Алгебра і элементарныя функцыі

Я. С. КАЧАТКОЎ, К. С. КАЧАТКОВА

Алгебра і элементарныя функцыі

Вучэбны дапаможнік
для вучняў старэйшых класаў
сярэдняй школы

Пад рэдакцыяй
доктара фізіка-матэматычных навук
А. М. ГАЛАВІНА

Зацверджан
Міністэрствам асветы РСФСР

ВЫДАВЕЦТВА „НАРОДНАЯ АСВЕТА“
МІНСК 1967

Рукапіс гэтага вучэбнага дапаможніка (часткі I і II) быў у 1964 годзе ўдастоены 1-й прэміі на адкрытым конкурсе падручнікаў па матэматыцы для сярэдняй школы, праведзеным Міністэрствам асветы РСФСР.

Пры падрыхтоўцы рукапісу да друку былі ўлічаны шматлікія заўвагі членаў журы конкурсу, а таксама пісьмы, прысланыя ў адрас выдавецтва і асабіста аўтарам.

Аўтары і рэдакцыя матэматыкі выдавецтва «Просвещение» прыносяць падзяку ўсім, хто сваімі заўвагамі садзейнічаў паляпшэнню дадзенага дапаможніка.

6-6
66—67М

Раздзел I

ЛІНЕЙНЫЯ ЎРАЎНЕННІ І НЯРОЎНАСЦІ

Вывучэнне алгебры і элементарных функцый мы пачынаем з разгляду лінейных ураўненняў і няроўнасцей. Гэта тэма знаёмая нам яшчэ па курсу VIII класа. Перш чым вывучыць яе больш глыбока, успомнім некаторыя ўжо вядомыя нам паняцці.

§ 1. Тоеснасці

У матэматыцы часта прыходзіцца мець справу з роўнасцямі, гэта значыць з такімі запісамі, у якіх два выразы злучаны знакам $=$ (знакам роўнасці).

Перш за ўсё звернемся да лікаў. Калі a і b — лікі, то роўнасць

$$a=b$$

азначае, што a і b — гэта проста адзін і той жа лік. Наадварот, калі a і b — розныя лікі, то пішуць

$$a\neq b.$$

Напрыклад,

$$2=2,\quad 2+3=5,\quad 2-3=-1,$$

але

$$7\neq 6,\quad 7+3\neq 0,\quad 3-7\neq 4.$$

Больш цяжкі выпадак, калі роўнасць змяшчае якія-небудзь літары, якімі звычайна мы абазначаем невядомыя велічыні. Разгледзім, напрыклад, такія роўнасці:

$$a+4=5, \tag{1}$$

$$a^2+1=-3, \tag{2}$$

$$1+\sqrt{a}=a, \tag{3}$$

$$(a^2-1)=(a+1)(a-1), \tag{4}$$

$$\frac{1}{a^2-1}=\frac{1}{a+1}\cdot\frac{1}{a-1}, \tag{5}$$

$$\frac{a^2-b^2}{a-b}=a+b. \tag{6}$$

Абедзве часткі роўнасці (1) маюць сэнс пры любых значэннях a. Гэта азначае, што, якое б лікавае значэнне мы ні надалі літары a, левая і правая часткі роўнасці (1) таксама прымуць некаторыя лікавыя значэнні.

Аналагічную ўласцівасць маюць таксама роўнасці (2) і (4). А вось з роўнасцямі (3), (5) і (6) атрымліваецца інакш.

Правая частка роўнасці (3) вызначана пры любых значэннях a, а левая — толькі пры неадмоўных значэннях a. (Успомніце: здабываць квадратныя корані можна толькі з дадатных лікаў і нуля.) Таму калі роўнасць (3) разглядаць цалкам, то трэба сказаць, што яна мае сэнс для ўсіх неадмоўных значэнняў a. Левая і правая часткі роўнасці (5) вызначаны толькі пры $a\neq 1$ і $a\neq -1$. Калі ж $a=1$ або $a=-1$, то ў назоўніках дробаў атрымліваюцца нулі, а дзяліць на нуль нельга. Таму роўнасць (5) мае сэнс пры ўсіх значэннях a, адрозных ад 1 і —1. Правая частка роўнасці (6) вызначана пры любых значэннях a і b, а левая частка толькі пры $a\neq b$. Таму цалкам роўнасць (6) мае сэнс для любых не роўных адзін другому лікаў a і b.

Значэнні ўваходзячых у роўнасць літар, пры якіх маюць сэнс і левая і правая часткі гэтай роўнасці, называюцца дапушчальнымі значэннямі гэтых літар.

Так, дапушчальнымі значэннямі a ў роўнасцях (1), (2) і (4) будуць усе лікі, у роўнасці (3) — усе неадмоўныя лікі, у роўнасці (5) — усе лікі, акрамя 1 і —1. У роўнасці (6) дапушчальныя значэнні a і b складваюцца з разнастайных пар не роўных адзін другому лікаў.

Калі роўнасць змяшчае больш адной літары, то, кажучы аб дапушчальных значэннях гэтых літар, мы павінны мець на ўвазе адначасова кожную з гэтых літар. Напрыклад, можна сказаць, што пары лікаў (1, 2) і (—5, 6) з'яўляюцца дапушчальнымі, а пара (3, 3) — недапушчальнай для літар a і b у роўнасці (6).

Аднак не трэба гаварыць, што значэнне 1 з'яўляецца дапушчальным для літары a, гэтак жа як не трэба гаварыць і тое, што гэта значэнне не з'яўляецца дапушчальным для a. Усё ж залежыць яшчэ і ад таго, якое значэнне прымае пры гэтым літара b. Калі не толькі a, але і b роўна 1, то роўнасць (6) траціць сэнс; калі ж $b\neq 1$, то пры $a=1$ гэта роўнасць вызначана.

Хоць у роўнасці (1) дапушчальным з'яўляецца любы лік, левая і правая часткі гэтай роўнасці прымаюць аднолькавыя лікавыя значэнні толькі пры $a=1$. Пры ўсіх жа астатніх значэннях a левая частка гэтай роўнасці прымае лікавыя значэнні, адрозныя ад 5. Абедзве часткі роўнасці (2) не могуць прыняць аднолькавыя лікавыя значэнні ні пры якім значэнні a. Выраз жа

a^2+1 прымае толькі дадатныя значэнні, а лік -3 з'яўляецца адмоўным. Прама процілеглую ўласцівасць мае роўнасць (4). Якое б значэнне мы ні надалі літары a, левая і правая часткі гэтай роўнасці прымуць аднолькавыя лікавыя значэнні. Аб роўнасці (5) гэтага сказаць нельга. Пры $a=1$ і $a=-1$ гэта роўнасць наогул траціць сэнс, а ў такім выпадку нельга гаварыць аб тым, аднолькавыя ці неаднолькавыя лікавыя значэнні прымаюць яе асобныя часткі. Але лікі 1 і -1 не ўваходзяць у вобласць дапушчальных значэнняў a. Таму можна сказаць, што абедзве часткі роўнасці (5) прымаюць аднолькавыя лікавыя значэнні пры любым д а п у ш ч а л ь н ы м значэнні a. Аналагічна трэба сказаць і аб роўнасці (6). Абедзве яе часткі прымаюць аднолькавыя лікавыя значэнні пры любых д а п у ш ч а л ь н ы х значэннях a і b.

Роўнасць, абедзве часткі якой прымаюць аднолькавыя лікавыя значэнні пры любых дапушчальных значэннях уваходзячых у яе літар, называецца тоеснасцю.

Да тоеснасцей адносяцца, напрыклад, роўнасці (4), (5) і (6). Што ж датычыцца роўнасцей (1), (2) і (3), то іх аднесці да тоеснасцей, відавочна, нельга.

Уяўляецца зусім натуральным патрабаваць, каб паняцце тоеснасці задавальняла наступнай важнай умове, якая называецца ўмовай транзітыўнасці:

калі роўнасці $A = B$ і $B = C$ з'яўляюцца тоеснасцямі, то і роўнасць $A = C$ з'яўляецца тоеснасцю.

Можна, аднак, паказаць, што ўведзенае намі азначэнне тоеснасці гэтаму патрабаванню задавальняе не заўсёды. Сапраўды, роўнасці

$$|a| = (\sqrt{a})^2, \tag{7}$$

$$(\sqrt{a})^2 = a \tag{8}$$

у сэнсе нашага азначэння з'яўляюцца тоеснасцямі. Кожная з іх мае дапушчальнымі значэннямі ўсе неадмоўныя значэнні a. Аднак роўнасць

$$|a| = a \tag{9}$$

мае дапушчальнымі значэннямі ўжо ў с е значэнні a (дадатныя, адмоўныя і нуль), а справядлівая яна толькі для неадмоўных значэнняў a. Значыць, у сэнсе ўведзенага намі азначэння роўнасць (9) не з'яўляецца тоеснасцю.

Высвятленне таго, калі такія непрыемнасці могуць узнікнуць і калі яны не ўзнікаюць, выходзіць за межы нашай праграмы і таму не можа быць тут праведзена. Каб пазбегнуць гэтай непрыемнасці, робяць так. Замест таго каб гаварыць аб тоеснасцях як роўнасцях, справядлівых для ў с і х дапушчальных значэнняў уваходзячай у іх літары a, гавораць аб тоеснасцях, якія маюць месца для якогасьці зададзенага мноства значэнняў a. Тады калі роўнасці $A = B$ і $B = C$ з'яўляюцца тоеснасцямі на адным і тым жа мноства значэнняў a, то для тых жа значэнняў a будзе тоеснасцю і роўнасць $A = C$.

Практыкаванні

Для кожнай з дадзеных лікавых роўнасцей (№ 1—10) высветліць, пры якіх значэннях уваходзячых у іх літар вызначаны:

а) левая частка роўнасці;

б) правая частка роўнасці;

в) роўнасць цалкам.

1. $\sqrt{a} = 4 + a$.

2. $\sqrt{a} = \frac{1}{\sqrt{a}}$.

3. $\frac{1}{b^2+2} = \frac{1}{b^2-9}$.

4. $\frac{1}{c^2-c} = 3$.

5. $\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} = \frac{1+2a}{a^2-a}$.

6. $\frac{\sqrt{b}}{b-1} = 5\frac{2}{3}$.

7. $\frac{1}{a^2+1} = b$.

8. $ab = \frac{1}{a^2+b^2}$.

9. $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{a^2-a+1} = \frac{a^2+2}{a^3+1}$.

10. $\frac{1}{2-b} + \frac{1}{b^2+2b+4} = \frac{b^2+b+6}{8-b^3}$.

11. Пакажыце, што роўнасць $2-ab=3a-4$ не з'яўляецца тоеснасцю.

12. Ці можна сказаць, што роўнасці:

а) $\frac{1}{a^3-b^3} = \frac{1}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}$;

б) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$;

в) $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$,

выконваюцца пры л ю б ы х значэннях уваходзячых у іх літар? Ці з'яўляюцца гэтыя роўнасці тоеснасцямі?

§ 2. Ураўненні

У папярэднім параграфе ўсе роўнасці, якія змяшчаюць літару, мы разбілі на два класы. Да аднаго класа былі аднесены тоеснасці, гэта значыць такія роўнасці, абедзве часткі якіх прымаюць аднолькавыя лікавыя значэнні пры любых дапушчальных значэннях літары. Прыкладам такіх роўнасцей могуць служыць роўнасці

$$a^2 - 1 = (a+1)(a-1), \quad \frac{1}{a^2-1} = \frac{1}{a+1} \cdot \frac{1}{a-1}.$$

Да другога класа мы аднеслі ўсе тыя роўнасці, абедзве часткі якіх прымаюць розныя лікавыя значэнні хоць бы пры адным дапушчальным значэнні літары. Да іх адносяцца, напрыклад, роўнасці:

$$a + 4 = 5, \quad a^2 + 1 = -3.$$

Аднак да вывучэння роўнасцей можна падысці і па-іншаму. Практыка часта ставіць перад намі задачу высветліць, п р ы я к і х дапушчальных значэннях літары (або некалькіх літар)

абедзве часткі той ці іншай роўнасці прымаюць аднолькавыя лікавыя значэнні. На роўнасць у гэтым выпадку мы глядзім як на *ўраўненне* адносна дадзенай невядомай велічыні.

Так, калі роўнасць

$$a + 4 = 5 \qquad (1)$$

разглядаць як ураўненне адносна велічыні a, то лёгка здагадацца, што абедзве яго часткі прымаюць аднолькавыя лікавыя значэнні толькі пры $a=1$. Сапраўды, калі $a=1$, то $a+4=5$; калі ж $a\neq 1$, то $a+4\neq 5$. Лік 1 называецца *коранем* ураўнення (1).

Наогул, *коранем ураўнення адносна адной невядомай велічыні называецца кожнае лікавае значэнне гэтай велічыні, пры якім абедзве часткі ўраўнення прымаюць аднолькавыя лікавыя значэнні.*

Тое ж самае азначэнне інакш фармулююць наступным чынам: коранем ураўнення адносна адной невядомай велічыні называецца такое значэнне гэтай велічыні, пры якім ураўненне ператвараецца ў лікавую роўнасць (або якое *задавальняе* дадзенаму ўраўненню).

Вышэй мы прывялі ўраўненне ($a+4=5$), якое мае толькі адзін корань. Існуюць ураўненні, якія маюць больш аднаго кораня. Напрыклад, ураўненне $a^2=1$ мае два карані: 1 і -1; ураўненне $a+2=2+a$ мае бясконца многа кораняў: кожны лік з'яўляецца яго коранем (у гэтым выпадку ўраўненне з'яўляецца тоеснасцю). Нарэшце, можна назваць і такія ўраўненні, якія зусім не маюць кораняў. Прыкладам можа служыць хоць бы ўраўненне $a^2+1=-3$.

Рашыць ураўненне — гэта значыць:

1) *высветліць, ці мае яно карані, і*

2) *калі мае, то знайсці кожны з іх.*

Адзначым (хоць гэта і неістотна), што ў роўнасцях, якія разглядаюцца як ураўненні, невядомыя велічыні звычайна абазначаюцца не пачатковымі літарамі лацінскага алфавіта (a, b, c, ...), а канечнымі літарамі (x, y, z). Напрыклад, замест $a+4=5$ пішуць $x+4=5$; замест $a^2+1=-3$ пішуць $x^2+1=-3$ і г. д.

Два ўраўненні адносна адной і той жа невядомай велічыні называюцца эквівалентнымі (або раўназначнымі), калі кожны корань першага ўраўнення з'яўляецца разам з тым і коранем другога ўраўнення, а кожны корань другога ўраўнення з'яўляецца разам з тым і коранем першага ўраўнення.

Эквівалентнымі будуць, напрыклад, ураўненні $x+4=5$ і $x-1=0$, кожнае з якіх мае адзіны корань 1. Эквівалентнымі з'яўляюцца і ўраўненні $x^2=4$ і $2x^2=8$. Кожнае з іх мае два карані: 2 і -2.

Ураўненні, якія не маюць кораняў, лічацца таксама эквівалентнымі (напрыклад, $x^2=-1$ і $x^2+1=-3$).

Кулясов.

Для рашэння ўраўненняў з'яўляюцца важнымі наступныя ўласцівасці эквівалентных ураўненняў, якія мы напамінаем вучням без доказу:

1. Калі абедзве часткі ўраўнення памножыць або падзяліць на адзін і той жа лік, адрозны ад нуля, то атрымаецца ўраўненне, эквівалентнае дадзенаму.

2. Калі якое-небудзь складаемае перанесці з адной часткі ўраўнення ў другую, памяняўшы пры гэтым яго знак на процілеглы, то атрымаецца ўраўненне, эквівалентнае дадзенаму.

Напрыклад, ва ўраўненні

$$2x-1=5-x$$

-1 можна перанесці з левай часткі ў правую, а $-x$, наадварот, з правай часткі ў левую. У выніку атрымаем

$$2x+x=5+1,$$

або

$$3x=6.$$

Відавочна, што адзіным коранем гэтага (а значыць, і зыходнага) ураўнення з'яўляецца лік 2.

Практыкаванні

13. Ці эквівалентныя ўраўненні:

а) $25x^2=0$ і $5x=0$; да

б) $9x^2=25$ і $3x=5$; да

в) $(2x-1)^2=1$ і $2x-1=1$; нет

г) $x^2=-3$ і $x-1=3$; нет

д) $x^2+1=0$ і $x^2+2=0$? да

14*. Колькі кораняў мае наступнае ўраўненне адносна невядомай велічыні x:

$$(x-1)^2+(x-a)^2=0?$$

если $a=1$ то 1, если $a\neq 1$ то 0

§ 3. Лінейныя функцыі і іх графікі

Разгледзім роўнасць

$$y=2x+1. \qquad (1)$$

Кожнаму значэнню літары x гэта роўнасць ставіць у адпаведнасць зусім пэўнае значэнне літары y. Калі, напрыклад, $x=0$, то $y=2\cdot 0+1=1$; калі $x=10$, то $y=2\cdot 10+1=21$; пры $x=-\frac{1}{2}$ $y=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1=0$ і г. д. Звернемся яшчэ да адной роўнасці:

$$y=x^2. \qquad (2)$$

Кожнаму значэнню x гэта роўнасць, як і роўнасць (1), ставіць у адпаведнасць зусім пэўнае значэнне y. Калі, напрыклад, $x=2$, то $y=4$; пры $x=-3$ $y=9$ і г. д. Роўнасці (1) і (2) звязваюць паміж сабой дзве велічыні x і y так, што кожнаму значэнню адной з іх (x) ставіцца ў адпаведнасць зусім пэўнае значэнне другой велічыні (y).

Калі кожнаму значэнню велічыні x адпавядае зусім пэўнае значэнне велічыні y, то гэта велічыня y называецца функцыяй ад x. Велічыня x пры гэтым называецца аргументам функцыі y.

Такім чынам, формулы (1) і (2) вызначаюць дзве розныя функцыі аргумента x.

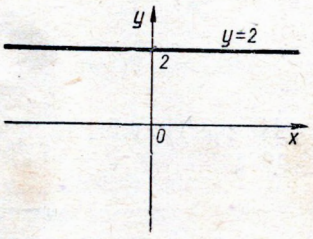
Функцыя аргумента x, якая мае выгляд

$$y = ax + b, \tag{3}$$

дзе a і b — некаторыя зададзеныя лікі, называецца *лінейнай*. Прыкладам лінейнай функцыі можа з'яўляцца любая з функцый:

$y = x + 2$ $\quad (a = 1,\ b = 2)$;
$y = -10$ $\quad (a = 0,\ b = -10)$;
$y = -3x$ $\quad (a = -3,\ b = 0)$;
$y = 0$ $\quad (a = b = 0)$.

Як вядома з курса VIII класа, ***графікам функцыі $y = ax + b$ з'яўляецца прамая лінія.*** Таму вось гэта функцыя і называецца лінейнай.



Рыс. 1.

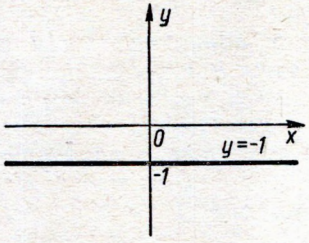
Напомнім, як будуецца графік лінейнай функцыі $y = ax + b$.

1. Графік функцыі $y = b$. Пры $a = 0$ лінейная функцыя $y = ax + b$ мае выгляд $y = b$. Яе графікам з'яўляецца прамая, якая паралельна восі x і перасякаецца з воссю y у пункце з ардынатай b. На рысунку 1 вы бачыце графік $y = 2$ $(b > 0)$, а на рысунку 2 — графік функцыі $y = -1$ $(b < 0)$.

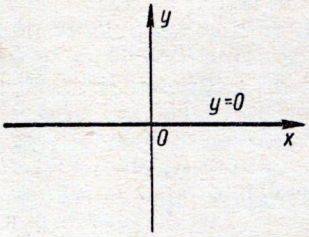
Калі не толькі a, але і b роўна нулю, то функцыя $y=ax+b$ мае выгляд $y=0$. У гэтым выпадку яе графік супадае з воссю x (рыс. 3).

2. Графік функцыі $y = ax$. Пры $b=0$ лінейная функцыя $y=ax+b$ мае выгляд $y=ax$. Калі $a\neq 0$, то графікам яе з'яўляецца прамая, праходзячая праз пачатак каардынат і нахіленая да восі x пад вуглом φ, тангенс якога роўны a (рыс. 4). Для пабудавання прамой $y=ax$ дастаткова знайсці які-небудзь адзін яе пункт, адрозны ад пачатку каардынат. Дапускаючы, напры-

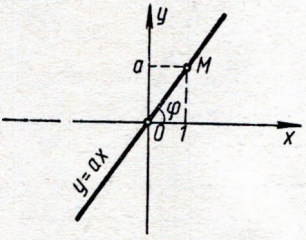
клад, у роўнасці $y=ax$ $x=1$, атрымаем $y=a$. Значыць, пункт M з каардынатамі $(1; a)$ ляжыць на нашай прамой (рыс. 4). Праводзячы цяпер прамую праз пачатак каардынат і пункт M, атрымліваем шукаемую прамую $y=ax$.



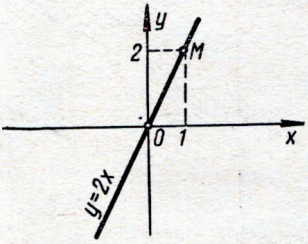
Рыс. 2.



Рыс. 3.



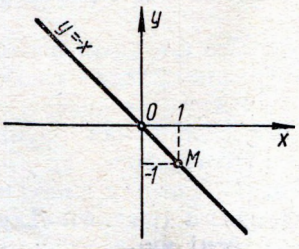
Рыс. 4.



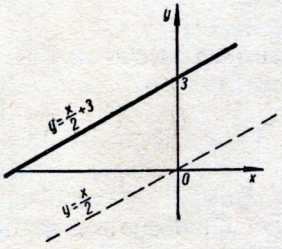
Рыс. 5.

На рысунку 5 для прыкладу начэрчана прамая $y=2x$ $(a>0)$, а на рысунку 6 — прамая $y=-x$ $(a<0)$.

3. **Графік функцыі $y = ax + b$.** Няхай $b > 0$. Тады прамая $y = ax + b$ атрымліваецца пры паралельным зрушэнні прамой $y = ax$ на b адзінак уверх. У якасці прыкладу на рысунку 7 паказана пабудаванне прамой $y = \frac{x}{2} + 3$.



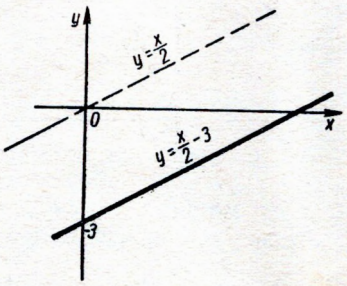
Рыс. 6.



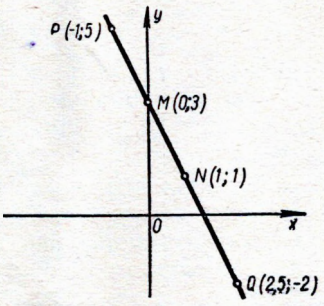
Рыс. 7.

Калі $b<0$, то прамая $y=ax+b$ атрымліваецца пры паралельным зрушэнні прамой $y=ax$ на b адзінак уніз. У якасці прыкладу на рысунку 8 паказана пабудаванне прамой $y=\frac{x}{2}-3$.

Прамую $y=ax+b$ можна пабудаваць і іншым спосабам. Любая прамая цалкам вызначаецца дзвюма сваімі пунктамі. Таму для пабудавання графіка функцыі $y=ax+b$ дастаткова знайсці якія-небудзь два яго пункты, а затым правесці праз іх прамую лінію. Растлумачым гэта на прыкладзе функцыі $y=-2x+3$. Пры $x=0$ $y=3$, а пры $x=1$ $y=1$. Таму два пункты: M з каардынатамі (0; 3) і N з каардынатамі (1; 1) — ляжаць на нашай прамой. Адзначыўшы гэтыя пункты на плоскасці каардынат і злучыўшы іх прамой лініяй (рыс. 9), атрымаем графік функцыі $y=-2x+3$. Замест пунктаў M і N можна было б узяць, безумоўна, і іншыя два пункты. Напрыклад, у якасці значэнняў x



Рыс. 8.



Рыс. 9.

мы маглі б выбраць не 0 і 1, як вышэй, а —1 і 2,5. Тады для y мы атрымалі б адпаведна значэнні 5 і —2. Замест пунктаў M і N мы мелі б пункты P з каардынатамі (—1; 5) і Q з каардынатамі (2,5; —2). Гэтыя два пункты, гэтак жа як і пункты M і N, цалкам вызначаюць шукаемую прамую $y=-2x+3$.

Практыкаванні

15. На адным і тым жа рысунку пабудаваць графікі функцый:

а) $y=-4$; б) $y=-2$; в) $y=0$; г) $y=2$; д) $y=4$.

Ці перасякаюцца гэтыя графікі з восямі каардынат? Калі перасякаюцца, то ўкажыце каардынаты пунктаў перасячэння.

16. На адным і тым жа рысунку пабудаваць графікі функцый:

а) $y=\frac{x}{4}$; б) $y=\frac{x}{2}$; в) $y=x$; г) $y=2x$; д) $y=4x$.

17. На адным і тым жа рысунку пабудаваць графікі функцый:

а) $y=-\frac{x}{4}$; б) $y=-\frac{x}{2}$; в) $y=-x$; г) $y=-2x$; д) $y=-4x$.

Пабудаваць графікі дадзеных функцый (№ 18—21) і вызначыць каардынаты пунктаў перасячэння гэтых графікаў з восямі каардынат.

18. $y=3+x$.

19. $y=2x-2$.

20. $y=-4-x$.

21. $y=0{,}5\,(1-3x)$.

22. Пабудаваць графік функцыі

$$y=2x-4;$$

скарыстаўшы гэты графік, высветліць:

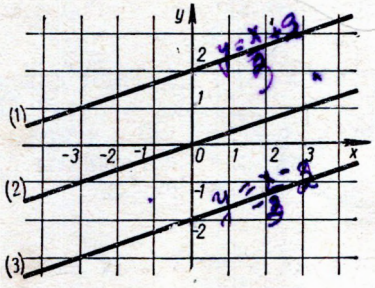
а) пры якіх значэннях x $y=0$;

б) пры якіх значэннях x значэнні y адмоўныя і пры якіх — дадатныя;

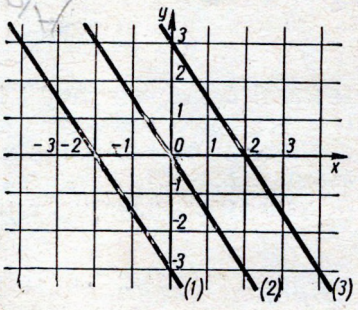
в) пры якіх значэннях x велічыні x і y маюць аднолькавыя знакі;

г) пры якіх значэннях x велічыні x і y маюць розныя знакі.

