента α . На самай справе, на адзінкавай акружнасці ад пачатковага пункта $A(1, 0)$ можна адкласці дугу, якая вымяраецца любым лікам α ; каардынаты яе канца x і y ёсць значэнні функцый $\cos \alpha$ і $\sin \alpha$.

Такім чынам, *вобласцю вызначэння функцый $\cos \alpha$ і $\sin \alpha$ з'яўляецца мноства ўсіх сапраўдных лікаў*.

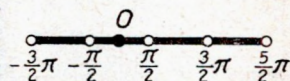
2°. Функцыя $\operatorname{tg} \alpha$ мае пэўнае значэнне для любой дугі, апрача дуг, якія вымяраюцца лікамі $\frac{\pi}{2} + k\pi$ (дзе k — цэлы лік); гэтыя апошнія дугі не маюць тангенса.

Вобласцю вызначэння тангенса з'яўляецца мноства ўсіх сапраўдных лікаў, не роўных $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

Калі з мноства ўсіх сапраўдных лікаў выключыць лікі віды $\frac{\pi}{2} + k\pi$, то застанецца бясконцае мноства інтэрвалаў*:

$\dots, \left(-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right), \dots$ (чарц. 41).

3°. *Вобласцю вызначэння функцыі $\operatorname{ctg} \alpha$ служыць мноства ўсіх сапраўдных лікаў, не роўных $k\pi$, г. зн. бясконцае мноства інтэрвалаў: $\dots, (-\pi, 0), (0, \pi), (\pi, 2\pi), \dots$ (дугі, якія вымяраюцца лікамі $k\pi$, не маюць катангенса).*



Чарц. 41.

§ 28. Уласцівасць абмежаванасці і неабмежаванасці трыганаметрычных функцый

Функцыя называецца абмежаванай (у вобласці яе вызначэння), калі існуе такі дадатны лік M , што значэнні функцыі па абсалютнай велічыні не больш ліку M пры ўсіх значэннях аргумента. Калі функцыя можа прымаць якія хочаце вялікія значэнні па абсалютнай велічыні, то яна называецца неабмежаванай.

Абмежаванасць і неабмежаванасць трыганаметрычных функцый вынікае з іх уласцівасцей, устаноўленых у § 13, а іменна: *функцыі $\cos \alpha$ і $\sin \alpha$ абмежаваныя, таму што кожная з іх можа прымаць любое сапраўднае значэнне.*

$$|\cos \alpha| \leq 1, \quad |\sin \alpha| \leq 1.$$

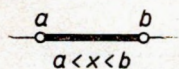
Функцыі $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$ неабмежаваныя, таму што кожная з іх можа прымаць любое сапраўднае значэнне.

§ 29. Інтэрвалы знакапастаянства

Калі пры ўсіх значэннях аргумента, што належаць некатораму лікаваму прамежку, значэнні функцыі аднолькавыя па знаку (дадатныя або адмоўныя), то гэты прамежак называецца прамежкам знакапастаянства дадзенай функцыі.

На аснове сказанага ў § 9 маем:

1°. У інтэрвалах $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ (дзе k — любы цэлы лік) функцыя $\cos \alpha$ дадатная. На самай справе, калі $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \alpha < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, то вугал, які вымяраецца лікам α , заканч-



Чарц. 42.

* Напамінаем азначэнне інтэрвалу. Няхай a і b — два сапраўдных лікі і $a < b$. Інтэрвалам ад a да b называецца мноства ўсіх сапраўдных лікаў x , заключаных паміж a і b , г. зн. $a < x < b$. На лікавай прамой (чарц. 42) інтэрвал паказваецца адрэзкам, абмежаваным пунктамі a і b , прычым самі гэтыя пункты да інтэрвалу не прылічваюцца. Інтэрвал ад a да b абазначаецца так: (a, b) .

ваецца ў правай паўплоскасці, а таму $\cos \alpha > 0$. У інтэрвалах $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right)$ (левая паўакружнасць) косінус адмоўны.

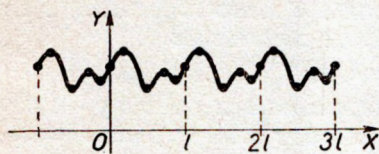
2°. У інтэрвалах $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ (верхняя паўакружнасць) функцыя $\sin \alpha$ дадатная, а ў інтэрвалах $(-\pi + 2k\pi, 2k\pi)$ (ніжняя паўакружнасць) адмоўная.

3°. У інтэрвалах $\left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ (пры k цотным — I чвэрць, а пры k няцотным — III чвэрць) функцыі $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$ дадатныя, а ў інтэрвалах $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi\right)$ (пры k цотным — IV чвэрць, а пры k няцотным — II чвэрць) адмоўныя.

§ 30. Уласцівасць перыядычнасці трыганаметрычных функцый

Функцыя называецца перыядычнай, калі існуе такі лік $l \neq 0$, называемы перыядам, што значэнне функцыі не змяняецца пры дадаванні (або адніманні) гэтага ліку да любога значэння яе аргумента.

На чарцяжы 43 паказан графік перыядычнай функцыі, ён складаецца з бясконцага мноства «паўтараючыхся» дуг.



Чарц. 43.

Перыядычныя функцыі маюць вялікае значэнне ў фізіцы, механіцы і тэхніцы пры вывучэнні розных перыядычных працэсаў (ваганні, рухі механізмаў, сіла пераменнага электрычнага току і да т. п.).

Тэарэма 1°. Трыганаметрычныя функцыі з'яўляюцца перыядычнымі з агульным перыядам 2π .

2°. Найменшы дадатны перыяд функцый $\cos \alpha$ і $\sin \alpha$ роўны 2π .

3°. Найменшы дадатны перыяд функцый $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$ роўны π .

Доказ. Значэнні любой трыганаметрычнай функцыі ад аргументаў α і $\alpha + 2k\pi$ (дзе k — любы цэлы лік) аднолькавыя (гл. стар. 34):

$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha, \quad \sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha \text{ і г. д.,}$$

значыць кожны з лікаў $\pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi$ і г. д. з'яўляецца агульным перыядам усіх чатырох трыганаметрычных функцый. У прыватнасці, 2π ёсць іх агульны перыяд.

Для функцыі $\cos \alpha$ лік 2π ёсць найменшы дадатны перыяд. Дапусцім адваротнае, што дадатны лік l , меншы за 2π , ёсць перыяд косінуса; тады роўнасць $\cos(\alpha + l) = \cos \alpha$ мае месца пры ўсіх значэннях аргумента α . Паклаўшы ў гэтай тоеснасці $\alpha = 0$, атрымаем $\cos l = 1$, што немагчыма, таму што дадатная

дуга, якая вымяраецца лікам l , меншым за 2π , не заканчваецца ў пункце $A(1, 0)$, а таму яе косінус не роўны 1.

Аналагічна даказваецца, што 2π ёсць найменшы дадатны перыяд сінуса: калі выконваецца тоеснасць $\sin(\alpha + l) = \sin \alpha$, то пры $\alpha = \frac{\pi}{2}$ атрымаем $\sin\left(\frac{\pi}{2} + l\right) = \cos l = 1$, але пры $0 < l < 2\pi$ апошняя роўнасць немагчыма.

Функцыя $\operatorname{tg} \alpha$ мае перыяд π , таму што пры любым значэнні аргумента α :

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg} \alpha, \text{ дзе } \alpha \neq (2k + 1) \frac{\pi}{2}.$$

Лік π ёсць найменшы дадатны перыяд тангенса. На самай справе, калі б дадатны лік l , меншы за π , быў перыядам тангенса, то, паклаўшы $\alpha = 0$ у тоеснасці $\operatorname{tg}(\alpha + l) = \operatorname{tg} \alpha$, мы атрымалі б $\operatorname{tg} l = 0$, што пры $0 < l < \pi$ не мае месца.

Аналагічна даказваецца, што лік π ёсць найменшы дадатны перыяд катангенса.

Найменшы дадатны перыяд функцыі коротка называюць яе перыядам. Таму гавораць, **што 2π ёсць перыяд косінуса і сінуса, а π ёсць перыяд тангенса і катангенса.**

Уласцівасць перыядычнасці спрашчае даследаванне трыганаметрычных функцый, таму што для вывучэння ўласцівасцей перыядычнай функцыі дастаткова вывучыць яе ўласцівасці ў якім-небудзь прамежку, роўным па даўжыні яе перыяду.

§ 31. Прамежкі манатоннасці трыганаметрычных функцый

Функцыя называецца ўзрастаючай у некаторым лікавым прамежку, калі пры любых двух розных значэннях аргумента з гэтага прамежку большаму значэнню аргумента адпавядае большае значэнне функцыі.

Функцыя называецца ўбываючай у некаторым прамежку, калі пры любых двух розных значэннях аргумента з гэтага прамежку большаму значэнню аргумента адпавядае меншае значэнне функцыі.

Функцыі ўзрастаючыя і ўбываючыя адносяцца да класа манатонных функцый.

Знойдзем прамежкі ўзрастання і ўбывання для кожнай трыганаметрычнай функцыі паасобку.

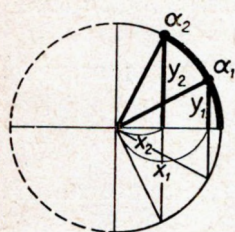
Функцыя $\cos \alpha$. Калі значэнні аргумента α_1 і α_2 належаць першай чвэрці і $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq \frac{\pi}{2}$, то $x_1 = \cos \alpha_1$ і $x_2 = \cos \alpha_2$ ёсць адлегласці ад цэнтра адзінкавага круга да хорд, якія сцягваюць дугі, роўныя па даўжыні $2\alpha_1$ і $2\alpha_2$ (чарц. 44).

З дзвюх хорд, якія сцягваюць дзве дугі (не большыя паўакружнасці), хорда, якая сцягвае большую дугу, размешчана бліжэй да цэнтра; таму пры $\alpha_1 < \alpha_2$ маем $x_1 > x_2$.

Такім чынам: $\cos \alpha_1 > \cos \alpha_2$, калі $\alpha_1 < \alpha_2$, г. зн. большаму

значенню аргумента γ I чвэрці адпавядае меншае значэнне косінуса. *Значыць, у I чвэрці функцыя $\cos \alpha$ убывае.*

Найбольшае і найменшае значэнні косінус мае γ гранічных пунктах I чвэрці: 1 пры $\alpha = 0$ і 0 пры $\alpha = \frac{\pi}{2}$.



Чарц. 44.

г. зн. у другой чвэрці функцыя $\cos \alpha$ убывае.

Найбольшае і найменшае значэнні косінус прымае γ гранічных пунктах II чвэрці: 0 пры $\alpha = \frac{\pi}{2}$ і -1 пры $\alpha = \pi$.

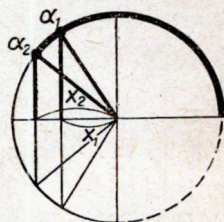
Будучы ўбываючай у I і II чвэрцях, функцыя $\cos \alpha$ убывае γ верхняй паўакружнасці; найбольшае і найменшае значэнні $\cos 0 = 1$ і $\cos \pi = -1$ яна прымае γ гранічных пунктах верхняй паўакружнасці. Усякае значэнне m , заключанае паміж -1 і 1 , функцыя $\cos \alpha$ прымае пры галоўным значэнні аргумента $\alpha = \arccos m$.

Лікаваму сегменту* $0 \leq \alpha \leq \pi$ адпавядае верхняя паўакружнасць (уключаючы гранічныя пункты).

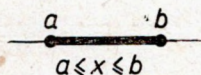
Устаноўлены ўласцівасці функцыі $\cos \alpha$ фармулююць так: **на сегменце $[0, \pi]$ функцыя $\cos \alpha$ убывае ад 1 да -1 .**

Разгледзеўшы функцыю $\cos \alpha$ у ніжняй паўакружнасці, можна паказаць, што на **сегменце $-\pi \leq \alpha \leq 0$ (ніжняй паўакружнасць) функцыя $\cos \alpha$ узраслае ад -1 да 1.**

Будучы перыядычнай з перыядам 2π , функцыя $\cos \alpha$ убывае ад 1 да -1 на ўсякім сегменце $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ (верхняя паўакружнасць) і ўзраслае ад -1 да 1 на ўсякім сегменце $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ (ніжняй паўакружнасць).



Чарц. 45.



Чарц. 46.

* Няхай a і b — два сапраўдныя лікі і $a < b$ (чарц. 46); лікавым сегментам ад a да b (не змешваць з кругавым сегментам) называецца мноства, якое складаецца з усіх сапраўдных лікаў, заключаных паміж a і b , і саміх лікаў a і b , г. зн. мноства ўсіх сапраўдных лікаў x , задавальняючых няроўнасцям $a \leq x \leq b$. На лікавай прамой сегмент паказваецца

адрэзкам, абмежаваным пунктамі a і b , прычым самі гэтыя пункты прылічваюцца да сегмента. Сегмент ад a да b абазначаецца так: $[a, b]$.

Калі пункт M рухаецца ў дадатным напрамку па адзінкавай акружнасці, то яго праекцыя на вось абсцыс рухаецца ўздоўж гарызантальнага дыяметра (чарц. 47). Калі пункт M апісвае верхнюю паўакружнасць, то яго праекцыя апісвае гарызантальны дыяметр справа налева, а яго абсцыса, г. зн. косінус дугі $\alpha = AM$, убывае ад 1 да -1 . Калі пункт M апісвае ніжнюю паўакружнасць, то яго праекцыя на вось абсцыс апісвае гарызантальны дыяметр злева направа; пры гэтым абсцыса пункта M узрастае ад -1 да 1.

Калі пункт M рухаецца раўнамерна па акружнасці, то яго праекцыя на правую робіць перыядычны рух, які называецца ў фізіцы гарманічным ваганнем. Гарманічнае ваганне разглядаецца як найпрасцейшы від перыядычнага руху.

Функцыя $\sin \alpha$. Калі значэнні аргумента α_1 і α_2 належаць першай чвэрці і

$0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq \frac{\pi}{2}$, то (чарц. 44) большую дугу сцягвае большая хорда, а таму $2y_1 < 2y_2$ і $y_1 < y_2$. Паколькі $y_1 = \sin \alpha_1$, $y_2 = \sin \alpha_2$, то $\sin \alpha_1 < \sin \alpha_2$, калі $\alpha_1 < \alpha_2$.

Такім чынам, у I чвэрці большаму значэнню аргумента адпавядае большае значэнне сіноса.

У першай чвэрці функцыя $\sin \alpha$ узрастае ад 0 да 1.

Разгледзеўшы функцыю $\sin \alpha$ у IV чвэрці, дакажам, што ў гэтай чвэрці яна ўзрастае ад -1 да 0.

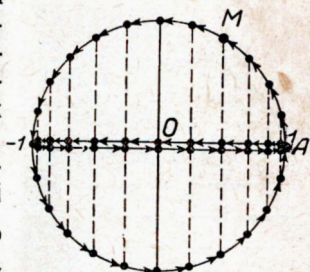
I і IV чвэрці ў сукупнасці складаюць правую паўакружнасць.

На сегменце $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ (правая паўакружнасць) функцыя $\sin \alpha$ узрастае ад -1 да 1.

З разгляду функцыі $\sin \alpha$ у левай паўакружнасці вынікае, што **на сегменце $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$ функцыя $\sin \alpha$ убывае ад 1 да -1 .**

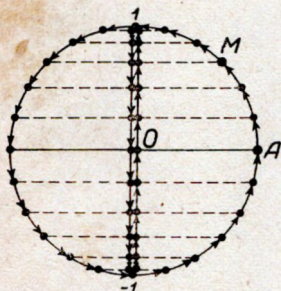
Будучы перыядычнай з перыядам 2π , функцыя $\sin \alpha$ узрастае ад -1 да 1 на ўсякім сегменце $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ (правая паўакружнасць) і ўбывае ад 1 да -1 на ўсякім сегменце $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right]$ (левая паўакружнасць).

Пры руху пункта M у дадатным напрамку па правай паўакружнасці яго праекцыя на вось ардынаты апісвае вертыкальны дыяметр знізу ўверх, а ардыната пункта M , г. зн. сінус дугі AM , узрастае ад -1 да 1. Пры руху пункта па левай паўакружнасці яго праекцыя апісвае вертыкальны дыяметр зверху ўніз, а ардыната ўбывае ад 1 да -1 (чарц. 48).

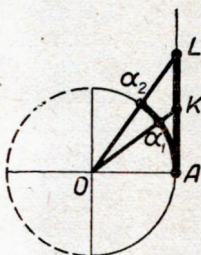


Чарц. 47.

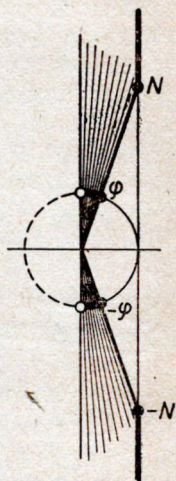
Функцыя $\operatorname{tg} \alpha$. Калі значэнні аргумента α_1 і α_2 належаць першай чвэрці і $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \frac{\pi}{2}$, то, пабудавашы на восі тангенсаў адпаведныя пункты, атрымаем трохвугольнікі OAK і OAL (чарц. 49) з вугламі α_1 і α_2 пры вяршыні O . Паколькі $\alpha_2 > \alpha_1$, то прамая OL размяшчаецца па-за трохвугольнікам OAK і перасякае ў пункце L прадаўжэнне стараны AK . Таму $AK < AL$, г. зн. $\operatorname{tg} \alpha_1 < \operatorname{tg} \alpha_2$. Значыць, функцыя $\operatorname{tg} \alpha$ у першай чвэрці ўзрастае.



Чарц. 48.



Чарц. 49.



Чарц. 50.

Няхай N — адвольны зададзены (які хочаце вялікі) дадатны лік. Пабудуем на восі тангенсаў пункт $(1, N)$ (чарц. 50) і адпаведную дугу $\varphi = \arctg N$ адзінкавай акружнасці. Калі дуга, якая вымяраецца лікам α , заканчваецца паміж пунктамі φ і $\frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg} \alpha > N$.

Такім чынам, пры любым зададзеным дадатным ліку N і пры ўсіх значэннях аргумента α , дастаткова блізкіх да $\frac{\pi}{2}$, але меншых, чым $\frac{\pi}{2}$ (α іменна $\arctg N < \alpha < \frac{\pi}{2}$), значэнні тангенса большыя, чым N . Гэта ўласцівасць тангенса запісваецца так:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} \alpha = +\infty \left(\text{пры } \alpha < \frac{\pi}{2} \right)^*$$

Разгледзеўшы функцыю $\operatorname{tg} \alpha$ у IV чвэрці, можна даказаць, што, па-першае, у інтэрвале $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ яна ўзрастае, будучы адмоўнай, і, па-другое, што пры любым зададзеным ліку $N > 0$ яе значэнні меншыя, чым $-N$:

$$\operatorname{tg} \alpha < -N, \text{ калі } -\frac{\pi}{2} < \alpha < -\arctg N.$$

* Чытаць так: $\operatorname{tg} \alpha$ імкнецца да плюс бесканечнасці калі α імкнецца да $\frac{\pi}{2}$, будучы меншым, чым $\frac{\pi}{2}$.

Апошняя ўласцівасць тангенса запісваецца так:

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} \alpha = -\infty \quad (\text{пры } \alpha > -\frac{\pi}{2}).$$

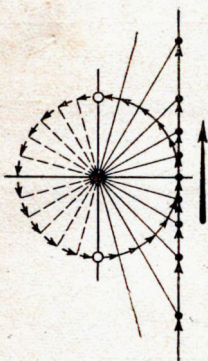
У інтэрвале $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (правая паўакружнасць) функцыя $\operatorname{tg} \alpha$ узрастае і прымае адвольнае сапраўднае значэнне m пры $\alpha = \operatorname{arctg} m$.

Прынята гаварыць, што ў інтэрвале $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ **функцыя $\operatorname{tg} \alpha$ узрастае ад $-\infty$ (мінус бесканечнасці) да $+\infty$ (плюс бесканечнасці).**

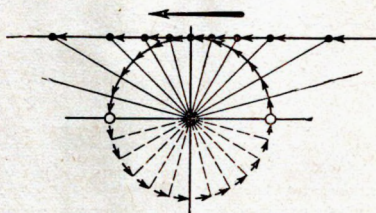
Будучы перыядычнай з перыядам π , функцыя $\operatorname{tg} \alpha$ узрастае ад $-\infty$ да $+\infty$ у кожным інтэрвале $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, з якіх складаецца яе вобласць вызначэння.

Пры руху пункта ў дадатным напрамку (чарц. 51) як па правай, так і па левай паўакружнасці яе цэнтральная праекцыя з пачатку каардынат на вось тангенсаў рухаецца знізу ўверх, а ардыната праекцыі ўзрастае ад $-\infty$ да $+\infty$.

Функцыя $\operatorname{ctg} \alpha$ у кожным з інтэрвалаў $[k\pi, (k+1)\pi]$, з якіх складаецца вобласць яе вызначэння, убывае ад $+\infty$ да $-\infty$ (чарц. 52).



Чарц. 51.



Чарц. 52.

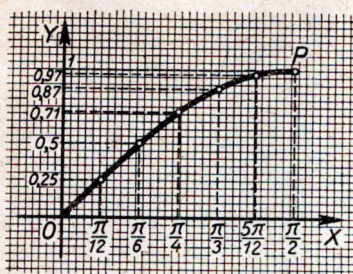
Даследаваць катангенс можна тым жа спосабам, якім быў даследаван тангенс.

§ 32. Графікі трыганаметрычных функцый

Пабудаванне графікаў функцый вядома з алгебры.

Ніжэй даецца пабудаванне графікаў трыганаметрычных функцый.

Пры пабудаванні графіка значэнне аргумента паказваецца пунктамі восі абсцыс (а не адзінкавай акружнасці); таму аргумент трыганаметрычнай функцыі будзем абазначаць літарай x (замест α).



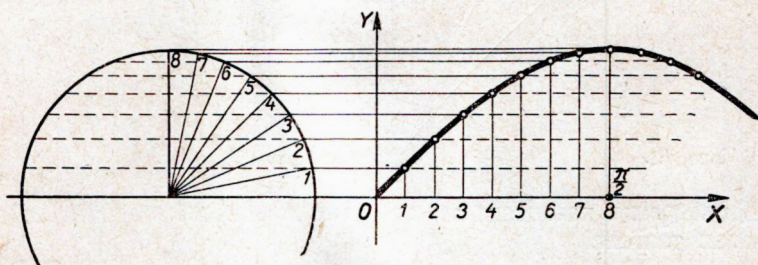
Чарц. 53.

цу значэнняў сінуса (чарц. 53):

x	0	$\frac{\pi}{12} \approx 0,26$ (15°)	$\frac{\pi}{6} \approx 0,52$ (30°)	$\frac{\pi}{4} \approx 0,78$ (45°)	$\frac{\pi}{3} \approx 1,05$ (60°)	$\frac{5\pi}{12} \approx 1,31$ (75°)	$\frac{\pi}{2} \approx 1,57$ (90°)
$y = \sin x$	0	0,26	0,50	0,71	0,87	0,97	1

Значэнні сінуса ўзяты з табліц У. М. Брадзіса (акругліць, захаваўшы два дзесятковыя знакі).

Пабудавань сінусоіду з любой ступенню дакладнасці можна і геаметрычна. Першая чвэрць (чарц. 54) адзінкавай акружнасці і адрэзак восі абсцыс $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \approx 1,57$, роўны па даўжыні чвэрці акружнасці, падзелены на аднолькавую колькасць роўных частак



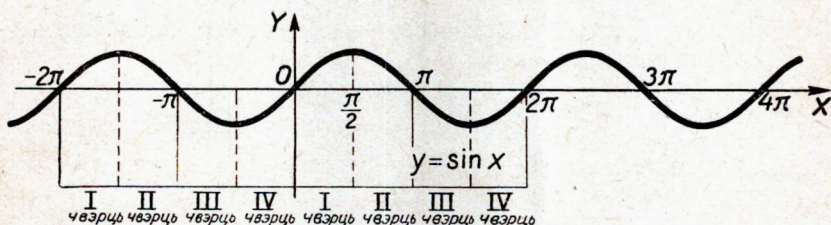
Чарц. 54.

(на чарцяжы 54 на 8 частак)*. Перпендыкуляры, апущаныя з пунктаў дзялення акружнасці на вось OX (па даўжыні роўны значэнням сінуса), перанесены і ўзведзены з адпаведных пунктаў адрэзка $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ восі абсцыс. Канцы гэтых перпендыкуляраў

* Каб не загрузваць чарцёж, адзінкавая акружнасць перанесена ўлева і яе цэнтр не знаходзіцца ў пачатку каардынат.

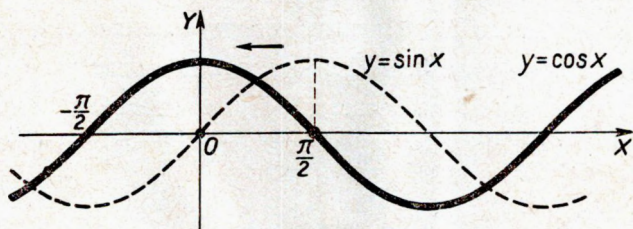
належаць сінусоідзе; для практычнага пабудавання сінусоіды іх трэба злучыць плаўнай лініяй пры дапамозе лякала.

У другой чвэрці $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ сінус убывае ад 1 да 0. З геаметрычнага пабудавання відаць, што графік сінуса ў другой чвэрці сіметрычны яго графіку ў першай чвэрці адносна паралелі восі ардынаты, якая праходзіць праз пункт $(\frac{\pi}{2}, 0)$.



Чарц. 55.

З уласцівасці няцотнасці сінуса вынікае, што пункты сінусоіды $x, y = \sin x$ і $-x, -y = \sin(-x)$, якія адпавядаюць узаемна процілеглым значэнням аргумента, сіметрычны адносна пачатку каардынат. Значыць, *сінусоіда ёсць лінія, сіметрычная адносна пачатку каардынат*. Таму, пабудоваўшы графік сінуса на сегменце $[0, \pi]$, можна пабудаваць яго і на сегменце $[-\pi, 0]$. Сегмент $-\pi \leq x \leq \pi$



Чарц. 56.

роўны па даўжыні перыяду сінуса; таму для пабудавання ўсёй сінусоіды дастаткова яе частку, пабудаваную для гэтага сегмента, паслядоўна перанесці ўправа і ўлева на адлегласці $2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$. Такім чынам, атрымліваецца хвалеподобная лінія (чарц. 55), якая складаецца з аднолькавых, перыядычна паўтараючыхся дуг.

Графікам функцыі $y = \cos x$ таксама служыць сінусоіда. На самай справе, з формулы прывядзення $y = \cos x = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$ вынікае, што ардыната графіка косінуса ў пункце з абсцысай x роўна ардынаце звычайнай сінусоіды ў пункце з абсцысай $x + \frac{\pi}{2}$.

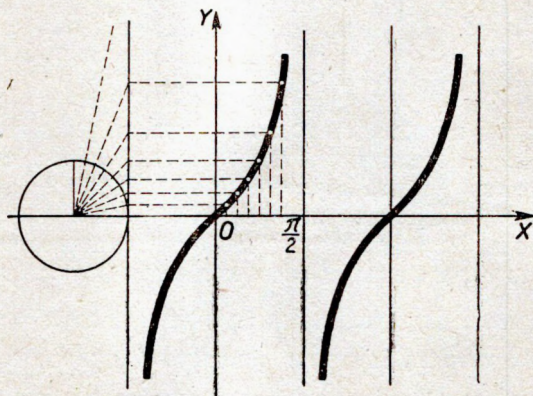
Так, у прыватнасці, пры $x = 0$ ардыната графіка роўна $\cos 0 = \sin \frac{\pi}{2} = 1$; пры $x = \frac{\pi}{4}$ ардыната роўна $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{3}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2}$; пры $x = \frac{\pi}{2}$ ардыната роўна $\sin \pi = 0$. Увесь графік (чарц. 56) можа быць атрыман паралельным пераносам сінусоіды (на чарцяжы 56 паказана пункцірам) у напрамку восі абсцыс улева на адлегласць $\frac{\pi}{2}$, што адпавядае дадаванню да аргумента x складаемага $\frac{\pi}{2}$.

Уласцівасць цотнасці $\cos x = \cos(-x)$ паказвае, што *лінія сіметрычная адносна восі OY*.

Тангенсоіда — так называецца графік функцыі $y = \operatorname{tg} x$. У прамежку $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ функцыя $y = \operatorname{tg} x$ узростае ад 0 да ∞ . Для пабудавання пунктаў графіка можна скласці, напрыклад, такую табліцу значэнняў тангенса (гл. табліцы Брадзіса):

x	0	$\frac{\pi}{12}$ (15°)	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{5\pi}{12}$ (75°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)
y	0	0,27	0,58	1,00	1,73	3,73	—

Геаметрычнае пабудаванне тангенсоіды ў прамежку $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ паказана на чарцяжы 57. Першая чвэрць адзінкавай акружнасці і адрэзак восі абсцыс ад 0 да $\frac{\pi}{2}$ падзелены на некаторы лік роўных частак (на чарцяжы 57 на 8 частак). Пункты дзялення акружнасці праектуюцца з цэнтра круга на вось тангенсаў, а затым адрэзкі



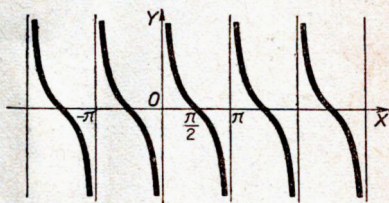
Чарц. 57.

восі тангенсаў пераносяцца ў выглядзе перпендыкуляраў, узведзеных з адпаведных пунктаў восі абсцыс. Канцы гэтых перпендыкуляраў трэба злучыць плаўнай лініяй.

З уласцівасці няцотнасці функцыі $\operatorname{tg} x$ вынікае, што яе *графік сіметрычны адносна пачатку каардынат*. Таму, пабудоваўшы графік у прамежку $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$, можна прадоўжыць яго па сіметрыі і на прамежак $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ (IV чвэрць).

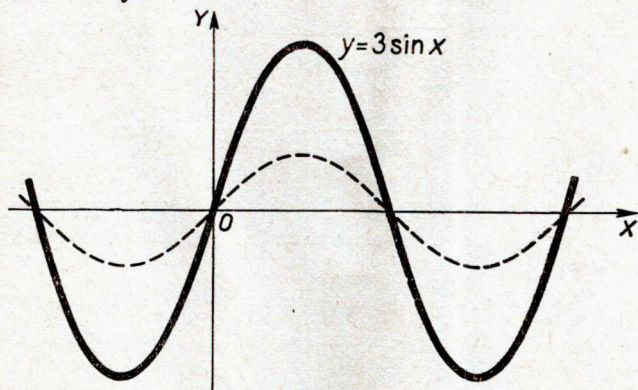
Інтэрвал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ складае перыяд тангенса; таму для пабудавання ўсёй тангенсоіды дастаткова атрыманую галіну паслядоўна перанесці ўправа і ўлева на адлегласці $\pi, 2\pi, 3\pi, \dots$. Такім чынам, атрымаецца лінія, якая складаецца з бясконцага мноства аднолькавых, перыядычна паўтараючыхся галін.

Графік функцыі $y = \operatorname{ctg} x$ паказан на чарцяжы 58. Для яго пабудавання неабходна прыняць пад увагу, што ў інтэрвале $0 < x < \pi$ функцыя $\operatorname{ctg} x$ убывае ад $+\infty$ да $-\infty$. Для пабудавання асобных пунктаў трэба скласці табліцу значэнняў.



$$y = \operatorname{ctg} x$$

Чарц. 58.



Чарц. 59.

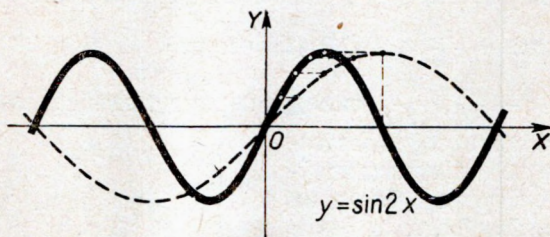
Прыклады пабудавання графікаў функцый.

1) Пабудоваць графік функцыі $y = 3 \sin x$.

Рашэнне. Дастаткова заўважыць, што пры дадзеным значэнні x ардыната графіка $y = 3 \sin x$ роўна патроенай ардынаце звычайнай сінусоіды. Значыць, графік — дэфармаваная сінусоіда — можа быць атрыман расцяжэннем усіх ардынат звычайнай сінусоіды ў тры разы (чарц. 59, пункцірам намечана звычайная сінусоіда). Функцыя $y = 3 \sin x$ мае тыя ж прамежкі знакапастаянства і той жа перыяд 2π , як і функцыя $y = \sin x$. Найбольшае і найменшае яе значэнні ёсць ± 3 .

2) Побудавать графік функції $y = \sin 2x$.

Р а ш е н н е. Дастаткова зауважись, што при дадзеным значэнні x значэнне функцы $\sin 2x$ роўна ардынаце звычайнай сінусоіды ў пункце з па-
двоенай абсцысай $2x$. Так, у прыватнасці, пры $x = \frac{\pi}{6}$ маем $y = \sin \frac{2\pi}{6} =$



Чарц. 60.

$= \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; пры $x = \frac{\pi}{4}$ маем $y = \sin \frac{\pi}{2} = 1$. Значыць, шукаемы графік — дэфармаваная сінусоіда — можа быць атрыман са звычайнай сінусоіды шляхам яе сціскання ў напрамку восі абсцыс у два разы (чарц. 60).

Функцыя $\sin 2x$ перыядычная з перыядам π , таму што яе значэнне не змяняецца ад дадання ліку π да яе аргумента:

$$\sin 2(x + \pi) = \sin (2x + 2\pi) = \sin 2x.$$

3) Побудавать графік функцыі $y = \sec x$.

Р а ш е н н е. Маем $y = \frac{1}{\cos x}$. Вобласць вызначэння знаходзіцца з умовы $\cos x \neq 0$, адкуль $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Функцыя цотная, таму што $\frac{1}{\cos(-x)} = \frac{1}{\cos x}$; значыць, графік сіметрычны адносна восі OY .

Функцыя перыядычная з перыядам 2π , таму што $\frac{1}{\cos(x + 2\pi)} = \frac{1}{\cos x}$.

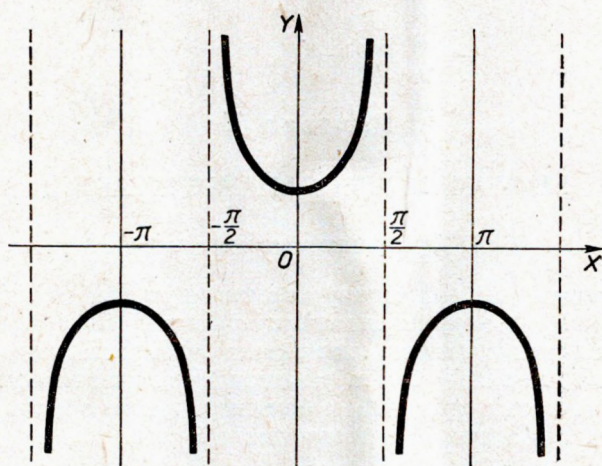
Значэнні $\sec x$ і $\cos x$ аднолькавыя па знаку: або абодва дадатныя, або абодва адмоўныя.

У I чвэрці $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ функцыя $\cos x$ убывае ад 1 да 0, а $y = \frac{1}{\cos x}$ узрастае ад 1 да $+\infty$. Для пабудавання пунктаў графіка (чарц. 61) складзём табліцу значэнняў функцыі:

$\frac{\pi}{20}$	$\frac{2\pi}{20}$	$\frac{3\pi}{20}$	$\frac{4\pi}{20}$	$\frac{5\pi}{20}$	$\frac{6\pi}{20}$	$\frac{7\pi}{20}$	$\frac{8\pi}{20}$	$\frac{9\pi}{20}$	$\frac{\pi}{2}$
(9°)	(18°)	(27°)	(36°)	(45°)	(54°)	(63°)	(72°)	(81°)	(90°)
1,01	1,05	1,12	1,24	1,41	1,70	2,20	3,24	6,41	—

Гэтая табліца складзена так: значэнні косінуса (з акругленнем да трэцяга знака) узяты з табліцы VII Брадзіса, адваротныя велічыні ўзяты з табліцы XVII, і рэзультат акруглен да другога знака. Напрыклад,

$$\sec \frac{\pi}{20} = \frac{1}{\cos 9^\circ} \approx \frac{1}{0,988} \approx 1,01.$$

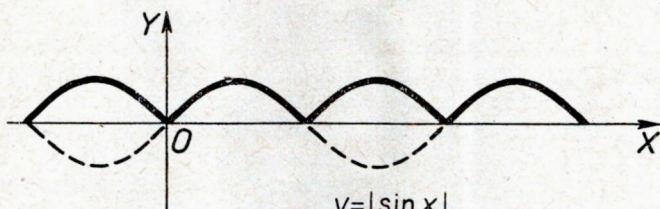


$$y = \sec x$$

Чарц. 61.

Для пабудавання графіка секанса ў прамежку $-\frac{\pi}{2} < x \leq 0$ дастаткова графік, пабудаваны ў I чвэрці, прадоўжыць сіметрычна адносна восі OY .

У інтэрвале $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$ маем $y < 0$; пры гэтым у прамежку $\frac{\pi}{2} < x < \pi$



$$y = |\sin x|$$

Чарц. 62.

функцыя y узростае ад $-\infty$ да -1 , а ў прамежку $\pi \leq x < \frac{3}{2}\pi$ убывае ад -1 да $-\infty$.

4) На чарцяжы 62 паказан графік функцыі $y = |\sin x|$. Ён можа быць атрыман са звычайнай сінусоіды. У прамежках, у якіх $\sin x \geq 0$, маем $y = \sin x$. У прамежках, у якіх $\sin x < 0$, маем $y = -\sin x$; таму трэба ўзяць ардынаты сінусоіды з адваротным знакам.