23. Напісаць ураўненні прамых, дадзеных на рысунках 10 і 11.



Рыс. 10.



Рыс. 11.

24. Якія з вядомых вам фізічных законаў апісваюцца пры дапамозе лінейных функцый?

25. Як пабудаваць графік функцыі $y=-(ax+b)$, калі зададзены графік функцыі $y=ax+b$?

§ 4. Лінейныя ўраўненні

Ураўненне называецца лінейным, калі левая і правая часткі яго з'яўляюцца лінейнымі функцыямі адносна невядомай велічыні.

Да такіх ураўненняў адносіцца, напрыклад, любое з ураўненняў:

$$2x-1=3x-5; \quad 4x=6-7x; \quad 8x-9=0.$$

Агульны выгляд лінейнага ўраўнення такі:

$$ax+b=cx+d, \tag{1}$$

дзе a, b, c і d — зададзеныя лікі, а x — невядомая велічыня.

Калі ва ўраўненні (1) каэфіцыенты a і c адрозныя адзін ад другога, то ўраўненне называецца таксама *ўраўненнем 1-й ступені*. Так, кожнае з прыведзеных вышэй лінейных ураўненняў з'яўляецца разам з тым і ўраўненнем 1-й ступені. Ураўненне $0\cdot x=1$ (гэта таксама ўраўненне!) з'яўляецца лінейным, але не з'яўляецца ўраўненнем 1-й ступені. Відавочна, што кожнае ўраўненне 1-й ступені можна назваць і лінейным ураўненнем. Аднак не кожнае лінейнае ўраўненне будзе ўраўненнем 1-й ступені.

Як жа рашаюцца лінейныя ўраўненні?

Пераносячы cx з правай часткі ўраўнення (1) у левую, а b з левай часткі ў правую, атрымаем эквівалентнае ўраўненне $(a-c)x=d-b$. Такім чынам, усякае лінейнае ўраўненне эквівалентна ўраўненню выгляду

$$mx=n, \tag{2}$$

дзе m і n — некаторыя зададзеныя лікі. Таму ў частцы гэтага параграфа, што засталася, гаворачы аб лінейных ураўненнях, мы заўсёды будзем мець на ўвазе ўраўненні выгляду (2).

Калі $m\neq 0$, то ўраўненне (2) мае, відавочна, адзін корань

$$x=\frac{n}{m}.$$

Калі $m=0$, а $n\neq 0$, то ўраўненне (2) ператвараецца ў

$$0\cdot x=n.$$

Такая роўнасць не можа выконвацца ні пры якіх значэннях x. Значыць, у гэтым выпадку ўраўненне (2) не мае кораняў.

Нарэшце, пры $m=n=0$ ураўненне (2) прымае выгляд $0\cdot x=0$. Гэта роўнасць правільная пры любых значэннях x. Таму ў дадзеным выпадку ўраўненне (2) мае бясконцае мноства кораняў: любы лік з'яўляецца яго коранем.

Прыклады.

1. Рашыць адносна x ураўненне

$$ax-1=x+2.$$

Пераносячы x у левую, а -1 у правую частку і прыводзячы падобныя члены, атрымліваем

$$(a-1)x=3.$$

Калі $a\neq 1$, то ўраўненне мае адзіны корань $x=\frac{3}{a-1}$. Калі ж $a=1$, то ўраўненне прымае выгляд $0\cdot x=3$. Такое ўраўненне не мае кораняў.

Адказ. Пры $a\neq 1$ дадзенае ўраўненне мае адзіны корань $x=\frac{3}{a-1}$, а пры $a=1$ кораняў не мае.

2. Рашыць адносна x ураўненне

$$a-x=1-a^2x.$$

Пераносячы a^2x у левую, а a ў правую частку і прыводзячы падобныя члены, атрымліваем

$$(a^2-1)x=1-a.$$

Калі $a^2-1\neq 0$, гэта значыць $a\neq 1$ і $a\neq -1$, то

$$x=\frac{1-a}{a^2-1}=-\frac{1}{a+1}.$$

Калі $a=1$, то ўраўненне, якое разглядаецца, зводзіцца да такога:

$$0\cdot x=0.$$

У гэтым выпадку любы лік з'яўляецца яго коранем.

Нарэшце, пры $a=-1$ атрымліваем

$$0\cdot x=2.$$

Такая роўнасць не выконваецца ні пры якіх значэннях x.

Адказ. Калі $a\neq 1$ і $a\neq -1$, то дадзенае ўраўненне мае адзіны корань $x=-\frac{1}{a+1}$; пры $a=1$ яго коранем з'яўляецца любы лік, а пры $a=-1$ ураўненне наогул не мае кораняў.

Практыкаванні

Дадзеныя ўраўненні (№ 26—35) рашыць адносна x.

26. $3x+1=a$.
27. $5+x=ax$.
28. $4=ax$.
29. $x=a^2x$.
30. $ax-a^2=4-2x$.
31. $a+x=a^2x-1$.
32. $ax-b=1+x$.
33. $x=b-a^2x$.
34. $ax-b^2=7$.
35. $3-a^2x=x-b$.

36. Ці можа ўраўненне $mx=n$ мець:
а) роўна адзін корань;
б) роўна два розныя карані;
в) роўна 1 000 000 розных кораняў;
г) бясконца многа розных кораняў?

37. Ці можа ўраўненне $ax=1+b^2$ мець бясконца многа розных кораняў?

38. Ці можа ўраўненне $(a-1)x=a^2-3a+2$ не мець кораняў?

39. Бацьку 45 год, а яго сыну 15. Праз колькі год бацька будзе старэйшым за сына:
а) у два разы;
б) у чатыры разы?

Як можна растлумачыць адмоўны корань ураўнення, атрыманы пры рашэнні задачы 39б?

40. З пунктаў A і B адпраўляюцца насустрач адзін другому адначасова два пешаходы. Першы ідзе са скорасцю v_1 *км/гадз*, а другі — са скорасцю v_2 *км/гадз* ($v_1 \neq v_2$). Праз некаторы час яны адначасова змяняюць свае скорасці: першы пешаход ідзе са скорасцю v_2 *км/гадз*, а другі — са скорасцю v_1 *км/гадз*. Сустрэча пешаходаў адбываецца праз гадзіну пасля таго, як яны змянілі свае скорасці, у пункце, роўнаддаленым ад A і B. Які час знаходзіліся пешаходы ў дарозе?

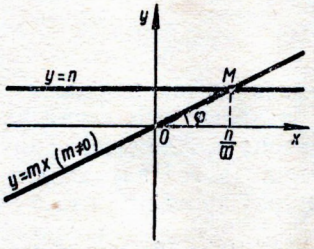
41. Ёсць лом сталі двух сартоў са змяшчальнасцю нікелю ў $p\%$ і ў $q\%$ ($p \neq q$). Колькі трэба ўзяць лому аднаго і другога сорту, каб атрымаць 100 m сталі са змяшчальнасцю нікелю ў $r\%$?

§ 5. Графічны спосаб рашэння ўраўнення $mx = n$

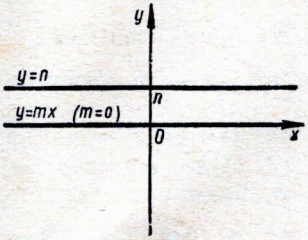
Ураўненне выгляду $mx=n$, да якога зводзіцца любое лінейнае ўраўненне, можа быць лёгка рэшана графічна. На адным і тым жа рысунку пабудуем графікі дзвюх функцый $y=mx$ і $y=n$. Калі гэтыя графікі перасякуцца, то абсцыса пункта перасячэння і дасць нам корань ураўнення $mx=n$.

Калі ж гэтыя графікі не перасякуцца, то гэта будзе азначаць, што ўраўненне не мае кораняў.

Разгледзім асобна тры выпадкі.



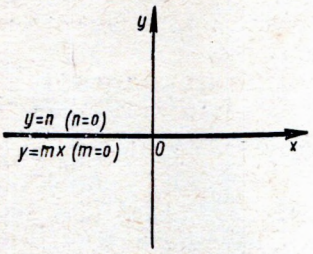
Рыс. 12.



Рыс. 13.

1. $m \neq 0$. У гэтым выпадку графікам функцыі $y=mx$ будзе прамая, нахіленая да восі x пад некаторым вуглом φ (рыс. 12). Графікам функцыі $y=n$ з'яўляецца прамая, паралельная восі x. Такія дзве прамыя заўсёды перасякаюцца і прытым толькі ў адным пункце (на рысунку 12 — пункт M). Абсцыса пункта перасячэння, $\frac{n}{m}$, і ёсць корань ураўнення $mx=n$.

2. $m=0$, $n \neq 0$. У гэтым выпадку прамая $y=mx$ зліваецца з воссю x, а прамая $y=n$ паралельная восі x (рыс. 13). Прамыя $y=mx$ і $y=n$ аказваюцца паралельнымі; пункта перасячэння такіх прамых не існуе. Таму не існуе і кораняў ураўнення $mx=n$.



Рыс. 14.

3. $m=n=0$. У гэтым выпадку прамыя $y=mx$ і $y=n$ супадаюць, зліваючыся з воссю x (рыс. 14). Аб такіх прамых можна сказаць, што яны перасякаюцца ў кожным пункце восі x. Таму ў дадзеным выпадку любы лік з'яўляецца коранем ураўнення $mx=n$.

Практыкаванні

Рашыць графічна дадзеныя ўраўненні:

42. $2x=4$.
43. $3x=0$.
44. $4x=-4$.
45. $0{,}5x=1{,}5$.
46. $-0{,}8x=0$.
47. $-2x=-7$.
48. $3x-x=3x-2$.
49. $x=2x+2$.

§ 6. Ураўненні, якія зводзяцца да лінейных

Да рашэння лінейных ураўненняў зводзіцца рашэнне і некаторых іншых ураўненняў.

Растлумачым гэта на прыкладзе ўраўнення

$$\frac{m+x}{n+x}=\frac{m}{n}, \qquad (1)$$

дзе m і n — зададзеныя лікі, а x — невядомая велічыня. Гэта ўраўненне нельга назваць лінейным, паколькі яго левая частка не з'яўляецца лінейнай функцыяй адносна x. Але такое ўраўненне лёгка зводзіцца да лінейнага. Перш за ўсё заўважым, што $n \neq 0$, інакш правая частка дадзенага ўраўнення не мела б сэнсу. Цяпер выкарыстаем уласцівасць прапорцый: калі $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то

$ad=bc$. Ужываючы гэту ўласцівасць прапорцый да роўнасці (1), атрымліваем

$$(m+x)n=(n+x)m,$$

адкуль

$$mn+nx=nm+mx,$$

або

$$(n-m)x=0. \qquad (2)$$

Такім чынам, зыходзячы з нелінейнага ўраўнення (1), мы прыйшлі да лінейнага ўраўнення (2). З яго атрымліваем: калі $m\neq n$, то $x=0$; калі ж $m=n$, то x — любы лік.

Не будзем спяшацца з адказам. Пераход ад ураўнення (1) да ўраўнення (2) фактычна звёўся да таго, што абедзве часткі ўраўнення (1) мы памножылі на выраз $n(n+x)$. Але ў такім выпадку ўраўненне (2) можа аказацца і неэквівалентным ураўненню (1). Відавочна, што страціць корані пры пераходзе ад (1) да (2) мы не маглі (дакажыце гэта!). Але, хто ведае, можа мы атрымалі пабочныя корані? Вось чаму цяпер неабходна зрабіць праверку атрыманых кораняў.

Спачатку праверым корань $x=0$, атрыманы з ураўнення (2) у дапушчэнні, што $m\neq n$. Калі ва ўраўненні (1) узяць $x=0$, то атрымаем $\frac{m}{n}=\frac{m}{n}$. Значыць, пры $m\neq n$ і $n\neq 0$ $x=0$ — сапраўды корань ураўнення (1). Цяпер праверым, ці будзе любы лік пры $m=n\neq 0$ коранем ураўнення (1). Пры $m=n$ гэта ўраўненне прымае выгляд

$$\frac{n+x}{n+x}=1. \qquad (3)$$

Любы лік, акрамя $-n$, задавальняе ўраўненню (3) і, значыць, з'яўляецца яго коранем. Але $x=-n$ нельга лічыць коранем гэтага ўраўнення, паколькі пры $x=-n$ левая частка роўнасці (3) не вызначана. Такім чынам, пры $m=n\neq 0$ коранем ураўнення (1) з'яўляецца не любы лік, як гэта было для ўраўнення (2), а толькі любы лік, адрозны ад $-n$.

Цяпер можна даць адказ: калі $n\neq 0$ і $m\neq n$, то ўраўненне (1) мае адзіны корань $x=0$; калі ж $m=n\neq 0$, то коранем яго з'яўляецца любы лік, акрамя $-n$.

Практыкаванні

Дадзеныя ўраўненні (№ 50—58) рашыць адносна x, лічачы a, b, m і n зададзенымі.

50. $\frac{x}{x-3}=\frac{3}{x-3}$.

51. $\frac{2}{x-3}=\frac{x+5}{x^2-9}$.

52. $\dfrac{x-5}{x+7}=\dfrac{a-x}{x+7}$. **53.** $\dfrac{a}{x-2}=\dfrac{x+1}{x^2-4}$.

54*. $\dfrac{a}{1-bx}=\dfrac{b}{1-ax}$. **55*.** $a=\dfrac{1-bx}{1+bx}$.

56. $\dfrac{4(x^2-b)}{2bx-b-2x+1}=\dfrac{2x}{b-1}-\dfrac{2x}{2x-1}$.

57. $\dfrac{3a}{x-a}-\dfrac{a}{x-2a}=\dfrac{a}{x-a}-\dfrac{2a}{x-2a}$.

58*. $\dfrac{m}{x-m}-\dfrac{n}{x-n}=\dfrac{m^2-n^2}{x^2-(m+n)x+mn}$.

59. Ураўненне

$$\frac{ax-b}{ax+b}=1$$

рашыць:

а) адносна a; б) адносна b; в) адносна x.

§ 7. Ураўненні, якія змяшчаюць невядомае пад знакам абсалютнай велічыні

Абсалютная велічыня ліку a (абазначаецца $|a|$) вызначаецца наступным чынам:

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{калі } a>0;\\ -a, & \text{калі } a<0;\\ 0, & \text{калі } a=0.\end{cases}$$

Напрыклад, $|10|=10$; $\left|-\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3}$; $|-100|=100$ і г. д.

Кожнаму значэнню x адпавядае зусім пэўнае значэнне $|x|$. Таму роўнасць $y=|x|$ вызначае y як некаторую функцыю аргумента x. Графік гэтай функцыі дадзен на рысунку 15. Пры $x>0$ $|x|=x$, а пры $x<0$ $|x|=-x$, таму лінія $y=|x|$ пры $x>0$ супадае з прамой $y=x$ (бісектрыса 1-га каардынатнага вугла), а пры $x<0$ — з прамой $y=-x$ (бісектрыса 2-га каардынатнага вугла).

Некаторыя ўраўненні змяшчаюць невядомае пад знакам абсалютнай велічыні. Да іх адносяцца, напрыклад, ураўненні $|x-1|=2$, $|6-2x|=3x+1$ і г. д. Рашэнне іх заснавана на тым, што ***калі абсалютная велічыня некатораго ліку x роўна дадатнаму ліку a, то сам гэты лік x роўны або a, або — a.*** Так, калі $|x|=10$, то або $x=10$, або $x=-10$.

Разгледзім некалькі прыкладаў.

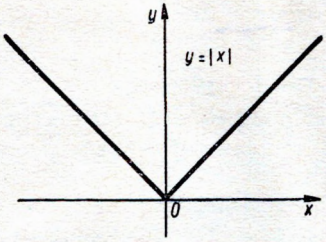
1. Рашыць ураўненне $|x-1|=2$.

$x-1$ павінна быць роўна або $+2$, або -2. Калі $x-1=2$, то $x=3$; калі ж $x-1=-2$, то $x=-1$. Праверка паказвае, што абодва гэтыя значэнні задавальняюць дадзенаму ўраўненню.

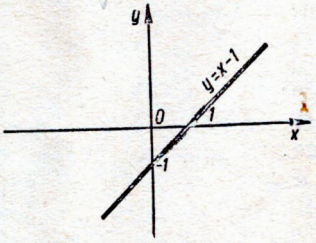
Адказ. Дадзенае ўраўненне мае два корані: $x_1=3$, $x_2=-1$.

2. Рашыць ураўненне $|6-2x|=3x+1$.

Маем: або $6-2x=3x+1$, або $6-2x=-(3x+1)$. У першым выпадку $x=1$, а ў другім $x=-7$.



Рыс. 15.



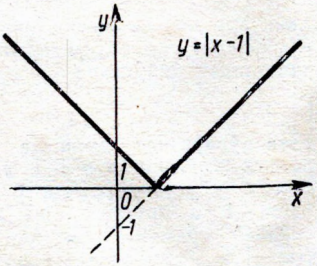
Рыс. 16.

Праверка. Пры $x=1$ $|6-2x|=|4|=4$, $3x+1=4$; значыць, $x=1$ — корань дадзенага ўраўнення. Пры $x=-7$ $|6-2x|=|20|=20$, $3x+1=-20$; паколькі $20\neq-20$, то $x=-7$ не ёсць корань дадзенага ўраўнення.

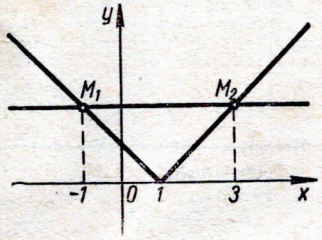
Адказ. Дадзенае ўраўненне мае адзін корань: $x=1$.

Падобныя ўраўненні можна рашаць і графічна. Рэшым, напрыклад, графічна ўраўненне $|x-1|=2$. Для гэтага трэба перш за ўсё пабудаваць графік функцыі $y=|x-1|$. Гэта можна зрабіць наступным чынам. Спачатку пабудуем графік функцыі $y=x-1$ (рыс. 16). Тую частку гэтага графіка, якая ляжыць вышэй восі x, пакінем без змянення. Для яе $x-1>0$ і таму $|x-1|=x-1$.

Тую ж частку графіка, якая ляжыць ніжэй восі x, адаб'ём сіметрычна адносна гэтай восі. Для гэтай жа часткі $x-1<0$, і таму $|x-1|=-(x-1)$. Атрыманая ў выніку лінія (рыс. 17, суцэльная лінія) і будзе графікам функцыі $y=|x-1|$. Гэта лі-



Рыс. 17.



Рыс. 18.

нія перасякаецца з прамой $y=2$ (рыс. 18) у двух пунктах: M_1 з абсцысай -1 і M_2 з абсцысай 3. Таму ўраўненне $|x-1|=2$ мае два корані: $x_1=-1$, $x_2=3$.

Практыкаванні

Рашыць ураўненні:

60. $1-|x|=0{,}5$.
61. $1+|x|=a$.
62. $|1-x|=0{,}5$.
63. $|1-x|=a$.
64. $|x+3|=3+2x$.
65. $|7x-1|=21-9x$.
66. $|5-x|=|x+4|$.
67. $|1-3x|=|3-2x|$.

68. Пакажыце, што графік функцыі $y=|x-a|$ $(a>0)$ атрымліваецца пры паралельным зрушэнні графіка функцыі $y=|x|$ на a адзінак даўжыні ўправа.

Як будуецца графік функцыі $y=|x+a|$ $(a>0)$?

69. Выкарыстоўваючы рэзультат задачы 68, пабудаваць графікі наступных функцый:

а) $y=|x-2|$; б) $y=|x+3|$.

70. Як пабудаваць графік функцыі $y=|ax+b|$, калі зададзен графік функцыі $y=ax+b$?

71. Ці можа графік функцыі $y=ax+b$ супадаць з графікам функцыі $y=|ax+b|$?

72. Рашыць графічна ўраўненні:

а) $|2+x|=3$; б) $x=|2-x|$; в) $|2x-3|=3-x$.

73. Зыходзячы з геаметрычных меркаванняў, высветліць, ці могуць не мець кораняў наступныя ўраўненні:

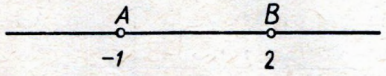
а) $x=|ax+b|$;
б) $|2x+b|=3$;
в) $|ax+b|=c$;
г) $|ax+b|=|cx+d|$.

74. Як пабудаваць графік функцыі $y=a|x|+b$, калі зададзен графік функцыі $y=ax+b$?

§ 8. Метад інтэрвалаў

Пры рашэнні некаторых ураўненняў, якія змяшчаюць невядомае пад знакам абсалютнай велічыні, часта выкарыстоўваюць так званы *метад інтэрвалаў*. Прадэманструем гэты метад на прыкладзе ўраўнення

$$|x+1|+|x-2|=3. \qquad (1)$$



Рыс. 19.

Гэта ўраўненне змяшчае дзве абсалютныя велічыні: $|x+1|$ і $|x-2|$. Першая з іх ператвараецца ў нуль пры $x=-1$, а другая — пры $x=2$. На лікавай прамой адзначым два пункты: A з абсцысай -1 і B з абсцысай 2 (рыс. 19). Тым самым лікавая прамая разаб'ецца на тры інтэрвалы. Першы (бесканечны) інтэрвал уключае ў сябе ўсе пункты, якія ля-

жаць лявей A. Другі (канечны) інтэрвал змяшчае ў сабе пункты A і B, а таксама ўсе пункты, якія ляжаць паміж імі. Трэці (бесканечны) інтэрвал складаецца з усіх пунктаў, якія ляжаць правей B. У любым з гэтых трох інтэрвалаў кожны з выразаў $|x+1|$ і $|x-2|$ лёгка запісваецца без знака абсалютнай велічыні. Так,

$$|x+1| = \begin{cases} -x-1 & \text{у першым інтэрвале;} \\ x+1 & \text{у другім і трэцім інтэрвалах.} \end{cases}$$

Аналагічна,

$$|x-2| = \begin{cases} -x+2 & \text{у першым і ў другім інтэрвалах;} \\ x-2 & \text{у трэцім інтэрвале.} \end{cases}$$

Таму левая частка ўраўнення (1) прадстаўляецца наступным чынам:

у першым інтэрвале $(-x-1)+(-x+2)=-2x+1$;

у другім інтэрвале $(x+1)+(-x+2)=3$;

у трэцім інтэрвале $(x+1)+(x-2)=2x-1$.

Цяпер няцяжка знайсці ўсе корані ўраўнення (1). Адразу ж заўважаем, што любы лік з другога інтэрвалу,

$$-1 \leqslant x \leqslant 2,$$

з'яўляецца коранем: бо пры любым значэнні x з гэтага інтэрвалу левая і правая часткі ўраўнення (1) прымаюць адно і тое ж лікавае значэнне 3.

Звернемся да першага інтэрвалу. Калі ў ім ёсць корані, то яны павінны, відавочна, супадаць з коранямі ўраўнення

$$-2x+1=3.$$

Гэта ўраўненне мае адзіны корань $x=-1$, які мы ўжо атрымалі раней і які, дарэчы, не пападае ў першы інтэрвал. (Значэнне $x=-1$ належыць другому інтэрвалу.) Такім чынам, у першым інтэрвале ўраўненне (1) не мае кораняў.

Аналагічна можна ўстанавіць, што ўраўненне (1) не мае кораняў і ў трэцім інтэрвале. Прапануем вучням пераканацца ў гэтым самастойна.

Такім чынам, ураўненне (1) мае бясконцае мноства кораняў. Кожны лік, заключаны ў інтэрвале

$$-1 \leqslant x \leqslant 2,$$

з'яўляецца яго коранем. Ніякіх іншых кораняў гэта ўраўненне не мае.

Практыкаванні

Рашыць ураўненні:

75. $|x-1|+|x+1|=2$.

76. $|5-2x|+|x+3|=2-3x$.

77. $|x|+|x+2|+|2-x|=x+1$.

78. $|1-x|-|x+3|=|x+2|$.

§ 9. Няроўнасці

Калі $a=b$, то рознасць $a-b$ роўна нулю. Калі ж $a \neq b$, то рознасць $a-b$ будзе або дадатная, або адмоўная.

Калі рознасць $a-b$ дадатная, то кажуць, што *лік a больш ліку b*; запісваецца гэта такім чынам:

$$a > b. \qquad (1)$$

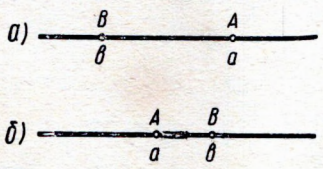
Калі рознасць $a-b$ адмоўная, то кажуць, што *лік a менш ліку b*; запісваецца гэта такім чынам:

$$a<b. \qquad (2)$$

Напрыклад, $5>3$, паколькі рознасць $5-3=2$ дадатная; $-7<-6$, паколькі рознасць $(-7)-(-6)=-1$ адмоўная.

Запісы (1) і (2) называюцца *лікавымі няроўнасцямі*, а знакі $>$ і $<$, якія ўдзельнічаюць у іх,— *знакамі няроўнасці*.

Лікавыя няроўнасці дапускаюць простую геаметрычную інтэрпрэтацыю. Будзем прадстаўляць лікі пунктамі лікавай прамой. Няхай ліку a адпавядае пункт A, а ліку b — пункт B. Тады, калі $a>b$, то пункт A будзе ляжаць правей пункта B (рыс. 20, *а*). Калі ж $a<b$, то пункт A будзе ляжаць лявей пункта B (рыс. 20, *б*).



Рыс. 20.

Да гэтага часу мы гаварылі толькі аб лікавых няроўнасцях. Аднак у матэматыцы часта прыходзіцца разглядаць і такія няроўнасці, якія змяшчаюць літары (гэтымі літарамі, як і ў выпадку роўнасці, мы абазначаем невядомыя велічыні). Прыкладамі такіх няроўнасцей могуць служыць няроўнасці:

$$\sqrt{a}>a, \qquad (3)$$

$$\frac{1}{a}>3, \qquad (4)$$

$$a-1<a, \qquad (5)$$

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}<0{,}5. \qquad (6)$$

Дапушчальнымі значэннямі літар, уваходзячых у няроўнасць, называюцца такія значэнні гэтых літар, пры якіх абедзве часткі няроўнасці маюць сэнс.

Відавочна, што дапушчальнымі значэннямі a ў няроўнасці (3) служаць усе дадатныя лікі, у няроўнасці (4) — усе лікі, акрамя нуля, і ў няроўнасці (5) — усе лікі. Для няроўнасці (6) дапушчальныя значэнні a і b складваюцца з разнастайных пар неадмоўных лікаў.

Разгледзім падрабязней няроўнасць (3). Яна, як мы ўжо гаварылі, вызначана для ўсіх неадмоўных значэнняў a. Аднак не кожны з дадзеных лікаў задавальняе гэтай няроўнасці. Сапраўды, пры $a=0{,}25$ $\sqrt{a}=0{,}5$. Паколькі $0{,}5>0{,}25$, то лік $a=0{,}25$ задавальняе няроўнасці (3). А вось лік 4 яму ўжо не задавальняе, паколькі $\sqrt{4}<4$. Такім чынам, няроўнасці, якая змяшчае літару, могуць задавальняць адны дапушчальныя значэнні гэтай літары і не задавальняць іншыя дапушчальныя значэнні гэтай літары.

Няроўнасць, якой задавальняюць усе дапушчальныя значэнні ўваходзячых у яе літар, называецца тоеснай няроўнасцю. Прыкладам такой няроўнасці можа служыць хоць бы няроўнасць (5). Пры любым значэнні a $a-1<a$. Няроўнасць (4) нельга аднесці да тоесных няроўнасцей; ёй не задавальняе, напрыклад, значэнне $a=1:\frac{1}{1}<3$.

Практыкаванні

79. Знайсці дапушчальныя значэнні літар, уваходзячых у няроўнасці:

а) $\frac{\sqrt{a}}{a}>5$;

б) $\sqrt{b}<\frac{1}{1-b}$;

в) $\frac{1}{\sqrt{|a|}}<a$;

г) $\sqrt{|b|}<\frac{3b}{b^2+1}$;

д) $|x|>x$;

е) $\frac{1}{a^2+b^2}>\frac{1}{a^2+b^2+1}$.

80. Ці можна сказаць, што няроўнасцям

$$\sqrt{a}+5>1 \text{ і } \frac{a^2-1}{a+1}<a$$

задавальняюць любыя значэнні ўваходзячых у іх літар? Ці з'яўляюцца гэтыя няроўнасці тоеснымі?

§ 10. Асноўныя ўласцівасці лікавых няроўнасцей

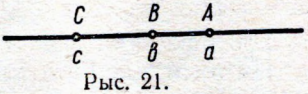
1. ***Калі $a>b$, то $b<a$, і, наадварот, калі $a<b$, то $b>a$.***

Доказ. Няхай $a>b$. Па азначэнню лік $(a-b)$ дадатны. Калі мы перад ім паставім знак мінус, то атрыманы лік $-(a-b)$ будзе, відавочна, адмоўным. Таму $-(a-b)<0$, або $b-a<0$. А гэта (зноў жа па азначэнню!) і гаворыць аб тым, што $b<a$.

Адваротнае сцверджанне прапануем вучням даказаць самастойна.

Даказаная ўласцівасць няроўнасцей дапускае простую геаметрычную інтэрпрэтацыю: калі пункт A ляжыць на лікавай прамой правей пункта B, то пункт B ляжыць лявей пункта A, і наадварот (гл. рыс. 20).

2. ***Калі $a>b$, а $b>c$, то $a>c$.***



Рыс. 21.

Геаметрычна гэта ўласцівасць заключаецца ў наступным. Няхай пункт A (адпаведны ліку a) ляжыць правей пункта B (адпаведнага ліку b), а пункт B, у сваю чаргу, ляжыць правей пункта C (адпаведнага ліку c). Тады пункт A і тым больш будзе ляжаць правей пункта C (рыс. 21).

Прывядзём алгебраічны доказ гэтай уласцівасці няроўнасцей.

Няхай $a>b$, а $b>c$. Гэта азначае, што лікі $(a-b)$ і $(b-c)$ дадатныя. Сума двух дадатных лікаў, відавочна, дадатная. Таму $(a-b)+(b-c)>0$, або $a-c>0$. Але гэта і азначае, што $a>c$.

3. *Калі $a>b$, то для любога ліку c $a+c>b+c$ і $a-c>b-c$.* Іншымі словамі, ***калі да абедзвюх частак лікавай няроўнасці дадаць або ад абедзвюх частак адняць адзін і той жа лік, то няроўнасць не парушыцца.***

Доказ. Няхай $a>b$. Гэта азначае, што $a-b>0$. Але $a-b=(a+c)-(b+c)$. Таму $(a+c)-(b+c)>0$. А па азначэнню гэта і гаворыць аб тым, што $a+c>b+c$.

Аналагічна паказваецца, што $a-c>b-c$.

Напрыклад, калі да абедзвюх частак няроўнасці $5>4$ дадаць $1\frac{1}{2}$, то атрымаем $6\frac{1}{2}>5\frac{1}{2}$. Адымаючы ад абедзвюх частак дадзенай няроўнасці лік 5, атрымаем $0>-1$.

Вынік. ***Любое складаемае адной часткі няроўнасці можна перанесці ў другую частку няроўнасці, памяняўшы знак гэтага складаемага на процілеглы.***

Няхай, напрыклад, $a+b>c$. Трэба даказаць, што $a>c-b$. Для доказу ад абедзвюх частак дадзенай няроўнасці дастаткова адняць лік b.

4. *Няхай $a>b$. Калі $c>0$, то $ac>bc$. Калі ж $c<0$, то $ac<bc$.*

Іншымі словамі, ***калі абедзве часткі няроўнасці памножыць на дадатны лік, то няроўнасць не парушыцца; калі ж абедзве часткі няроўнасці памножыць на адмоўны лік, то знак няроўнасці зменіцца на процілеглы.***

Карацей гэта ўласцівасць фармулюецца такім чынам:

Няроўнасць захоўваецца пры пачленным множанні на дадатны лік і змяняе знак на процілеглы пры пачленным множанні на адмоўны лік.

Напрыклад, памножыўшы няроўнасць $5>1$ пачленна на 7, атрымаем $35>7$. Пачленнае множанне той жа няроўнасці на -7 дае $-35<-7$.

Доказ 4-й уласцівасці.

Няхай $a>b$. Гэта азначае, што лік $a-b$ дадатны. Здабытак двух дадатных лікаў $a-b$ і c, відавочна, таксама дадатны, г. зн. $c(a-b)>0$, або $ca-cb>0$. Таму $ca>cb$.

Зусім гэтак жа разглядаецца выпадак, калі лік c адмоўны. Здабытак дадатнага ліку $a-b$ на адмоўны лік c, відавочна, адмоўны, г. зн. $c(a-b)<0$; таму $ca-cb<0$, адкуль $ca<cb$.

Вынік. ***Знак няроўнасці захоўваецца пры пачленным дзяленні на дадатны лік і змяняецца на процілеглы пры пачленным дзяленні на адмоўны лік.***

Гэта вынікае з таго, што дзяленне на лік $c \neq 0$ раўназначна множанню на лік $\frac{1}{c}$.

Практыкаванні

81. Ці можна няроўнасць $2>1$ памножыць пачленна на

а) a^2+1; в) a;

б) $|a|$; г) $1-2a+a^2$

так, каб знак няроўнасці захаваўся?

82. Ці заўсёды $5x$ больш $4x$, а $-y$ менш y?

83. Якім можа быць лік x, калі вядома, што $-x>7$?

84. Размясціць у парадку ўзрастання лікі:

а) a^2, $5a^2$, $2a^2$;

б) a, $5a$, $2a$;

в) a, a^2, a^3.

85. Размясціць у парадку ўбывання лікі:

$$a-b,\ a-2b,\ a-3b.$$

86. Даць геаметрычную інтэрпрэтацыю 3-й уласцівасці лікавых няроўнасцей.

§ 11. Пачленнае складанне і адыманне няроўнасцей

Пра дзве няроўнасці, якія маюць аднолькавыя знакі няроўнасці (абедзве знак $>$ або абедзве знак $<$), гавораць, што яны *аднолькавага сэнсу*. Напрыклад, няроўнасці $a>b$ і $3>2$ аднолькавага сэнсу, паколькі абедзве яны маюць адзін і той жа знак $>$; няроўнасці $a<b$ і $a<c$ таксама аднолькавага сэнсу, паколькі маюць адзін і той жа знак $<$.

Калі адна з няроўнасцей мае знак $>$, а другая знак $<$, то такія няроўнасці называюцца няроўнасцямі *процілеглага сэнсу*. Напрыклад, $16>0$ і $5<a$ — няроўнасці процілеглага сэнсу.

Тэарэма 1. ***Няроўнасці аднолькавага сэнсу можна пачленна складваць.***

Доказ. Няхай $a>b$ і $c>d$. Дакажам, што $a+c>b+d$.

Паколькі $a>b$ і $c>d$, то лікі $(a-b)$ і $(c-d)$ дадатныя. Сума двух дадатных лікаў таксама дадатная: $(a-b)+(c-d)>0$. Але

$$(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d).$$

Таму лік $(a+c)-(b+d)$ дадатны. А гэта і азначае, што $a+c>b+d$.

Выпадак, калі складваюцца няроўнасці $a<b$ і $c<d$, прапануем вучням разгледзець самастойна.

Прыклады.

$$\begin{array}{r} \left\{\begin{array}{r} 0>-100 \\ 65>\ \ 64 \end{array}\right. \\ \hline 65>-\ 36 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \left\{\begin{array}{r} 14<\ \ 15 \\ -20<-15 \end{array}\right. \\ \hline -\ 6<\ \ 0 \end{array}$$

Тэарэма 2. ***Дзве няроўнасці процілеглага сэнсу можна пачленна адымаць, пакінуўшы знак той няроўнасці, ад якой мы адымаем.***

Прыклады.

$$\begin{array}{r} \left\{\begin{array}{r} 2>0 \\ -3<6 \end{array}\right. \\ \hline 5>-6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \left\{\begin{array}{r} 10<15 \\ 3>\ \ 2 \end{array}\right. \\ \hline 7<13 \end{array}$$

Доказ. Няхай $a>b$ і $c<d$. Пакажам, што $a-c>b-d$.

Пачленнае множанне няроўнасці $c<d$ на -1 дае $-c>-d$. Склаўшы гэту няроўнасць з дадзенай няроўнасцю $a>b$, атрымаем $a-c>b-d$.

Выпадак, калі $a<b$ і $c>d$, прапануем вучням разгледзець самастойна.

Заўвага. Няроўнасці аднолькавага сэнсу пачленна адымаць, наогул кажучы, нельга. Напрыклад, калі б мы ад няроўнасці $2>0$ аднялі пачленна няроўнасць $0>-5$, то прыйшлі б да супярэчнасці: 2 больш 5.

Практыкаванні

Даказаць няроўнасці:

87. $\sqrt{5}+\sqrt{10}>5$.

88. $\sqrt{7}+\sqrt{15}<7$.

89. $\sqrt{21}-\sqrt{5}>\sqrt{20}-\sqrt{6}$.

90. $\sqrt{37}-\sqrt{14}>6-\sqrt{15}$.

91. $\sqrt{101}-\sqrt{35}>4$.

92. $-16<\sqrt{17}-\sqrt{390}$.

§ 12. Пачленнае множанне няроўнасцей

Тэарэма. ***Няроўнасці аднолькавага сэнсу з дадатнымі часткамі можна пачленна памнажаць.***

Доказ. Няхай $a>b$ і $c>d$, прычым лікі a, b, c і d дадатныя. Дакажам, што $ac>bd$.

Памножыўшы няроўнасць $a>b$ пачленна на дадатны лік c, атрымаем $ac>bc$. Памножыўшы затым няроўнасць $c>d$ пачленна на дадатны лік b, атрымаем $bc>bd$. Цяпер маем: $ac>bc$, а $bc>bd$. Але тады па другой асноўнай уласцівасці няроўнасцей (§ 10) павінна быць $ac>bd$.

Аналагічна можа быць разгледжан выпадак, калі $a<b$ і $c<d$.

Прыклады.

$$\times\begin{cases}2>1\\6>4\end{cases}\qquad\qquad \times\begin{cases}5>3\\100>10\end{cases}\qquad\qquad \times\begin{cases}1<7\\9<10\end{cases}$$

$$12>4\qquad\qquad 500>30\qquad\qquad 9<70$$

Вынік 1. ***Калі $a>b$, прычым лікі a і b дадатныя, то для любога натуральнага n***

$$a^n>b^n.$$

Сапраўды, памнажаючы пачленна няроўнасць $a>b$ саму на сябе, атрымаем $a^2>b^2$. Памнажаючы затым пачленна атрыманую няроўнасць на зыходную няроўнасць $a>b$, атрымаем $a^3>b^3$ і г. д.

Вынік 2. ***Калі лікі a і b дадатныя і***

$$a^n>b^n \qquad (1)$$

(n — натуральны лік), то $a>b$.

Сапраўды, магчымы адзін з трох выпадкаў: $a=b$, $a<b$ і $a>b$. Калі $a=b$, то $a^n=b^n$. Пры $a<b$ мы мелі б: $b>a$ і таму па выніку 1 $b^n>a^n$. І першае, і другое супярэчыць няроўнасці (1). Застаецца прызнаць, што $a>b$.

Прыклад. Вызначыць, які лік большы: $\sqrt{5}+\sqrt{6}$ або $\sqrt{3}+\sqrt{8}$.

Узвядзём абодва лікі ў квадрат:

$$(\sqrt{5}+\sqrt{6})^2=5+2\sqrt{30}+6=11+2\sqrt{30};$$

$$(\sqrt{3}+\sqrt{8})^2=3+2\sqrt{24}+8=11+2\sqrt{24}.$$

Квадрат першага ліку большы за квадрат другога ліку. Паколькі гэтыя лікі дадатныя, то па выніку 2

$$\sqrt{5}+\sqrt{6}>\sqrt{3}+\sqrt{8}.$$

Практыкаванні

93. Ці любыя дзве няроўнасці аднолькавага сэнсу можна пачленна памнажаць? (Разгледзець прыклад: $3>-10$ і $-2>-7$.)

94. а) Ці заўсёды з $a>b$ вынікае, што $a^n>b^n$? Адказ растлумачыць на прыкладах.

б) Ці абавязкова з $a^n<b^n$ вынікае, што $a<b$? Адказ растлумачыць на прыкладах.

У задачах № 95—102 параўнаць дадзеныя лікі, гэта значыць высветліць, які з іх большы і які меншы:

95. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ і $\sqrt{7}$.

96. $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ і $\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

97. $\sqrt{11}-\sqrt{10}$ і $\sqrt{6}-\sqrt{5}$.

98. $\sqrt{8-\sqrt{15}}$ і $\frac{1}{2}(\sqrt{30}-\sqrt{2})$.

99*. $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ і $\sqrt[3]{26}$.

100. $(1+\sqrt{5})^{100}$ і 3^{100}.

101. $(\sqrt{7}+\sqrt{2})^{9}$ і 4^{9}.

102. $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^{51}$ і $(\sqrt{6}-\sqrt{2})^{51}$.

§ 13. Двайныя няроўнасці

У далейшым нам часам прыйдзецца мець справу з *двайнымі няроўнасцямі*. Так называюцца няроўнасці выгляду

$$a'<a<a''.$$

Па сутнасці гэта формула аб'ядноўвае ў сабе дзве няроўнасці: $a'<a$ і $a<a''$. Гэтым і тлумачыцца назва «двайная няроўнасць».

Двайныя няроўнасці маюць усе тыя ўласцівасці, аб якіх мы гаварылі ў § 10—12, калі разглядалі звычайныя няроўнасці. Напрыклад, да кожнай часткі двайной няроўнасці можна дадаць любы лік k:

$$a'+k<a+k<a''+k. \qquad (1)$$

Кожную частку двайной няроўнасці можна памножыць на любы дадатны лік k:

$$ka'<ka<ka''. \qquad (2)$$

Кожную частку двайной няроўнасці можна памножыць і на любы адмоўны лік l, памяняўшы пры гэтым знакі няроўнасці на процілеглыя:

$$la'>la>la''. \qquad (3)$$

Практыкаванні

103. У якіх межах заключаны лік a, калі:

а) $-1{,}2<3a<6$; б) $-1{,}2<-3a<6$?

104. У якіх межах заключана сума $a+b$, калі $1{,}1<a<1{,}2$, а $5{,}5<b<5{,}6$?

105. У якіх межах заключана сума $2a+3b$, калі $1{,}98<a<1{,}99$, а $0{,}55<b<0{,}56$?

106. У якіх межах заключана рознасць $a-b$, калі $0{,}1<a<0{,}2$, а $-0{,}2<b<-0{,}1$?

107. У якіх межах заключаны здабытак ab, калі:

а) $0{,}6<a<0{,}7$, $2{,}3<b<2{,}4$;

б) $\frac{1}{6}<a<\frac{1}{5}$, $-3\frac{1}{7}<b<-3\frac{1}{8}$?

§ 14. Строгія і нястрогія няроўнасці

Калі хочуць выразіць, што лік a не менш ліку b (іншымі словамі, a больш або роўна b), то выкарыстоўваюць знак $\geqslant$ і пішуць $a \geqslant b$. Напрыклад, $a^2+1 \geqslant 1$, $|x| \geqslant 0$ і г. д. Калі трэба запісаць, што лік a не больш ліку b (іншымі словамі, a менш або роўна b), то выкарыстоўваюць знак $\leqslant$ і пішуць $a \leqslant b$. Напрыклад, $1 \leqslant 1+a^2$, $-|x| \leqslant 0$ і г. д.

Суадносіны $a \geqslant b$ і $a \leqslant b$ гэтак жа, як і суадносіны $a > b$ і $a < b$, называюцца *няроўнасцямі*. Няроўнасці, якія змяшчаюць знак $>$ або знак $<$, называюцца *строгімі*, а няроўнасці, якія змяшчаюць знак $\geqslant$ або знак $\leqslant$,— *нястрогімі*. Напрыклад, няроўнасці $\pi < 4$ і $2\pi > 6$ — строгія, а няроўнасці $17 \geqslant 17$ і $3 \leqslant 4$ — нястрогія.

Усе выведзеныя вышэй уласцівасці строгіх лікавых няроўнасцей (§ 10—13) лёгка распаўсюджваюцца і на нястрогія няроўнасці. Напрыклад, калі $a \geqslant b$, то $b \leqslant a$; калі $a \geqslant b$, то $a+c \geqslant b+c$ і г. д.

Практыкаванні

108. Ці можна пісаць так: $3 \geqslant 3$; $5 \geqslant 4$; $a^2+b^2 > a^2$; $a^2+b^2 \geqslant a^2$?

109. а) Ці могуць адначасова выконвацца няроўнасці $a < b$ і $a > b$?

б) Ці могуць адначасова выконвацца няроўнасці $a \leqslant b$ і $a \geqslant b$?

110. Даказаць, што калі $a > b$ і $c \leqslant d$, то $a-c > b-d$.

§ 15. Некаторыя спосабы доказу няроўнасцей

Даказаць няроўнасць, якая змяшчае некаторыя літары,— гэта значыць паказаць, што ёй задавальняюць любыя дапушчальныя або спецыяльна дадзеныя значэнні гэтых літар.

Існуюць розныя спосабы доказу няроўнасцей. Праілюструем некаторыя з іх на канкрэтных прыкладах.

Прыклад 1. Даказаць, што любыя дадатныя лікі a і b задавальняюць няроўнасці

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}, \qquad (1)$$

прычым знак роўнасці мае месца тады і толькі тады, калі $a=b$.

1-ы спосаб. Разгледзім рознасць

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}.$$

Яе можна прывесці да выгляду:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}.$$

Але $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$. Таму $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab} \geqslant 0$. А гэта і азначае, што $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$. Знак роўнасці ў формуле (1) мае месца тады і толькі тады, калі $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$, г. зн. пры $a=b$.

2-і спосаб. Дапусцім, што дадзеная няроўнасць правільная. Тады, памножыўшы абедзве яе часткі на 2, атрымаем

$$a+b \geqslant 2\sqrt{ab}.$$

Перанясём $2\sqrt{ab}$ у левую частку:

$$a+b-2\sqrt{ab} \geqslant 0.$$

Нарэшце, перапішам атрыманую няроўнасць у выглядзе

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0. \qquad (2)$$

Апошняя няроўнасць, відавочна, правільная для любых дадатных лікаў a і b, прычым роўнасць у ёй дасягаецца тады і толькі тады, калі $a=b$. Такім чынам, дадзеную няроўнасць мы звялі да відавочнай няроўнасці. Цяпер, робячы ўсе разважанні ў адваротным парадку, мы дакажам дадзеную няроўнасць.

Для любых дадатных лікаў a і b маем:

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0,$$

або

$$a-2\sqrt{ab}+b \geqslant 0.$$

Знак роўнасці пры гэтым мае месца тады і толькі тады, калі $a=b$. Пераносячы $-2\sqrt{ab}$ у правую частку, атрымліваем $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$, адкуль $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

Адразу цяжка было здагадацца, што пры доказе няроўнасці (1) трэба выходзіць з відавочнай няроўнасці (2). Вось чаму папярэдне нам давялося зрабіць дапушчэнне, што няроўнасць (1) правільная, і атрымаць пры гэтым дапушчэнні няроўнасць (2).

Прыклад 2. Даказаць, што калі здабытак дадатных лікаў x і y роўны 1, то $(1+x)(1+y) \geqslant 4$.

Доказ. Дапускаючы ў толькі што даказанай няроўнасці

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$$

$a=1$, $b=x$, атрымаем $\frac{1+x}{2} \geqslant \sqrt{x}$, або $1+x \geqslant 2\sqrt{x}$. Аналагічна паказваецца, што $1+y \geqslant 2\sqrt{y}$. Пачленнае множанне атрыманых няроўнасцей дае:

$$(1+x)(1+y) \geqslant 2\sqrt{x} \cdot 2\sqrt{y},$$

або

$$(1+x)(1+y) \geqslant 4\sqrt{xy}.$$

Але па ўмове $xy = 1$. Таму

$$(1+x)(1+y) \geqslant 4.$$

Практыкаванні

Даказаць няроўнасці (№ 111 — 117):

111. $(x+y)^2 \geqslant 4xy$.

112. $x^3+y^3 \geqslant x^2y+xy^2$ $(x>0,\ y>0)$.

113. $(a+b+c)^2 \geqslant a(b+c-a)+b(a+c-b)+c(a+b-c)$.

114. $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2} > \frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ $(a>0,\ b>0)$.

115. $\frac{2a}{1+a^2} \leqslant 1$.

116. $a^2+\frac{1}{a^2} \geqslant 2$.

117. $\frac{a+b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$ $(a>0,\ b>0)$.

118. Самалёт ляціць з Масквы ў Кіеў і вяртаецца назад. У якое надвор'е гэты рэйс будзе зроблен хутчэй: у бязветранае або пры ветры, які дзьме з пастаяннай сілай у напрамку Масква — Кіеў?

119. Даказаць, што паўперыметр трохвугольніка больш кожнай з яго старон.

120*. Даказаць няроўнасць

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100} < \frac{1}{10}.$$

§ 16. Тэарэма аб сярэднім арыфметычным і сярэднім геаметрычным

Сярэднім арыфметычным любых n лікаў $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *называецца лік*

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$

Сярэднім геаметрычным дадатных лікаў $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *называецца лік*

$$\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}.$$

Напрыклад, для лікаў 2 і 8 сярэднім арыфметычным будзе лік $\frac{2+8}{2}=5$, а сярэднім геаметрычным — лік $\sqrt{2\cdot 8}=4$. Сярэдняе арыфметычнае лікаў 10, 10 і 80 роўна

$$\frac{10+10+80}{3}=33\frac{1}{3},$$

а сярэдняе геаметрычнае роўна

$$\sqrt[3]{10\cdot 10\cdot 80}=\sqrt[3]{8000}=20.$$

Для лікаў 5, 5 і 5 сярэднім арыфметычным будзе лік $\frac{5+5+5}{3}=$ $=5$, а сярэднім геаметрычным — лік $\sqrt[3]{5\cdot 5\cdot 5}=5$.

Заўважым, што ва ўсіх трох выпадках сярэдняе арыфметычнае аказалася не менш іх сярэдняга геаметрычнага, прычым роўнымі яны атрымаліся толькі ў трэцім прыкладзе, дзе ўсе лікі, што разглядаюцца, роўны адзін другому. І гэта не выпадкова. Існуе наступная агульная тэарэма.

Тэарэма. ***Сярэдняе арыфметычнае n дадатных лікаў не менш іх сярэдняга геаметрычнага:***

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}.$$

Знак роўнасці ў гэтай формуле мае месца тады і толькі тады, калі ўсе n лікаў $a_1, a_2, \ldots, a_n$ роўны паміж сабой.

У папярэднім параграфе было паказана, што для любых двух дадатных лікаў a і b справядліва няроўнасць

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab},$$

прычым знак роўнасці мае месца тады і толькі тады, калі $a=b$. Тым самым была даказана тэарэма аб сярэднім арыфметычным і сярэднім геаметрычным двух дадатных лікаў. У агульным выпадку доказ гэтай тэарэмы даволі грувасткі і таму тут не прыводзіцца.

Няроўнасць

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab},$$

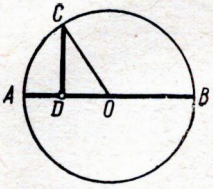
правільная для любых дадатных лікаў a і b, была вядома яшчэ ў старажытныя часы. Рысунак 22 дадзен намі для геаметрычнай інтэрпрэтацыі гэтай няроўнасці. На рысунку

$$CD=\sqrt{AD\cdot DB},\quad CO=AO=\frac{AD+DB}{2}.$$

Абагульненне дадзенай няроўнасці на выпадак адвольнага ліку дадатных лікаў (тэарэма аб сярэднім арыфметычным і сярэднім геаметрычным) было зроблена французскім матэматыкам Кашы (1789—1857). З імем гэтага выдатнага вучонага звязаны і некаторыя іншыя важныя няроўнасці, вывучэнне якіх, аднак, выходзіць за межы нашай праграмы.

Прыклад 1. Даказаць, што для любых лікаў a, b і c, якія маюць аднолькавыя знакі,

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant 3.$$



Рыс. 22.

Сапраўды, па тэарэме аб сярэднім арыфметычным і сярэднім геаметрычным

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}}{3}\geqslant\sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}},$$

адкуль і вынікае патрабуемая суадносіна.

Прыклад 2. Даказаць, што для адвольнага дадатнага ліку a справядліва няроўнасць

$$99a+1\geqslant 100\sqrt[100]{a^{99}},$$

прычым знак роўнасці мае месца толькі пры $a=1$.

Ужываючы тэарэму аб сярэднім арыфметычным і сярэднім геаметрычным да 100 лікаў: $\underbrace{a,\ a,\ \ldots,\ a}_{100},\ 1,$ атрымліваем

$$\frac{99a+1}{100}\geqslant\sqrt[100]{a^{99}\cdot 1},$$

адкуль вынікае патрабуемая суадносіна. Знак роўнасці мае месца толькі ў тым выпадку, калі ўсе 100 лікаў роўны паміж сабой, г. зн. пры $a=1$.