Раздзел V

ВЫЛІЧЭННІ ПРЫ ДАПАМОЗЕ ТАБЛІЦ

§ 33. Трыганаметрычныя табліцы

Для практычных вылічэнняў карыстаюцца табліцамі набліжаных значэнняў трыганаметрычных функцый і іх лагарыфмаў. У школьных вылічэннях ужываюцца чатырохзначныя табліцы У. М. Брадзіса. У больш дакладных вылічэннях ужываюцца табліцы значэнняў функцый з большым лікам значачых лічбаў (напрыклад, пяцізначныя, сямізначныя табліцы).

Натуральныя табліцы. Табліцы, у якіх даюцца значэнні трыганаметрычных функцый, называюцца натуральнымі трыганаметрычнымі табліцамі. У табліцы VIII (гл. табліцы Брадзіса) дадзены набліжаныя значэнні з чатырма дзесятковымі знакамі сіносаў і косіносаў вуглоў ад 0 да 90° праз кожныя $6'$. Формулы дапаўняльных аргументаў:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha; \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

паказваюць, што для вылічэння значэнняў сіноса і косіноса могуць служыць адны і тыя ж табліцы. Так, напрыклад, $\sin 26^\circ$ і $\cos 64^\circ$ маюць адно і тое ж значэнне. У табліцах У. М. Брадзіса значэнні аргумента сіноса размешчаны ў парадку ўзрастання зверху ўніз, а значэнні аргумента косіноса знізу ўверх. Набліжанае значэнне сіноса або косіноса вугла, які змяшчае цэлы лік градусаў, дадзена ў табліцы. Так, напрыклад, значэнне $\sin 33^\circ \approx 0,5446$ змешчана побач з паметкай 33° у крайнім левым слупку «А». Значэнне $\cos 33^\circ \approx 0,8387$ змешчана побач з паметкай 33° у крайнім правым слупку «А».

Каб знайсці $\sin 33^\circ 12'$, адшукваем у левым слупку «А» паметку 33° , а ў самым верхнім радку — паметку $12'$. Значэнне $\sin 33^\circ 12' \approx 0,5476$ знаходзіцца на перасячэнні адпаведных радка і слупка. Значэнне $\cos 33^\circ 12' \approx 0,8368$ знаходзіцца таксама, з той толькі розніцай, што паметку 33° неабходна шукаць у крайнім правым слупку «А», а паметку $12'$ у самым ніжнім радку.

Няхай трэба знайсці $\sin 33^\circ 14'$. З табліц знаходзім $\sin 33^\circ 12' \approx 0,5476$. Паколькі функцыя $\sin \alpha$ у прамежку ад 0 да 90° узрастае,

то $\sin 33^\circ 14' > \sin 33^\circ 12'$. Значыць, да значэння $\sin 33^\circ 12'$ трэба дадаць папраўку на $2'$, якая змешчана ў табліцы паправак справа ад асноўнай табліцы. У радку 33° і ў слупку паправак з паметкай $2'$ знаходзіцца лік 5, які неабходна дадаць да чацвёртага дзесятковага знака $\sin 33^\circ 12'$. Такім чынам, $\sin 33^\circ 14' \approx 0,5481$. Калі трэба знайсці $\sin 33^\circ 17'$, то з табліц знаходзім $\sin 33^\circ 18' \approx 0,5490$ і ад чацвёртага дзесятковага знака адымаем папраўку на $1'$, роўную 2. Такім чынам, $\sin 33^\circ 17' \approx 0,5488$. Значэнні косінуса знаходзяцца пры дапамозе табліц тым жа спосабам, але з наступнай розніцай: функцыя $\cos \alpha$ убываючая (у прамежку ад 0 да 90°); таму, калі косінус знойдзены для меншага значэння аргумента, трэба папраўку адымаць (а не дадаваць); калі ж косінус знойдзены для большага значэння аргумента, то трэба папраўку дадаваць (а не адымаць). Так, напрыклад, каб вылічыць $\cos 33^\circ 14'$, знаходзім па табліцах $\cos 33^\circ 12' \approx 0,8368$ і ад апошняга дзесятковага знака адымаем папраўку на $2'$, роўную 3; такім чынам, $\cos 33^\circ 14' \approx 0,8365$. Каб вылічыць $\cos 33^\circ 17'$, трэба да апошняга знака $\cos 33^\circ 18' \approx 0,8358$ дадаць папраўку на $1'$, роўную 2. Такім чынам, $\cos 33^\circ 17' \approx 0,8360$.

У табліцы IX У. М. Брадзіса дадзены значэнні тангенса ад 0 да 76° праз кожныя $6'$. У табліцы X дадзены значэнні тангенса ад 76° да 89° праз $1'$. Наяўнасць больш падрабязнай табліцы X для тангенсаў вуглоў, блізкіх да 90° , тлумачыцца тым, што для гэтых вуглоў рознасць паміж двума суседнімі таблічнымі значэннямі тангенса — так званая таблічная рознасць — змяняецца вельмі хутка. Па тых жа табліцах IX і X знаходзяць значэнні катангенса. Правілы дадання і адымання паправак тыя ж, што і для табліц значэнняў сінуса і косінуса: трэба памятаць, што ў інтэрвале $(0^\circ, 90^\circ)$ тангенс узрасце, а катангенс убывае.

Для знаходжання вугла па дадзенаму значэнню яго трыганаметрычнай функцыі ўжываюцца тыя ж самыя табліцы значэнняў трыганаметрычных функцый. Пакажам гэта на прыкладах.

1. Знайсці востры вугал α , ведаючы $\sin \alpha = 0,1016$.

Рашэнне. У табліцы VIII знаходзім лік, найбліжэйшы да 0,1016; гэта ёсць лік 0,1011, змешчаны ў радку з паметкай 5° і ў слупку з паметкай $48'$. Зададзенае значэнне сінуса 0,1016 большае, чым 0,1011; таму сапраўднае значэнне вугла большае, чым $5^\circ 48'$, таму што $\sin \alpha$ ёсць узростаючая функцыя ў інтэрвале $(0^\circ, 90^\circ)$. У табліцы паправак лік 6 з'яўляецца найбліжэйшым да ліку 5, на які адрозніваюцца апошнія дзесятковыя знакі лікаў 0,1016 і 0,1011. Дададзім адпаведную папраўку, роўную $2'$, атрымаем:
 $\alpha = \arcsin 0,1016 \approx 5^\circ 50'$.

2. Знайсці $\beta = \arccos (-0,5375)$.

Рашэнне. Шукаемы вугал заканчваецца ў другой чвэрці, таму што $\cos \beta = -0,5375$ адмоўны. Вылічым востры вугал α , які дапаўняе шукаемы да 180° ; маем:

$$\cos \alpha = \cos (180^\circ - \beta) = -\cos \beta = -(-0,5375) = 0,5375.$$

Значэнню 0,5373, найбліжэйшаму да 0,5375, адпавядае вугал $57^\circ 30'$. Рознасці ў 2 адзінкі чацвёртага дзесятковага знака адпавядае папраўка на $1'$. Гэту папраўку неабходна адняць. Такім чынам,
 $\alpha \approx 57^\circ 29'$ і $\beta \approx 180^\circ - 57^\circ 29' = 122^\circ 31'$.

Пры вылічэннях па натуральных табліцах зэтазгодна прадстаўляць здабытак трыганаметрычных функцый у выглядзе сумы.

Пры вылічэннях неабходна захоўваць правілы набліжаных вылічэнняў.

Так, напрыклад, калі набліжаныя лікі дадзены з трыма значымі лічбамі, то, пры выкананні множання і дзялення значэнні функцый, узятыя з табліц, трэба акругліць, захаваўшы чатыры значачыя лічбы (чацвёртая лічба захоўваецца ў якасці «запасной»), усе прамежкавыя рэзультаты вылічэнняў трэба акругляць, захоўваючы чатыры значачыя лічбы, канчатковы рэзультат трэба акругліць да трох значачых лічбаў. Пры складанні набліжанага ліку, дадзенага, напрыклад, з пяццю дзесятковымі знакамі, са значэннем трыганаметрычнай функцыі, узятым з чатырохзначных табліц, трэба акругліць набліжаны лік, захаваўшы ў ім чатыры дзесятковыя знакі. Калі пры вылічэннях, якія патрабуюць вялікай дакладнасці, такое акругленне недапушчальна, трэба выкарыстаць больш дакладныя табліцы.

Прыклады. 1) Вылічыць па чатырохзначных табліцах $\sin 70^\circ \cos 55^\circ$.

Рашэнне. Пераўтворым здабытак у суму:

$$\sin 70^\circ \cos 55^\circ = \frac{\sin(70^\circ + 55^\circ) + \sin(70^\circ - 55^\circ)}{2} = \frac{\sin 125^\circ + \sin 15^\circ}{2}.$$

Па формулах прывядзення $\sin 125^\circ = \sin(180^\circ - 125^\circ) = \sin 55^\circ$. Значэнні $\sin 55^\circ \approx 0,8192$ і $\sin 15^\circ \approx 0,2588$ знаходзім па табліцах. Такім чынам:

$$\sin 70^\circ \cos 55^\circ \approx \frac{1}{2}(0,8192 + 0,2588) = 0,5390.$$

2) Вылічыць здабытак $S = 0,721 \sin^2 31^\circ 12'$.

Рашэнне. Пераўтворым квадрат сіноса ў рознасць, выкарыстаўшы формулу $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$; атрымаем:

$$S = 0,721 \sin^2 31^\circ 12' = \frac{1}{2} 0,721 (1 - \cos 62^\circ 24').$$

Па табліцах знойдзем $\cos 62^\circ 24' \approx 0,4633$ і далей $1 - \cos 62^\circ 24' \approx 0,5367$. Значыць,

$$S = \frac{1}{2} 0,721 \cdot 0,5367 \approx 0,1935 \approx 0,194.$$

3) Вылічыць значэнне функцыі $y = x + \sin \frac{1}{x}$:

а) пры $x = 2$; б) пры $x = \pi$ па чатырохзначных табліцах Брадзіса.

Рашэнне. а) Пры $x = 2$ атрымаем $y = 2 + \sin \frac{1}{2}$. У табліцах Брадзіса значэнні трыганаметрычных функцый дадзены для аргумента выражанага ў градуснай меры, таму значэнні аргумента $\frac{1}{2}$ (радыяна) неабходна папярэдне выразіць у градусах:

$$\frac{1}{2} \text{ (радыяна)} \approx \frac{1}{2} (57^\circ 18') = 28^\circ 39'.$$

Значыць, $y = 2 + \sin 28^\circ 39' = 2 + 0,4795 = 2,4795$.

б) Пры $x = \pi$ атрымаем $y = \pi + \sin \frac{1}{\pi}$. На старонцы 5 табліц Брадзіса змешчаны гатовыя даныя: $\pi = 3,1415926 \dots$ і $\frac{1}{\pi} = 0,3183098 \dots$, якія трэба папярэдне акругліць: $\pi \approx 3,1416$; $\frac{1}{\pi} \approx 0,3183$.

Выканаўшы перавод у градусы значэння 0,3183 (радыянаў), па табліцы XVI атрымаем $18^\circ 14'$. Значыць,

$$y \approx 3,1416 + \sin 18^\circ 14' \approx 3,1416 + 0,3129 = 3,4545.$$

Лагарыфмічныя табліцы. Для вылічэнняў пры дапамозе лагарыфмаў складзены табліцы лагарыфмаў значэнняў трыганаметрычных функцый. У табліцах Брадзіса III—VII гэтыя лагарыфмы дадзены з чатырма дзесятковымі знакамі для значэнняў аргумента ў інтэрвале $(0^\circ, 90^\circ)$.

Лагарыфмічная функцыя пры аснове 10 з'яўляецца ўзрастаючай; таму большаму значэнню выразу, які знаходзіцца пад знакам лагарыфма, адпавядае большае значэнне лагарыфма. Паколькі ў першай чвэрці функцыі $\sin x$ і $\operatorname{tg} x$ узрастаюць, а функцыі $\cos x$ і $\operatorname{ctg} x$ убываюць, то і функцыі $\lg \sin x$ і $\lg \operatorname{tg} x$ таксама ўзрастаюць, а функцыі $\lg \cos x$ і $\lg \operatorname{ctg} x$ убываюць.

Лагарыфмічныя трыганаметрычныя табліцы пабудаваны гэтак жа, як і натуральныя; правілы карыстання імі тыя ж.

1. Табліцы служаць для вылічэння значэнняў лагарыфмаў трыганаметрычных функцый і для вылічэння вуглоў па значэннях лагарыфмаў іх трыганаметрычных функцый.

2. Для вылічэння лагарыфмаў сінусаў і косінусаў (тангенсаў і катангенсаў) служаць адна і тая ж табліца.

3. Значэнні лагарыфмаў дадзены для вуглоў праз кожныя $6'$. Папраўкі на $1'$, $2'$ і $3'$ дадзены ў спецыяльных табліцах справа ад асноўнай табліцы. Дадаванне і адыхаванне направак робіцца з улікам таго, што ў інтэрвале $(0^\circ, 90^\circ)$ функцыі $\lg \sin x$ і $\lg \operatorname{tg} x$ узрастаюць, а $\lg \cos x$ і $\lg \operatorname{ctg} x$ убываюць.

4. Для прамежкаў, у якіх таблічная рознасць змяняецца хутка, значэнні функцый дадзены праз $1'$. Такая, напрыклад, табліца III значэнняў лагарыфма сінуса (косінуса) для вуглоў ад 0 да 14° (ад 76° да 90°).

5. Пры вылічэннях па чатырохзначных табліцах лагарыфмаў набліжаныя лікі трэба акругліць, захаваўшы 4 значачыя лічбы.

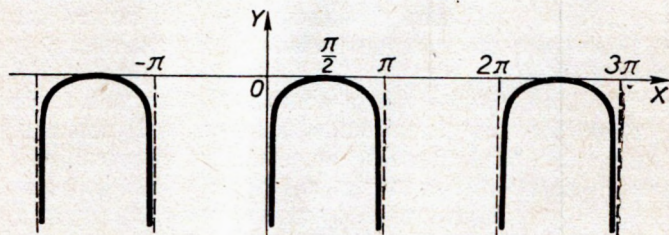
6. Пры вылічэнні здабыткаў, якія змяшчаюць адмоўныя сумножнікі, трэба вылічыць здабытак абсалютных велічынь і ўзяць яго з адпаведным знакам (па ліку адмоўных сумножнікаў).

На чарцяжы 63 прадстаўлен графік функцыі $y = \lg \sin x$. Гэты графік пабудаван так: у I чвэрці $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ прамежкавы аргумент $u = \sin x$ узрастае ад 0 да 1 , а функцыя $y = \lg \sin x = \lg u$ узрастае ад $-\infty$ да 0 . Для пабудавання пунктаў графіка можна скласці, напрыклад, наступную табліцу:

x	$\frac{\pi}{20}$	$\frac{2\pi}{20}$	$\frac{3\pi}{20}$	$\frac{4\pi}{20}$	$\frac{5\pi}{20}$	$\frac{6\pi}{20}$	$\frac{7\pi}{20}$	$\frac{8\pi}{20}$	$\frac{9\pi}{20}$	$\frac{\pi}{2}$
	-0,81	-0,51	-0,34	-0,23	-0,15	-0,09	-0,05	-0,02	-0,01	0

узяўшы (з акругленнем) значэнні $\lg \sin x$ з табліцы III Брадзіса.

У прамежку $\frac{\pi}{2} \leq x < \pi$ функцыя $\lg \sin x$ убывае ад 0 да $-\infty$, таму што ў II чвэрці $\sin x$ убывае ад 1 да 0.



Чарц. 63.

Сегмент $-\pi \leq x \leq 0$ не належыць вобласці вызначэння функцыі, таму што ў ніжняй паўакружнасці $\sin x \leq 0$ і $\lg \sin x$ не мае сэнсу.

Функцыя $\lg \sin x$ перыядычная з перыядам 2π , таму што $\lg \sin (x + 2\pi) = \lg \sin x$.

Графік складаецца з асобных перыядычна паўтараючыхся ліній.

§ 34. Аб ужыванні лагарыфмічнай лінейкі

Для вылічэнняў, якія не патрабуюць вялікай дакладнасці (не больш чым з трыма значачымі лічбамі), можна ўжываць лагарыфмічную лінейку. На корпусе лінейкі змешчана асноўная лагарыфмічная шкала, якая зроблена наступным чынам: даўжыня адрэзка шкалы ад яе пачатку да пункта з паметкай a роўна мантысе (трохзначнай) лагарыфма ліку a^* . Зусім такая ж шкала нанесена на прырэдным баку перамяшчальніка. На адваротным баку перамяшчальніка нанесены шкала сінусаў ($\sin$) і шкала тангенсаў (Tg). Гэтыя шкалы зроблены такім жа чынам, як і асноўная лагарыфмічная шкала. Так, на шкале сінусаў даўжыня адрэзка ад пачатку шкалы да пункта, які абазначае дадзены вугал (выражаны ў градусах), роўна мантысе лагарыфма сінуса гэтага вугла. Калі, перавярнуўшы перамяшчальнік адваротным бокам, сумясціць пачатак асноўнай шкалы з пачаткам трыганаметрычнай шкалы, то на асноўнай шкале супраць паметкі шкалы сінусаў (або танген-

* За адзінку даўжыні звычайна бярацца 0,001 даўжыні шкалы.

саў), якая абазначае дадзены вугал, будзе стаяць лік, што ўтвараецца першымі (трыма) значачымі лічбамі сінуса (тангенса) гэтага вугла. Так, напрыклад, супраць паметкі $12^\circ 30'$ шкалы сінусаў на асноўнай шкале стаіць паметка 2—1—6, што азначае $\sin 12^\circ 30' = 0,216$. Значыць, пры дапамозе лінейкі можна знаходзіць значэнні трыганаметрычных функцый і адваротна значэнні вуглоў па іх трыганаметрычных функцыях. На лінейцы няма шкалы для косінусаў, таму што косінус можна замяніць сінусам вугла, дапаўняльнага да 90° . Шкала тангенсаў дадзена толькі для вострых вуглоў, не большых 45° , таму што для вугла, большага 45° , можна знайсці тангенс, скарыстаўшы наступную тоеснасць: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} (90^\circ - \alpha)}$. Так, на-

прыклад, $\operatorname{tg} 70^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 20^\circ}$; таму, устанавіўшы паметку 20° шкалы тангенсаў супраць правага канца асноўнай шкалы, прачытаем лік 2—7—5, які ўкажа пачатковы пункт шкалы тангенсаў. Прыняўшы пад увагу, што $\operatorname{tg} 70^\circ > 1$ (але $\operatorname{tg} 70^\circ < 10$, таму што $\operatorname{arc} \operatorname{tg} 10 \approx 84^\circ$), атрымаем $\operatorname{tg} 70^\circ \approx 2,75$.

Каб пазбегнуць частага пераварочвання перамяшчальніка, на адваротным баку корпуса лінейкі нанесены штрыхі, якія знаходзяцца ў проразі строга супраць канцоў асноўнай шкалы. Калі супраць такога штрыха паставіць паметку вугла, то канец асноўнай шкалы ўкажа на пярэднім баку перамяшчальніка значэнне адпаведнай трыганаметрычнай функцыі.

Вылічэнне выразаў, якія з'яўляюцца здабыткамі і дзелямі, што змяшчаюць у якасці множнікаў і дзельнікаў значэнні трыганаметрычных функцый, робіцца па звычайных правілах вылічэнняў на лагарыфмічнай лінейцы. Так, напрыклад, каб вылічыць здабытак $22,8 \cdot \sin 18^\circ 30'$, ставім пачатковы пункт шкалы сінусаў (перавярнуўшы перамяшчальнік) супраць паметкі 2—2—8 асноўнай шкалы; тады на асноўнай шкале супраць паметкі шкалы сінусаў $18^\circ 30'$ акажуцца значачыя лічбы шукаемага здабытку: 7—2—3; значыць, $22,8 \cdot \sin 18^\circ 30' = 7,23$.

Заўвага. Для малых вуглоў нанесці адпаведныя паметкі на агульную шкалу практычна немагчыма. Прыняўшы пад увагу, што $\sin 5,6^\circ \approx \operatorname{tg} 5,6^\circ \approx 0,1$ і што значэнні сінуса і тангенса малых вуглоў блізкія адзін да другога, змяшчаюць пасярэдзіне адваротнага боку перамяшчальніка агульную шкалу для сінусаў і тангенсаў вуглоў, меншых $5,6^\circ$. Пры дапамозе гэтай шкалы робяцца вылічэнні з малымі вугламі; правілы вылічэнняў застаюцца ранейшымі.

Раздзел VI

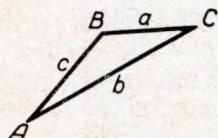
ВЫЛІЧЭННЕ ЭЛЕМЕНТАЎ ГЕАМЕТРЫЧНЫХ ФІГУР

§ 35. Элементы трохвугольніка

У геаметрыі разглядаюцца розныя элементы трохвугольніка: стораны, вуглы, перыметр, плошча, бісектрысы, медыяны, вышыні і г. д.

Стораны трохвугольніка і яго вуглы называюцца асноўнымі элементамі.

Калі A, B, C — вяршыні вуглоў трохвугольніка, то прынята гэтымі ж літарамі абазначаць і самі вуглы; малымі літарамі a, b і c прынята абазначаць стораны, процілеглыя вуглам, якія абазначаны тымі ж вялікімі літарамі (чарц. 64).



Чарц. 64.

Допушчальныя значэнні асноўных элементаў трохвугольніка павінны задавальняць наступным умовам:

1°. Вуглы трохвугольніка дадатныя і ў суме складаюць 180° :

$$A > 0, B > 0, C > 0 \text{ і } A + B + C = 180^\circ.$$

2°. Стораны трохвугольніка дадатныя і ўсякая старана менш сумы дзвюх другіх старон:

$$0 < a < b + c; \quad 0 < b < c + a; \quad 0 < c < a + b.$$

§ 36. Аб рашэнні трохвугольнікаў

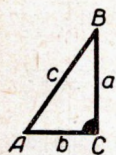
У геаметрыі разглядаюцца розныя задачы на пабудаванне трохвугольніка па дастатковаму ліку дадзеных яго элементаў. У трыганаметрыі разглядаюцца задачы на вылічэнне, у якіх трэба вылічыць тыя або іншыя элементы трохвугольніка па дастатковай колькасці лікавых значэнняў зададзеных яго элементаў. Гэтыя задачы звычайна называюцца задачамі на рашэнне трохвугольніка. У геаметрыі вывучаюцца наступныя асноўныя задачы на пабудаванне трохвугольніка: *пабудавать трохвугольнік па трох*

дадзеных яго асноўных элементах, з якіх хоць бы адзін з'яўляецца стараной*.

У трыганаметрыі рашаюцца адпаведныя асноўныя задачы: *на зададзеных велічынях трох асноўных элементаў трохвугольніка, з якіх хоць бы адзін з'яўляецца стараной, вылічыць велічыні трох іншых яго асноўных элементаў.*

§ 37. Рашэнне прамавугольных трохвугольнікаў

Няхай ABC — прамавугольны трохвугольнік, C — прамы вугал, a і b — катэты, процілеглыя вострым вуглам A і B , c — гіпатэнуза (чарц. 65); тады маем:



Чарц. 65.

Косінус вострага вугла ёсць адносіна прылеглага катэта да гіпатэнузы:

$$\cos A = \frac{b}{c}, \quad \cos B = \frac{a}{c}. \quad (1)$$

Сінус вострага вугла ёсць адносіна процілеглага катэта да гіпатэнузы:

$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \sin B = \frac{b}{c}. \quad (2)$$

Тангенс вострага вугла ёсць адносіна процілеглага катэта да прылеглага:

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{tg} B = \frac{b}{a}. \quad (3)$$

Катангенс вострага вугла ёсць адносіна прылеглага катэта да процілеглага:

$$\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{ctg} B = \frac{a}{b}. \quad (4)$$

Сума вострых вуглоў роўна 90° .

Асноўныя задачы на прамавугольныя трохвугольнікі.

Задача I. Дадзены гіпатэнуза і адзін з вострых вуглоў; вылічыць іншыя элементы.

* Па трох вуглах A, B, C трохвугольнік або нельга пабудаваць (калі $A + B + C \neq 180^\circ$), або (калі $A + B + C = 180^\circ$) існуе бясконцае мноства падобных паміж сабой трохвугольнікаў з дадзенымі вугламі.

Р а ш є н н є. Няхай дадзены c і A . Вугал $B = 90^\circ - A$ таксама вядомы; катэты знаходзяцца з формул (1) і (2):

$$a = c \sin A, \quad b = c \cos A.$$

Задача II. Дадзены катэт і адзін з вострых вуглоў; вылічыць іншыя элементы.

Р а ш є н н є. Няхай дадзены a і A . Вугал $B = 90^\circ - A$ вядомы; з формул (3), (4) і (2) знойдзем:

$$b = a \operatorname{tg} B (= a \operatorname{ctg} A), \quad c = \frac{a}{\sin A}.$$

Задача III. Дадзены катэт і гіпатэнузу; вылічыць іншыя элементы.

Р а ш є н н є. Няхай дадзены a і c (прычым $a < c$). З роўнасцей (2) знойдзем вугал A :

$$\sin A = \frac{a}{c} \text{ і } A = \arcsin \frac{a}{c}, \text{ затым } B = 90^\circ - A \text{ і, нарэшце, катэт } b:$$

$$b = c \cos A (= c \sin B).$$

Задача IV. Дадзены катэты a і b ; знайсці іншыя элементы.

Р а ш є н н є. З роўнасцей (3) знойдзем востры вугал, напрыклад A . $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$, $A = \arcsin \frac{a}{b}$, затым вугал $B = 90^\circ - A$, затым гіпатэнузу:

$$c = \frac{a}{\sin A} \left(= \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\cos B} \right).$$

Ніжэй прыводзіцца прыклад рашэння прамавугольнага трохвугольніка пры дапамозе лагарыфмічных табліц*.

Пры вылічэннях па лагарыфмічных табліцах трэба выпісаць адпаведныя формулы, пралагарыфмаваць іх, падставіць лікавыя даныя, па табліцах знайсці патрабуемыя лагарыфмы вядомых элементаў (або іх трыганаметрычных функцый), вылічыць лагарыфмы шукаемых элементаў (або іх трыганаметрычных функцый) і па табліцах знайсці шукаемыя элементы.

Прыклад. Дадзены катэт $a = 166,1$ і гіпатэнузу $c = 187,3$; вылічыць вострыя вуглы, другі катэт і плошчу.

Р а ш є н н є. Маем:

$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \lg \sin A = \lg a - \lg c; \quad \begin{array}{r} - \lg a = 2,2204 \\ \lg c = 2,2725 \\ \hline \lg \sin A = 1,9479. \end{array}$$

$$A \approx 62^\circ 30'; \quad B \approx 90^\circ - 62^\circ 30' = 27^\circ 30'.$$

Вылічваем катэт b :

$$b = a \operatorname{tg} B; \quad \lg b = \lg a + \lg \operatorname{tg} B; \quad \begin{array}{r} \lg a = 2,2204 \\ \lg \operatorname{tg} B = 1,7165 \\ \hline \lg b = 1,9369. \end{array} \quad b \approx 86,48.$$

* Вылічэнне элементаў прамавугольных трохвугольнікаў па натуральных табліцах вядома з курса геаметрыі VIII класа.

Плошчу трохвугольніка можна вылічыць па формуле:

$$S = \frac{1}{2}ab = 0,5 a^2 \operatorname{tg} B;$$

$\lg 0,5 = 1,6990$	$\lg a = 2,2204$ $S \approx 7183.$
$2 \lg a = 4,4408$	
$\lg \operatorname{tg} B = 1,7165$	
$\operatorname{tg} S = 3,8563$	

Для кантролю падлічым вугал A на лагарыфмічнай лінейцы:

$$A = \arcsin \frac{a}{c} = \arcsin \frac{166}{187} \approx 62^\circ.$$

Заўвага. Катэт b можна вылічыць па тэарэме Піфагора, карыстаючыся табліцамі квадратаў і квадратных караняў (табл. XI і XII):

$$b = \sqrt{187,3^2 - 166,1^2} = \sqrt{35080 - 27590} \approx 86,54.$$

Разыходжанне з раней атрыманым значэннем $b \approx 86,48$ тлумачыцца пагрэшнасцямі табліц, у якіх даюцца набліжаныя значэнні функцый. Рэзультат 86,54 з'яўляецца больш дакладным.

N 7

§ 38. Тэарэма сінусаў

Тэарэма. *Ва ўсякім трохвугольніку стораны прапарцыянальныя сінусам процілеглых вуглоў:*

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Доказ. Апішам круг вакол дадзенага трохвугольніка ABC (чарц. 66). Няхай R — радыус гэтага круга. Возьмем адну з вяршынь трохвугольніка, напрыклад A ; праз адну з іншых вяршынь, напрыклад праз B , правядзём дыяметр BA' апісанага круга. Дапаможны трохвугольнік $A'BC$ прамавугольны, таму што ўпісаны вугал $A'CB$ абпіраецца на дыяметр. З дапаможнага трохвугольніка знойдзем:

$$a = 2R \sin A'.$$

Калі вугал A востры, то $A = A'$, таму што ўпісаныя вуглы A і A' абпіраюцца на адну і тую ж дугу. Калі вугал A тупы, то вугал A' востры, які вымяраецца палавінай дугі BAC :

$$A' = \frac{1}{2} \cup BAC = \frac{1}{2} (2\pi - \cup BA'C) = \pi - \frac{\cup BA'C}{2} = \pi - A.$$

Такім чынам, або $A = A'$, або $A' = \pi - A$, у абодвух выпадках

$$\sin A' = \sin A,$$

а таму

$$a = 2R \sin A.$$

Калі вугал A прамы, то $a = 2R$, $\sin A = 1$ і роўнасць (1) таксама справядліва.

Аналагічныя роўнасці знойдзем і для іншых вуглоў B і C . Такім чынам,

$$a = 2R \sin A; \quad b = 2R \sin B; \quad c = 2R \sin C,$$

адкуль

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R, \quad \text{ш. т. д.}$$

Вынік. Адносіна стараны трохвугольніка да сінуса процілеглага вугла роўна дыяметру круга, апісанага каля трохвугольніка.

18

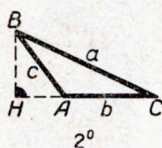
§ 39. Тэарэма косінусаў

Тэарэма. *Квадрат стараны трохвугольніка роўны суме квадратаў дзвюх другіх яго старон мінус падвоены здабытак гэтых старон на косінус вугла паміж імі:*

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned}$$

Доказ. Дакажам першую роўнасць.

Выпадак 1°. Вугал A востры. Няхай BH — вышыня, апущаная з вяршыні B (чарц. 67); з геаметрыі вядома, што:



Чарц. 67.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot AH. \quad (1)$$

З прамавугольнага трохвугольніка ABH знойдзем $AH = c \cos A$; падставіўшы ў формулу (1), атрымаем даказваемую роўнасць.

Выпадак 2°. Вугал A тупы. У гэтым выпадку

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2b \cdot AH. \quad (2)$$

З трохвугольніка ABH знойдзем:

$$AH = c \cos \angle BAH = c \cos (\pi - A) = -c \cos A.$$

Падставіўшы ў формулу (2), атрымаем даказваемую роўнасць.

Выпадак 3°. Вугал A прамы. У гэтым выпадку (па тэарэме Піфагора): $a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ (таму што $\cos A = 0$).

Такім чынам, ва ўсіх выпадках

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \quad \text{ш. т. д.}$$

§ 40. Формулы для плошчы трохвугольніка

1°. З геаметрыі вядома формула Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \left(\text{дзе } p = \frac{a+b+c}{2} - \text{паўперыметр} \right),$$

якая дазваляе вылічваць плошчу трохвугольніка па яго старанах.

2°. Тэарэма. *Плошча трохвугольніка роўна палавіне здабытку дзвюх старон на сінус вугла паміж імі:*

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A. \quad (1)$$

Доказ. З геаметрыі вядома, што плошча трохвугольніка роўна палавіне здабытку стараны трохвугольніка на вышыню, якая апушчана на гэту старану з процілеглай вяршыні:

$$S = \frac{1}{2} b \cdot h_b. \quad (2)$$

Калі вугал A востры, то з трохвугольніка BH (чарц. 67) знойдзем:

$$BH = h_b = c \sin A.$$

Калі вугал A тупы, то $BH = h_b = c \sin(\pi - A) = c \sin A$.

Калі вугал A прамы, то $\sin A = 1$ і $h_b = AB = c = c \sin A$.

Значыць, ва ўсіх выпадках $h_b = c \sin A$. Падставіўшы ў роўнасць (2), атрымаем даказваемую формулу, ш. т. д.

Зусім гэтак жа атрымаем формулы:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ac \sin B.$$

3°. На аснове тэарэмы сіносаў:

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}, \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Падставіўшы гэтыя выразы ў формулу (1), атрымаем наступную формулу:

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}.$$

§ 41. Тэарэма тангенсаў

Тэарэма. *Рознасць дзвюх старон трохвугольніка адносіцца да іх сумы, як тангенс паўрознасці процілеглых вуглоў да тангенса паўсумы гэтых вуглоў:*

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}$$

(і дзве аналагічныя формулы для іншых пар старон a, c і b, c).

Доказ. Па тэарэме сіносаў маем:

$$a - b = 2R (\sin A - \sin B) = 4R \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2};$$

$$a + b = 2R (\sin A + \sin B) = 4R \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}.$$

Падзяліўшы пачленна гэтыя роўнасці, атрымаем даказваемую формулу, ш. т. д.

§ 42. Рашэнне трохвугольніка па двух яго вуглах і старане

Задача. Дадзены два вуглы трохвугольніка і адна старана; вылічыць другія стараны і вуглы.

Дадзены B , C і a ; трэба знайсці b , c і A .

Рашэнне. Умову магчымасці пабудавання трохвугольніка па гэтых даных: $A + B < 180^\circ$, будзем лічыць выкананай.

Можна лічыць вядомымі ўсе тры вуглы, таму што

$$A = 180^\circ - (B + C).$$

Для вылічэння старон b і c дастаткова ўжыць тэарэму сіносаў:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}, \quad \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A},$$

адкуль:

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}, \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Плошча вылічваецца па формуле:

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}.$$

Прыклад. Рашыць трохвугольнік па наступных даных: $a \approx 17,4$, $B \approx 44^\circ 30'$, $C \approx 64^\circ$.

Рашэнне пры дапамозе натуральных табліц. Знаходзім вугал:

$$A = 180^\circ - (B + C) \approx 180^\circ - (44^\circ 30' + 64^\circ) \approx 71^\circ 30'.$$

Вылічаем стараны. Маем:

$$\sin B \approx 0,7009; \quad \sin C \approx 0,8988; \quad \sin A \approx 0,9483$$

і далей

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A} \approx \frac{17,4 \cdot 0,7009}{0,9483} \approx \frac{12,20}{0,9483} \approx 12,86 \approx 12,9;$$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} \approx \frac{17,4 \cdot 0,8988}{0,9483} \approx \frac{15,64}{0,9483} \approx 16,49 \approx 16,5.$$

Дзяленне на $\sin A$ можна замяніць множаннем на адваротны лік.

Па табліцах Брадзіса (гл. табл. XVII) знойдзем: $\frac{1}{0,9483} \approx 1,055$.

Вылічэнні выкананы па правілах набліжаных вылічэнняў. Значэнні сіносаў узяты з табліц Брадзіса; ва ўсіх прамежкавых рэзультатах захоўваюцца чатыры значачыя лічбы (правіла запасной лічбы), а канчатковы рэзультат акруглен да трох значачых лічбаў.

Рашэнне пры дапамозе лагарыфмічных табліц. Маем:

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}; \quad \lg b = \lg a + \lg \sin B - \lg \sin A$$

Па табліцах знойдзем:

$$\begin{array}{r} \lg a = 1,2405 \\ \lg \sin B = 1,8457 \\ - \lg \sin A = 0,0230 \\ \hline \lg b = 1,1092 \end{array} \quad \lg \sin A = 1,9770$$

Па табліцах Брадзіса знойдзем $b = 12,86$. Аднак у адказе трэба пакінуць тры значачыя лічбы, таму што значэнне a дадзена з трыма значачымі лічбамі; таму $b \approx 12,9$.

Старана c вылічваецца аналагічна:

$$\begin{array}{r} c = \frac{a \sin C}{\sin A}, \quad \lg c = \lg a + \lg \sin C - \lg \sin A \\ \lg a = 1,2405 \\ \lg \sin C = 1,9537 \\ - \lg \sin A = 0,0230 \\ \hline \lg c = 1,2172; \quad c \approx 16,5 \end{array}$$

§ 43. Рашэнне трохвугольніка па дзвюх старанах і вуглу паміж імі

Задача. Дадзены дзве стараны трохвугольніка і вугал паміж імі; вылічыць трэцюю старану і два другія вуглы.

Няхай, напрыклад, дадзены a , b і C ; трэба вылічыць A , B і c . Рашэнне пры дапамозе натуральных табліц.

Формула косінусаў дае выражэнне стараны c непасрэдна праз вядомыя элементы:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}.$$

Для вылічэння A можна таксама выкарыстаць формулу косінусаў:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Паколькі $0 < A < 180^\circ$, то

$$A = \arccos \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \text{ і, нарэшце, } B = 180^\circ - (A + C).$$

Рашэнне пры дапамозе лагарыфмічных табліц.

Вядома сума вуглоў $A + B = 180^\circ - C$, адкуль $\frac{A+B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}$.