З тэарэмы аб сярэднім арыфметычным і сярэднім геаметрычным вынікае наступны важны вынік.

Вынік. ***Калі здабытак n дадатных лікаў роўны 1, то сума іх не менш n.*** Іншымі словамі, калі дадатныя лікі $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ задавальняюць умове

$$a_1\cdot a_2\cdot\ \ldots\ \cdot a_n=1,$$

то

$$a_1+a_2+\ldots+a_n\geqslant n. \qquad (1)$$

Сапраўды,

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ \ldots\ \cdot a_n},$$

адкуль і атрымліваецца няроўнасць (1).

На практыцы суадносіна (1) асабліва часта выкарыстоўваецца пры $n = 2$. ***Сума двух узаемна адваротных дадатных лікаў не менш 2:***

$$a + \frac{1}{a} \geqslant 2 \quad (a > 0).$$

Практыкаванні

Даказаць няроўнасці (№ 121 — 129):

121. $(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geqslant 4 \quad (a > 0,\ b > 0).$

122. $\sqrt{(a + \alpha)(b + \beta)} \leqslant \frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ $(a > 0,\ b > 0,$ $\alpha > 0,\ \beta > 0).$

123. $\sqrt[n+1]{ab^n} \leqslant \frac{a + bn}{n + 1}.$

124. $2a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 2a(b + c).$

125. $(a + b)(b + c)(c + a) \geqslant 8abc \quad (a > 0,\ b > 0,\ c > 0).$

126. $\sqrt{ab} \geqslant \frac{2ab}{a + b} \quad (a > 0,\ b > 0).$

127. $a + b + c \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac}$ $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0).$

128. $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac.$

129. $(a + 1)(b + 1)(a + c)(b + c) \geqslant 16abc$ $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0).$

130. Даказаць, што калі сума дадатных лікаў a і b роўна 1, то:

а) $a^2 + b \geqslant \frac{1}{2}$; б) $a^4 + b^4 \geqslant \frac{1}{8}$.

131. Якое найменшае значэнне можа прыняць сума $a^2 + b^2$, калі $a + b = 2$, прычым лікі a і b дадатныя?

132*. Даказаць, што пры любым натуральным значэнні n

$$\left(1 + \frac{1}{n + 1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

§ 17. Тэарэма аб пастаяннай суме і пастаянным здабытку

З тэарэмы аб сярэднім арыфметычным і сярэднім геаметрычным вынікаюць дзве важныя тэарэмы, якія вельмі часта выкарыстоўваюцца пры рашэнні практычных задач.

Тэарэма аб пастаяннай суме. ***Калі сума дзвюх дадатных велічынь пастаянная, то іх здабытак будзе найбольшым тады і толькі тады, калі гэтыя велічыні прымаюць розныя значэнні.***

Напрыклад, калі сума дзвюх дадатных велічынь a і b роўна 10, то магчымы выпадкі: $a=1$, $b=9$; $a=2$, $b=8$; $a=3{,}5$, $b=6{,}5$; $a=4{,}1$, $b=5{,}9$; $a=5$, $b=5$ і г. д. Гэтым выпадкам адпавядаюць наступныя значэнні здабытку ab: 9; 16; 22,75; 24,19; 25. Найбольшы здабытак (25) будзе пры $a=b=5$.

Доказ тэарэмы. Няхай сума дзвюх дадатных велічынь a і b роўна c. Тады па тэарэме аб сярэднім арыфметычным і сярэднім геаметрычным атрымліваем:

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}, \text{ або } \sqrt{ab} \leqslant \frac{c}{2}.$$

Пры гэтым, калі $a=b$, то $\sqrt{ab}=\frac{c}{2}$; калі ж $a \neq b$, то $\sqrt{ab} < \frac{c}{2}$.

Значыць, $\sqrt{ab}$ будзе найбольшым пры $a=b$. Але тады, відавочна, і падкарэнны выраз будзе найбольшым пры $a=b$.

Задача. *Які найбольшы па плошчы прамавугольны ўчастак можна абгарадзіць плотам даўжынёй l?*

Рашэнне. Няхай даўжыня ўчастка роўна x, а шырыня y. Тады плошча яго будзе роўна xy. Па ўмове задачы $2x+2y=l$, або $x+y=\frac{l}{2}$. Паколькі сума $x+y$ пастаянная, то здабытак xy будзе найбольшым пры $x=y$. Значыць, калі мы жадаем плотам даўжынёй l абгарадзіць найбольшы па плошчы прамавугольны ўчастак, то павінны абгароджваць участак, які мае форму квадрата. Старана такога квадрата роўна $\frac{l}{4}$, а плошча $\frac{l^2}{16}$.

Тэарэма аб пастаянным здабытку. ***Калі здабытак дзвюх дадатных велічынь пастаянны, то іх сума будзе найменшай тады і толькі тады, калі гэтыя велічыні прымуць роўныя значэнні.***

Напрыклад, калі здабытак дзвюх дадатных велічынь a і b роўны 16, то магчымы выпадкі: $a=1$, $b=16$; $a=2$, $b=8$; $a=4$, $b=4$; $a=5$, $b=\frac{16}{5}$ і г. д. Гэтым выпадкам адпавядаюць сумы $a+b$: 17; 10; 8; $8\frac{1}{5}$ і г. д. Найменшая сума (8) будзе пры $a=b=4$.

Доказ гэтай тэарэмы аналагічны доказу тэарэмы аб пастаяннай суме. Прапануем вучням правесці яго самастойна.

Задача. *Якую найменшую даўжыню павінен мець плот, каб ім можна было абгарадзіць прамавугольны ўчастак, плошча якога роўна S?*

Рашэнне. Няхай даўжыня прамавугольнага ўчастка роўна x, а шырыня y. Тады даўжыня плоту будзе роўна $2(x+y)$. Плошча ўчастка роўна $xy=S$. Паколькі здабытак xy пастаянны, то сума $x+y$ будзе найменшай пры $x=y=\sqrt{S}$. Значыць, найменшая даўжыня плоту роўна $2(\sqrt{S}+\sqrt{S})=4\sqrt{S}$.

Практыкаванні

133. Пры якіх дадатных значэннях a дадзеныя выразы прымаюць найбольшыя лікавыя значэнні:

а) $a(8-a)$; б) $(1+2a)(3-2a)$; в)* $a\sqrt{10-a^2}$?

134. Пры якіх дадатных значэннях a дадзеныя выразы прымаюць найменшыя лікавыя значэнні:

а) $a+\frac{1}{a}$; б) $2a+\frac{8}{a}$; в)* $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}$?

135. У круг радыуса R упісаць прамавугольнік найбольшай плошчы.

136. З круглай бэлькі дадзенага дыяметра d трэба выразаць бэльку прамавугольнага папярочнага сячэння так, каб колькасць адходаў была найменшай. Знайсці плошчу гэтага сячэння.

137. Акно мае форму прамавугольніка. Якая павінна быць даўжыня і шырыня гэтага акна, каб яно пры дадзеным перыметры p прапускала найбольшую колькасць святла?

Указанне. Колькасць прапускаемага святла тым большая, чым большая плошча акна.

138. Рашыць ураўненні:

$$\text{а) } x+\frac{1}{x}=2;\quad \text{б) } x+\frac{1}{x}=1{,}5;\quad \text{в) } x+\frac{1}{x}=-2.$$

139*. Адна брыгада павялічвала прадукцыйнасць працы штомесячна на 2%. Другая брыгада на працягу першага паўгоддзя павялічвала прадукцыйнасць працы штомесячна на 1%, а на працягу другога паўгоддзя — штомесячна на 3%. Якая з гэтых брыгад дабілася большага павелічэння прадукцыйнасці працы за год?

§ 18. Набліжаныя значэнні ліку. Уласцівасць абсалютнай велічыні сумы

На практыцы мы амаль ніколі не ведаем дакладных значэнняў велічынь. Ніякія вагі, якімі б дакладнымі яны ні былі, не паказваюць вагу абсалютна дакладна; любы тэрмометр паказвае тэмпературу з той ці іншай памылкай; ніякі амперметр не можа даць дакладных паказанняў току і г. д. К таму ж наша вока не можа абсалютна правільна прачытаць паказанні вымяральных прылад. Таму, замест таго каб мець справу з сапраўднымі значэннямі велічынь, мы вымушаны аперыраваць з іх набліжанымі значэннямі.

Той факт, што a' ёсць набліжанае значэнне ліку a, запісваецца наступным чынам:

$$a\approx a'.$$

Калі a' ёсць набліжанае значэнне велічыні a, то рознасць $\Delta=a-a'$ называецца *пагрэшнасцю набліжэння**. Напрыклад, калі лік 3,756 замяніць яго набліжаным значэннем 3,7, то пагрэшнасць будзе роўна $\Delta=3{,}756-3{,}7=0{,}056$. Калі ў якасці набліжанага значэння ўзяць 3,8, то пагрэшнасць будзе роўна $\Delta=3{,}756-3{,}8=-0{,}044$.

На практыцы часцей за ўсё карыстаюцца не пагрэшнасцю набліжэння Δ, а абсалютнай велічынёй гэтай пагрэшнасці $|\Delta|$. У далейшым гэту абсалютную велічыню пагрэшнасці мы будзем называць проста *абсалютнай пагрэшнасцю*. Лічаць, што адно набліжэнне лепшае за другое, калі абсалютная пагрэшнасць першага набліжэння меншая за абсалютную пагрэшнасць другога набліжэння. Напрыклад, набліжэнне 3,8 для ліку 3,756

* Δ — грэчаская літара; чытаецца: дэльта.

На наступнай старонцы сустрэнецца яшчэ адна грэчаская літара ε (чытаецца: эпсілон).

лепш, чым набліжэнне 3,7, паколькі для першага набліжэння $|\Delta|=|-0{,}044|=0{,}044$, а для другога $|\Delta|=|0{,}056|=0{,}056$.

Лік a' называецца набліжаным значэннем ліку a з дакладнасцю да ε, калі абсалютная пагрэшнасць гэтага набліжэння меншая, чым ε:

$$|a-a'|<\varepsilon.$$

Напрыклад, 3,6 ёсць набліжанае значэнне ліку 3,671 з дакладнасцю да 0,1, паколькі $|3{,}671-3{,}6|=|0{,}071|=0{,}071<0{,}1$. Аналагічна $-\frac{3}{2}$ можна разглядаць як набліжанае значэнне ліку $-\frac{8}{5}$ з дакладнасцю да $\frac{1}{5}$, паколькі

$$\left|-\frac{8}{5}-\left(-\frac{3}{2}\right)\right|=\left|-\frac{16-15}{10}\right|=\left|-\frac{1}{10}\right|=\frac{1}{10}<\frac{1}{5}.$$

Калі $a'\leqslant a$, то a' называецца набліжаным значэннем ліку a *з недахопам*. Калі ж $a'\geqslant a$, то a' называецца набліжаным значэннем ліку a *з лішкам*. Напрыклад, 3,6 ёсць набліжанае значэнне ліку 3,671 з недахопам, паколькі $3{,}6<3{,}671$, а $-\frac{3}{2}$ ёсць набліжанае значэнне ліку $-\frac{8}{5}$ з лішкам, паколькі $-\frac{3}{2}>-\frac{8}{5}$.

Калі мы замест лікаў a і b складзём іх набліжаныя значэнні a' і b', то рэзультат $a'+b'$ будзе набліжаным значэннем сумы $a+b$. Узнікае пытанне: як ацаніць дакладнасць гэтага рэзультату, калі вядома дакладнасць набліжэння кожнага складаемага? Рашэнне гэтай і падобных ёй задач заснавана на наступнай уласцівасці абсалютнай велічыні:

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

Абсалютная велічыня сумы любых двух лікаў не пераўзыходзіць сумы іх абсалютных велічынь.

Доказ. Калі лікі a і b дадатныя, то і сума іх дадатная. У гэтым выпадку $|a|=a$, $|b|=b$, $|a+b|=a+b$ і, значыць, $|a+b|=|a|+|b|$. Калі лікі a і b адмоўныя, то і сума іх адмоўная. У гэтым выпадку $|a|=-a$, $|b|=-b$, $|a+b|=-(a+b)$; таму $|a+b|$ таксама раўняецца $|a|+|b|$.

Няхай, нарэшце, адзін з лікаў a і b дадатны, а другі адмоўны. Тады калі $|a|\geqslant|b|$, то $|a+b|=|a|-|b|$; калі ж $|a|\leqslant|b|$, то $|a+b|=|b|-|a|$. У любым з гэтых выпадкаў рознасць двух дадатных лікаў $|a|$ і $|b|$ будзе меншай за іх суму. Такім чынам, калі адзін з лікаў a і b дадатны, а другі адмоўны, то

$$|a+b|<|a|+|b|.$$

Засталося разгледзець толькі выпадак, калі адзін з лікаў a і b, а можа быць і абодва, роўны нулю. Вучні без асаблівай цяжкасці могуць зрабіць гэта самастойна.

Прыклад. $|1-20| \leqslant |1|+|-20|$.
Сапраўды,

$$|1-20| = |-19| = 19,$$
$$|1|+|-20| = 1+20 = 21, \quad 19 \leqslant 21.$$

Практыкаванні

140. З якой дакладнасцю можна вымяраць даўжыні пры дапамозе звычайнай лінейкі?

141. З якой дакладнасцю паказвае час гадзіннік?

142. Ці ведаеце вы, з якой дакладнасцю можна вымяраць вагу цела на сучасных электрычных вагах?

143. а) У якіх межах заключаны лік a, калі яго набліжанае значэнне з дакладнасцю да 0,01 роўна 0,99?

б) У якіх межах заключаны лік a, калі яго набліжанае значэнне з недахопам з дакладнасцю да 0,01 роўна 0,99?

в) У якіх межах заключаны лік a, калі яго набліжанае значэнне з лішкам з дакладнасцю да 0,01 роўна 0,99?

144. Якое набліжэнне ліку $\pi \approx 3{,}14$ лепш: 3,1 або 3,2?

145. Ці можна набліжанае значэнне некаторага ліку з дакладнасцю да 0,01 лічыць набліжаным значэннем таго ж ліку з дакладнасцю да 0,1? А наадварот?

146. У якім выпадку абсалютная велічыня сумы двух лікаў:

а) меншая за суму абсалютных велічынь гэтых лікаў;

б) роўна суме абсалютных велічынь гэтых лікаў?

147. Даказаць няроўнасці:

а) $|a-b| \leqslant |a|+|b|$;

б)* $|a-b| \geqslant ||a|-|b||$.

Калі ў гэтых формулах мае месца знак роўнасці?

§ 19. Набліжанае складанне і множанне на лік

Няхай a' ёсць набліжанае значэнне ліку a з дакладнасцю да ε_1, а b' — набліжанае значэнне ліку b з дакладнасцю да ε_2. Тады сума $a'+b'$ будзе набліжаным значэннем ліку $a+b$. Якая ж дакладнасць такога набліжэння? Каб высветліць гэта пытанне, выкарыстаем уласцівасць абсалютнай велічыні сумы. Маем:

$$|(a+b)-(a'+b')| = |(a-a')+(b-b')| \leqslant$$
$$\leqslant |a-a'|+|b-b'|.$$

Па ўмове

$$|a-a'| < \varepsilon_1, \text{ а } |b-b'| < \varepsilon_2.$$

Значыць,

$$|(a+b)-(a'+b')| < \varepsilon_1+\varepsilon_2.$$

Але ў такім выпадку можна сказаць, што $a+b \approx a'+b'$ з дакладнасцю да $\varepsilon_1+\varepsilon_2$. Такім чынам, мы даказалі тэарэму:

Тэарэма 1. ***Калі $a \approx a'$ з дакладнасцю да ε_1, а $b \approx b'$ з дакладнасцю да ε_2, то $a+b \approx a'+b'$ з дакладнасцю да $\varepsilon_1+\varepsilon_2$.***

Прыклады. 1) З якой дакладнасцю можна знайсці суму двух лікаў, калі адзін з іх вядомы з дакладнасцю да 0,1, а другі — з дакладнасцю да 0,2?

Тэарэма 1 у дадзеным выпадку гарантуе дакладнасць $0{,}1+0{,}2=0{,}3$.

2) Суму $\sqrt{10}+\sqrt{12}$ трэба знайсці з дакладнасцю да 0,1. Будзем здабываць карані з 10 і 12 па вядомаму алгарытму:

$\sqrt{10} = 3{,}16\ldots$

9	
61	100
1	61
626	3900
6	3756
	144

$\sqrt{12} = 3{,}46\ldots$

9	
64	300
4	256
686	4400
6	4116
	284

Двух дзесятковых знакаў зусім дастаткова. У гэтым выпадку кожнае са складаемых мы знаходзім з дакладнасцю да 0,01. Таму па тэарэме 1 сума $\sqrt{10}+\sqrt{12} \approx 3{,}16+3{,}46=6{,}62$ будзе знойдзена з дакладнасцю да $0{,}01+0{,}01=0{,}02<0{,}1$. Згодна з патрабаваннем задачы канчаткова запішам: $\sqrt{10}+\sqrt{12} \approx 6{,}6$. Абмежавацца пры здабыванні кораняў толькі адным дзесятковым знакам было б нядобра. У гэтым выпадку мы знайшлі б набліжаныя значэнні складаемых з дакладнасцю да 0,1. Але тады ў нас не было б упэўненасці ў тым, што сума $\sqrt{10}+\sqrt{12} \approx 3{,}1+3{,}4=6{,}5$ будзе знойдзена з дакладнасцю да 0,1. Тэарэма ж 1 гарантавала б толькі дакладнасць $0{,}1+0{,}1=0{,}2$, якая нас не задавальняе.

Тэарэма 2. ***Калі a' — набліжанае значэнне ліку a з дакладнасцю да ε, то ka' ёсць набліжанае значэнне ліку ka з дакладнасцю да $|k|\varepsilon$.***

Напрыклад, з дакладнасцю да 0,1 $\sqrt{10} \approx 3{,}1$. Таму $5\sqrt{10} \approx 5 \cdot 3{,}1 = 15{,}5$ з дакладнасцю да $5 \cdot 0{,}1 = 0{,}5$. Аналагічна $-7\sqrt{10} \approx -7 \cdot 3{,}1 = -21{,}7$ з дакладнасцю да $|-7| \cdot 0{,}1 = 7 \cdot 0{,}1 = 0{,}7$.

Доказ тэарэмы 2. Калі a' ёсць набліжанае значэнне a з дакладнасцю да ε, то $|a-a'|<\varepsilon$. Таму

$$|ka-ka'| = |k(a-a')| = |k| \cdot |a-a'| < |k| \cdot \varepsilon,$$

што і трэба было даказаць.

У заключэнне разгледзім наступны прыклад. Няхай з дакладнасцю да 0,1 $a \approx a' = 2{,}7$; $b \approx b' = 3{,}6$. Трэба знайсці набліжа-

нае значэнне выразу $5a-3b$ і вызначыць дакладнасць гэтага набліжэння.

Маем:

$$5a-3b \approx 5a'-3b' = 5\cdot 2{,}7-3\cdot 3{,}6 = 13{,}5-10{,}8 = 2{,}7.$$

Дакладнасць гэтага рэзультату можна ацаніць, выкарыстоўваючы ўласцівасць абсалютнай велічыні сумы:

$$\begin{gathered}|(5a-3b)-(5a'-3b')| = |(5a-5a')- \\ -(3b-3b')| \leqslant |5a-5a'|+|3b-3b'| = \\ = |5(a-a')|+|3(b-b')| = 5|a-a'|+ \\ +3|b-b'| < 5\cdot 0{,}1+3\cdot 0{,}1 = 0{,}8.\end{gathered}$$

Такім чынам, $5a-3b \approx 2{,}7$ з дакладнасцю да 0,8.

Практыкаванні

148. На лікавай прамой зададзена становішча пункта, які адпавядае ліку a. Указаць на гэтай прамой:

а) становішча ўсіх пунктаў, якія адпавядаюць набліжаным значэнням ліку a з недахопам з дакладнасцю да 0,1;

б) становішча ўсіх пунктаў, якія адпавядаюць набліжаным значэнням ліку a з лішкам з дакладнасцю да 0,1;

в) становішча ўсіх пунктаў, якія адпавядаюць набліжаным значэнням ліку a з дакладнасцю да 0,1.

149. Вылічыць з дакладнасцю да 0,1:

а) $\sqrt{2}+\sqrt{17}$; в) $5\sqrt{3}$;

б) $\sqrt{12}+\frac{2}{7}$; г) $\frac{367}{546}-\frac{1}{75}$.

150. Вядома, што з дакладнасцю да 0,01 $a \approx -3{,}05$; $b \approx 3{,}01$. Знайсці набліжаныя значэнні выразаў:

а) $2a+7b$; б) $3a-5b$; в) $-a-4b$.

Вызначыць дакладнасць атрыманых набліжэнняў.

151. Лікі a і b зададзены з аднолькавай дакладнасцю ε. Якім павінна быць ε, каб з дакладнасцю да 0,001 можна было знайсці:

а) $a+b$; б) $a-b$; в) $a-10b$?

§ 20. Эквівалентныя няроўнасці і іх уласцівасці

Да гэтага часу мы разглядалі тоесныя няроўнасці, гэта значыць такія няроўнасці, якія выконваюцца (ператвараюцца ў лікавыя няроўнасці) пры ўсіх дапушчальных значэннях уваходзячых у іх літар. Да такіх адносяцца, напрыклад, няроўнасці:

$$a+1 > a, \quad a^2 \geqslant 0, \quad \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

Цяпер мы пераходзім да вывучэння няроўнасцей, якія выконваюцца не пры ўсіх, а толькі пры некаторых (а магчыма, і ні пры якіх!) дапушчальных значэннях літар. Прыкладам такой няроўнасці можа служыць няроўнасць

$$2x>0.$$

Яна выконваецца пры любых дадатных значэннях x, хоць дапушчальнымі значэннямі x з'яўляюцца ўсе лікі, у тым ліку і адмоўныя.

Рашыць няроўнасць, якая змяшчае невядомую велічыню,— гэта значыць знайсці ўсе значэнні гэтай невядомай велічыні, пры якіх дадзеная няроўнасць выконваецца.

Падобна да рашэння ўраўненняў, рашэнне няроўнасцей звычайна праводзіцца шляхам звядзення іх да больш простых *эквівалентных* (або *раўназначных*) няроўнасцей.

Дзве няроўнасці, якія змяшчаюць адну і тую ж невядомую велічыню, называюцца эквівалентнымі (або раўназначнымі), калі яны выконваюцца пры адных і тых жа значэннях гэтай велічыні.

Прыкладам эквівалентных няроўнасцей могуць служыць няроўнасці $2x>0$ і $-3x<0$, справядлівыя пры ўсіх дадатных значэннях x. Няроўнасці $x>0$ і $x^2>0$ не эквівалентны, паколькі першая з іх правільная толькі пры дадатных значэннях x, а другая — як пры дадатных, так і пры адмоўных значэннях x.

Няроўнасці, кожная з якіх не выконваецца ні пры якіх значэннях невядомай велічыні, таксама лічацца эквівалентнымі. Прыкладам такіх няроўнасцей могуць служыць няроўнасці

$$x^2<-1 \text{ і } -(5x^4+3)>0.$$

Эквівалентныя няроўнасці маюць рад важных уласцівасцей, якія мы прыводзім без доказу.

Уласцівасць 1. ***Калі да абедзвюх частак няроўнасці дадаць або ад абедзвюх частак адняць лік або выраз, вызначаны для ўсіх значэнняў невядомай велічыні, то атрымаецца няроўнасць, эквівалентная дадзенай.***

Прыклады. 1. Калі да абедзвюх частак няроўнасці $x>2-x$ дадаць лік -2, то ў рэзультаце атрымаецца няроўнасць $x-2>-x$. Гэта няроўнасць, як пацвярджае ўласцівасць 1, павінна быць эквівалентна дадзенай няроўнасці $x>2-x$.

2. Дададзім да кожнай часткі няроўнасці $\frac{1}{x}<1$ выраз $\frac{1}{x^2+1}$. У рэзультаце атрымаем

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2+1}<1+\frac{1}{x^2+1}.$$

Выраз $\frac{1}{x^2+1}$ вызначаны пры ўсіх значэннях x. Значыць, атрыманая няроўнасць эквівалентна дадзенай няроўнасці $\frac{1}{x}<1$.

Істотнай умовай у 1-й уласцівасці эквівалентных няроўнасцей з'яўляецца тое, што выраз, які мы дадаём да кожнай часткі зыходнай няроўнасці, павінен быць вызначаны для ўсіх значэнняў невядомай велічыні. Калі гэта ўмова не выканана, то дадзеная і атрыманая з яе няроўнасці могуць аказацца і не эквівалентнымі. Растлумачым гэта на наступным прыкладзе. Дадаўшы да абедзвюх частак няроўнасці $x>0$ выраз $\frac{1}{x-1}$, мы атрымаем няроўнасць

$$x+\frac{1}{x-1}>\frac{1}{x-1}.$$

Зыходная няроўнасць правільная пры ўсіх дадатных значэннях x і, у прыватнасці, пры $x=1$. Атрыманая ж няроўнасць пры $x=1$ не мае сэнсу. Таму пры $x=1$ яна выконвацца не можа. Такім чынам, разглядаемыя няроўнасці не эквівалентны.

З 1-й уласцівасці эквівалентных няроўнасцей можна зрабіць важны для далейшага вынік. ***Любое складаемае, вызначанае для ўсіх значэнняў невядомай велічыні, можна перанесці з адной часткі няроўнасці ў другую, памяняўшы знак гэтага складаемага на процілеглы.***

Сапраўды, няхай дадзена няроўнасць

$$P(x)+Q(x)>R(x), \qquad (1)$$

дзе $P(x)$, $Q(x)$ і $R(x)$ уяўляюць сабой некаторыя выразы, якія залежаць ад x, прычым $Q(x)$ вызначана для любых значэнняў x. Нам трэба даказаць, што такая няроўнасць эквівалентна няроўнасці

$$P(x)>R(x)-Q(x). \qquad (2)$$

Доказ гэтага факта вельмі просты: няроўнасць (2) атрымліваецца, калі ад абедзвюх частак няроўнасці (1) адняць $Q(x)$.

Прыклад. Няхай дадзена няроўнасць $3x+1<2-x$. Перанёсшы $-x$ з правай часткі ў левую, а 1, наадварот, з левай часткі ў правую, атрымаем

$$3x+x<2-1,$$

або

$$4x<1.$$

Апошняя няроўнасць выконваецца, відавочна, пры ўсіх значэннях x, меншых $\frac{1}{4}$. Пры гэтых жа значэннях x павінна, значыць, выконвацца і дадзеная няроўнасць $3x+1<2-x$.

Наогул можна даказаць, што пераносіць з адной часткі няроўнасці ў другую можна любое складаемае. Напрыклад, складаемае $\frac{1}{x-1}$ у няроўнасці

$$x+\frac{1}{x-1}>\frac{1}{x-1}$$

можна перанесці з левай часткі ў правую. У выніку такога пераўтварэння атрымаецца няроўнасць

$$x>\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-1},$$

эквівалентная дадзенай (абедзве няроўнасці выконваюцца пры ўсіх дадатных значэннях x, акрамя 1). А вось такое простае пераўтварэнне, як прывядзенне падобных членаў, патрабуе большай асцярожнасці. Так, калі б мы ў правай частцы апошняй няроўнасці прывялі падобныя члены, то атрымалі б няроўнасць

$$x>0,$$

якая ўжо не эквівалентна зыходнай няроўнасці.

Уласцівасць 2. ***Калі абедзве часткі няроўнасці памножыць на дадатны лік або выраз, які прымае толькі дадатнае значэнне і вызначаны для ўсіх значэнняў невядомай велічыні, то атрымаецца няроўнасць, эквівалентная дадзенай.***

Прыклады. 1) Калі абедзве часткі няроўнасці $x>2-x$ памножыць на дадатны лік 3, то атрымаецца няроўнасць $3x>6-3x$, эквівалентная дадзенай.

2) Выраз x^2+1 прымае толькі дадатныя значэнні і вызначаны для ўсіх значэнняў x. Таму няроўнасць $x<1$ эквівалентна няроўнасці

$$x(x^2+1)<x^2+1,$$

або

$$x^3+x<x^2+1.$$

Трэба асоба падкрэсліць, што той выраз, на які мы памнажаем абедзве часткі зыходнай няроўнасці, павінен задавальняць двум патрабаванням:

а) ён абавязан прымаць толькі дадатныя значэнні і

б) быць пэўным для ўсіх значэнняў невядомай велічыні.

Калі хаця б адно з гэтых патрабаванняў не задавальняецца, то зыходная і атрыманая з яго няроўнасці могуць аказацца і неэквівалентнымі. Растлумачым гэта на наступных прыкладах.

1) Няроўнасць $x>0$ выконваецца толькі для дадатных значэнняў x. Памножыўшы яе пачленна на x, мы атрымаем няроўнасць $x^2>0$. Яна правільная як для дадатных, так і для адмоўных значэнняў x. Неадпаведнасць гэтага рэзультату з уласцівасцю 2 лёгка растлумачыць. Выраз жа x, на які мы памножылі абедзве часткі зыходнай няроўнасці $x>0$, прымае як дадатныя, так і адмоўныя значэнні. А на гэты выпадак уласцівасць 2 не дае ніякіх гарантый.

2) Памножыўшы няроўнасць $x>0$ на выраз $\frac{1}{(x-1)^2}$, мы атрымаем няроўнасць $\frac{x}{(x-1)^2}>0$. Прапануем вучням самастойна паказаць, што гэта няроўнасць не эквівалентна дадзенай, і растлумачыць, чаму 2-я ўласцівасць эквівалентных няроўнасцей тут не прымяніма.

Уласцівасць 3. ***Калі абедзве часткі няроўнасці памножыць на адмоўны лік або выраз, які вызначаны для ўсіх значэнняў невядомай велічыні і прымае толькі адмоўныя значэнні, а знак няроўнасці зменіць на процілеглы (> на <; < на >), то атрымаецца няроўнасць, эквівалентная дадзенай.***

Гэта ўласцівасць зусім аналагічная 2-й уласцівасці. Таму падрабязна спыняцца на ёй мы не будзем.

Практыкаванні

152. Ці эквівалентныя няроўнасці:

а) $x^2>x-1$ і $x^2+1>x$;

б) $2x\leqslant 0$ і $2x+\frac{6}{x}\leqslant\frac{6}{x}$;

в) $x-1>0$ і $(x-1)+\frac{1}{4-x}>\frac{1}{4-x}$;

г) $3x+1>0$ і $(3x+1)+(x-4)>x-4$?

153. Ці эквівалентныя няроўнасці:

а) $2x>3$ і $6\cdot 2x>6\cdot 3$;

б) $2x>3$ і $-6\cdot 2x<-6\cdot 3$;

в) $2x>3$ і $2x(x^2+1)>3(x^2+1)$;

г) $2x>3$ і $2x^3>3x^2$;

д) $2x>3$ і $2x^2>3x$;

е) $2x>3$ і $\frac{2x}{4-x^2}>\frac{3}{4-x^2}$;

ж) $2x>3$ і $\frac{2x}{x-1}>\frac{3}{x-1}$;

з) $2x>3$ і $\frac{2x}{\sqrt{x}}>\frac{3}{\sqrt{x}}$?

§ 21. Лінейныя няроўнасці

Так называюцца няроўнасці, левая і правая часткі якіх уяўляюць сабой лінейныя функцыі адносна невядомай велічыні. Да іх адносяцца, напрыклад, няроўнасці

$$2x-1\geqslant -x+3,$$
$$5>4-6x,$$
$$7x\leqslant 0,$$
$$9-x<x+5$$

і г. д. Для пэўнасці мы разгледзім толькі няроўнасці, якія змяшчаюць знак $>$. Лінейная няроўнасць, якая змяшчае знак $>$, мае выгляд

$$ax+b>cx+d. \qquad (1)$$

Калі ў няроўнасці (1) $a\neq c$, то такая няроўнасць называецца таксама *няроўнасцю 1-й ступені*. Відавочна, што ўсякая няроўнасць 1-й ступені з'яўляецца разам з тым і лінейнай няроўнасцю. Адваротнае сцверджанне няправільнае. Напрыклад, няроўнасць $0\cdot x>-2$ з'яўляецца лінейнай, але не з'яўляецца няроўнасцю 1-й ступені.

Пераносячы cx з правай часткі няроўнасці (1) у левую, а b з левай часткі ў правую, атрымаем

$$(a-c)x>d-b.$$

Такім чынам, любая лінейная няроўнасць зводзіцца да эквівалентнай няроўнасці выгляду

$$mx>n, \qquad (2)$$

дзе m і n — некаторыя зададзеныя лікі, а x — невядомая велічыня.

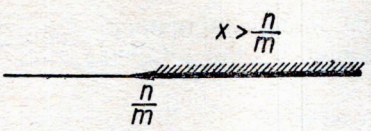
Калі $m>0$, то, дзелячы абедзве часткі няроўнасці (2) на m, атрымаем $x>\frac{n}{m}$. Гэта няроўнасць і вызначае мноства ўсіх тых значэнняў велічыні x, пры якіх выконваецца няроўнасць (2). Геаметрычна гэта мноства можна паказаць у выглядзе той часткі лікавай прамой, якая ляжыць справа ад пункта з абсцысай $\frac{n}{m}$ (рыс. 23). Сам пункт $\frac{n}{m}$ у гэта мноства не ўключаецца. На рысунку гэта адзначана стрэлачкай, якая звернута да пункта з абсцысай $\frac{n}{m}$.

Калі $m<0$, то, дзелячы абедзве часткі няроўнасці (2) на m і мяняючы пры гэтым знак няроўнасці на процілеглы, атрымліваем

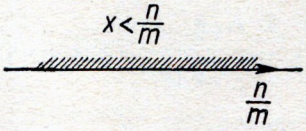
$$x<\frac{n}{m}.$$

Гэта няроўнасць вызначае мноства ўсіх тых значэнняў велічыні x, пры якіх у дадзеным выпадку выконваецца няроўнасць

(2). Геаметрычна гэта мноства паказваецца ў выглядзе той часткі лікавай прамой, якая размешчана злева ад пункта з абсцысай $\frac{n}{m}$ (рыс. 24). Сам пункт $x=\frac{n}{m}$ у гэта мноства не ўклю-



Рыс. 23.



Рыс. 24.

чаецца. На рысунку гэта адзначана стрэлачкай, звернутай да пункта з абсцысай $\frac{n}{m}$.

Цяпер дапусцім, што $m=0$. Тады няроўнасць (2) прымае выгляд:

$$0\cdot x>n.$$

Калі лік n адмоўны, то гэта няроўнасць выконваецца пры ўсіх значэннях x. У адваротным выпадку яна не мае рашэнняў.

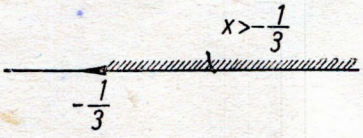
Мы разгледзелі лінейныя няроўнасці, якія змяшчаюць знак $>$. Няроўнасці, якія змяшчаюць знакі $\geqslant$, $<$ і $\leqslant$, рашаюцца аналагічна. Разгледзім некалькі прыкладаў.

1. Рашыць няроўнасць

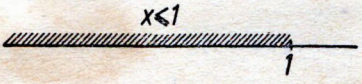
$$x+4>-2x+3.$$

Пераносячы $-2x$ у левую, а 4 у правую частку, атрымліваем $3x>-1$, адкуль $x>-\frac{1}{3}$.

На лікавай прамой (рыс. 25) адзначаны ўсе тыя значэнні x, якія задавальняюць дадзенай няроўнасці.



Рыс. 25.



Рыс. 26.

2. Рашыць няроўнасць

$$3-7x\geqslant x-5.$$

Пераносячы x у левую, а 3 у правую частку, атрымаем $-8x\geqslant -8$. Падзелім абедзве часткі гэтай няроўнасці на -8. Паколькі гэты лік адмоўны, то знак няроўнасці пры гэтым трэба

змяніць на процілеглы. У рэзультаце атрымаем $x \leqslant 1$. Мноства ўсіх такіх значэнняў x адзначана на рысунку 26 (пункт $x=1$ уключаецца ў гэта мноства).

Практыкаванні

Рашыць дадзеныя няроўнасці (№ 154—165) і адзначыць атрыманыя рэзультаты на лікавай прамой:

154. $7x-6<x+12$.

155. $1-2x \geqslant 4-5x$.

156. $1-x \geqslant 2x+3$.

157. $-\frac{2}{3-x}>0$.

158. $9-7x>-1-17x$.

159. $\frac{ax+b}{a-b}>\frac{ax-b}{a+b}$ $(a>0;\ b>0)$.

160. $\frac{4}{2+x} \leqslant 0$.

161. $\frac{x^2}{3x+5}<0$.

162. $ax+1>2-5x$.

163. $ax+b>3-2x$.

164. $x-\frac{x+1}{2}>\frac{x-3}{4}-\frac{x-2}{3}$.

165. $x+\frac{x-1}{a+1}>\frac{x+1}{a+1}-ax$.

Пры якіх значэннях x вызначаны дадзеныя выразы (№ 166—169):

166. $\sqrt{7+3x}$.

167. $\sqrt{5-x}$.

168. $\sqrt{2x+4}$.

169. $\sqrt{1-2x}+\sqrt{x}$?

170. Ці можа няроўнасць

$$a^2x \leqslant a+1$$

не мець рашэнняў?

Рашыць ураўненні:

171. $|4x-3|=4x-3$.

172. $|7-2x|=2x-7$.

173. $|6x-a|=a-6x$.

174. $|ax-1|=ax-1$.

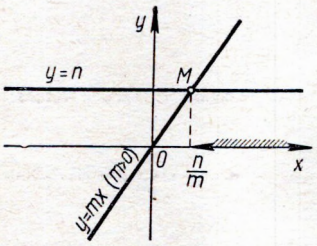
§ 22. Графічны спосаб рашэння няроўнасці $mx>n$

На адным і тым жа чарцяжы пабудуем графікі дзвюх функцый:

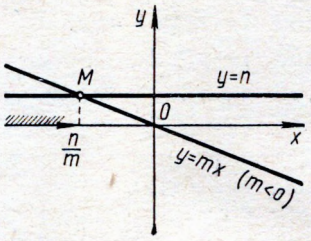
$$y=mx \text{ і } y=n.$$

Калі $m \neq 0$, то прамая $y=mx$ абавязкова перасячэ прамую

$y=n$ (рыс. 27 для $m>0$ і рыс. 28 для $m<0$). Абазначым пункт перасячэння гэтых прамых праз M. Абсцыса гэтага пункта ўяўляе сабой корань ураўнення $mx=n$ і таму роўна $\frac{n}{m}$. Калі $m>0$, то, як відаць з рысунка 27, mx будзе больш n для ўсіх x, большых, чым $\frac{n}{m}$. Калі $m<0$ (рыс. 28), то mx будзе больш n для ўсіх x, меншых, чым $\frac{n}{m}$.

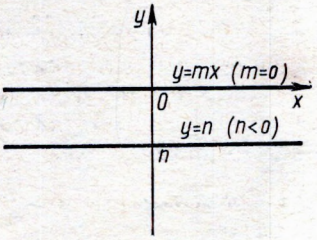


Рыс. 27.

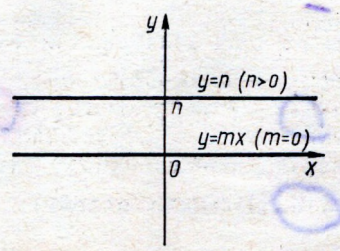


Рыс. 28.

Пры $m=0$ прамая $y=mx$ супадае з воссю абсцыс (рыс. 29). Калі пры гэтым лік n адмоўны, то mx заўсёды будзе больш n. У гэтым выпадку любы лік x задавальняе няроўнасці $mx>n$. Калі ж лік n неадмоўны (рыс. 30), то ні пры якім значэнні x mx не будзе больш n.



Рыс. 29.



Рыс. 30.

Практыкаванні

Рашыць графічна дадзеныя няроўнасці:

175. $2x-1>3$.

176. $x+1>2x-1$.

177. $1-2x>7$.

178. $3>1-x$.

§ 23. Сістэмы лінейных няроўнасцей

Сістэмай лінейных няроўнасцей называецца любая сукупнасць дзвюх або больш лінейных няроўнасцей, якія змяшчаюць адну і тую ж невядомую велічыню.

Прыкладамі такіх сістэм могуць служыць сістэмы:

$$\begin{cases} x-1>0, \\ 2x-8>0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 1-x<2x-5, \\ 3-x>-5; \end{cases} \qquad \begin{cases} 14x-3\leqslant 7+9x, \\ 1<x-3. \end{cases}$$

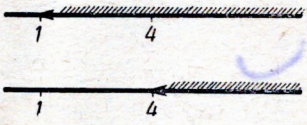
Рашыць сістэму няроўнасцей — гэта значыць знайсці ўсе значэнні невядомай велічыні, пры якіх выконваецца кожная няроўнасць сістэмы.

Рэшым прыведзеныя вышэй сістэмы.

Прыклад 1.

$$\begin{cases} x-1>0, \\ 2x-8>0. \end{cases}$$

Размесцім адну пад другой дзве лікавыя прамыя (рыс. 31): на верхняй адзначым тыя значэнні x, пры якіх выконваецца першая няроўнасць ($x>1$), а на ніжняй — тыя значэнні, пры якіх выконваецца другая няроўнасць ($x>4$). Параўноўваючы рэзультаты на лікавых прамых, заўважаем, што абедзве няроўнасці адначасова будуць задавальняцца пры $x>4$. Адказ. $x>4$.

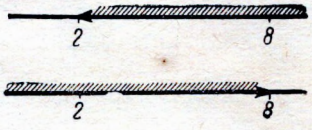


Рыс. 31.

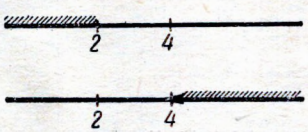
Прыклад 2.

$$\begin{cases} 1-x<2x-5, \\ 3-x>-5. \end{cases}$$

Першая няроўнасць дае $-3x<-6$, або $x>2$, другая $-x>-8$, або $x<8$. Далей робім гэтак жа, як і ў першым прыкладзе. На адной лікавай прамой адзначаем усе тыя значэнні x, пры якіх выконваецца першая няроўнасць сістэмы, а на другой лікавай восі, размешчанай пад першай,— усе тыя значэнні x, пры якіх выконваецца другая няроўнасць сістэмы (рыс. 32).



Рыс. 32.



Рыс. 33.

Параўнанне гэтых двух рэзультатаў паказвае, што абедзве няроўнасці адначасова будуць выконвацца пры ўсіх значэннях x, заключаных ад 2 да 8. Мноства такіх значэнняў x запісваецца ў выглядзе двайной няроўнасці $2<x<8$.

Прыклад 3. Рашыць сістэму няроўнасцей:

$$\begin{cases} 14x-3\leqslant 7+9x, \\ 1<x-3. \end{cases}$$

Першая няроўнасць сістэмы дае $5x \leqslant 10$, або $x \leqslant 2$, а другая $x > 4$. Такім чынам, любы лік, які задавальняе абедзвюм няроўнасцям адначасова, павінен быць не больш 2 і больш 4 (рыс. 33). Але такіх лікаў не існуе. Таму дадзеная сістэма няроўнасцей не выконваецца ні пры якіх значэннях x.

Такія сістэмы няроўнасцей называюцца *несумеснымі*.

Практыкаванні

Рашыць дадзеныя сістэмы няроўнасцей (№ 179—184):

179. $\begin{cases} 2x-1>1, \\ 3-x>0. \end{cases}$

180. $\begin{cases} 1-2x<-9, \\ 3x+1<13. \end{cases}$

181. $\begin{cases} 5x+3>8, \\ 0{,}7-3x\leqslant -2{,}6. \end{cases}$

182. $\begin{cases} 2x-3>x-3, \\ 4x+3>8-x. \end{cases}$

183. $\begin{cases} 3x+7\geqslant 9+2x, \\ 5+x>2x+2. \end{cases}$

184. $\begin{cases} x+4<2x, \\ 1-x>-2. \end{cases}$

Рашыць няроўнасці (№ 185, 186):

185. $(2x+3)(2-2x)>0$.

186. $(2-\pi)(2x-15)(x+4)>0$.

Знайсці дапушчальныя значэнні літар, уваходзячых у дадзеныя няроўнасці (№ 187, 188):

187. $\sqrt{a-1}+\sqrt{5-3a}=\sqrt{b}$.

188. $\sqrt{9-2a}+\sqrt{3a-6}=\dfrac{b}{a-3}$.

Рашыць няроўнасці (№ 189, 190):

189. $1\leqslant 2x-5<2$.

190. $-2<1-ax\leqslant 5$.

191. Якой павінна быць тэмпература 10 *л* вады, каб пры змешванні яе з 6 *л* вады пры тэмпературы 15° атрымаць ваду з тэмпературай не менш 30° і не больш 40°?

192. Адна старана трохвугольніка роўна 4 *см*, а сума дзвюх другіх 10 *см*. Знайсці гэтыя стораны, калі яны выражаюцца цэлымі лікамі.

193. Вядома, што сістэма дзвюх лінейных няроўнасцей не выконваецца ні пры якіх значэннях невядомай велічыні. Ці можна сказаць, што асобныя няроўнасці гэтай сістэмы не выконваюцца ні пры якіх значэннях невядомай велічыні?

§ 24. Дробава-лінейныя функцыі

У гэтым параграфе мы разгледзім некаторыя пытанні паводзін функцый выгляду

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}, \qquad (1)$$

дзе a, b, c і d — зададзеныя лікі, прычым c адрозна ад нуля. Такія функцыі называюцца *дробава-лінейнымі**.

Перш за ўсё адзначым, што дробава-лінейная функцыя (1) вызначана пры ўсіх значэннях аргумента x, акрамя $x=-\frac{d}{c}$.

Тыя значэнні аргумента, пры якіх вызначана функцыя, у матэматыцы прынята называць *вобласцю вызначэння* гэтай функцыі. Таму можна сказаць, што вобласцю вызначэння дробава-лінейнай функцыі (1) служыць мноства ўсіх лікаў, акрамя $-\frac{d}{c}$.

Так, вобласцю вызначэння функцыі $y=\frac{x-1}{3-7x}$ будзе мноства ўсіх лікаў, акрамя $\frac{3}{7}$; вобласць вызначэння функцыі $y=\frac{2}{x-1}$ складаецца з усіх лікаў, акрамя 1.

Цяпер на прыватным прыкладзе паглядзім, як можна высветліць, пры якіх значэннях аргумента x дробава-лінейная функцыя прымае дадатныя значэнні, пры якіх — адмоўныя значэнні і пры якіх яна ператвараецца ў нуль.

Няхай

$$y=\frac{x-1}{3-7x}.$$

Разгледзім асобна лічнік і назоўнік дадзенага дробу. Пры $x>1$ лічнік $x-1$ дадатны, а пры $x<1$ — адмоўны. Гэты факт адзначаны на верхняй прамой рысунка 34: заштрыхаваная вобласць гэтай лікавай прамой адпавядае тым значэнням аргумента x, пры якіх лічнік $x-1$ дадатны, а незаштрыхаваная — тым значэнням аргумента x, пры якіх лічнік $x-1$ адмоўны. Рашаючы няроўнасць

$$3-7x>0,$$

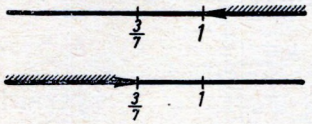
атрымліваем $x<\frac{3}{7}$. Таму назоўнік $3-7x$ дадзенага дробу будзе дадатным пры $x<\frac{3}{7}$; гэты факт адзначаны пры дапамозе штрыхоў на ніжняй лікавай прамой рысунка 34. Пры $x>\frac{3}{7}$ назоўнік будзе, відавочна, адмоўным.

Параўнанне дзвюх лікавых прамых на рысунку 34 дае: пры $\frac{3}{7}<x<1$ знакі лічніка і назоўніка дадзенага дробу супадаюць

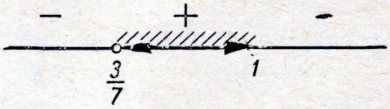
---

* Звычайна, кажучы аб функцыях выгляду (1), дапускаюць, што $ad-bc\neq 0$. Гэту ўмову мы замяняем тут больш простай умовай $c\neq 0$.

(абодва «—»); пры $x<\frac{3}{7}$ і пры $x>1$ яны розныя. Таму пры $\frac{3}{7}<x<1$ дадзеная функцыя $y=\frac{x-1}{3-7x}$ прымае дадатныя значэнні, а пры $x<\frac{3}{7}$ і пры $x>1$ — адмоўныя значэнні. У пункце $x=1$ яна ператвараецца ў нуль, а пры $x=\frac{3}{7}$ наогул не вызначана (рыс. 35).



Рыс. 34.



Рыс. 35.

Апісаным спосабам можна рашаць і некаторыя няроўнасці, якія змяшчаюць дробава-лінейныя выразы. Пакажам, напрыклад, як рашаецца няроўнасць

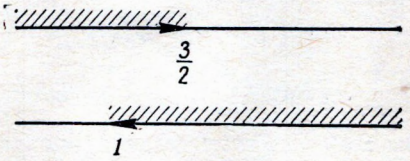
$$\frac{2}{x-1}<4.$$

Перанёсшы 4 у левую частку, атрымліваем эквівалентную няроўнасць

$$\frac{2}{x-1}-4<0,$$

або

$$\frac{6-4x}{x-1}<0.$$



Рыс. 36.

Лічнік $6-4x$ атрыманага дробу дадатны пры $x<\frac{3}{2}$ і адмоўны пры $x>\frac{3}{2}$. Назоўнік $x-1$ дадатны пры $x>1$ і адмоўны пры $x<1$ (рыс. 36). Таму дроб $\frac{6-4x}{x-1}$ прымае адмоўныя значэнні пры $x<1$ і $x>\frac{3}{2}$.

Такім чынам, няроўнасці $\frac{2}{x-1}<4$ задавальняюць усе значэнні $x<1$ і $x>\frac{3}{2}$.

Падкрэслім, што дадзеную няроўнасць нельга рашаць шляхам пачленнага множання на $x-1$. Тады ж магла б атрымацца няроўнасць, не эквівалентная дадзенай. І на самай справе мы мелі б

$$2<4(x-1),$$
$$6<4x,$$
$$x>\frac{3}{2}.$$

Аказаліся страчанымі рашэнні $x<1$. Правільным з'яўляецца адказ: $x<1$; $x>\frac{3}{2}$.

Практыкаванні

Знайсці вобласці вызначэння дадзеных дробава-лінейных функцый (№ 194, 195) і ўстанавіць, пры якіх значэннях аргумента яны прымаюць дадатныя значэнні, пры якіх — адмоўныя значэнні і пры якіх ператвараюцца ў нуль:

194. $y=\frac{2x-5}{9-3x}$. **195.** $y=\frac{7x+21}{2x-4}$.

Рашыць няроўнасці (№ 196—198):

196. $\frac{1}{x}<1$. **197.** $\frac{x-1}{x+5}\geqslant 2$. **198.** $\frac{x+2}{x+3}>7$.

199. Пры якіх x значэнні выразу $\frac{x}{x-1}$ заключаны паміж 0 і 2?

200. Рашыць няроўнасць

$$1<\frac{1+x}{1-x}\leqslant 2.$$

Знайсці дапушчальныя значэнні літар, якія ўваходзяць у дадзеныя выразы (№ 201, 202):

201. $\sqrt{\frac{4+x}{x-2}}+\sqrt{x}$. **202.** $\sqrt{\frac{3a-1}{2a}-\frac{3a}{a-5}}$.

Рашыць ураўненні:

203. $\left|\frac{2x-4}{x}\right|=\frac{2x-4}{x}$. **204.** $\left|\frac{x-1}{x-3}\right|=\frac{1-x}{3-x}$.

205. $\left|\frac{5x-10}{3x^2}\right| = \frac{10-5x}{3x^2}$.

206. $\left|\frac{a-x}{b-x}\right| = \frac{x-a}{x-b}$.

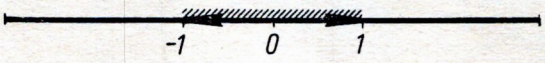
§ 25. Няроўнасці, якія змяшчаюць невядомае пад знакам абсалютнай велічыні

У гэтым параграфе мы на прыватных прыкладах пакажам, як рашаюцца няроўнасці выгляду

$$|ax+b|<c \text{ і } |ax+b|>c.$$

Прыклад 1. Рашыць няроўнасць

$$|2x-5|<1.$$



Рыс. 37.

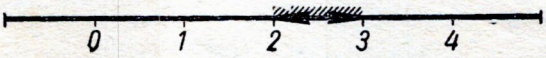
Калі абсалютная велічыня некаторага ліку менш 1, то сам гэты лік павінен быць больш —1, але менш 1 (рыс. 37). Таму дадзеную няроўнасць можна запісаць у выглядзе двайной няроўнасці:

$$-1<2x-5<1.$$

Дадаючы да кожнай часткі такой няроўнасці лік 5 і дзелячы затым атрыманую няроўнасць пачленна на 2, мы прыходзім да наступнага рэзультату:

$$4<2x<6,$$
$$2<x<3.$$

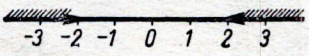
Мноства такіх значэнняў x паказана на рысунку 38.