Рознасць вуглоў $A - B$ можна вылічыць, скарыстаўшы тэарэму тангенсаў:

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}} = \frac{a-b}{a+b}, \quad \text{адкуль} \quad \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}.$$

Вуглы A і B вызначаюцца з сістэмы ўраўненняў:

$$\frac{A+B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}, \quad \frac{A-B}{2} = \arctg \left(\frac{a-b}{a+b} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \right).$$

Старану c можна вылічыць па тэарэме сінусаў:

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Прыклад. Дадзены: $a \approx 49,4$; $b \approx 26,4$ і $C \approx 47^\circ 20'$; знайсці A , B і c .

Рашэнне пры дапамозе натуральных табліц.

Маем:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \approx (49,4)^2 + (26,4)^2 - 2 \cdot 49,4 \cdot 26,4 \cdot \cos 47^\circ 20'.$$

Па табліцах квадратаў знойдзем:

$$a^2 \approx (49,4)^2 \approx 2440, \quad b^2 \approx (26,4)^2 \approx 697,0$$

і далей

$$2 \cdot 49,4 \cdot 26,4 \cdot \cos 47^\circ 20' \approx 2 \cdot 49,4 \cdot 26,4 \cdot 0,6778 \approx 1768.$$

Значыць,

$$c^2 \approx 2440 + 697 - 1768 \approx 1369.$$

Па табліцах квадратных кораняў $c \approx 37,0$

Далей

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \approx \frac{697 + 1369 - 2440}{2 \cdot 26,4 \cdot 37,0} \approx -\frac{374}{1954} \approx -0,191;$$

$A \approx \arccos(-0,191)$; вугал A — тупы. Знаходзім дапаўняльны вугал:

$$180^\circ - A \approx \arccos(0,191) \approx 79^\circ, \quad A \approx 180^\circ - 79^\circ = 101^\circ$$

$$(\text{з акругленнем да } 10'). \quad B = 180^\circ - (A + C) \approx 31^\circ 40'.$$

Рашэнне пры дапамозе лагарыфмічных табліц. Вылічым вуглы A і B .

$$\lg \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \lg(a-b) + \lg \operatorname{ctg} \frac{C}{2} - \lg(a+b).$$

Дапаможныя вылічэнні:

$$\begin{array}{l|l} \lg(a-b) = 1,3617 & a-b \approx 49,4 - 26,4 = 23,0; \\ \lg \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = 0,3583 & a+b \approx 75,8; \\ -\lg(a+b) = \overline{2,1203} & \frac{C}{2} \approx 23^\circ 40'; \\ & \lg(a+b) = 1,8797. \end{array}$$

$$\lg \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \overline{1,8403} \quad \text{і} \quad \frac{A-B}{2} \approx 34^\circ 40'.$$

З сістэмы ўраўненняў:

$$\frac{A-B}{2} = 34^\circ 40'; \quad \frac{A+B}{2} = 66^\circ 20'$$

знойдзем: $A \approx 101^\circ$, $B \approx 31^\circ 40'$.

§ 44. Рашэнне трохвугольніка па дзвюх старанах і вуглу, процілегламу адной з іх

Задача. Дадзены дзве стараны трохвугольніка і вугал, які ляжыць супраць адной з іх; вылічыць трэцюю старану і два астатнія вуглы.

Няхай дадзены a , b і A ; трэба вылічыць B , C і c .

Рашэнне. Выпадак 1°. $a > b$, г. зн. зададзены вугал A ляжыць супраць большай стараны. Пабудаванне паказана на чарцяжы 68, а. З пункта C (як з цэнтра), узятага на адной з старон вугла A на адлегласці b ад вяршыні, апісана акружнасць радыуса a ; пункт B ёсць пункт перасячэння гэтай акружнасці з другой стараной вугла A . Пабудаванне заўсёды магчыма, задача мае адзінае рашэнне.

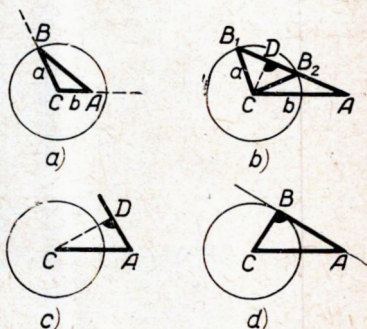
Востры вугал B , процілеглы меншай старане, знаходзіцца па тэарэме сіносаў:

$$\sin B = \frac{b}{a} \sin A,$$

адкуль $B = \arcsin \left(\frac{b}{a} \sin A \right)$

і затым $C = 180^\circ - (A + B)$.

Старана c знаходзіцца па тэарэме сіносаў: $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$.



Чарц. 68.

Выпадак 2°. $a < b$, г. зн. вугал A ляжыць супраць меншай стараны; таму ён не можа быць тупым або прамым. Значыць, пры $A \geq 90^\circ$ задача не мае рашэння. Няхай вугал A востры. З пабудавання на чарцяжы 68, b відаць, што акружнасць радыуса a з цэнтрам у пункце C перасячэ другую старану вугла A у двух пунктах пры ўмове $a > CD$, дзе D — аснова перпендыкуляра, апушчанага з пункта C на другую старану вугла A . Паколькі $CD = b \sin A$ (з трохвугольніка ACD), то ўмова запішацца так: $a > b \sin A$. Для вугла B магчымы два значэнні: $B = B_1$ (востры) і $B = B_2$ (тупы). Задача мае два рашэнні.

Значэнні вугла B вылічваюцца па тэарэме сіносаў:

$$\sin B = \frac{b}{a} \sin A,$$

адкуль $B_1 = \arcsin \left(\frac{b}{a} \sin A \right)$ і $B_2 = 180^\circ - B_1$.

Значэнні вугла C і стараны c вылічваюцца гэтак жа, як у папярэднім выпадку (гл. ніжэй, прыклад).

З чарцяжа 68, c відаць, што пры $CD = b \sin A > a$ акружнасць не перасячэ другой стараны вугла A ; задача не мае рашэнняў.

У гэтым выпадку $\sin B = \frac{b \sin A}{a} > 1$ і вугал B вылічыць нельга.

Пры $CB = b \sin A$ задача мае адзінае рашэнне: трохвугольнік ABC прамавугольны (чарц. 68, d).

Выпадак 3°. $a = b$. У гэтым выпадку трохвугольнік ABC раўнабедранны. Такі трохвугольнік можна рашыць, разбіўшы яго вышыняй CD на два прамавугольныя трохвугольнікі:

$$B = A; C = 180^\circ - 2A; c = 2AD = 2a \cos A.$$

Прыклад. Вылічыць стораны і вуглы трохвугольніка, калі дадзена:
 $a \approx 73,5$; $b \approx 86,4$; $A \approx 49^\circ 0'$.

Рашэнне. Маем:

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} \approx \frac{86,4 \cdot 0,7547}{73,5} \approx \frac{65,21}{73,5} \approx 0,8872 \approx 0,887$$

(дзяленне на 73,5 можна замяніць множаннем на $\frac{1}{73,5} \approx 0,0136$, табл. XVII).

Паколькі ў дадзеным выпадку $a < b$ і $\frac{b \sin A}{a} < 1$, то задача мае два рашэнні:

$$1) B_1 \approx \arcsin 0,887 \approx 62^\circ 30'; \quad C_1 \approx 180^\circ - (49^\circ + 62^\circ 30') = 68^\circ 30' \\ \text{(з акругленнем да } 10');$$

$$c_1 = \frac{a \sin C_1}{\sin A} \approx \frac{73,5 \cdot 0,9304}{0,755} \approx \frac{68,38}{0,755} \approx 90,56 \approx 90,6$$

$$2) B_2 = 180^\circ - B_1 \approx 117^\circ 30'; \quad C_2 \approx 180^\circ - (49^\circ + 117^\circ 30') = 13^\circ 30';$$

$$c_2 = \frac{a \sin C_2}{\sin A} \approx \frac{73,5 \cdot 0,2334}{0,755} \approx \frac{17,15}{0,755} \approx 22,72 \approx 22,7.$$

§ 45. Рашэнне трохвугольніка па трох старанах

Задача. Дадзены тры стараны трохвугольніка; вылічыць яго вуглы.

Няхай дадзены даўжыні трох старон трохвугольніка. Абазначым праз a меншую старану, праз b — сярэднюю, а праз c — большую: $a \leq b \leq c$. Па трох дадзеных старанах можна пабудаваць адзіны трохвугольнік, калі большая старана менш сумы дзвюх іншых старон: $c < a + b$. Калі ж $c \geq a + b$, то трохвугольнік з дадзенымі старанамі не існуе. Будзем лічыць, што $c < a + b$.

Рашэнне пры дапамозе натуральных табліц. Вуглы трохвугольніка можна вылічыць па тэарэме косінусаў:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A; \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$$

адкуль:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \text{і } A = \arccos \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \left(\text{паколькі } 0^\circ < A < 180^\circ \right).$$

Аналагічна знойдзем:

$$B = \arccos \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}; \quad \text{і, нарэшце, } C = 180^\circ - (A + B).$$

Рашэнне пры дапамозе лагарыфмічных табліц. Вылічым спачатку плошчу трохвугольніка (формула Герона):

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad \text{дзе } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Маем далей:

$$S = \frac{bc \sin A}{2}, \quad \text{адкуль } \sin A = \frac{2S}{bc}.$$

Вугал A — востры, таму што ён ляжыць супраць меншай стараны; значыць,

$$A = \arcsin \frac{2S}{bc}$$

Такім жа чынам $B = \arcsin \frac{2S}{ac}$; і, нарэшце, $C = 180^\circ - (A + B)$.

Значыць, пры рашэнні трохвугольніка па трох старанах пры дапамозе лагарыфмічных табліц *вуглы, якія ляжаць супраць меншых старон, знаходзяцца па формулах, а вугал, які ляжыць супраць найбольшай стараны, вылічваецца як рознасць паміж 180° і сумай двух знойдзеных вуглоў.*

Прыклад. Рашыць трохвугольнік, ведаючы даўжыні (набліжаныя) яго старон: 24,7; 22,4 і 31,3. Абазначым $a \approx 22,4$; $b \approx 24,7$; $c \approx 31,3$.

Рашэнне пры дапамозе натуральных табліц. Маем:

$$\cos A \approx \frac{(24,7)^2 + (31,3)^2 - (22,4)^2}{2 \cdot 24,7 \cdot 31,3} \approx \frac{610,1 + 979,7 - 501,8}{1546} \approx 0,7038,$$

адкуль $A \approx 45^\circ 20'$ (з акругленнем да $10'$).

$$\cos B \approx \frac{(22,4)^2 + (31,3)^2 - (24,7)^2}{2 \cdot 22,4 \cdot 31,3} \approx \frac{501,8 + 979,7 - 610,1}{1402} \approx 0,6215,$$

адкуль $B \approx 51^\circ 30'$, і, нарэшце, $C = 180^\circ - (45^\circ 20' + 51^\circ 30') \approx 83^\circ 10'$.

Рашэнне пры дапамозе лагарыфмічных табліц. Маем:

$$\sin A = \frac{2S}{bc}, \quad \lg \sin A = \lg 2S - \lg b - \lg c$$

Вылічаем:

$$\lg 2S = \lg (2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}) = \lg 2 + \frac{1}{2} \lg p + \frac{1}{2} \lg (p-a) + \frac{1}{2} \lg (p-b) + \frac{1}{2} \lg (p-c),$$

дзе

$$p = \frac{a+b+c}{2} \approx \frac{22,4 + 24,7 + 31,3}{2} = 39,2$$

$$p-a \approx 39,2 - 22,4 = 16,8; \quad p-b \approx 14,5; \quad p-c \approx 7,9$$

$$\lg 2 = 0,3010$$

$$\lg p = 1,5933$$

$$\frac{1}{2} \lg p = 0,7966$$

$$\frac{1}{2} \lg (p-a) = 0,6126$$

$$\lg (p-a) = 1,2253$$

$$\frac{1}{2} \lg (p-b) = 0,5807$$

$$\lg (p-b) = 1,1614$$

$$\frac{1}{2} \lg (p-c) = 0,4488$$

$$\lg (p-c) = 0,8976$$

$$\lg 2S = 2,7397$$

Далей

$$\lg 2S = 2,7397$$

$$- \lg b = \bar{2},6073$$

$$\lg b = 1,3927$$

$$- \lg c = \bar{2},5045$$

$$\lg c = 1,4955$$

$$\lg \sin A = 1,8515;$$

$$A \approx 45^\circ 20'.$$

Вилічуем B . Маєм: $\lg \sin B = \lg 2S - \lg a - \lg c$.

$$\begin{array}{r|l} \lg 2S = 2,7397 & \lg a = 1,3502; \\ - \lg a = 2,6498 & \\ - \lg c = 2,5045 & \\ \hline \lg \sin B = 1,8940. & B \approx 51^{\circ}30'. \\ C = 180^{\circ} - (A + B) \approx 83^{\circ}10'. \end{array}$$

§ 46. Уживанне триганаметрыі пры вымярэннях на мясцовасці

З дапамогай триганаметрыі рашаюцца многія вымяральныя задачы на мясцовасці, як, напрыклад, вылічэнне адлегласцей паміж рознымі пунктамі зямной паверхні (калі гэту адлегласць нельга вымераць непасрэдна), вылічэнне вышыні дадзенага прадмета (гары, будынка і да т. п.), складанне планаў і карт і да т. п. Будзем меркаваць, што вымярэнні выконваюцца на малым участку, так што можна лічыць яго плоскім і не ўлічваць крывізны зямной паверхні*.

Вымярэнне невялікіх адлегласцей робіцца непасрэдна, пры дапамозе, напрыклад, сталёных вымяральных стужак.

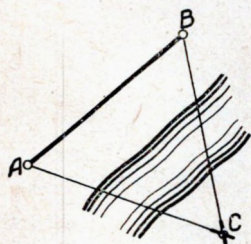
Вымярэнне вуглоў на мясцовасці робіцца пры дапамозе вугламерных інструментаў. Найбольш распаўсюджаным сучасным вугламерным інструментам з'яўляецца тэадаліт (чарц. 69). Падзорная труба тэадаліта можа круціцца як у гарызантальнай, так і ў вертыкальнай плоскасці. Калі вось падзорнай трубы, якая знаходзіцца ў гарызантальным становішчы ў пункце C зямной паверхні, накіраваць спачатку ў пункт A , а затым у пункт B , то

вугал яе павароту ёсць вугал C трохвугольніка ABC ; пад гэтым вуглом з пункта C відаць адлегласць AB (чарц. 70). Пры дапамозе

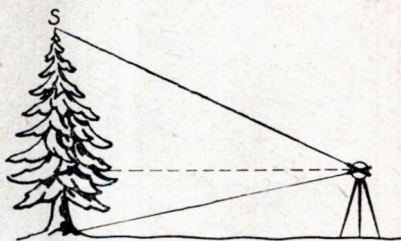
* Вылічэнні, звязаныя з вымярэннямі на вялікіх участках, дзе нельга не звяртаць увагі на шарападобнасць Зямлі, робяцца сродкамі сферычнай триганаметрыі.

павароту падзорнай трубы можна вымяраць вуглы і ў вертыкальнай плоскасці (чарц. 71).

Вуглы павароту падзорнай трубы можна вымяраць з вялікай дакладнасцю пры дапамозе дзяленняў на гарызантальным і вертыкальным кругах і мікраметрычных шрубаў.



Чарц. 70.

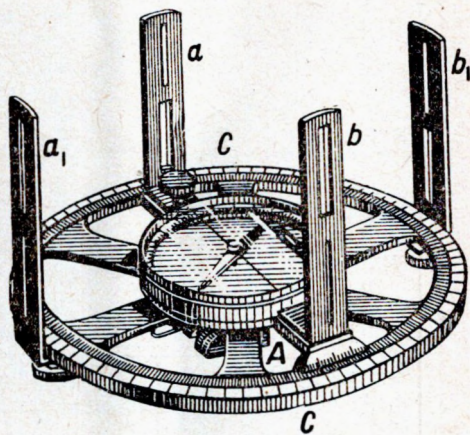


Чарц. 71.

Пры адсутнасці тэадаліта карыстаюцца (напрыклад, у навучальных мэтах) больш простымі прыладамі. Адна з такіх прылад — астралябія — паказана на чарцяжы 72. Асноўныя часткі астралябіі наступныя: круг, падзелены на градусы (лімб), і лінейка (алідада), якая можа круціцца вакол цэнтра круга. Для навадзення лінейкі на дадзены пункт служаць прымацаваныя да яе канцоў вертыкальныя пласцінкі з вузкімі падоўжнымі прорэзамі.

Разгледзім некалькі найпрасцейшых задач на вылічэнне адлегласцей і вышынь.

Задача. Вылічыць адлегласць ад даступнага пункта A да недаступнага пункта B , бачнага з пункта A (пункты A і B ляжаць у адной і той жа гарызантальнай плоскасці, чарц. 73).



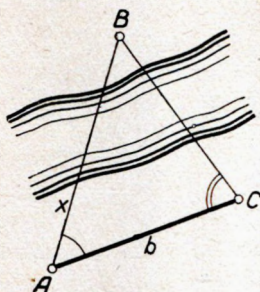
Чарц. 72.

Раствумачэнне. Пункт A лічыцца даступным, калі ў ім можа знаходзіцца назіральнік з вымяральнымі інструментамі. Пункт B лічыцца недаступным, калі адлегласць AB не можа быць вымерана непасрэдна (напрыклад, ёсць перашкода: рака, яр і да т. п.).

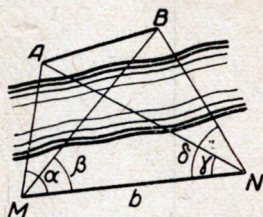
Рашэнне. Выберам паблізу пункта A даступны пункт C ,

з якога відаць пункт B . Вимераем непасрэдна адрэзак-базіс $AC = b$ і вуглы A і C . Старану $x = c$ трохвугольніка ABC знойдзем па тэарэме сіносаў:

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}, \text{ адкуль } x = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{b \sin C}{\sin (A + C)}.$$



Чарц. 73



Чарц. 74

Задача. Вылічыць адлегласць паміж двума недаступнымі пунктамі A і B , бачнымі з даступнай мясцовасці. Размяшчэнне пунктаў дадзена на чарцяжы 74.

Рашэнне. Выберам у даступнай мясцовасці адрэзак-базіс; вымераем базіс і вуглы $\alpha = \angle AMN$, $\beta = \angle BMN$, $\gamma = \angle ANM$, $\delta = \angle BNM$ паміж базісам і напрамкамі з яго канцоў на пункты A і B . Вылічым адлегласці MA і MB (гл. папярэднюю задачу).

$$MA = \frac{b \sin \gamma}{\sin (\alpha + \gamma)}; MB = \frac{b \sin \delta}{\sin (\beta + \delta)}.$$

Ведаючы дзве стараны трохвугольніка AMB і вугал $\alpha - \beta$ паміж імі, можна вылічыць трэцюю старану, напрыклад па тэарэме косінусаў:

$$x = AB = \sqrt{MA^2 + MB^2 - 2MA \cdot MB \cos (\alpha - \beta)}.$$

Задача. Вылічыць вышыню вертыкальнага прадмета, аснова якога недаступная (чарц. 75).