Рыс. 38.

Прыклад 2. Рашыць няроўнасць

$$|3-x|>2.$$



Рыс. 39.

Калі абсалютная велічыня некаторага ліку больш 2, то сам гэты лік павінен быць або менш —2, або больш 2 (рыс. 39). Таму з дадзенай няроўнасці вынікае, што або

$$3-x<-2,$$

або

$$3-x>2.$$

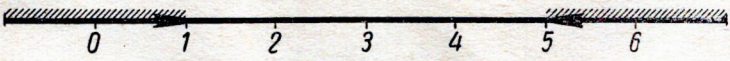
Першая з гэтых дзвюх няроўнасцей дае

$$-x<-5, \text{ або } x>5,$$

а другая

$$-x>-1, \text{ або } x<1.$$

Адказ. $x<1$; $x>5$. Мноства такіх значэнняў x паказана на рысунку 40 у выглядзе двух прамяняў лікавай прамой.



Рыс. 40.

Практыкаванні

Рашыць наступныя няроўнасці (№ 207—216):

207. $|x-2| \leqslant 3$.
208. $|1-x| > 10$.
209. $|0{,}5x-3| < 0{,}5$.
210. $|2x-4| \geqslant 6$.
211. $|1+x| < 2$.
212. $|2-x| > 1$.
213. $|-2x+1| > 5$.
214. $|x+4| \leqslant 3$.
215*. $|3+x| \geqslant |x|$.
216. $|ax+b| \leqslant a$.

Дадзеныя няроўнасці рашыць графічна:

217. $|x-3| \leqslant 2$. **218.** $|1-2x| \geqslant 3$. **219.** $|x| > |1-x|$.

§ 26. Сістэма двух лінейных ураўненняў з двума невядомымі. Сумесныя і несумесныя сістэмы

Сістэмай двух лінейных ураўненняў першай ступені з двума невядомымі называецца сукупнасць ураўненняў выгляду

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2, \end{cases} \tag{1}$$

дзе x і y — невядомыя велічыні; a_1, b_1, c_1 і a_2, b_2, c_2 — некаторыя зададзеныя лікі.

Прыкладам сістэмы двух лінейных ураўненняў з двума невядомымі можа служыць любая з сістэм:

$$\begin{cases} 2x-3y=0, \\ 7x-5y=0. \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} 100x-2y=96, \\ -3x+57y=111. \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} x-2y=12, \\ 3y=3. \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} x-y=0, \\ x-y=0. \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} x+y=0, \\ x+y=1. \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} -x+1{,}5y=3, \\ 2x-3y=-6. \end{cases} \tag{7}$$

Дарэчы, любую з гэтых сістэм можна назваць *сістэмай ураўненняў 1-й ступені*. Так называюцца сістэмы выгляду (1), у якіх хаця б адно з ураўненняў мае ненулявы каэфіцыент пры x або пры y.

Калі ў сістэме (1) абодва свабодныя члены c_1 і c_2 роўны нулю, то сістэма называецца аднароднай. Калі хаця б адзін з свабодных членаў c_1 і c_2 адрозны ад нуля, то сістэма называецца неаднароднай.

Так, з прыведзеных вышэй сістэм (2)—(7) аднароднымі будуць сістэмы (2) і (5); усе ж астатнія сістэмы неаднародныя.

Рашэннем сістэмы ўраўненняў (1) называецца такая пара лікаў (x_0, y_0), *якая кожнае ўраўненне гэтай сістэмы ператварае ў лікавую роўнасць*:*

$$\begin{cases} a_1x_0+b_1y_0=c_1, \\ a_2x_0+b_2y_0=c_2. \end{cases}$$

Напрыклад, пара лікаў (0, 0) з'яўляецца рашэннем сістэмы ўраўненняў (2), паколькі

$$\begin{cases} 2\cdot 0-3\cdot 0=0, \\ 7\cdot 0-5\cdot 0=0. \end{cases}$$

Пара лікаў (1, 2) будзе рашэннем сістэмы (3), паколькі

$$\begin{cases} 100\cdot 1-2\cdot 2=96, \\ -3\cdot 1+57\cdot 2=111. \end{cases}$$

Пара лікаў (2, 1) не будзе рашэннем сістэмы (3), паколькі

$$\begin{cases} 100\cdot 2-2\cdot 1\neq 96, \\ -3\cdot 2+57\cdot 1\neq 111. \end{cases}$$

Рашэннем сістэмы ўраўненняў (3) не будзе і пара лікаў (2, 52). Сапраўды,

$$100\cdot 2-2\cdot 52=96,$$

але

$$-3\cdot 2+57\cdot 52\neq 111.$$

Сістэмы могуць мець розны лік рашэнняў. Напрыклад, сістэма ўраўненняў (4) мае, відавочна, адзінае рашэнне: $x=14$, $y=1$. Сапраўды, з другога ўраўнення гэтай сістэмы вынікае, што $y=1$. Падстаўляючы затым гэта значэнне y у першае ўраўненне, атрымліваем: $x-2\cdot 1=12$, адкуль $x=14$.

Сістэма ўраўненняў (5) мае, відавочна, бясконцае мноства рашэнняў. Сапраўды, пры любым a пара лікаў (a, a) ператварае абодва ўраўненні сістэмы ў лікавыя роўнасці. Таму любая такая пара лікаў (а іх бясконцае мноства) з'яўляецца рашэннем дадзенай сістэмы.

Нарэшце, існуюць сістэмы, якія наогул не маюць рашэнняў. Прыкладам такіх сістэм можа служыць сістэма (6). Калі б яна мела рашэнне (x_0, y_0), то сума двух лікаў x_0 і y_0 павінна была б раўняцца адначасова і 0 і 1. Але гэтага быць не можа.

Такім чынам, існуюць сістэмы лінейных ураўненняў, якія маюць роўна адно рашэнне, бясконцае мноства рашэнняў і, нарэшце, зусім не маюць рашэнняў.

---

* Гэта азначэнне прыгоднае і для адвольных сістэм ураўненняў з двума невядомымі.

Сістэма ўраўненняў, якая мае хоць бы адно рашэнне, называецца сумеснай, а якая не мае ні аднаго рашэння,— несумеснай. Напрыклад, сістэмы ўраўненняў (2) і (4) сумесныя, а сістэма (6) несумесная.

Для кожнай аднароднай сістэмы ўраўненняў

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=0, \\ a_2x+b_2y=0 \end{cases}$$

пара лікаў (0, 0) з'яўляецца рашэннем. Таму ***любая аднародная сістэма ўраўненняў сумесная.*** У прыватнасці, сумеснымі з'яўляюцца прыведзеныя вышэй сістэмы (2) і (5).

Рашыць сістэму ўраўненняў

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

— гэта значыць: 1) высветліць, ці з'яўляецца яна сумеснай і 2) калі яна сумесная, то знайсці ўсе яе рашэнні.

Практыкаванні

220. Ці можна сістэмы

$$\begin{cases} x+y=0, \\ x+y=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-3y=3, \\ 2x-3y=30; \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x=7, \\ 2y=0 \end{cases}$$

назваць сістэмамі двух лінейных ураўненняў з двума невядомымі?

221. Паказаць, што ні пры якіх значэннях a сістэмы ўраўненняў

$$\begin{cases} 2x+7y=a, \\ -5x+6y=a+1 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} -11x+6y=5a-1, \\ 4x-5y=a^2 \end{cases}$$

не з'яўляюцца аднароднымі.

222. Даказаць, што калі сістэма двух ураўненняў 1-й ступені з двума невядомымі мае нулявое рашэнне (гэта значыць рашэнне $x=0$, $y=0$), то яна з'яўляецца аднароднай.

Ці правільнае адваротнае сцверджанне?

§ 27. Вызначальнікі 2-га парадку

Калі нам трэба запісаць суму двух лікаў a і b, мы выкарыстоўваем знак + і пішам $a+b$; для запісу рознасці двух лікаў выкарыстоўваецца знак — і г. д. Вялікую ролю ў матэматыцы адыгрывае яшчэ адна форма запісу алгебраічных дзеянняў, якая нам спатрэбіцца для вывучэння сістэм двух лінейных ураўненняў з двума невядомымі. Выглядае гэта форма запісу так:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Чатыры лікі a, b, c і d запісаны ў выглядзе табліцы, якая мае два радкі (a, b) і (c, d) і два слупкі $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$. Злева і справа стаяць вертыкальныя рысачкі. Увесь гэты выраз ужываецца для запісу рознасці $ad-bc$ і называецца *вызначальнікам 2-га парадку*. Такім чынам,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc. \qquad (2)$$

Напрыклад,

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-6) - (-3) \cdot (-5) = -12 - 15 = -27;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 - (-2) \cdot (-3) = 6 - 6 = 0;$$

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a \cdot a - 1 \cdot 1 = a^2 - 1.$$

Лікі a, b, c і d называюцца *элементамі* вызначальніка (1).

Радкі (a, b) і (c, d) вызначальніка $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ называюцца прапарцыянальнымі, калі хаця б адзін з іх атрымліваецца ў рэзультаце паэлементнага множання другога радка на некаторы лік k.

Растлумачым гэта азначэнне на двух прыватных прыкладах.

Прыклад 1. У вызначальніку

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

першы радок атрымліваецца пры дапамозе множання кожнага элемента другога радка на 2:

$$2 = 2 \cdot 1, \quad 6 = 2 \cdot 3.$$

Значыць, радкі гэтага вызначальніка прапарцыянальныя. У ролі k тут выступае лік 2.

У дадзеным выпадку магчыма і іншае тлумачэнне: другі радок вызначальніка атрымліваецца пры дапамозе множання кожнага элемента ў першым радку на $\frac{1}{2}$:

$$1 = \frac{1}{2} \cdot 2, \quad 3 = \frac{1}{2} \cdot 6.$$

Значыць, радкі гэтага вызначальніка прапарцыянальныя. Тут ужо ў ролі k выступае лік $\frac{1}{2}$.

Прыклад 2. Радкі вызначальніка

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

таксама прапарцыянальныя, паколькі першы з іх атрымліваецца паэлементным множаннем другога радка на нуль:

$$0=0\cdot 0, \quad 0=0\cdot 1.$$

У гэтым выпадку ролю k адыгрывае лік 0.

У адрозненне ад першага прыкладу тут другі радок не можа быць атрыманы шляхам паэлементнага множання першага радка. Вось чаму ў азначэнні прапарцыянальных радкоў гаворыцца, што з двух такіх радкоў *хоць бы адзін* павінен атрымлівацца ў рэзультаце паэлементнага множання другога радка на некаторы лік k.

Такім чынам, азначэнне прапарцыянальнасці радкоў (a, b) і (c, d) вызначальніка

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

можна запісаць наступным чынам:

$$\text{або } a=kc, \quad b=kd, \tag{3}$$

$$\text{або } c=k'a, \quad d=k'b, \tag{4}$$

дзе k і k' — некаторыя лікі. Для некаторых вызначальнікаў выконваюцца абедзве гэтыя ўмовы (гл. прыклад 1, у якім $k=2$, $k'=\frac{1}{2}$); для іншых жа вызначальнікаў мае месца толькі адна з іх (гл. прыклад 2).

Заўважым, што калі абодва элементы першага радка ў вызначальніку

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

адрозніваюцца ад нуля, то прапарцыянальнасць радкоў можна запісаць у выглядзе:

$$\frac{c}{a}=\frac{d}{b}.$$

Аналагічна, калі кожны элемент другога радка дадзенага вызначальніка адрозны ад нуля, то прапарцыянальнасць радкоў можна запісаць у выглядзе:

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}.$$

Практыкаванні

223. Вылічыць вызначальнікі:

а) $\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} -5 & -7 \\ 13 & -6 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -6 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}$; ж) $\begin{vmatrix} 1-a & -a \\ a & 1+a \end{vmatrix}$.

224. Як зменіцца вызначальнік 2-га парадку, калі:

а) памяняць месцамі яго радкі;

б) памяняць месцамі яго слупкі;

в) памяняць месцамі элементы, якія стаяць на адной дыяганалі;

г) усе элементы першага радка памножыць на лік a;

д) усе элементы другога радка падзяліць на лік $d \neq 0$?

225. Пры якіх значэннях a радкі дадзеных вызначальнікаў прапарцыянальныя:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & a \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ a & 3a \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 6 & a \end{vmatrix}$?

226. Дакажыце, што калі ў вызначальніку 2-га парадку які-небудзь радок або які-небудзь слупок састаўляецца з адных нулёў, то радкі такога вызначальніка прапарцыянальныя.

(Гэта сцверджанне карысна запомніць. Яно спатрэбіцца нам у наступным параграфе.)

§ 28. Умова, пры якой вызначальнік 2-га парадку роўны нулю

Ва ўсіх дадатках да тэорыі вызначальнікаў важную ролю адыгрываюць умовы, пры якіх вызначальнік ператвараецца ў нуль. Гэтыя ўмовы мы і разгледзім у дадзеным параграфе.

Тэарэма 1. ***Калі радкі вызначальніка***

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

прапарцыянальныя, то гэты вызначальнік роўны нулю.

Доказ. Прапарцыянальнасць радкоў (a, b) і (c, d) азначае, што

$$\text{або } a = kc, \quad b = kd,$$

$$\text{або } c = k'a, \quad d = k'b.$$

(Пры гэтым, безумоўна, не выключаецца магчымасць і аднаго і другога.)

Калі $a=kc$, $b=kd$, то

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} kc & kd \\ c & d \end{vmatrix} = kcd - kdc = 0.$$

Аналагічна будзе і ў выпадку, калі $c=k'a$, $d=k'b$:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ k'a & k'b \end{vmatrix} = ak'b - bk'a = 0.$$

Тэарэма даказана.

Правільная і адваротная тэарэма.

Тэарэма 2. ***Калі вызначальнік***

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

роўны нулю, то радкі яго прапарцыянальныя.

Доказ. Па ўмове

$$ad-bc=0,$$

або

$$ad=bc. \qquad (1)$$

Калі ні адзін з элементаў другога радка (c, d) не роўны нулю, то з (1) вынікае, што

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

Але гэта ўжо азначае, што радкі (a, b) і (c, d) прапарцыянальныя.

Калі абодва лікі c і d роўны нулю, то радкі вызначальніка зноў не будуць прапарцыянальныя (гл. задачу 226 з папярэдняга параграфа).

Застаецца разгледзець толькі выпадак, калі адзін з лікаў c і d роўны нулю, а другі адрозны ад нуля. Няхай, напрыклад, $c=0$, а $d\neq 0$. Тады з (1) вынікае, што $a=0$. Але ў такім выпадку ў вызначальніку

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

першы слупок будзе складацца з адных нулёў. Таму радкі вызначальніка будуць прапарцыянальныя (гл. задачу 226).

Даказаныя дзве тэарэмы прыводзяць да наступнага выніку.

Вызначальнік

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

роўны нулю тады і толькі тады, калі яго радкі прапарцыянальныя.

Практыкаванні

227. Пры якіх значэннях a радкі дадзеных вызначальнікаў прапарцыянальныя:

а) $\begin{vmatrix} a & 2 \\ 2 & a \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a-1 & 3 \\ a^2 & 3a \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} a & a-1 \\ a+1 & a \end{vmatrix}$?

228. Слупкі вызначальніка 2-га парадку называюцца прапарцыянальнымі, калі хаця б адзін з іх атрымліваецца ў рэзультаце паэлементнага множання другога на некаторы лік k.

Дакажыце, што калі ў вызначальніку 2-га парадку прапарцыянальныя радкі, то прапарцыянальнымі будуць і слупкі. Ці правільна адваротнае сцверджанне?

§ 29. Галоўны і дапаможныя вызначальнікі сістэмы двух лінейных ураўненняў з двума невядомымі

Галоўным вызначальнікам сістэмы ўраўненняў

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \qquad (1)$$

называецца вызначальнік

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

складзены з каэфіцыентаў пры невядомых x і y. Гэты вызначальнік мы будзем абазначаць грэчаскай літарай Δ (дэльта). Відавочна, што

$$\Delta=a_1b_2-a_2b_1.$$

Першым дапаможным вызначальнікам сістэмы ўраўненняў (1) называецца вызначальнік

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

які атрымліваецца з галоўнага вызначальніка гэтай сістэмы ўраўненняў шляхам замены першага слупка на слупок свабодных членаў. Гэты вызначальнік мы будзем абазначаць Δ_x. Індэкс (гэта значыць значок) x пры Δ азначае, што ў галоўным вызначальніку Δ першы слупок $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, складзены з каэфіцыентаў пры x у сістэме ўраўненняў (1), заменен на слупок свабодных членаў $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$. Відавочна, што

$$\Delta_x=c_1b_2-c_2b_1.$$

Другім дапаможным вызначальнікам сістэмы ўраўненняў (1) называецца вызначальнік

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

які атрымліваецца з галоўнага вызначальніка гэтай сістэмы шляхам замены другога слупка на слупок свабодных членаў. Гэты вызначальнік мы будзем абазначаць Δ_y. Відавочна, што

$$\Delta_y = a_1c_2 - a_2c_1.$$

Прыклад. Для сістэмы ўраўненняў

$$\begin{cases} -x+2y=-5, \\ -7x+3y=-13 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 3 - (-7)\cdot 2 = -3 + 14 = 11,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -13 & 3 \end{vmatrix} = (-5)\cdot 3 - (-13)\cdot 2 = -15 + 26 = 11,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -7 & -13 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-13) - (-7)\cdot(-5) = 13 - 35 = -22.$$

Пытанне аб тым, якую карысць аказваюць уведзеныя намі вызначальнікі Δ, Δ_x і Δ_y пры рашэнні сістэмы ўраўненняў (1), мы высветлім у наступных параграфах.

Практыкаванні

Знайсці галоўны і дапаможныя вызначальнікі для наступных сістэм ураўненняў:

229. $\begin{cases} 5x - 3y = 5, \\ 2x + 3y = 8. \end{cases}$ **231.** $\begin{cases} \frac{1}{6}x - \frac{1}{3}y = 6, \\ x - y = 0. \end{cases}$

230. $\begin{cases} ax + y = 1, \\ x + ay = a. \end{cases}$ **232.** $\begin{cases} x - \frac{y}{a} = -a, \\ 3ax + y = 5a. \end{cases}$

§ 30. Правіла Крамера

Тэарэма. ***Калі галоўны вызначальнік сістэмы ўраўненняў***

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \qquad (1)$$

не роўны нулю, то гэта сістэма ўраўненняў сумесная і мае адзінае рашэнне:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

Напрыклад, для сістэмы

$$\begin{cases} -x+2y=-5, \\ -7x+3y=-13, \end{cases}$$

разгледжанай у канцы папярэдняга параграфа, $\Delta=11$, $\Delta_x=11$, $\Delta_y=-22$. Паколькі $\Delta\neq 0$, то сістэма сумесная і мае адзінае рашэнне:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{11}{11}=1,$$

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-22}{11}=-2.$$

Доказ тэарэмы мы разаб'ём на два этапы.

1) Спачатку пакажам, што пры $\Delta\neq 0$ сістэма (1) не можа мець больш аднаго рашэння.

Няхай $(x_0,\ y_0)$ — рашэнне сістэмы (1). Тады

$$a_1x_0+b_1y_0=c_1, \tag{2}$$

$$a_2x_0+b_2y_0=c_2. \tag{3}$$

Памножым першую з гэтых роўнасцей на b_2, а другую на $-b_1$ і атрыманыя суадносіны складзём. Тады атрымаецца:

$$(a_1b_2-a_2b_1)\,x_0+(b_1b_2-b_2b_1)\,y_0=b_2c_1-b_1c_2,$$

або

$$\Delta\cdot x_0=\Delta_x.$$

Затым да роўнасці (2), памножанай на $-a_2$, дададзім роўнасць (3), памножаную на a_1. У рэзультаце атрымаем

$$(-a_2a_1+a_1a_2)\,x_0+(-a_2b_1+a_1b_2)\,y_0=-a_2c_1+a_1c_2,$$

або

$$\Delta\cdot y_0=\Delta_y.$$

Такім чынам, калі сістэма ўраўненняў (1) мае рашэнне $(x_0,\ y_0)$, то

$$\begin{aligned} \Delta\cdot x_0&=\Delta_x, \\ \Delta\cdot y_0&=\Delta_y. \end{aligned} \tag{4}$$

У выніку таго што $\Delta\neq 0$, x_0 павінен быць роўны $\frac{\Delta_x}{\Delta}$, а $y_0=\frac{\Delta_y}{\Delta}$. Ніякімі іншымі лікамі x_0 і y_0 быць не могуць. Але гэта і азначае, што дадзеная сістэма мае не больш аднаго рашэння.

2) Даказваючы адзінасць рашэння сістэмы ўраўненняў (1), мы д а п у с ц і л і, што рашэнне існуе. Але ці правільнае такое дапушчэнне? Цяпер гэта пытанне высветліць няцяжка. Мы ўжо

паказалі, што рашэннем сістэмы ўраўненняў (1) могуць быць толькі лікі $x_0=\frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y_0=\frac{\Delta_y}{\Delta}$. Таму цяпер нам трэба будзе проста падставіць гэтыя значэнні x і y ва ўраўненні сістэмы (1) і паглядзець, ці ператворацца пры гэтым ураўненні ў лікавыя роўнасці. Калі ператворацца, то тым самым мы дакажам, што сістэма ўраўненняў (1) мае рашэнне $x_0=\frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y_0=\frac{\Delta_y}{\Delta}$ і, значыць, з'яўляецца сумеснай. Гэта і ёсць другі этап доказу нашай тэарэмы.

Маем:

$$a_1x_0+b_1y_0=a_1\frac{\Delta_x}{\Delta}+b_1\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{a_1(b_2c_1-b_1c_2)}{\Delta}+\frac{b_1(a_1c_2-a_2c_1)}{\Delta}=$$

$$=\frac{a_1b_2c_1-a_1b_1c_2+b_1a_1c_2-b_1a_2c_1}{\Delta}=\frac{c_1(a_1b_2-a_2b_1)}{\Delta}=\frac{c_1\Delta}{\Delta}=c_1.$$

Аналагічна паказваецца, што

$$a_2x_0+b_2y_0=c_2.$$

Такім чынам, калі для сістэмы ўраўненняў (1) $\Delta\neq0$, то гэта сістэма мае і прытым адзінае рашэнне. Яго можна атрымаць па наступнаму правілу: знаходзім Δ_x, Δ_y, а затым вылічваем шукаемыя велічыні x і y па формулах

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

Гэта правіла названа імем швейцарскага матэматыка Крамера (1704—1752), які адным з першых прыйшоў да паняцця вызначальніка і даказаў прыведзеную тут тэарэму.

Умова

$$\Delta=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\neq0$$

азначае, што радкі (a, b) і (c, d) гэтага вызначальніка непрапарцыянальныя адзін другому (гл. § 28). У такім выпадку гавораць, што каэфіцыенты пры невядомых x і y у сістэме ўраўненняў (1) непрапарцыянальныя. Таму атрыманы рэзультат можна сфармуляваць наступным чынам.

Калі каэфіцыенты пры невядомых x і y у сістэме ўраўненняў

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\ a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$$

непрапарцыянальныя, то гэта сістэма сумесная і мае адзінае рашэнне.

Пытанне аб прапарцыянальнасці каэфіцыентаў пры невядомых часта рашаецца вусна. Таму вусна можа быць установлена сумеснасць такіх, напрыклад, сістэм, як

$$\begin{cases} x+2y=1, \\ 2x+5y=0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x-y=5, \\ 3x-2y=6; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=a, \\ x-y=b \end{cases}$$

і г. д. Разам з тым вусна высвятляецца, што кожная з дадзеных сістэм мае толькі адно рашэнне.

Практыкаванні

233. Дадзеныя сістэмы рашыць па правілу Крамера:

а) $\begin{cases} x+2y=2, \\ -2x-3y=-8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0{,}3x-\frac{1}{5}y=1, \\ -6x+5y=-19; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x-3y=-3, \\ 4x+y=1. \end{cases}$

234. Ці можна рашаць па правілу Крамера наступныя сістэмы:

а) $\begin{cases} ax+4y=9, \\ 9x+ay=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-\frac{y}{a}=-a, \\ 3ax+y=5a; \end{cases}$

в) $\begin{cases} -x+ay=0, \\ ay+x=a? \end{cases}$

235. Рашыць сістэму ўраўненняў:

$$\begin{cases} \frac{1}{1-ax}+\frac{1}{1+ay}=1, \\ \frac{2}{1-ax}-\frac{3}{1+ay}=-\frac{4}{3}. \end{cases}$$

§ 31. Выпадак, калі галоўны вызначальнік сістэмы ўраўненняў роўны нулю, а хаця б адзін з дапаможных вызначальнікаў адрозны ад нуля

Тэарэма. ***Калі галоўны вызначальнік сістэмы ўраўненняў***

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \qquad (1)$$

роўны нулю, а хаця б адзін з дапаможных вызначальнікаў адрозны ад нуля, то сістэма несумесная.

Фармальна доказ гэтай тэарэмы няцяжка атрымаць метадам ад адваротнага. Дапусцім, што сістэма ўраўненняў (1) мае рашэнне (x_0, y_0). Тады, як паказана ў папярэднім параграфе,

$$\Delta \cdot x_0 = \Delta_x, \quad \Delta \cdot y_0 = \Delta_y. \qquad (2)$$

Але па ўмове $\Delta = 0$, а хоць бы адзін з вызначальнікаў Δ_x і Δ_y адрозны ад нуля. Такім чынам, роўнасці (2) адначасова выконвацца не могуць. Тэарэма даказана.

Аднак цікавей больш дэталёва высветліць, чаму сістэма ўраўненняў (1) у разглядаемым выпадку несумесная.

Умова

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

азначае, што каэфіцыенты пры невядомых x і y у сістэме ўраўненняў (1) прапарцыянальныя. Няхай, напрыклад,

$$a_1 = ka_2, \qquad b_1 = kb_2.$$

Умова

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

азначае, што каэфіцыенты пры y і свабодныя члены ўраўненняў сістэмы (1) непрапарцыянальныя. Паколькі $b_1 = kb_2$, то

$$c_1 \neq kc_2.$$

Значыць, сістэма ўраўненняў (1) можа быць запісана ў наступным выглядзе:

$$\begin{cases} ka_2x + kb_2y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

У гэтай сістэме каэфіцыенты пры невядомых адпаведна прапарцыянальныя, але каэфіцыенты пры y (або пры x) і свабодныя члены непрапарцыянальныя. Такая сістэма, безумоўна, несумесная. Сапраўды, калі б яна мела рашэнне (x_0, y_0), то выконваліся б л і к а в ы я роўнасці

$$ka_2x_0 + kb_2y_0 = c_1,$$
$$a_2x_0 = b_2y_0 = c_2.$$

Але адна з гэтых роўнасцей супярэчыць другой: бо $c_1 \neq kc_2$.

Мы разгледзелі толькі выпадак, калі $\Delta_x \neq 0$. Аналагічна можа быць разгледжан выпадак, калі $\Delta_y \neq 0$.

Даказаную тэарэму можна фармуляваць і такім чынам.

Калі каэфіцыенты пры невядомых x і y у сістэме ўраўненняў (1) прапарцыянальныя, а каэфіцыенты пры якой-небудзь з гэтых невядомых і свабодныя члены непрапарцыянальныя, то гэта сістэма ўраўненняў несумесная.

Лёгка, напрыклад, пераканацца ў тым, што кожная з дадзеных сістэм будзе несумеснай:

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ 2x + 2y = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 0{,}5y = 3, \\ 4x - y = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 0, \\ -2x + 2y = 7. \end{cases}$$

Практыкаванні

236. (В у с н а.) Паказаць, што кожная з дадзеных сістэм ураўненняў несумесная:

а) $\begin{cases} x-2y=0, \\ 4x-8y=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-y=3, \\ x-0{,}5y=1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} -x+3y=-2, \\ 2x-6y=-1. \end{cases}$

Рашыць сістэмы ўраўненняў:

237. $\begin{cases} 5ax-y=8, \\ -ax+y=0. \end{cases}$ **239.** $\begin{cases} \dfrac{a}{x}+\dfrac{2}{y}=a, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{ay}=1. \end{cases}$

238. $\begin{cases} 8x+2ay=1, \\ 5x+4ay=2. \end{cases}$ **240.** $\begin{cases} ax+\dfrac{y}{a-1}=1-x, \\ x+y-1=a^2x-a. \end{cases}$

§ 32. Выпадак, калі і галоўны і абодва дапаможныя вызначальнікі сістэмы ўраўненняў роўны нулю

У папярэдніх параграфах, вывучаючы сістэму ўраўненняў

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2, \end{cases} \tag{1}$$

мы разгледзелі два выпадкі:

1) выпадак, калі каэфіцыенты пры невядомых x і y не з'яўляюцца адпаведна прапарцыянальнымі ($\Delta\neq 0$);

2) выпадак, калі каэфіцыенты пры невядомых x і y адпаведна прапарцыянальныя, а каэфіцыенты пры якім-небудзь невядомым і свабодныя члены не з'яўляюцца адпаведна прапарцыянальнымі ($\Delta=0$, а хоць бы адзін з вызначальнікаў Δ_x і Δ_y адрозны ад нуля).

Засталося разгледзець яшчэ адзін выпадак, калі і каэфіцыенты пры невядомых x і y і свабодныя члены адпаведна прапарцыянальныя, гэта значыць

$$a_1=ka_2, \quad b_1=kb_2, \quad c_1=kc_2$$

або

$$a_2=k'a_1, \quad b_2=k'b_1, \quad c_2=k'c_1.$$

Для пэўнасці мы разгледзім першы з гэтых двух варыянтаў. Сістэма ўраўненняў (1) у гэтым выпадку мае выгляд:

$$\begin{cases} ka_2x+kb_2y=kc_2, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases} \tag{2}$$

Відавочна, што кожная пара лікаў (x_0, y_0), якая задавальняе другому ўраўненню сістэмы (2), павінна задавальняць і перша-

му ўраўненню гэтай сістэмы. Таму, для таго каб рашыць сістэму ўраўненняў (2), дастаткова рашыць адно толькі другое ўраўненне гэтай сістэмы. Іншымі словамі, дастаткова знайсці ўсе такія пары лікаў (x_0, y_0), якія ператвараюць ураўненне

$$a_2x+b_2y=c_2$$

у лікавую роўнасць.

Дапусцім, што ў гэтым ураўненні хоць бы адзін з каэфіцыентаў a_2 і b_2 адрозны ад нуля. Няхай, напрыклад, $b_2\neq 0$. Тады ў якасці x_0 можна выбраць любы лік t; y_0 у гэтым выпадку знойдзецца з умовы

$$a_2t+b_2y_0=c_2,$$

адкуль

$$y_0=\frac{c_2-a_2t}{b_2}.$$

Такім чынам, у разглядаемым выпадку сістэма ўраўненняў (2) мае бясконцае мноства рашэнняў. Усе яны задаюцца формуламі

$$x_0=t,\quad y_0=\frac{c_2-a_2t}{b_2},$$

дзе t — любы лік.

Гэты рэзультат мы атрымалі ў дапушчэнні, што хоць бы адзін з каэфіцыентаў a_2 і b_2 адрозны ад нуля. А калі абодва яны роўны нулю? Тады сістэма ўраўненняў (2) мае выгляд:

$$\begin{cases} 0x+0y=c_1, \\ 0x+0y=c_2. \end{cases} \qquad (3)$$

Такая сістэма не з'яўляецца цікавай. Калі $c_1=c_2=0$, то рашэннем яе з'яўляецца любая пара лікаў (x_0, y_0). Калі ж хоць бы адзін з лікаў c_1 і c_2 адрозны ад нуля, то сістэма (3) несумесная.

Відавочна, што выпадак $a_2=b_2=0$ будзе аўтаматычна выключаны, калі дадаткова патрэбаваць, каб сярод каэфіцыентаў пры невядомых x і y у сістэме ўраўненняў (1) быў хоць бы адзін адрозны ад нуля каэфіцыент.

Мы даказалі наступную тэарэму:

Калі каэфіцыенты пры невядомых і свабодныя члены ў сістэме ўраўненняў (1) адпаведна прапарцыянальныя і сярод каэфіцыентаў пры невядомых ёсць хоць бы адзін каэфіцыент, адрозны ад нуля, то сістэма ўраўненняў (1) мае бясконцае мноства рашэнняў. Усе яны атрымліваюцца як рашэнні аднаго таго ўраўнення, якое змяшчае адрозны ад нуля каэфіцыент пры невядомым.

Прыклад. Рашыць сістэму ўраўненняў

$$\begin{cases} x-2y=3, \\ 2x-4y=6. \end{cases}$$

Каэфіцыенты пры невядомых і свабодныя члены гэтай сістэмы ўраўненняў адпаведна прапарцыянальныя. Таму ўсе рашэнні дадзенай сістэмы ўраўненняў можна атрымаць з аднаго толькі першага ўраўнення

$$x-2y=3.$$

Дапускаючы $x=t$, знаходзім, што $y=\frac{1}{2}(t-3)$.

Такім чынам, дадзеная сістэма ўраўненняў мае бясконцае мноства рашэнняў:

$$x=t, \quad y=\frac{1}{2}(t-3),$$

дзе t — любы лік. У прыватнасці, пры $t=0$ атрымліваецца рашэнне $x=0$, $y=-\frac{3}{2}$; пры $t=5$ — рашэнне $x=5$, $y=1$ і г. д.

Даказаную вышэй тэарэму карысна фармуляваць і ў тэрмінах вызначальнікаў.

Калі каэфіцыенты пры невядомых і свабодныя члены сістэмы ўраўненняў (1) адпаведна прапарцыянальныя, то, як лёгка атрымаць непасрэдна, выкарыстоўваючы (2),

$$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0.$$

Можна даказаць і адваротнае сцверджанне. Калі $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$ і хоць бы адзін з каэфіцыентаў пры невядомых сістэмы ўраўненняў (1) адрозны ад нуля, то каэфіцыенты пры невядомых і свабодныя члены такой сістэмы ўраўненняў будуць адпаведна прапарцыянальнымі. На доказе гэтага факта мы спыняцца не будзем, хоць у прынцыпе гэта і можна было б зрабіць. Але прыняўшы яго на павер, мы можам цяпер даказаную вышэй тэарэму сфармуляваць наступным чынам:

Калі і галоўны і абодва дапаможныя вызначальнікі сістэмы ўраўненняў (1) роўны нулю і сярод каэфіцыентаў пры невядомых ёсць хоць бы адзін адрозны ад нуля каэфіцыент, то сістэма ўраўненняў (1) мае бясконцае мноства рашэнняў. Усе яны атрымліваюцца як рашэнні аднаго таго ўраўнення, якое змяшчае адрозны ад нуля каэфіцыент пры невядомым.

Практыкаванні

241. (Вусна.) Паказаць, што кожная з дадзеных сістэм ураўненняў мае бясконцае мноства рашэнняў:

а) $\begin{cases} 7x - y = 3, \\ 14x - 2y = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + 3y = 0, \\ 4x + 6y = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x - 1{,}5y = 3, \\ 3y - 4x = -6. \end{cases}$

Рашыць сістэмы ўраўненняў (№ 242—244):

242. $\begin{cases} x - y = 1, \\ 3y - 3x = -3. \end{cases}$ **243.** $\begin{cases} 3x - 5y = 0, \\ -15x + 25y = 0. \end{cases}$ **244.** $\begin{cases} 7x - 2y = 16, \\ 3{,}5x - y = 8. \end{cases}$

245. Дадзена сістэма ўраўненняў:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1, \\ 4x - 6y = -1. \end{cases}$$

а) Колькі рашэнняў мае кожнае ўраўненне гэтай сістэмы?

б) Колькі рашэнняў мае сістэма?

246. Колькі розных рашэнняў мае аднародная сістэма ўраўненняў

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = 0, \\ a_2x + b_2y = 0, \end{cases}$$

калі: а) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$; б) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$?

§ 33. Табліца асноўных рэзультатаў аб сістэме двух лінейных ураўненняў з двума невядомымі

Усе рэзультаты аб сістэме ўраўненняў

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

якія атрыманы ў § 30—32, даюцца ў наступнай табліцы:

$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$	
	хоць бы адзін з вызначальнікаў Δ_x і Δ_y не роўны нулю	$\Delta_x = \Delta_y = 0$, і хоць бы адзін з каэфіцыентаў пры невядомых адрозны ад нуля
1-ы выпадак	2-і выпадак	3-і выпадак
Сістэма сумесная і мае адзінае рашэнне: $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$; $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$	Сістэма несумесная	Сістэма сумесная і мае бясконцае мноства рашэнняў. Усе гэтыя рашэнні атрымліваюцца як рашэнні толькі аднаго таго ўраўнення, якое мае адрозны ад нуля каэфіцыент пры невядомым

Прыклад. Рашыць сістэму ўраўненняў

$$\begin{cases} ax-y=3, \\ -x+ay=-3. \end{cases}$$

Для гэтай сістэмы

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & -1 \\ -1 & a \end{vmatrix}=a^2-1; \quad \Delta_x=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & a \end{vmatrix}=3a-3;$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} a & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}=-3a+3.$$

Няхай $a^2-1\neq 0$, гэта значыць $a\neq -1$ і $a\neq 1$. Тады $\Delta\neq 0$ (выпадак 1), і таму сістэма мае адзінае рашэнне:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{3a-3}{a^2-1}=\frac{3}{a+1}, \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-3a+3}{a^2-1}=-\frac{3}{a+1}.$$

Калі $a=-1$, то $\Delta=0$, $\Delta_x=-6$, $\Delta_y=6$. У гэтым выпадку сістэма будзе несумеснай (выпадак 2). Калі ж $a=1$, то $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$ (выпадак 3). У гэтым выпадку сістэма будзе мець бясконцае мноства рашэнняў, прычым усе яны атрымліваюцца ў выніку рашэння аднаго толькі першага (другога) ураўнення. Пры $a=1$ першае ўраўненне ператвараецца ў $x-y=3$. Усе рашэнні гэтага ўраўнення можна запісаць у выглядзе $x=t$, $y=t-3$, дзе t — любы лік.

Такім чынам, да дадзенай задачы можна даць наступны адказ: калі $a\neq 1$ і $a\neq -1$, то дадзеная сістэма ўраўненняў мае адзінае рашэнне

$$x=\frac{3}{a+1}, \quad y=-\frac{3}{a+1};$$

калі $a=-1$, то сістэма несумесная; пры $a=1$ сістэма мае бясконцае мноства рашэнняў, якія можна запісаць у выглядзе

$$x=t, \quad y=t-3,$$

дзе t — любы лік.

Метад рашэння сістэмы двух лінейных ураўненняў з двума невядомымі, з якім мы пазнаёміліся ў гэтым раздзеле, заснаваны на выкарыстанні вызначальнікаў 2-га парадку. У курсе вышэйшай алгебры ўводзіцца паняцце вызначальніка парадку n для любога натуральнага n і выкладаецца метад рашэння сістэмы n лінейных ураўненняў з n невядомымі пры дапамозе такіх вызначальнікаў. Гэты метад вельмі важны як пры рашэнні тэарэтычных пытанняў, так і пры даследаванні сістэм ураўненняў з літарнымі каэфіцыентамі. Ён шырока ўжываецца (як і само паняцце вызначальніка) не толькі ў вышэйшай алгебры, але і ў іншых раздзелах вышэйшай матэматыкі, у механіцы, у тэарэтычнай фізіцы.

Аднак для практычнага рашэння сістэм лінейных ураўненняў з л і к а в ы м і каэфіцыентамі самым эканомным (у сэнсе аб'ёму выконваемых вылічэнняў) аказваецца добра вядомы вам па курсу VIII класа метад паслядоўнага выключэння невядомых. Іменна ім карыстаюцца заўсёды на практыцы.

Практыкаванні

Рашыць сістэмы ўраўненняў (№ 247—249):

247. $\begin{cases} 2x+ay=-6, \\ ax+8y=12. \end{cases}$ **248.** $\begin{cases} 3x-ay=6-a, \\ -ax+3y=3-2a. \end{cases}$

249. $\begin{cases} ax-(a-1)y=0{,}5, \\ (a-1)x-ay=a. \end{cases}$

250. Даказаць, што кожная з дадзеных сістэм ураўненняў не можа мець бясконцае мноства розных рашэнняў:

а) $\begin{cases} (a+1)x+y=0, \\ x+(a^2-a+1)y=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{a-1}{x}+\dfrac{a}{y}=5, \\ \dfrac{a}{x}+\dfrac{a+1}{y}=6. \end{cases}$

251. Даказаць, што кожная з дадзеных сістэм ураўненняў або несумесная, або мае бясконцае мноства рашэнняў:

а) $\begin{cases} 4x-6y=a, \\ 2x-3y=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (4-a)x+y=-a, \\ (2a-8)x-2y=a. \end{cases}$

252. (В у с н а.) Высветліць, колькі рашэнняў мае кожная з дадзеных сістэм ураўненняў:

а) $\begin{cases} x+2y=0, \\ x-3y=0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x+y=9, \\ 8x-4y=-36; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4x-6y=5, \\ -8x+12y=10; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x+17y=0, \\ 2x+34y=1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x-y=6, \\ 6x-2y=12; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x-y=100, \\ 2x+3y=17. \end{cases}$

§ 34. Графічны спосаб рашэння сістэм лінейных ураўненняў

Дапусцім, што ў кожным ураўненні сістэмы

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \qquad (1)$$

хаця б адзін з каэфіцыентаў пры невядомых x і y адрозны ад нуля. Тады любое з гэтых двух ураўненняў можна разглядаць як ураўненне прамой у прамавугольнай сістэме каардынат.

Сапраўды, возьмем, напрыклад, першае ўраўненне

$$a_1x+b_1y=c_1.$$

Калі $b_1\neq 0$, то ўраўненне прымае выгляд:

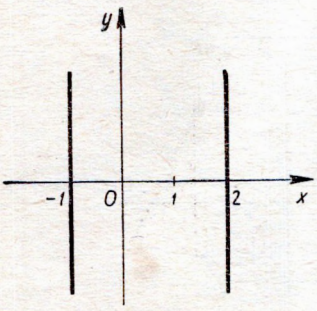
$$y=-\frac{a_1}{b_1}x+\frac{c_1}{b_1}.$$

Гэта ўжо знаёмае нам ураўненне прамой (гл. § 3).

Пры $b_1=0$ ураўненне $a_1x+b_1y=c_1$ прымае выгляд $a_1x=c_1$, або

$$x=\frac{c_1}{a_1}.$$

Гэту суадносіну можна разглядаць як ураўненне прамой, паралельнай восі y і перасякаючай вось x у пункце з абсцысай $\frac{c_1}{a_1}$ (глядзі, напрыклад, рысунак 41, на якім дадзены прамыя $x=-1$ і $x=2$).

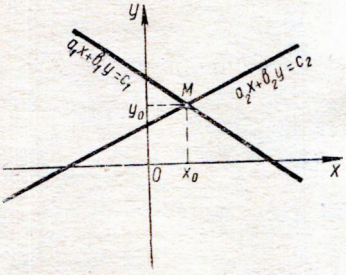


Рыс. 41.

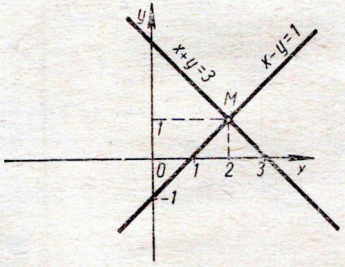
Таму сістэму ўраўненняў (1) лёгка рашыць графічна. Для гэтага на адным і тым жа чарцяжы трэба пабудаваць дзве прамыя — прамую $a_1x+b_1y=c_1$ і прамую $a_2x+b_2y=c_2$ (рыс. 42). Калі гэтыя прамыя перасякуцца, то каардынаты $(x_0; y_0)$ пункта перасячэння M гэтых прамых і дадуць рашэнне нашай сістэмы.

Прыклады. 1. Сістэме ўраўненняў

$$\begin{cases} x+y=3, \\ x-y=1 \end{cases}$$



Рыс. 42.



Рыс. 43.

адпавядаюць прамыя, дадзеныя на рысунку 43. Яны перасякаюцца ў адным пункце з каардынатамі (2; 1). Значыць, дадзеная сістэма мае адзінае рашэнне $x=2$, $y=1$.

2. Сістэме ўраўненняў

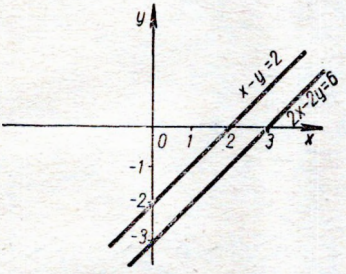
$$\begin{cases} x-y=2, \\ 2x-2y=6 \end{cases}$$

адпавядаюць паралельныя прамыя, дадзеныя на рысунку 44. Яны не перасякаюцца ні ў адным пункце. Дадзеная сістэма ўраўненняў несумесная.

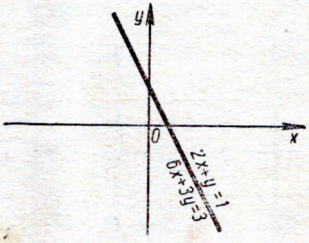
3. Для сістэмы ўраўненняў

$$\begin{cases} 2x+y=1, \\ 6x+3y=3 \end{cases}$$

адпаведныя прамыя зліваюцца ў адну прамую лінію (рыс. 45). Пра такія прамыя можна сказаць, што яны перасякаюцца ў бяс-



Рыс. 44.



Рыс. 45.

концым мностве пунктаў, а іменна ў кожным сваім пункце. Таму дадзеная сістэма ўраўненняў мае бясконцае мноства рашэнняў. Усе гэтыя рашэнні можна прадставіць як каардынаты пунктаў, якія ляжаць на гэтай прамой. Калі x прыняць за t, то для y атрымаем $y=1-2t$.

Практыкаванні

Рашыць графічна наступныя сістэмы ўраўненняў (№ 253—258):

253. $\begin{cases} 2x-y=5, \\ 3x-y=7. \end{cases}$

254. $\begin{cases} x+y=4, \\ 2x+2y=8. \end{cases}$

255. $\begin{cases} 2x-3y=0, \\ x-1{,}5y=1{,}5. \end{cases}$

256. $\begin{cases} x-y=1, \\ y-2x=1. \end{cases}$

257. $\begin{cases} x-y=3, \\ 2x=4. \end{cases}$

258. $\begin{cases} -x+2y=0, \\ 3y=6. \end{cases}$

259. Як геаметрычна можна інтэрпрэтаваць той факт, што любая аднародная сістэма двух лінейных ураўненняў з двума невядомымі сумесная?

Задачы на паўтарэнне

260. Пры якіх значэннях a ўраўненне $ax=2x+a$:
а) не мае кораняў;
б) мае і прытым толькі дадатныя корані;
в) мае і прытым толькі адмоўныя корані;
г) мае корані?

261. Бацьку 40 год, а сыну 10. Праз колькі год бацька будзе ў k разоў старэйшы за сына?

262. Рашыць адносна x ураўненне

$$\frac{3x^2-8a}{2ax-2a-3x+3}=\frac{3x}{2a-3}-\frac{x}{x-1}.$$

263. Колькі пунктаў перасячэння мае прамая $y=ax+b$:
а) з воссю абсцыс;
б) з воссю ардынат?

Даказаць няроўнасці (№ 264—268):

264. $\dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}.$

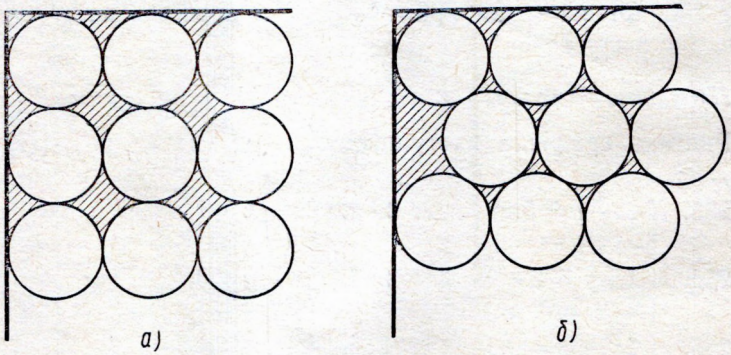
265. $(ac+bd)^2\leqslant(a^2+b^2)(c^2+d^2).$

266. $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\geqslant 9 \quad (a>0,\ b>0,\ c>0).$

267. $(a+b+c)^2\leqslant 3(a^2+b^2+c^2).$

268*. $a^4+b^4+c^4\geqslant abc(a+b+c).$

269. Дзе маторная лодка хутчэй пройдзе адлегласць у 30 *км* і вернецца назад: па возеры ці па рацэ?



Рыс. 46.

270. Даказаць, што калі $a+b+c\geqslant 3$, то і $a^2+b^2+c^2\geqslant 3$.

271. Як больш выгадна (з пункту гледжання эканоміі металу) штампаваць металічныя шайбы: як паказана на рысунку

46, *а* або як паказана на рысунку 46, *б*? Кожная пласціна, з якой штампуюцца шайбы, мае форму прамавугольніка са старанамі *a* і *b*, а дыяметр шайбы роўны *d*.

272. Громаадвод засцерагае ад маланкі ўсе прадметы, адлегласці якіх ад яго асновы не перавышаюць яго падвоенай вышыні. Якой павінна быць вышыня *h* громаадвода, каб ім можна было засцерагчы ад маланкі прамавугольны ўчастак шырынёй *a м* і даўжынёй *b м*? У якім месцы гэтага ўчастка лепш за ўсё ўстанавіць громаадвод?

Рашыць няроўнасці (№ 273, 274):

273. $3<\frac{5x-1}{2x-3}<5.$ **274.** $3\leqslant|x-2|<4.$

275. Рашыць сістэму няроўнасцей:

$$\begin{cases}\dfrac{2x-1}{x+1}<1,\\[2ex] \dfrac{2}{x+1}>0.\end{cases}$$

Рашыць сістэмы ўраўненняў (№ 276—279):

276. $\begin{cases}x+ay=b,\\ ax+y=b.\end{cases}$ **278.** $\begin{cases}\dfrac{a}{x}-\dfrac{1}{y}=3,\\[2ex] \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=-3.\end{cases}$

277*. $\begin{cases}ax+|y|=1+a,\\ x+ay=1-a.\end{cases}$ **279.** $\begin{cases}2x+ay=a^2,\\[2ex] x+y=\dfrac{a+2}{2}.\end{cases}$

280. Пры якіх значэннях m і n прамыя $3x-my=n$ і $2x+3y=5$ паралельныя?

281. Пры якіх значэннях a прамыя $4x-3y=a$ і $-5x+ay=8$ перасякаюцца ў пункце, каардынаты якога адмоўныя?

282. Пры якіх значэннях a і b прамыя $ax-y=b$ і $4x+3y=10$ зліваюцца ў адну прамую?

283. У якім выпадку аднародная сістэма ўраўненняў

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=0,\\ a_2x+b_2y=0\end{cases}$$

а) мае толькі нулявое рашэнне, гэта значыць рашэнне $x=0$, $y=0$;

б) мае ненулявое рашэнне, гэта значыць такое рашэнне (x_0, y_0), што хаця б адзін з лікаў x_0 і y_0 адрозны ад нуля?

284. Пры якіх значэннях a рашэнне сістэмы ўраўненняў

$$\begin{cases} x-7y=1, \\ 5x+3y=a \end{cases}$$

задавальняе ўмове $x<0$, $y>0$?

285. З якой дакладнасцю можна знайсці x і y з сістэмы ўраўненняў

$$\begin{cases} 2x-y=a, \\ x+3y=b, \end{cases}$$

калі замест лікаў a і b вядомы іх набліжаныя значэнні з дакладнасцю да 0,01? Што можна вызначыць больш дакладна: x або y?

286. (В у с н а.) Колькі розных рашэнняў мае кожная з сістэм ураўненняў:

а) $\begin{cases} 2x-y=0, \\ 3x+4y=1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x+y=5, \\ 2x+2y=1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 7x+3y=2, \\ 7x-3y=a; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 6x-12y=5, \\ -x+2y=\dfrac{5}{6}; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x-3{,}5y=0, \\ 2x-7y=0; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 2x-3y=1, \\ ax+6y=2? \end{cases}$

287. а) Вядома, што ўраўненне $ax=b$ мае бясконцае мноства кораняў. Ці вынікае адсюль, што любы лік x_0 з'яўляецца каранем гэтага ўраўнення?

б) Вядома, што сістэма ўраўненняў

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

мае бясконцае мноства рашэнняў. Ці вынікае адсюль, што любая пара лікаў (x_0, y_0) з'яўляецца рашэннем гэтага ўраўнення?

288. У якіх межах заключаны лікі m і n, якія задавальняюць сістэме ўраўненняў

$$\begin{cases} m-5n=a, \\ 2m+3n=b, \end{cases}$$

калі $0{,}1<a<0{,}2$, а $1{,}3<b<1{,}4$?