Рашэнне. Дапустым, што можна выбраць гарызантальны базіс $AB = b$, з канцоў якога бачна вяршыня S вымяраемай вышыні. Няхай h — вышыня вугламернага інструмента. Вымераўшы вуглы α і β трохвугольніка SA_1B_1 , знойдзем (па тэарэме сіносаў):

$$\frac{A_1S}{\sin \beta} = \frac{b}{\sin (\alpha - \beta)}, \text{ адкуль } A_1S = \frac{b \sin \beta}{\sin (\alpha - \beta)},$$

і, нарэшце,

$$OS = OO_1 + O_1S = h + A_1S \sin \alpha = h + \frac{b \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha - \beta)}.$$

§ 47. Ужыванне трыганаметрыі пры рашэнні геаметрычных задач

Планіметрычныя задачы. Трыганаметрыя ўжываецца пры рашэнні задач на вылічэнне элементаў розных геаметрычных фігур. Звычайна пры вылічэнні элементаў многавугольніка яго разбіваюць на трохвугольнікі з тым разлікам, каб шукаемыя элементы можна было вылічыць шляхам паслядоўнага рашэння рада трохвугольнікаў.

Задача. Вылічыць плошчу кругавога сегмента, дуга якога (у радыяльнай меры) вымяраецца лікам α ; радыус круга роўны R (чарц. 76).



Чарц. 76.

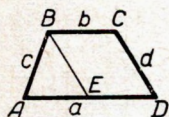
Рашэнне. Плошча S сегмента роўна плошчы адпаведнага сектара OAB мінус плошча трохвугольніка OAB . З геаметрыі вядома, што плошча кругавога сектара вылічваецца па формуле $s_1 = \frac{1}{2} Rl$, дзе l — даўжыня дугі, якая яго абмяжоўвае.

Паколькі $l = \alpha R$, то $s_1 = \frac{1}{2} R^2 \alpha$.

Плошча трохвугольніка роўна $s_2 = \frac{R^2 \sin \alpha}{2}$.

Шукаемая плошча сегмента роўна

$$S = s_1 - s_2 = \frac{R^2 \alpha}{2} - \frac{R^2 \sin \alpha}{2} = \frac{R^2}{2} (\alpha - \sin \alpha).$$



Чарц. 77.

Задача. Асновы трапецыі роўны a і b , бакавыя стораны роўны c і d . Вызначыць вуглы трапецыі.

Рашэнне. Няхай a — большая аснова, A — вугал, утвораны старанамі a і c (чарц. 77). Правядзём прамую, паралельную d ; тады трапецыя разаб'ецца на трохвугольнік ABE і паралелаграм $BCDE$. У трохвугольніку ABE вядомы даўжыні трох старон: c , d , $a - b$. Па тэарэме косінусаў знойдзем вугал A :

$$d^2 = (a - b)^2 + c^2 - 2c(a - b) \cos A, \text{ адкуль } \cos A = \frac{(a - b)^2 + c^2 - d^2}{2c(a - b)}.$$

Аналагічна вылічым:

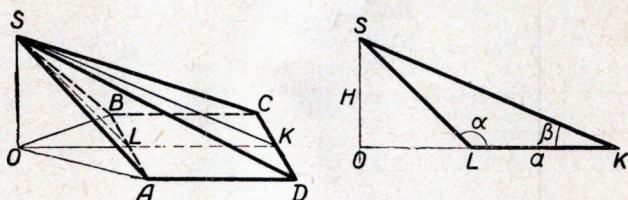
$$\cos D = \frac{(a - b)^2 + d^2 - c^2}{2d(a - b)} \text{ і, нарэшце, } B = \pi - A; \quad C = \pi - D.$$

Стэрэаметрычныя задачы. Трыганаметрыя ўжываецца пры вылічэнні розных элементаў прасторавых фігур: аб'ёмаў, паверхняў, плошчаў сячэнняў, плоскіх і двухгранных вуглоў і да т. п. Звычайна робяць дапаможныя пабудаванні (правядзенне сячэнняў, ліній і да т. п.) з тым разлікам, каб шукаемыя элементы можна было знайсці шляхам паслядоўнага рашэння рада трохвугольнікаў. Пры рашэнні задач на вылічэнне з лікавымі данымі звычайна спачатку рашаюць задачу ў агульным выглядзе, а затым падстаўляюць дадзеныя ва ўмове лікі. Агульную формулу

рашэння прадстаўляюць у выглядзе, які найбольш зручны для наступных вылічэнняў.

Задача. Асновай піраміды служыць квадрат. Адна з бакавых граней — раўнабедраны трохвугольнік і ўтварае з асновай тупы вугал α . Працілеглая грань утварае з асновай вугал β . Вышыня піраміды роўна H ; знайсці аб'ём піраміды.

Рашэнне. Няхай $ABCD$ — аснова піраміды; S — вяршыня; OS — вышыня; ASB — грань, якая ўтварае з асновай вугал α ; DSC — грань, якая ўтварае з асновай вугал β (чарц. 78).



Чарц. 78.

Нахільныя SA і SB роўныя; таму іх праекцыі OA і OB на плоскасць асновы роўныя. Няхай L — сярэдзіна стараны AB . У раўнабедраных трохвугольніках AOB і ASB медыяны OL і SL ёсць таксама і вышыні; таму $OL \perp AB$ і $SL \perp AB$. Значыць, $\angle OLS$ ёсць лінейны вугал двухграннага вугла $OABS$ (з кантам AB), а таму $\angle OLS = 180^\circ - \alpha$. Няхай K — пункт перасячэння прамой OL са стараной CD ; маем: $DK = KC$ і $OK \perp CD$. Нахільная $SK \perp CD$ (па тэарэме аб 3-х перпендыкулярах). Паколькі $OK \perp CD$ і $SK \perp CD$, то $\angle OKS = \beta$. Паўплоскасці ABS і DCS перасякуцца ў тым і толькі ў тым выпадку, калі $180^\circ - \alpha > \beta$, г. зн. $\alpha + \beta < 180^\circ$ (вугал $180^\circ - \alpha$ ёсць знешні вугал трохвугольніка SLK , а β — унутраны вугал); гэту ўмову будзем лічыць выкананай. Адрэзак LK роўны старане асновы a . Паколькі $OL = H \operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -H \operatorname{ctg} \alpha$ (з трохвугольніка SOL) і $OK = H \operatorname{ctg} \beta$ (з трохвугольніка SOK), то $a = OK - OL = H (\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha)$. Вылічваем аб'ём:

$$V = \frac{1}{3} a^2 H = \frac{1}{3} H^3 (\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha)^2.$$

Гэта форма адказу зручная для вылічэнняў з дапамогай натуральных табліц. Калі вылічэнні праводзяцца пры дапамозе лагарыфмічных табліц або лінейкі, то трэба суму катангенсаў пераўтварыць у здабытак:

$$V = \frac{1}{3} H^3 \frac{\sin^2(\alpha + \beta)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta}.$$

Вылічым аб'ём пры наступных даных: $H \approx 12,53$; $\alpha \approx 110^\circ 48'$, $\beta \approx 32^\circ 30'$.
1) $H^3 \approx (12,53)^3 \approx 1967$ (табліца XIII Браздзіса).

$$2) \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha \approx \operatorname{ctg} 32^\circ 30' + \operatorname{ctg} 110^\circ 48' = \operatorname{ctg} 32^\circ 30' - \operatorname{ctg} 69^\circ 12' \approx 1,5697 - 0,3799 \approx 1,1898 \approx 1,190 \quad (\text{табліца IX Брадзіса}).$$

$$3) (\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha)^2 \approx (1,190)^2 \approx 1,416 \quad (\text{табліца XI Брадзіса}).$$

$$\text{і, нарэшце, } V = \frac{H^3 (\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha)^2}{3} \approx \frac{1967 \cdot 1,416}{3} \approx 928,4.$$

§ 48. Аб ўжыванні трыганаметрыі ў фізіцы, механіцы, тэхніцы

Трыганаметрыя мае шматлікае ўжыванне ў розных пытаннях фізікі, механікі, тэхнікі.

I. У механіцы і фізіцы часта ўжываецца наступная тэарэма аб праекцыі вектара на вось.

Тэарэма. *Праекцыя вектара на вось роўна даўжыні вектара, памножанай на косінус вугла, утворанага вектарам з воссю.*

Доказ. Няхай $\vec{F}$ — дадзены вектар, l — вось (паказана ў гарызантальным становішчы), φ — вугал вектара з воссю l (чарц. 79).

Пры паралельным пераносе вектара велічыня яго праекцыі на вось не мяняецца, таму можна перанесці вектар у становішча $\vec{OM}$, змясціўшы яго пачатак у некаторым пункце O восі l . Прыняўшы пункт O за пачатак каардынат, а вось l за вось абсцыс, атрымаем:

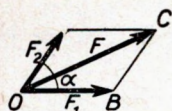
$$\cos \varphi = \frac{x}{r}, \text{ або } x = r \cos \varphi,$$

дзе $x = n r_l \vec{OM} = n r_l \vec{F}$, а r ёсць даўжыня $|\vec{F}|$ вектара $\vec{F}$. Значыць,

$$n r_l \vec{F} = |\vec{F}| \cos \varphi, \quad \text{ш. т. д.}$$

Вылічэнне работы. Калі пад дзеяннем пастаяннай сілы $\vec{F}$ цела апісвае прамалінейны шлях S , то для вылічэння работы A трэба велічыню праекцыі сілы $\vec{F}$ на шлях памножыць на даўжыню шляху; значыць:

$$A = n r \vec{F} \cdot S = |\vec{F}| S \cos \varphi.$$



Чарц. 80.

II. Каб вылічыць велічыню раўнадзейчай $\vec{F}$ двух сіл $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, якія ўтвараюць паміж сабой вугал α , дастаткова вылічыць даўжыню OC стараны трохвугольніка OBC (чарц. 80). Па тэарэме косінусаў атрымаем:

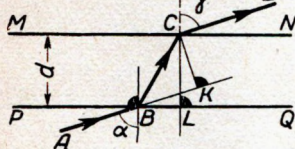
$$OC^2 = OB^2 + BC^2 - 2OB \cdot BC \cdot \cos(180^\circ - \alpha),$$

або

$$|\vec{F}|^2 = |\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 + 2|\vec{F}_1| \cdot |\vec{F}_2| \cdot \cos \alpha.$$

III. З фізікі вядома, што далёкасць палёту цела, кінутага з пачатковай скорасцю v_0 пад вуглом α (дзе $0 < \alpha < 90^\circ$) да гарызонта,

роўна $x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ (супраціўленне паветра не ўлічваецца, g — паскарэнне сілы цяжару). Далёкасць палёту з'яўляецца найбольшай, калі $\sin 2\alpha = 1$, адкуль $2\alpha = 90^\circ$ і $\alpha = 45^\circ$. Такім чынам, далёкасць палёту будзе найбольшай, калі цела кінута пад вуглом 45° да гарызонта.



Чарц. 81.

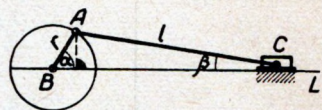
IV. Задача з геаметрычнай оптыкі: вызначыць зрушэнне праменя святла пасля яго праходжання праз плоска-паралельную пласцінку (чарц. 81).

Няхай d — таўшчыня пласцінкі, n — яе паказчык праламлення, MN і PQ — плоскасці, якія абмяжоўваюць пласцінку, α — вугал падзення праменя. Прамень AB , сустрэўшы пласцінку, зменіць напрамак і пойдзе па прамой BC , якая складае вугал β з перпендыкулярам да плоскасці PQ , дзе (па закону праламлення святла): $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$. Пры выхадзе з пласцінкі прамень складзе з перпендыкулярам да плоскасці MN вугал γ , дзе $\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{1}{n}$. Значыць, $\sin \alpha = \sin \gamma$, і паколькі α і γ — вострыя вуглы, то $\alpha = \gamma$. Зрушэнне KC знойдзем з трохвугольніка BKC :

$$KC = BC \sin \angle CBK = BC \sin (\alpha - \beta); \text{ але } BC = \frac{d}{\cos \beta}$$

(з трохвугольніка BCL), а таму $KC = \frac{d \sin (\alpha - \beta)}{\cos \beta}$.

V. Рух крывашыпнага механізма. Пры вярчэнні стрыжня крывашыпа AB паўзун C рухаецца па прамой BL . Рух перадаецца пры дапамозе шатуна AC (чарц. 82). Няхай α — вугал, утвораны крывашыпам AB , а β — вугал, утвораны шатуном з прамой BL , r — даўжыня крывашыпа, l — даўжыня шатуна. Залежнасць паміж α і β можна знайсці з трохвугольніка ABC .



Чарц. 82.

$$\frac{r}{\sin \beta} = \frac{l}{\sin \alpha}, \text{ адкуль } \sin \beta = \frac{r}{l} \sin \alpha.$$

У многіх механізмах $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$, і тады $\beta = \arcsin \frac{\sin \alpha}{5}$.

Для разліку можна скласці, напрыклад, такую табліцу набліжаных значэнняў β :

α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
β	0°	2°	4°	$5,5^\circ$	$7,5^\circ$	9°	10°	11°	$11,5^\circ$	$11,5^\circ$

Калі крывашып ад пачатковага становішча павернецца на вугал α , то адлегласць паўзуна ад цэнтра вярчэння B зробіцца роўнай

$$BC = r \cos \alpha + l \cos \beta.$$

Адхіленне паўзуна ад яго першапачатковага становішча роўна $r + l - (r \cos \alpha + l \cos \beta) = r(1 - \cos \alpha) + l(1 - \cos \beta)$.

VI. З фізікі вядома, што ваганне пераменнага электрычнага току выражаецца формулай:

$$I = A \sin(\omega t + \alpha),$$

дзе A — амплітуда ваганняў, ω — частата, $t = \frac{2\pi}{\omega}$ — перыяд, α — фаза.

Звычайны трохфазны ток, які вырабляе электрагенератар, мае тры фазы: α , $\alpha + \frac{2\pi}{3}$, $\alpha + \frac{4\pi}{3}$, якія атрымліваюцца адна з другой шляхам паслядоўнага дадання трэці перыяду сінуса. Такім чынам, ваганне току для кожнай фазы паасобку выразіцца формуламі:

$$I_1 = A \sin(\omega t + \alpha); \quad I_2 = A \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{2\pi}{3}\right);$$

$$I_3 = A \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{4\pi}{3}\right).$$

Пры гэтым у любы момант часу ў нулявым провадзе ток роўны нулю, г. зн. $I_1 + I_2 + I_3 = 0$. На самай справе:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 + I_3 &= A \left[\sin(\omega t + \alpha) + \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{4\pi}{3}\right) \right] = \\ &= A \left[2 \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{3}\right) \cos \frac{\pi}{3} + \sin\left(\omega t + \pi + \alpha + \frac{\pi}{3}\right) \right] = \\ &= A \left[\sin\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{3}\right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Раздзел VII

ТРЫГАНАМЕТРЫЧНЫЯ ЎРАЎНЕННІ

§ 49. Прасцейшыя трыганаметрычныя ўраўненні

Азначэнне. *Прасцейшымі трыганаметрычнымі ўраўненнямі называюцца ўраўненні:*

$$\cos x = m; \sin x = m; \operatorname{tg} x = m; \operatorname{ctg} x = m,$$

дзе m — дадзены лік.

Рашыць прасцейшае трыганаметрычнае ўраўненне — значыць знайсці мноства ўсіх вуглоў (дуг), якія маюць дадзенае значэнне m трыганаметрычнай функцыі. У § 13 гэта задача рашалася пабудаваннем.

1. Ураўненне $\cos x = m$. Калі $|m| \leq 1$, то існуюць дзве сіметрычныя адносна восі абсцыс дугі

$$\arccos m \text{ і } -\arccos m,$$

косінус якіх мае зададзенае значэнне (пабудаванне гл. у § 13). Прамежак ад $-\pi$ да π , на якім заканчваюцца гэтыя дугі, роўны па велічыні поўнай акружнасці (перыяду косінуса); усе іншыя шукаемыя дугі заканчваюцца ў тых жа пунктах. Агульнае рашэнне ўраўнення (г. зн. мноства ўсіх яго рашэнняў) выразіцца формулай:

$$x = \pm \arccos m + 2k\pi.$$

Пэўнае — прыватнае — рашэнне ўраўнення атрымаецца, калі ў правай частцы формулы агульнага рашэння выбраць знак і прыдаць k некаторае цэлалікавае значэнне.

Калі $|m| > 1$, то ўраўненне не мае рашэнняў.

Прыклады. 1) $\cos x = \frac{1}{2}$; $x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2k\pi = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ (у радыянах) $= \pm 60^\circ + 360^\circ k$ (у градусах).

2) $\cos x = 0,7251$; $x = \pm \arccos 0,7251 + 360^\circ k \approx \pm 43^\circ 32' + 360^\circ k$ (у градусах) $\approx \pm 0,7598 + 2k\pi$ (у радыянах) ($\arccos 0,7251 \approx 43^\circ 32'$ знаходзіцца па табліцы VIII Брадзіса, градусы пераведзены ў радыяны па табліцы XVI).

2. Ураўненне $\sin x = m$. Калі $|m| \leq 1$, то сінусы дуг $\arcsin m$ і $\pi - \arcsin m$ маюць зададзенае значэнне m (гл. § 13). Канцы гэтых дуг сіметрычныя адносна восі ардынаты. Мноства ўсіх шукаемых дуг атрымаецца дадаваннем да знойдзеных дзвюх дуг любога цэлага ліку поўных абаротаў (перыядаў сінуса):

$$x = \begin{cases} \arcsin m + 2k\pi \\ \pi - \arcsin m + 2k\pi \end{cases} = \begin{cases} \arcsin m + 2k\pi \\ -\arcsin m + (2k + 1)\pi. \end{cases} \quad (1)$$

Агульнае рашэнне можна запісаць адной формулай:

$$x = (-1)^n \arcsin m + n\pi \quad (\text{дзе } n \text{ — адвольны цэлы лік}).$$

На самай справе, пры цотным $n = 2k$ атрымліваецца верхні, а пры няцотным $n = 2k + 1$ — ніжні радок формулы (1).

Калі $|m| > 1$, то ўраўненне не мае рашэнняў.

Прыклады. 1) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + n\pi = (-1)^n \frac{\pi}{4} + n\pi$

2) $\sin x = 1$. Усе дугі, якія маюць сінус роўны 1, заканчваюцца ў верхнім канцы вертыкальнага дыяметра, таму маем $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (дзе k — любы цэлы лік).

Такім жа чынам рашаецца ўраўненне $\sin x = -1$; маем $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

3. Ураўненне $\operatorname{tg} x = m$. Пры любым значэнні m у інтэрвале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, роўным па даўжыні π , г. зн. перыяду тангенса, існуе адзіная дуга $\arctg m$, якая мае дадзены тангенс.

Для канцоў шукаемых дуг магчымы два дыяметральна процілеглыя становішчы. Усе шукаемыя дугі можна атрымаць, дадаючы да дугі $\arctg m$ любы цэлы лік паўабаротаў (перыядаў тангенса). Таму мноства ўсіх шукаемых дуг выразіцца формулай:

$$x = \arctg m + k\pi.$$

4. Ураўненне $\operatorname{ctg} x = m$. Пры любым m мае бясконцае мноства рашэнняў:

$$x = \operatorname{arctg} m + k\pi$$

(разважанні такія ж, як і ў папярэднім выпадку).

Прыклады.

1) $\operatorname{ctg} x = -1$; $x = \operatorname{arctg}(-1) + k\pi = -\frac{3\pi}{4} + k\pi$.

2) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}$; $x = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 180^\circ k \approx \operatorname{arctg} 0,3333 + 180^\circ k \approx 18^\circ 26' + 180^\circ k$ (у градусах) $\approx 0,3217 + k\pi$ (у радыянах).

Заўвага. Агульныя рашэнні прасцейшых трыганаметрычных ураўненняў $\cos x = m$; $\sin x = m$; $\operatorname{tg} x = m$; $\operatorname{ctg} x = m$ часам абазначаюцца наступным чынам:

$$\operatorname{Arc} \cos m, \operatorname{Arc} \sin m, \operatorname{Arc} \operatorname{tg} m, \operatorname{Arc} \operatorname{ctg} m.$$

Такім чынам:

$$\operatorname{Arc} \cos m = \pm \arccos m + 2k\pi; \operatorname{Arc} \sin m = (-1)^k \arcsin m + k\pi;$$

$$\operatorname{Arc} \operatorname{tg} m = \arctan m + k\pi; \operatorname{Arc} \operatorname{ctg} m = \operatorname{arccot} m + k\pi,$$

дзе k — адвольны цэлы лік.

На ніжэйпададзеных прыкладах паказана рашэнне трыганаметрычных ураўненняў, якія прыводзяцца да прасцейшых.

Прыклады.

1) Рашыць ураўненне: $2 \sin x - 1 = 0$

Рашэнне.

$$\sin x = \frac{1}{2}, \text{ адкуль } x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi.$$

2) Рашыць ураўненне: $2 \cos x + 3 = 0$.

Рашэнне. Ураўненне не мае рашэнняў, таму што раўназначнае яму прасцейшае ўраўненне $\cos x = -\frac{3}{2}$ не мае рашэнняў.

3) Рашыць ураўненне: $2 \cos 3x + 1 = 0$.

Рашэнне. Прамежкавы аргумент $3x$ знаходзім з ураўнення:

$$\cos(3x) = -\frac{1}{2}; 3x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \text{ адсюль знойдзем агульныя рашэнне дадзенага ўраўнення } x = \pm \frac{2\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi.$$

4) Рашыць ураўненне: $2 \sin x + \cos x = 0$.

Рашэнне. Падзяліўшы абедзве часткі ўраўнення на $\cos x$ атрымаем:

$$2 \operatorname{tg} x + 1 = 0, \quad (2)$$

$$\text{адкуль } \operatorname{tg} x = -\frac{1}{2} \text{ і } x \approx -26^\circ 34' + 180^\circ k$$

Пры пераходзе да ўраўнення (2) з мноства дапушчальных значэнняў невядомага выключаюцца лікі $\frac{\pi}{2} + k\pi$, таму што пры $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ левая частка ўраўнення (2) траціць сэнс. Гэтыя значэнні не задавальняюць ураўненню (1), а таму страты караняў не адбываецца.

§ 50. Спосаб прывядзення да адной функцыі

Разгледзім, напрыклад, ураўненне:

$$2 \cos^2 x - 7 \cos x + 3 = 0,$$

квадратнае адносна $\cos x$. Рашыўшы гэта ўраўненне адносна косінуса:

$$\cos x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4},$$

складзём два прасцейшыя ўраўненні:

$$\cos x = \frac{1}{2} \text{ і } \cos x = 3.$$

Першае ўраўненне мае агульнае рашэнне:

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad (1)$$

другое не мае рашэнняў. Формула (1) дае мноства ўсіх рашэнняў дадзенага ўраўнення.

Калі ўраўненне мае розныя трыганаметрычныя функцыі ад невядомага, то можна ўсе гэтыя функцыі выразіць праз адну і, выканаўшы падстаноўку, атрымаць ураўненне, якое мае толькі адну трыганаметрычную функцыю ад невядомага.

Ужыванне формул, якія выражаюць трыганаметрычныя функцыі адна праз другую, можа ўнесці ва ўраўненне радыкалы, і пры вызваленні ўраўнення ад іх магчыма з'яўленне пабочных рашэнняў. Таму рэкамендуецца (калі гэта магчыма) выбіраць такую падстаноўку, якая не ўносіць ва ўраўненне радыкалаў.

Прыклады. 1) Рашыць ураўненне:

$$2 \cos^2 x + 3 \sin x = 0.$$

Р а ш ь е н н е. Замяніўшы $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$, атрымаем:

$$2 - 2 \sin^2 x + 3 \sin x = 0. \text{ або } 2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0.$$

адкуль: $\sin x = -\frac{1}{2}$ і $\sin x = 2$

Першае ўраўненне мае агульнае рашэнне:

$$x = (-1)^n \arcsin \left(-\frac{1}{2} \right) + n\pi = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + n\pi,$$

другое не мае рашэнняў.

З а ў в а г а. Калі ўжыць падстаноўку $\sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x}$, то атрымаецца ўраўненне, якое мае радыкал. Таму пры рашэнні дадзенага ўраўнення мэтазгодна выразіць косінус праз сінус, але не сінус праз косінус.

2) Рашыць ураўненне: $\sin x + \cos x = 1$. (1)

Р а ш ь е н н е. Падставіўшы $\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x}$, атрымаем:

$$\sin x \pm \sqrt{1 - \sin^2 x} = 1, \text{ або } \pm \sqrt{1 - \sin^2 x} = 1 - \sin x.$$

Пасля ўзвядзення ў квадрат абедзвюх частак і скарачэння атрымаем:

$$\sin^2 x - \sin x = 0, \quad (2)$$

адкуль:

$$\sin x = 1 \text{ і } \sin x = 0.$$

Рашыўшы гэтыя прасцейшыя ўраўненні, знойдзем дзве серыі рашэнняў:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi. \quad x = n\pi \quad (k \text{ і } n - \text{цэлыя лікі}).$$

П р а в е р к а Для рашэнняў першай серыі:

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) = 1, \quad \cos \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) = 0.$$

Ураўненне (1) задавальняецца. Для рашэнняў другой серыі:

$$\sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = \begin{cases} 1 & \text{калі } n \text{ цотнае;} \\ -1 & \text{калі } n \text{ няцотнае.} \end{cases}$$

Ураўненне (1) задавальняецца толькі пры цотных значэннях $n = 2m$. Рашэнні другой серыі пры няцотным $n = 2m + 1$ з'яўляюцца пабочнымі (другі спосаб рашэння гэтага ўраўнення гл. ніжэй на стар. 89).

Агульнае рашэнне ўраўнення (1) складаецца з дзвюх серый:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ і } x = 2m\pi.$$

Для ўраўнення, якое змяшчае невядомае пад знакам трыганаметрычных функцый ад складаных аргументаў, у радзе выпадкаў таксама можна, выразіўшы ўсе трыганаметрычныя функцыі праз адну, атрымаць ураўненне, якое змяшчае толькі адну трыганаметрычную функцыю ад невядомага.

Прыклады.

1) Рашыць ураўненне: $\cos 2x = \sin^2 x$.

Р а ш е н н е. Выканаўшы падстаноўку:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$

атрымаем наступнае ўраўненне, якое змяшчае толькі адну функцыю ад невядомага:

$$\cos 2x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \text{ або } 3 \cos 2x = 1.$$

адкуль:

$$\cos 2x = \frac{1}{3}; \quad 2x = \pm \arccos \frac{1}{3} + 360^\circ k$$

і, нарэшце,

$$x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{3} + 180^\circ k \approx \pm 35^\circ 16' + 180^\circ k.$$

2) Рашыць ураўненне:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cos 2x + \sin(2x - \pi) \sin x = 0.$$

Р а ш е н н е. Падставіўшы

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \text{ і } \sin(2x - \pi) = -\sin 2x,$$

прывядзём ураўненне да наступнага выгляду:

$$\cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x = 0, \text{ або } \cos 3x = 0,$$

адкуль:

$$3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ і } x = \frac{\pi}{6} + k \frac{\pi}{3} = \frac{(2k+1)\pi}{6}.$$

§ 51. Спосаб раскладання на множнікі

Калі левую частку ўраўнення, пасля пераносу ў яе ўсіх складаных, можна раскласці на множнікі, то ўраўненне прыме выгляд роўнасці нулю здабытку. Далей трэба прыраўняць пачаргова нулю кожны з сумножнікаў*, рашыць кожнае з атрыманых ураўненняў і аб'яднаць у адно мноства ўсе знойдзеныя рашэнні.

* Здабытак роўны нулю ў тым і толькі ў тым выпадку, калі хаця б адзін з сумножнікаў роўны нулю.

Приклад. Рашыць ураўненне: $\sin 5x - \cos 3x = \sin x$.

Рашэнне. Перанясём усе складаемыя ў левую частку і раскладзем яе на множнікі. Маём паслядоўна:

$$\begin{aligned}(\sin 5x - \sin x) - \cos 3x &= 0; \\ 2 \sin 2x \cdot \cos 3x - \cos 3x &= 0; \\ \cos 3x \cdot (2 \sin 2x - 1) &= 0.\end{aligned}$$

Прыраўняўшы нулю сумножнікі левай часткі, атрымаем сукупнасць ураўненняў:

$$2 \sin 2x - 1 = 0 \text{ і } \cos 3x = 0.$$

Рэшым першае ўраўненне:

$$\sin 2x = \frac{1}{2}; 2x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi \text{ і } x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + n \frac{\pi}{2}. \quad (1)$$

Рэшым другое ўраўненне:

$$3x = \frac{\pi}{2} + k\pi; \quad x = \frac{2k+1}{6}\pi. \quad (2)$$

Агульнае рашэнне дадзенага ўраўнення складаецца з дзвюх серый:

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2} \text{ і } x = \frac{2k+1}{6}\pi.$$

Калі пры некаторым значэнні невядомага хаця б адзін з сумножнікаў ператвараецца ў нуль, а іншыя (хаця б адзін) трацяць сэнс, то і ўвесь здабытак траціць сэнс; такія значэнні невядомага рашэннямі дадзенага ўраўнення не з'яўляюцца.

Приклад. Калі прыраўняць нулю паасобку сумножнікі левай часткі ўраўнення

$$\sin 2x \cdot \operatorname{tg} x = 0, \quad (1)$$

то атрымаем сукупнасць ураўненняў:

$$\sin 2x = 0 \text{ і } \operatorname{tg} x = 0, \quad (2)$$

з якіх знойдзем:

$$x = \frac{n\pi}{2} \text{ і } x = k\pi.$$

Другі сумножнік $\operatorname{tg} x$ траціць сэнс пры значэннях $x = \frac{\pi}{2} + k\pi = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, якія змяшчаюцца ў мностве рашэнняў першага ўраўнення (2) пры няцотным $n = 2k+1$. Гэта пабочныя рашэнні. Пры цотным $n = 2k$ рашэнні першага ўраўнення (2) змяшчаюцца ў мностве рашэнняў другога ўраўнення. Формула агульнага рашэння дадзенага ўраўнення ёсць $x = k\pi$.

§ 52. Аб страце рашэнняў і з'яўленні пабочных рашэнняў пры выкананні пераўтварэнняў

Тоесныя пераўтварэнні дадзенага выразу могуць змяніць яго вобласць вызначэння. Так, напрыклад, выраз $\frac{\sin 2x}{\sin x}$ не мае сэнсу пры $x = k\pi$ (k — любы цэлы лік), таму што пры гэтых значэннях аргумента назойнік ператвараецца ў нуль. Калі выканаць наступнае пераўтварэнне:

$$\frac{\sin 2x}{\sin x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x} = 2 \cos x,$$

то атрымаецца выраз $2 \cos x$, які мае сэнс пры ўсіх значэннях x . Мноства дапушчальных значэнняў аргумента x расшырылася.

Наадварот, пры пераходзе ад выразу $2 \cos x$ да першапачатковага $\frac{\sin 2x}{\sin x}$ мноства дапушчальных значэнняў аргумента x звужаецца.

Пры выкананні тоесных пераўтварэнняў над выразамі, якія змяшчаюцца ва ўраўненні, магчыма з'яўленне пабочных рашэнняў, калі мноства дапушчальных значэнняў невядомага расшырылася, і магчыма страта рашэнняў, калі гэта мноства звужалася.

Прыклад. Рашыць ураўненне:

$$\frac{1 + \cos 2x}{2 \cos x} = \frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x}. \quad (1)$$

Рашэнне. Робім скарачэнне дробавых выказаў:

$$\frac{1 + \cos 2x}{2 \cos x} = \frac{2 \cos^2 x}{2 \cos x} = \cos x;$$

$$\frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x} = \frac{2 \sin x \cos x}{2 \sin^2 x} = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Ураўненне прыме выгляд:

$$\cos x = \frac{\cos x}{\sin x}, \text{ або } \frac{\cos x (\sin x - 1)}{\sin x} = 0. \quad (2)$$

Прыраўняўшы нулю сумножнікі лічніка:

$$\cos x = 0 \text{ і } \sin x - 1 = 0,$$

атрымаем:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ і } x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi.$$

Другая серыя значэнняў x змяшчаецца ў першай, і абедзве формулы можна аб'яднаць у адну: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Скарачэнне дробавых выказаў пры пераходзе ад ураўнення (1) да ўраўнення (2) можа ўнесці пабочныя рашэнні. У дадзеным прыкладзе ўсе знойдзеныя рашэнні пабочныя, таму што левая частка ўраўнення (1) пры $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ траціць сэнс. Дадзенае ўраўненне не мае рашэнняў.

Заўвага. Страты рашэнняў не можа быць, таму што пры пераходзе ад ураўнення (1) да ўраўнення (2) мноства дапушчальных значэнняў x расшырылася.

§ 53. Прыватныя прыёмы рашэння трыганаметрычных ураўненняў

Ніжэй на прыкладах паказаны розныя прыватныя прыёмы рашэння трыганаметрычных ураўненняў. Гэтыя прыёмы могуць быць самымі разнастайнымі ў залежнасці ад выгляду левай і правай частак ураўнення.

Прыклады.

1) Рашыць ураўненне: $\sin x \sin 7x = \sin 3x \sin 5x$.

Р а ш э н н е. Пераўтворым у суму левую і правую часткі:

$$\frac{\cos 6x - \cos 8x}{2} = \frac{\cos 2x - \cos 8x}{2}, \text{ або } \cos 6x = \cos 2x.$$

Прыменім спосаб раскладання на множнікі:

$$\cos 6x - \cos 2x = 0; \quad -2 \sin 4x \sin 2x = 0,$$

адкуль:

$$\sin 4x = 0, \quad \sin 2x = 0 \text{ і, нарэшце, } x = \frac{k\pi}{4} \text{ і } x = \frac{k\pi}{2}.$$

Першая серыя змяшчае другую (пры цотным $k = 2n$); таму $x = \frac{k\pi}{4}$ ёсць формула агульнага рашэння дадзенага ўраўнення.

2) Рашыць ураўненне: $\cos x + \sin x = 1$.

Р а ш э н н е. Падзяліўшы абедзве часткі на $\sqrt{2}$ і прыняўшы пад увагу, што $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, прадставім левую частку ў выглядзе косінуса рознасці. Маём паслядоўна:

$$\cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ і } x - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi,$$

адкуль знойдзем дзве серыі рашэнняў:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ і } x = 2k\pi.$$

Другім спосабам гэта ўраўненне было рэшана ў § 50 (стар. 85, прыклад 2). Пры рашэнні, выкладзеным у гэтым параграфе, праверка караняў не патрабуецца.

З а ў в а г а. Гэтым спосабам можа быць рэшана ўраўненне

$$a \sin x + b \cos x = c.$$

На самай справе, увядзеннем дапаможнага вугла φ (гл. § 25) яно можа быць пераўтворана да выгляду:

$$\sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi) = c.$$

3) Рашыць ураўненне:

$$\sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 0. \quad (1)$$

Р а ш э н н е. Падзяліўшы абедзве часткі на $\cos^2 x$, атрымаем:

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 1 = 0. \quad (2)$$

адкуль:

$$\operatorname{tg} x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ і } x = \arctg \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} + k\pi.$$

Пры пераходзе ад ураўнення (1) да (2) вобласць вызначэння ўраўнення звужаецца, таму што выключаецца з мноства дапушчальных значэнняў невядомага ліку $\frac{\pi}{2} + k\pi$. Але ні адзін з гэтых лікаў не задавальняе ўраўненню (1), таму страты рашэнняў не адбываецца.

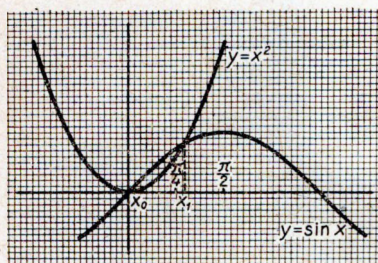
Заўвага. Гэта ўраўненне адносіцца да класа аднародных трыганаметрычных ураўненняў, таму што ўсе яго члены маюць адну і тую ж ступень (у дадзеным прыкладзе другую) адносна $\sin x$ і $\cos x$. Выкладзеным спосабам звычайна і рашаюцца аднародныя трыганаметрычныя ўраўненні.

4). Рашыць ураўненне: $3 \cos 4x - 5 \sin^3 x = 10$.

Рашэнне. Ураўненне не мае рашэнняў, таму што па абсалютнай велічыні $3 \cos 4x$ не больш, чым 3, а $5 \sin^3 x$ не больш, чым 5, а таму правая частка не можа быць роўна 10.

§ 54. Аб набліжаным рашэнні трыганаметрычных ураўненняў

Сродкамі элементарнай матэматыкі не заўсёды магчыма скласці формулу агульнага рашэння дадзенага ўраўнення. У гэтым выпадку на практыцы вылічаюць корані набліжана, пры дапамозе графічнага метаду і табліц значэнняў функцый. Раствучым сказанае на прыкладзе.



Чарц. 83

Рашыць ураўненне: $x^2 = \sin x$.

Акуратна пабудаваны графік (чарц. 83) паказвае, што лініі $y = x^2$ і $y = \sin x$ перасякаюцца ў двух пунктах з абсцысамі $x_0 = 0$ і $x_1 > 0$. Ураўненне мае два корані $x_0 = 0$ і $x_1 > 0$. Вылічым корань x_1 з дакладнасцю да 0, 1,

карыстаючыся табліцамі Браззіса.

На чарцяжы відаць, што корань x_1 змяшчаецца ў інтэрвале $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$. Гэта ж пацвярджаюць вылічэнні. На самай справе, пры $x = \frac{\pi}{4}$ левая частка ўраўнення $x^2 - \sin x = 0$, раўназначнага дадзенаму, адмоўная:

$$x^2 - \sin x = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - \sin \frac{\pi}{4} \approx (0,7854)^2 - 0,7071 \approx$$

$$\approx 0,6168 - 0,7071 < 0, \text{ а пры } x = \frac{\pi}{2} \text{ дадатная:}$$

$$x^2 - \sin x = (1,5708)^2 - 1 > 0$$

(узвядзенне ў квадрат выконваем па табліцах квадратаў).

З чарцяжа відаць, што значэнне x_1 «блізкае» да $\frac{\pi}{4}$; таму, па дзяліўшы інтэрвал $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, напрыклад, на 5 роўных частак, выпрабуем значэнне $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{20} = \frac{3\pi}{10}$ ($= 54^\circ$).

Маем:

$$x^2 - \sin x = \left(\frac{3\pi}{10}\right)^2 - \sin 54^\circ \approx (0,9425)^2 - 0,8090 \approx$$

$\approx 0,8883 - 0,8090 > 0$. Паколькі пры $x = \frac{\pi}{4}$ левая частка ўраўнення $x^2 - \sin x = 0$ адмоўная, а пры $x = \frac{3\pi}{10}$ дадатная, то $\frac{\pi}{4} < x_1 < \frac{3\pi}{10}$. Падзяліўшы інтэрвал $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{10})$, напрыклад, на тры роўныя часткі, выпрабуем значэнні:

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{60} = \frac{4\pi}{15} (= 48^\circ) \text{ і } x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{30} = \frac{17\pi}{60} (= 51^\circ).$$

Пры $x = \frac{4\pi}{15}$ маем:

$$\left(\frac{4\pi}{15}\right)^2 - \sin \frac{4\pi}{15} \approx (0,8378)^2 - \sin 48^\circ \approx 0,7019 - 0,7431 < 0.$$

Выпрабуем значэнне $x = \frac{17\pi}{60}$:

$$\left(\frac{17\pi}{60}\right)^2 - \sin 51^\circ \approx (0,8901)^2 - 0,7771 \approx 0,7923 - 0,7771 > 0.$$

Такім чынам, корань x заключан паміж лікамі $\frac{4\pi}{15} = 0,837 \dots$

і $\frac{17\pi}{60} = 0,890 \dots$, а таму $0,8 < x_1 < 0,9$. Каб устанавіць, якое са значэнняў $0,8$ або $0,9$ трэба ўзяць, выпрабуем $x = 0,85$ ($\approx 48^\circ 42'$).

$$(0,85)^2 - \sin 48^\circ 42' \approx 0,7225 - 0,7513 < 0;$$

значыць, $0,85 < x_1 < 0,9$, а таму $x_1 \approx 0,9$ (з лішкам). Далейшым дзяленнем прамежку можна вылічыць x_1 з дакладнасцю да $0,01$ і г. д.

§ 55. Аб спосабе рацыяналізацыі

Метад рацыяналізацыі заключаецца ў наступным: *уводзіцца дапаможнае невядомае так, каб пасля падстаноўкі атрымалася рацыянальнае ўраўненне адносна гэтага дапаможнага невядомага.*

У якасці прыкладу рэшым ураўненне:

$$a \sin x + b \cos x = c, \text{ дзе } a \neq 0, b \neq 0 \text{ і } c \neq 0. \quad (1)$$

Рашэнне. Паколькі $\cos x$ і $\sin x$ выражаюцца рацыянальна праз $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$

(гл. § 26), то, дапусціўшы $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, атрымаем:

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

Пасля падстаноўкі ўраўненне прыме выгляд:

$$-\frac{t^2(b+c) - 2at + c - b}{1 + t^2} = 0. \quad (2)$$

Памножыўшы абедзве часткі на выраз $-(1 + t^2)$ (не роўны нулю пры ўсіх значэннях t), атрымаем квадратнае ўраўненне:

$$t^2(b + c) - 2at + c - b = 0, \quad (3)$$

раўназначнае ўраўненню (2), адкуль, калі $b \neq -c$:

$$t = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b + c} \quad (4)$$

Значэнні t сапраўдныя, калі $a^2 + b^2 \geq c^2$.

Калі $b = -c$, то ўраўненне (3) ператворыцца ва ўраўненне першай ступені з якога знойдзем:

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} = -\frac{b}{a}, \quad \frac{x}{2} = \arctg \left(-\frac{b}{a} \right) + k\pi. \quad (5)$$

Выраз для дапаможнага невядомага $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ траціць сэнс пры $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, г. зн. пры $x = (2k + 1)\pi$. Рашэнні ўраўнення (1) выгляду $x = (2k + 1)\pi$ (калі такія рашэнні існуюць) могуць быць страчаны. Падставіўшы $x = (2k + 1)\pi$ ва ўраўненне (1), атрымаем $-b = c$.

У гэтым выпадку ўраўненне (1) мае серыю рашэнняў $x = (2k + 1)\pi$.

Са сказанага вынікае:

1°. Калі $a^2 + b^2 < c^2$, то ўраўненне (1) не мае рашэнняў, таму што ўраўненне (3) не мае сапраўдных караняў.

2°. Калі $a^2 + b^2 \geq c^2$ і $c \neq -b$, то з ўраўнення (4) знойдзем:

$$x = 2 \left(\arctg \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b + c} + k\pi \right).$$

3°. Калі $c = -b$, то ўраўненне (1) мае дзве серыі рашэнняў:

$$x = (2k + 1)\pi \text{ і } x = 2\arctg \left(-\frac{b}{2} \right) + 2k\pi \text{ [з ўраўнення (5)].}$$

Гістарычны нарыс

Трыганаметрыя, як і ўсякая навуковая дысцыпліна, узнікла з патрэб практычнай дзейнасці чалавецтва. Разнастайныя задачы астраноміі, маравання, землемерання, архітэктуры прывялі да неабходнасці распацоўкі спосабу вылічэння элементаў геаметрычных фігур па вядомых значэннях іншых іх элементаў, знойдзеных шляхам непасрэдных вымярэнняў. Так, напрыклад, на аснове даных, атрыманых у выніку назіранняў і вымярэнняў, астраномы вылічылі адлегласці ад Зямлі да іншых нябесных цел.

Сама назва «трыганаметрыя» грэчаскага паходжання, у перакладзе на беларускую мову яна абазначае «вымярэнне трохвугольнікаў» τριγωνομετρία (трыганон) — трохвугольнік, μετρέω (метрэйн) — вымярэнне.

Зараджэнне трыганаметрыі адносіцца да глыбокай старажытнасці. Яшчэ задоўга да н. э. старажытнававілонскія вучоныя ўмелі прадказваць зацьменні Сонца і Месяца. Гэта дазваляе зрабіць вывад, што ім былі вядомы некаторыя найпростейшыя звесткі з трыганаметрыі.

У II ст. да н. э. для сабранага матэрыялу астранамічных назіранняў спатрэбілася матэматычная апрацоўка. Адным з заснавальнікаў трыганаметрыі лічыцца старажытнагрэчаскі астраном Гіпарх, які жыў у II ст. да н. э. Гіпарх з'яўляецца аўтарам першых трыганаметрычных табліц. Гэтыя табліцы да нас не дайшлі, але яны ўвайшлі (ва ўдасканаленым выглядзе) у твор «Вялікае пабудаванне» (Альмагест) славутага александрыйскага астранома Клаўдзія Птолемея, які жыў у другой палавіне II ст. н. э. У гэтых табліцах даваліся значэнні хорд акружнасці для розных значэнняў адпаведнага цэнтральнага

вугла. Адзінкай вымярэння хорд служыла $\frac{1}{60}$ частка радыуса. Гэтыя табліцы, гаворачы сучаснай мовай, з'яўляюцца табліцамі значэнняў падвоянага сінуса палавіны адпаведнага цэнтральнага вугла. У іх былі дадзены значэнні хорд для вуглоў 0,5°; 1°; 1,5°; 2°; 2,5°; ...; 180°. Аднак трэба мець на ўвазе, што ў старажытнай Грэцыі трыганаметрыя не вылучалася ў самастойную навуку, а лічылася часткай астраноміі.

Важны ўклад у развіццё трыганаметрыі быў унесен індыйскай матэматыкай у перыяд V—XII стст. н. э. Індыйскія матэматыкі сталі вылічваць не поўную хорду, як гэта рабілі грэкі, а яе палавіну (г. зн. лінію сінуса). Індыйцы склалі табліцу «сінусаў», у якой былі дадзены значэнні паўхорд, вымераных часткамі (мінутаі) акружнасці. Індыйскім матэматыкам былі вядомы суадносіны, якія ў сучасных абазначэннях пішуцца так:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad \cos \alpha = \sin (90^\circ - \alpha).$$

У перыяд IX—XV стст. вядучая роля ў развіцці матэматыкі належала народам Сярэдняй Азіі і Закаўказзя. Развіццё сярэднеазіяцкай матэматыкі адбывалася таксама ў цеснай сувязі з неабходнасцю рашэння практычных вылічальных задач, якія ставіліся астраноміяй, геаграфіяй, геадэзіяй. Сярэднеазіяцкімі вучонымі былі ўведзены ў разгляд шэсць трыганаметрычных ліній (сінуса, косінуса, тангенса, катангенса, секанса і касеканса). Для рашэння задач аб вызначэнні вышыні Сонца сірыйскі астраном Аль-Батані (які жыў у X ст.) склаў невялікую табліцу значэнняў катангенса. Славуты астраном і матэматык Абу-ль-Вефа з Харасана (цяпер тэрыторыя Ірана) выразіў на словах алгебраічныя суадносіны паміж трыганаметрычнымі функцыямі; ён жа склаў табліцы сінусаў з дакладнасцю да $\frac{1}{60^4}$ праз кожныя 10', а таксама табліцы тангенсаў.

Працамі сярэднеазіяцкіх вучоных трыганаметрыя сфарміравалася ў самастойную навуковую дысцыпліну, у якой сродкам даследавання з'явіліся не толькі геаметрычныя пабудаванні, але і алгебраічныя суадносіны паміж трыганаметрычнымі функцыямі. Славуты азербайджанскі матэматык і астраном Насірэддзін Тусі (які жыў у XIII ст.) у творы «Трактат аб поўным чатырохстаронніку» (трактат перакладзен на рускую мову) выклаў трыганаметрыю ў выглядзе самастойнай навукі. У гэтым творы быў упершыню ўведзен рад новых паняццяў і атрыман рад важных вынікаў.

У абсерваторыі славуага астранома Улугбека, які жыў у Самаркандзе (XV ст.), быў распрацаван вельмі дакладны спосаб складання трыганаметрычных табліц.

У радзе найважнейшых адкрыццяў сярэднеазіяцкая матэматыка значна апырэдзіла заходнеўрапейскую навуку. Насірэддзін Тусі развіў трыганаметрыю як самастойную дысцыпліну амаль на 200 год раней заснавальніка трыганаметрыі ў Еўропе Рэгіямантана.

Першыя навуковыя работы па трыганаметрыі ў Заходняй Еўропе адносяцца да XV ст. Развіццё мараплавання патрабавала ўмення дакладна вызначаць становішчы нябесных святл і што прывяло да неабходнасці складання вельмі дакладных трыганаметрычных табліц. У XV ст. нямецкі вучоны Рэгіямантан (Іган Мюлер) напісаў трактат «Пяць кніг аб рознага роду трохвугольніках», дзе было дадзена сістэматычнае выкладанне трыганаметрыі ў выглядзе самастойнай навуковай дысцыпліны. Ім жа былі складзены табліцы сінусаў з дакладнасцю да $\frac{1}{10^7}$. У табліцах Рэгіямантана радыус круга прымаўся замест ліку кратнага 60 за 10 000 000, г. зн. па сутнасці справы быў зроблен пераход ад шасцідзясяцірычнай сістэмы вымярэння да дзесятковай.

Развіццё алгебраічнай сімвалікі дазволіла запісваць трыганаметрычныя суадносіны ў выглядзе формул; ужыванне тэорыі адмоўных лікаў дазволіла разглядаць накіраваныя вуглы і дугі і распаўсюдзіць паняцце трыганаметрычных ліній для любых вуглоў. Такім чынам, стварылася база для вывучэння

трыганаметрычных функцый як функцый ад лікавага аргумента. Аналітычны апарат, які дазваляе вылічваць значэнні трыганаметрычных функцый з любой ступенню дакладнасці, быў распрацаван Ньютанам.

Далейшае развіццё трыганаметрыі звязана з імем вялікага вучонага, члена Рускай акадэміі навук Л. Эйлера (1707—1783). Да Эйлера трыганаметрычныя функцыі разглядаліся як адрэзкі ў кругу (так званыя трыганаметрычныя лініі); Эйлер стаў разглядаць значэнні трыганаметрычных функцый як лікі — велічыні трыганаметрычных ліній у кругу, радыус якога прынят за адзінку. Эйлер даў канчатковае рашэнне пытання аб знаках трыганаметрычных функцый у розных чвэрцях, спрабаванні і даў агульныя доказы рада тэарэм трыганаметрыі, адкрыў сувязь паміж трыганаметрычнымі і паказальнай функцыямі ад комплекснага аргумента.

Аналітычнае (не залежачае ад геаметрыі) пабудаванне тэорыі трыганаметрычных функцый, пачатае Эйлерам, атрымала завяршэнне ў працах вялікага рускага вучонага М. І. Лабачэўскага.

Сучасны пункт гледжання на трыганаметрычныя функцыі як на функцыі лікавага аргумента ў многім абумоўлен развіццём фізікі, механікі, тэхнікі. Гэтыя функцыі ляглі ў аснову матэматычнага апарату, пры дапамозе якога вывучаюцца розныя перыядычныя працэсы: вагальныя рухі, распаўсюджванне хваль, рухі механізмаў, ваганне пераменнага электрычнага току. Як паказаў Ж. Фур'е (1763—1830), усякі перыядычны рух з любой ступенню дакладнасці можна прадставіць у выглядзе сумы прасцейшых сінусаідальных (гарманічных) ваганняў.

На першапачатковых стадыях свайго развіцця трыганаметрыя служыла сродкам рашэння вылічальных геаметрычных задач і яе зместам лічылася вылічэнне элементаў прасцейшых геаметрычных фігур, г. зн. трохвугольнікаў. У сучаснай трыганаметрыі самастойнае і такое ж важнае значэнне мае вывучэнне ўласцівасцей трыганаметрычных функцый.

Гэтым функцыям належыць выключна важнае значэнне ў сучасным матэматычным апарате, неабходным для вывучэння заканамернасцей з'яў прыроды і для выкарыстання гэтых заканамернасцей у практычнай дзейнасці чалавека.

З М Е С Т

Раздзел I. Вуглы і дугі; іх вымярэнне

Стар.

§	1. Вуглы адвольнай велічыні	3
§	2. Дугі акружнасці адвольнай велічыні	4
§	3. Вымярэнне вуглоў і дуг	—
§	4. Каардынатная плоскасць, адзінкавы круг	7
§	5. Праекцыя вектара на вось	9
§	6. Адлегласць паміж двума пунктамі на каардынатнай плоскасці	11

Раздзел II. Трыганаметрычныя функцыі

§	7. Вызначэнне трыганаметрычных функцый адвольнага вугла	12
§	8. Значэнні трыганаметрычных функцый ад некаторых вуглоў	16
§	9. Знакі трыганаметрычных функцый	17
§	10. Асноўныя трыганаметрычныя тоеснасці і іх вынікі	19
§	11. Вылічэнне значэнняў трыганаметрычных функцый па значэнню адной з іх	20
§	12. Цотнасць і няцотнасць трыганаметрычных функцый	21
§	13. Пабудаванне вугла па дадзенаму значэнню яго трыганаметрычнай функцыі	23

Раздзел III. Тэарэмы складання і іх вынікі

§	14. Складанне і адыманне вуглоў	27
§	15. Тэарэма складання для косінуса	—
§	16. Формулы дапаўняльных аргументаў	29
§	17. Тэарэма складання для сінуса	30
§	18. Тэарэма складання для тангенса	31
§	19. Аб формулах складання для некалькіх аргументаў	—
§	20. Формулы прывядзення	32
§	21. Формулы падваення аргумента	35
§	22. Формулы дзялення аргумента папалам	36
§	23. Формулы пераўтварэння здабытку трыганаметрычных функцый у суму	37
§	24. Формулы пераўтварэння сумы трыганаметрычных функцый у здабытак	38
§	25. Пераўтварэнне ў здабытак выразу $a \sin \alpha + b \cos \alpha$	40
§	26. Формулы, якія выражаюць трыганаметрычныя функцыі праз тангенс палавіннага аргумента	41

Раздзел IV. Асноўныя ўласцівасці трыганаметрычных функцый

§ 27. Трыганаметрычныя функцыі лікавага аргумента і вобласці іх вызначэння	42
§ 28. Уласцівасць абмежаванасці і неабмежаванасці трыганаметрычных функцый	43
§ 29. Інтэрвалы знакапастаянства	—
§ 30. Уласцівасць перыядычнасці трыганаметрычных функцый	44
§ 31. Прамежкі манатоннасці трыганаметрычных функцый	45
§ 32. Графікі трыганаметрычных функцый	49

Раздзел V. Вылічэнні пры дапамозе табліц

§ 33. Трыганаметрычныя табліцы	56
§ 34. Аб ужыванні лагарыфмічнай лінейкі	60

Раздзел VI. Вылічэнне элементаў геаметрычных фігур

§ 35. Элементы трохвугольніка	62
§ 36. Аб рашэнні трохвугольнікаў	—
§ 37. Рашэнне прамавугольных трохвугольнікаў	63
§ 38. Тэарэмы сіносаў	65
§ 39. Тэарэмы косінусаў	66
§ 40. Формулы для плошчы трохвугольніка	67
§ 41. Тэарэмы тангенсаў	—
§ 42. Рашэнне трохвугольніка па двух яго вуглах і старане	68
§ 43. Рашэнне трохвугольніка па дзвюх старанах і вуглу паміж імі	69
§ 44. Рашэнне трохвугольніка па дзвюх старанах і вуглу, процілегламу адной з іх	70
§ 45. Рашэнне трохвугольніка па трох старанах	72
§ 46. Ужыванне трыганаметрыі пры вымярэннях на мясцовасці	74
§ 47. Ужыванне трыганаметрыі пры рашэнні геаметрычных задач	77
§ 48. Аб ужыванні трыганаметрыі ў фізіцы, механіцы, тэхніцы	79

Раздзел VII. Трыганаметрычныя ўраўненні

§ 49. Прасцейшыя трыганаметрычныя ўраўненні	82
§ 50. Спосаб прывядзення да адной функцыі	84
§ 51. Спосаб раскладання на множнікі	86
§ 52. Аб страце рашэнняў і з'яўленні пабочных рашэнняў пры выкананні пераўтварэнняў	87
§ 53. Прыватныя прыёмы рашэння трыганаметрычных ураўненняў	88
§ 54. Аб набліжаным рашэнні трыганаметрычных ўраўненняў	90
§ 55. Аб спосабе рацыяналізацыі	91
Гістарычны нарыс	92

Цана 12 кап.