Раздзел II

САПРАЎДНЫЯ ЛІКІ

§ 35. Рацыянальныя лікі

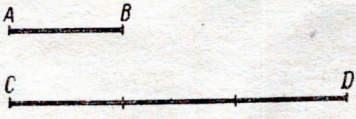
Першай матэматычнай аперацыяй, з якой сутыкнуўся чалавек, было лічэнне прадметаў. У выніку лічэння прадметаў атрымліваюцца цэлыя дадатныя лікі, якія інакш называюцца *натуральнымі*. Усе разам яны ўтвараюць *натуральны рад лікаў:*

1, 2, 3, 4 ... .

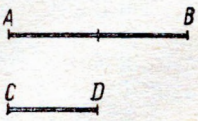
Пасля натуральных лікаў у матэматыку былі ўведзены *дадатныя дробы*, гэта значыць лікі выгляду $\frac{m}{n}$, дзе m і n — адвольныя натуральныя лікі. Увядзенне гэтых лікаў у матэматыку было выклікана неабходнасцю рабіць вымярэнні.

Вядома, напрыклад, што пры разлівах ракі Ніла затапляліся велізарныя зямельныя ўчасткі старажытных егіпцян. Пасля таго як вада спадала, кожны павінен быў «знайсці» свой участак. Але без умення дакладна вымяраць шырыню і даўжыню ўчастка зрабіць гэта было немагчыма.

Для таго каб паказаць, якім чынам паяўляюцца дадатныя дробы пры рашэнні задач вымярэння, мы напомнім, як вымяраюцца прамалінейныя адрэзкі. З усіх адрэзкаў выбіраюць якінебудзь адзін, напрыклад AB (рыс. 47), і аб'яўляюць яго «адзінкай даўжыні». Калі ў вымяраемым адрэзку CD выбраная адзінка даўжыні ўкладваецца роўна n разоў (на рыс. 47 $n=3$), то даўжыня адрэзка CD выражаецца лікам n.

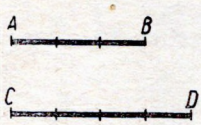


Рыс. 47.



Рыс. 48.

Але не заўсёды адрэзак AB, які з'яўляецца адзінкай даўжыні, укладваецца ў вымяраемым адрэзку цэлы лік разоў. Так, напрыклад, на рысунку 48 адрэзак AB у два разы даўжэйшы за вымяраемы адрэзак CD. Значыць, палавіна адрэзка AB укладваецца ў CD роўна адзін раз. Таму даўжыня адрэзка CD выражаецца дробавым лікам $\frac{1}{2}$. Наогул, калі адрэзак, выбраны ў якасці адзінкі даўжыні, у n разоў даўжэйшы за вымяраемы адрэзак, то даўжыня апошняга выражаецца лікам $\frac{1}{n}$. Магчымы



Рыс. 49.

і такі выпадак, калі n-я частка адзінкі даўжыні AB укладваецца ў вымяраемым адрэзку CD роўна m разоў (гл. рыс. 49, на якім $n=3$, $m=4$). У гэтым выпадку даўжыня адрэзка CD выражаецца дробавым лікам $\frac{m}{n}$.

Такім чынам, увядзенне ў матэматыку натуральных лікаў і дадатных дробаў было выклікана практычнымі патрэбамі людзей. Пазней разам з гэтымі патрэбамі сталі з'яўляцца і патрэбы тэарэтычнага характару. Як вядома, натуральныя лікі і дадатныя дробы можна складваць і памнажаць адзін на другі. А вось адняць такія лікі адзін ад другога ўдаецца далёка не заўсёды. Напрыклад, рознасці $5-5$ і $\frac{1}{3}-2$ ніякімі натуральнымі лікамі і ніякімі дадатнымі дробамі выразіць нельга. Значыць, дзеянне адымання ў мноства ўсіх натуральных лікаў і дадатных дробаў, наогул кажучы, невыканальнае. Патрэбы арыфметыкі яшчэ ў старажытныя часы паставілі перад матэматыкай неабходнасць увесці ў разгляд *адмоўныя цэлыя лікі, нуль* і *адмоўныя дробы*.

Адмоўныя лікі мы ўпершыню сустракаем у працах кітайскіх матэматыкаў III стагоддзя да н. э. Не выключана магчымасць, што рэзультаты, якія змяшчаюцца ў гэтых працах, былі атрыманы яшчэ раней. У VI—XI стагоддзях адмоўнымі лікамі свабодна карысталіся індыйскія матэматыкі. У Еўропе адмоўныя лікі атрымалі канчатковае прызнанне толькі пасля прац французскага матэматыка Дэкарта (1596—1650).

Пасля ўвядзення адмоўных лікаў і нуля матэматыка стала мець усе *рацыянальныя лікі*, гэта значыць лікі, якія можна запісаць у выглядзе адносіны $\frac{m}{n}$, дзе m і n — цэлыя лікі, прычым $n\neq 0$. Сюды ўваходзяць усе цэлыя лікі (дадатныя, адмоўныя і нуль):

$$3=\frac{3}{1}=\frac{6}{2}=\ldots,\quad -5=\frac{-5}{1}=\frac{10}{-2}=\ldots,\quad 0=\frac{0}{1}=\frac{0}{2}=\ldots,$$

і ўсе дробы (правільныя і няправільныя, дадатныя і адмоўныя):

$$\frac{1}{2},\quad \frac{10}{3},\quad -\frac{6}{5}\ \text{і г. д.}$$

Практыкаванні

289. Ці існуе сярод усіх натуральных лікаў:
а) найменшы лік;
б) найбольшы лік?

290. Ці ёсць сярод усіх дадатных рацыянальных лікаў:
а) найменшы лік;
б) найбольшы лік?

291. Ці ёсць сярод усіх недадатных рацыянальных лікаў:
а) найменшы лік;
б) найбольшы лік?

292. Сярод усіх адмоўных лікаў, не перавышаючых па абсалютнай велічыні $\frac{5}{2}$, знайсці:

а) найменшы рацыянальны лік;
б) найбольшы рацыянальны лік;
в) найменшы цэлы лік.

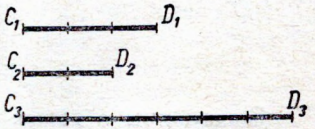
293. Калі за адзінку даўжыні прыняць адрэзак AB, то даўжыня адрэзка CD выразіцца лікам $\frac{m}{n}$. А якім лікам выразіцца даўжыня таго ж самага адрэзка CD, калі ў якасці адзінкі даўжыні выбраць адрэзак:

а) у k разоў меншы за адрэзак AB;

б) у k разоў большы за адрэзак AB?

294. Якімі лікамі выражаюцца даўжыні адрэзкаў C_1D_1, C_2D_2 і C_3D_3, дадзеных на рысунку 50, калі за адзінку даўжыні прыняць:

а) адрэзак C_1D_1; б) адрэзак C_2D_2; в) адрэзак C_3D_3?



Рыс. 50.

§ 36. Дзеянні над рацыянальнымі лікамі

Як вядома, два рацыянальныя лікі $\frac{m}{n}$ і $\frac{k}{l}$ роўны ў тым і толькі ў тым выпадку, калі $ml=nk$. Напрыклад, $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$, паколькі $1\cdot 6=3\cdot 2$; $\frac{-5}{7}=\frac{10}{-14}$, паколькі $(-5)\cdot(-14)=7\cdot 10$; $\frac{0}{1}=\frac{0}{5}$, паколькі $0\cdot 5=1\cdot 0$ і г. д.

Відавочна, што для любога цэлага ліку r, не роўнага 0,

$$\frac{m}{n} = \frac{m \cdot r}{n \cdot r}.$$

Гэта вынікае з відавочнай роўнасці $m(n \cdot r) = n(m \cdot r)$. Таму любы рацыянальны лік можна запісаць у выглядзе адносіны двух лікаў бясконцым лікам спосабаў. Напрыклад,

$$5 = \frac{5}{1} = \frac{-10}{-2} = \frac{15}{3} \text{ і г. д.}$$

$$\frac{-1}{7} = \frac{2}{-14} = \frac{-3}{21} = \frac{-100}{700} \text{ і г. д.}$$

$$0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{-2} = \frac{0}{3} = \frac{0}{100} \text{ і г. д.}$$

У мностве ўсіх рацыянальных лікаў выканальныя дзеянні складання, множання, адымання і дзялення (акрамя дзялення на нуль). Напомнім, як вызначаюцца гэтыя дзеянні.

Сума двух рацыянальных лікаў $\frac{m}{n}$ *і* $\frac{k}{l}$ *вызначаецца формулай:*

$$\frac{m}{n} + \frac{k}{l} = \frac{ml + nk}{nl}.$$

Здабытак двух рацыянальных лікаў $\frac{m}{n}$ *і* $\frac{k}{l}$ *вызначаецца формулай:*

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{k}{l} = \frac{mk}{nl}.$$

Зыходзячы з гэтых азначэнняў, можна даказаць, што для дзеянняў складання і множання рацыянальных лікаў справядлівы наступныя асноўныя законы:

1) *камутатыўны* (або перамяшчальны) закон складання:

$$\frac{m}{n} + \frac{k}{l} = \frac{k}{l} + \frac{m}{n};$$

2) *асацыятыўны* (або спалучальны) закон складання:

$$\left(\frac{m}{n} + \frac{k}{l}\right) + \frac{p}{q} = \frac{m}{n} + \left(\frac{k}{l} + \frac{p}{q}\right);$$

3) *камутатыўны* (або перамяшчальны) закон множання:

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{k}{l} = \frac{k}{l} \cdot \frac{m}{n};$$

4) *асацыятыўны* (або спалучальны) закон множання:

$$\left(\frac{m}{n}\cdot\frac{k}{l}\right)\cdot\frac{p}{q}=\frac{m}{n}\cdot\left(\frac{k}{l}\cdot\frac{p}{q}\right);$$

5) *дыстрыбутыўны* (або размеркавальны) закон множання адносна складання:

$$\left(\frac{m}{n}+\frac{k}{l}\right)\cdot\frac{p}{q}=\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}+\frac{k}{l}\cdot\frac{p}{q}.$$

Паколькі адзін і той жа рацыянальны лік дапускае некалькі запісаў $\left(\text{напрыклад, } \frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{3}{9}=\ldots\right)$, трэба было б паказаць, што сума і здабытак рацыянальных лікаў не залежаць ад таго, як запісаны складаемыя або сумножнікі. Напрыклад,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{4}+\frac{3}{9};\qquad \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}$$

і г. д. Аднак разгляд гэтых пытанняў выходзіць за межы нашай праграмы.

Складанне і множанне з'яўляюцца асноўнымі алгебраічнымі дзеяннямі. Што ж датычыцца адымання і дзялення, то гэтыя дзеянні вызначаюцца як адваротныя ў адносінах да складання і множання.

Рознасцю двух рацыянальных лікаў $\frac{m}{n}$ *і* $\frac{k}{l}$ *называецца такі лік x, які ў суме з* $\frac{k}{l}$ *дае* $\frac{m}{n}$. Іншымі словамі, рознасць $\frac{m}{n}-\frac{k}{l}$ вызначаецца як корань ураўнення

$$\frac{k}{l}+x=\frac{m}{n}.$$

Само па сабе гэта азначэнне яшчэ не гарантуе, што ад кожнага рацыянальнага ліку можна адняць любы другі рацыянальны лік. Але калі б нават такая гарантыя і была, то ўсё роўна заставалася б не рэшаным пытанне, ці адназначна вызначаецца рознасць $\frac{m}{n}-\frac{k}{l}$ лікамі $\frac{m}{n}$ і $\frac{k}{l}$: А што, калі існуюць два розныя рацыянальныя лікі x_1 і x_2, кожны з якіх у суме з $\frac{k}{l}$ дае $\frac{m}{n}$? Тады было б няясна, які з іх трэба прыняць за рознасць $\frac{m}{n}-\frac{k}{l}$. Усе гэтыя сумненні вырашае наступная тэарэма, якую мы даём без доказу.

Рознасць любых рацыянальных лікаў $\frac{m}{n}$ ***і*** $\frac{k}{l}$ ***існуе і вызначана адназначна:***

$$\frac{m}{n}-\frac{k}{l}=\frac{ml-nk}{nl}.$$

У тым, што лік $\frac{ml-nk}{nl}$ з'яўляецца рознасцю лікаў $\frac{m}{n}$ і $\frac{k}{l}$, лёгка пераканацца непасрэдна праверкай. Сапраўды, па азначэнню сумы рацыянальных лікаў

$$\frac{k}{l}+\frac{ml-nk}{nl}=\frac{knl+lml-lnk}{lnl}=\frac{lml}{lnl}=\frac{m}{n}.$$

А вось чаму няма ніякага іншага ліку, які ў суме з $\frac{k}{l}$ даваў бы $\frac{m}{n}$, высветліць больш цяжка.

Калі лікі $\frac{m}{n}$ і $\frac{k}{l}$ роўныя паміж сабой, то рознасць іх ператвараецца ў нуль; калі ж гэтыя лікі не роўныя паміж сабой, то рознасць іх або дадатная, або адмоўная. Пры $\frac{m}{n}-\frac{k}{l}>0$ гавораць, што лік $\frac{m}{n}$ большы за лік $\frac{k}{l}$; калі ж $\frac{m}{n}-\frac{k}{l}<0$, то гавораць, што лік $\frac{m}{n}$ меншы за лік $\frac{k}{l}$.

Дзеллю ад дзялення рацыянальнага ліку $\frac{m}{n}$ *на рацыянальны лік* $\frac{k}{l}$ *называецца такі лік x, які ў здабытку з* $\frac{k}{l}$ *дае* $\frac{m}{n}$. Іншымі словамі, дзель $\frac{m}{n}:\frac{k}{l}$ вызначаецца як корань ураўнення

$$\frac{k}{l}\cdot x=\frac{m}{n}.$$

І гэта азначэнне само па сабе яшчэ не гарантуе ні выканальнасці, ні адназначнасці дзялення для любых рацыянальных лікаў. Гэтыя пытанні вырашаюцца наступнай тэарэмай, якую мы таксама прыводзім без доказу.

Калі дзельнік $\frac{k}{l}$ ***адрозны ад нуля, то дзель*** $\frac{m}{n}:\frac{k}{l}$ ***існуе і вызначана адназначна:***

$$\frac{m}{n}:\frac{k}{l}=\frac{ml}{nk}.$$

Калі ж дзельнік $\frac{k}{l}$ ***роўны нулю, то дзель*** $\frac{m}{n} : \frac{k}{l}$ ***не існуе.***

Той факт, што рацыянальны лік $\frac{ml}{nk}$ з'яўляецца дзеллю ад дзялення $\frac{m}{n}$ на $\frac{k}{l}$, устанаўліваецца даволі проста. На самай справе,

$$\frac{k}{l} \cdot \frac{ml}{nk} = \frac{kml}{lnk} = \frac{m}{n}.$$

Больш цяжка пераканацца ў тым, што ніякі іншы лік не можа даць у здабытку з $\frac{k}{l}$ лік $\frac{m}{n}$.

Практыкаванні

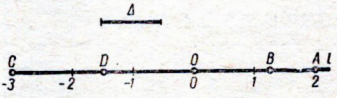
295. Якія з дадзеных формул выражаюць азначэнні і якія — тэарэмы:

а) $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq+np}{nq}$; в) $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}$;

б) $\frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{mq-np}{nq}$; г) $\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{mq}{np}$ $(p \neq 0)$?

§ 37. Геаметрычнае ізабражэнне рацыянальных лікаў

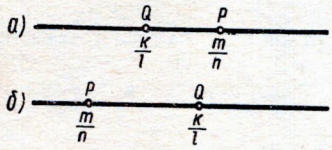
Няхай Δ ёсць адрэзак, прыняты за адзінку даўжыні, а l — адвольная прамая (рыс. 51). Возьмем на ёй які-небудзь пункт і абазначым яго літарай O. Кожнаму дадатнаму рацыянальнаму ліку $\frac{m}{n}$ паставім у адпаведнасць пункт прамой l, які ляжыць справа ад O на адлегласці ў $\frac{m}{n}$ адзінак даўжыні. Напрыклад, ліку 2 будзе адпавядаць пункт A, які ляжыць справа ад O на адлегласці ў 2 адзінкі даўжыні, а ліку $\frac{5}{4}$ — пункт B, які ляжыць справа ад O на адлегласці ў $\frac{5}{4}$ адзінак даўжыні. Кожнаму адмоўнаму рацыянальнаму ліку $\frac{k}{l}$ паставім у адпаведнасць пункт прамой l, які ляжыць злева ад O на адлегласці ў $\left|\frac{k}{l}\right|$ адзінак даўжыні. Так,



Рыс. 51.

ліку -3 будзе адпавядаць пункт C, які ляжыць злева ад O на адлегласці ў 3 адзінкі даўжыні, а ліку $-\frac{3}{2}$ — пункт D, які ляжыць злева ад O на адлегласці ў $\frac{3}{2}$ адзінак даўжыні. Нарэшце, рацыянальнаму ліку «нуль» паставім у адпаведнасць пункт O.

Відавочна, што пры выбранай адпаведнасці роўным рацыянальным лікам $\left(\text{напрыклад, } \frac{1}{2} \text{ і } \frac{2}{4}\right)$ будзе адпавядаць адзін і той жа пункт, а не роўным паміж сабой лікам — розныя пункты прамой l. Дапусцім, што ліку $\frac{m}{n}$ адпавядае пункт P, а ліку $\frac{k}{l}$ — пункт Q. Тады, калі $\frac{m}{n} > \frac{k}{l}$, то пункт P будзе ляжаць правей пункта Q (рыс. 52, *а*); калі ж $\frac{m}{n} < \frac{k}{l}$, то пункт P будзе знаходзіцца лявей пункта Q (рыс. 52, *б*).



Рыс. 52

Такім чынам, ***любы рацыянальны лік можна геаметрычна паказаць у выглядзе некаторага, зусім пэўнага пункта прамой.*** А ці правільна адваротнае сцверджанне? Ці ўсякі пункт прамой можна разглядаць як геаметрычны вобраз некаторага рацыянальнага ліку? Рашэнне гэтага пытання мы адкладзём да вывучэння § 44.

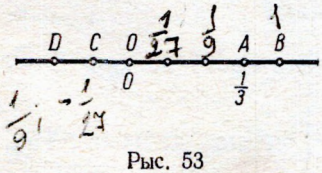
Практыкаванні

296. Паказаць пункты прамой, якія адпавядаюць наступным рацыянальным лікам:

$$-3;\ -\frac{7}{2};\ 0;\ 2{,}6.$$

297. Вядома, што пункт A (рыс. 53) служыць геаметрычным ізабражэннем рацыянальнага ліку $\frac{1}{3}$. Якім лікам адпавядаюць пункты B, C і D?

298. На прамой зададзены два пункты, якія служаць геаметрычным ізабражэннем рацыянальных лікаў a і b. Знайсці на гэтай прамой пункты, якія адпавядаюць лікам $a+b$ і $a-b$.



Рыс. 53

299. На прамой зададзены два пункты, якія служаць геаметрычным ізабражэннем рацыянальных лікаў

$a+b$ і $a-b$. Знайсці на гэтай прамой пункты, якія адпавядаюць лікам a і b.

§ 38. Дзесятковая форма запісу рацыянальных лікаў

На практыцы звычайна карыстаюцца дзесятковай формай запісу рацыянальных лікаў. Так, замест $\frac{1}{2}$ пішуць 0,5; замест $-\frac{3}{8}$ пішуць — 0,375; замест $\frac{5}{4}$ пішуць 1,25 і г. д. Для прастаты ў далейшым мы будзем гаварыць толькі аб дадатных і правільных дробах, гэта значыць аб дробах, змешчаных у інтэрвале ад 0 да 1.

Каб атрымаць дзесятковую форму запісу ліку $\frac{m}{n}$, трэба m «вугалком» падзяліць на n. Як вядома з арыфметыкі, у рэзультаце такога дзялення атрымліваецца або *канечны*, або *бесканечны перыядычны дзесятковы дроб*. Пакажам гэта на ліках $\frac{5}{16}$, $\frac{1}{3}$ і $\frac{29}{110}$.

5 | 16
50 | 0,3125
48
20
16
40
32
80

1 | 3
10 | 0,3333 ...
9
10
9
10
9
10

29 | 110
290 | 0,26363...
220
700
660
400
330
700
660
400
330
70

Таму

$\frac{5}{16} = 0{,}3125$ (канечны дзесятковы дроб);

$\frac{1}{3} = 0{,}3333\ \ldots$ (бесканечны перыядычны дзесятковы дроб з перыядам 3);

$\frac{29}{110} = 0{,}26363\ldots$ (бесканечны перыядычны дзесятковы дроб з перыядам 63). Перыяд пачынаецца або адразу ж пасля коскі (напрыклад, 0,333 ...), або пасля некалькіх дзесятковых знакаў,

якія не ўваходзяць у перыяд (напрыклад, 0,26363...). Адпаведна гэтаму ўсе перыядычныя дзесятковыя дробы падзяляюцца на *простыя* (такія, як 0,333...) і *змешаныя* (такія, як 0,26363...).

Перыяд бесканечнага дзесятковага дробу, які атрымліваецца ў рэзультаце дзялення цэлых лікаў «вугалком», можа быць любым натуральным лікам; выключаецца толькі выпадак, калі ён складзен з адных дзевятак. (На строгім доказе гэтага факта мы спыняцца не будзем.) Адзначым яшчэ, што любы канечны дзесятковы дроб можна разглядаць як бесканечны перыядычны дроб з перыядам 0. Напрыклад,

$$0{,}37 = 0{,}370000\ldots,$$
$$6{,}14 = 6{,}140000\ldots$$

і г. д. Такім чынам, ***любы рацыянальны лік можна даць у выглядзе бесканечнага перыядычнага дзесятковага дробу, перыяд якога адрозны ад 9.***

Правільнае і адваротнае сцверджанне: ***любы бесканечны перыядычны дроб з перыядам, адрозным ад 9, з'яўляецца рацыянальным лікам.***

Строга даказваць гэта мы таксама не будзем. Напомнім толькі вядомыя з арыфметыкі правілы ператварэння перыядычных дзесятковых дробаў у звычайныя. Для прастаты дапусцім, што ўсе разглядаемыя намі дзесятковыя дробы дадатныя і меншыя за адзінку.

Правіла 1. ***Для ператварэння простага перыядычнага дробу ў звычайны трэба зрабіць наступнае: у лічніку паставіць перыяд дзесятковага дробу, а ў назоўніку — лік, які складаецца з дзевятак, узятых столькі разоў, колькі знакаў у перыядзе дзесятковага дробу.***

Напрыклад,

$$0{,}333333\ldots = \frac{3}{9} = \frac{1}{3};$$

$$0{,}454545\ldots = \frac{45}{99} = \frac{5}{11};$$

$$0{,}243243243\ldots = \frac{243}{999} = \frac{9}{37}.$$

Правіла 2. ***Для ператварэння змешанага перыядычнага дзесятковага дробу ў звычайны трэба зрабіць наступнае: у лічніку ўзяць лік, які стаіць у дзесятковым дробе да другога перыяду, мінус лік, які стаіць у дзесятковым дробе да першага перыяду; у назоўніку трэба напісаць столькі дзевятак, колькі лічбаў у перыядзе, і прыпісаць да іх столькі нулёў, колькі лічбаў у зыходным дзесятковым дробе ад коскі да першага перыяду.***

Напрыклад,

$$0{,}453333\ldots = \frac{453-45}{900} = \frac{408}{900} = \frac{34}{75};$$

$$0{,}027454545\ldots = \frac{2745-27}{99000} = \frac{2718}{99000} = \frac{151}{5500}.$$

Заўважым, што бесканечным перыядычным дробам з перыядам 9 таксама можна надаць пэўны сэнс, калі фармальна, выкарыстоўваючы правілы 1 і 2, запісаць іх у выглядзе адносіны двух цэлых лікаў. Напрыклад, правіла 1 дае

$$0{,}999999\ldots = \frac{9}{9} = 1.$$

Згодна з правілам 2

$$0{,}499999\ldots = \frac{49-4}{90} = \frac{45}{90} = \frac{1}{2} = 0{,}5;$$

$$0{,}679999\ldots = \frac{679-67}{900} = \frac{612}{900} = \frac{68}{100} = 0{,}68;$$

$$0{,}521999\ldots = \frac{5219-521}{9000} = \frac{4698}{9000} = \frac{522}{1000} = 0{,}522$$

і г. д. Усе дадзеныя тут бесканечныя перыядычныя дзесятковыя дробы з перыядам 9 аказаліся роўнымі канечным дзесятковым дробам, якія атрымліваюцца з дадзеных дзесятковых дробаў, калі дзесятковы знак, што стаіць перад першым перыядам, павялічыць на 1, а ўсе наступныя дзесятковыя знакі адкінуць. Можна даказаць, што гэта адносіцца не толькі да разгледжаных, але і да любых іншых перыядычных дзесятковых дробаў з перыядам 9. Адсюль вынікае, што любы канечны дзесятковы дроб можа быць дадзены ў выглядзе бесканечнага перыядычнага дробу двума рознымі спосабамі: з перыядам 0 і з перыядам 9. Напрыклад:

$$0{,}37 = 0{,}370000\ldots = 0{,}0369999\ldots;$$

$$0{,}6 = 0{,}600000\ldots = 0{,}599999\ldots.$$

Гэта акалічнасць робіць больш цяжкім выкладанне тэорыі бесканечнасці перыядычных дзесятковых дробаў. Вось чаму ў далейшым мы ўмовімся зусім не гаварыць аб перыядычных дзесятковых дробах з перыядам 9, кожны раз замяняючы іх адпаведнымі перыядычнымі дробамі з перыядам 0.

Такім чынам, рацыянальныя лікі (і толькі яны!) можна даць ў выглядзе бесканечных перыядычных дзесятковых дробаў. А ці існуюць бесканечныя неперыядычныя дзесятковыя дробы? Гэта пытанне рашаецца станоўча. Каб пераканацца ў гэтым, дастаткова прывесці хаця б адзін прыклад бесканечнага неперыядычнага дробу. Такі прыклад дае, у прыватнасці, лік

$$0{,}101001000100001\ldots$$

(пасля коскі выпісваюцца запар лікі 10, 100, 1000, 10000 і г. д.). Паспрабуйце даказаць, што дадзены дзесятковы дроб сапраўды з'яўляецца неперыядычным!

У наступных параграфах будуць разгледжаны канкрэтныя задачы, якія прыводзяць нас да бесканечных неперыядычных дзесятковых дробаў.

Практыкаванні

300. Дадзеныя лікі запісаць у выглядзе бесканечных дзесятковых дробаў:

а) $\frac{15}{8}$; б) $-\frac{3}{7}$; в) 0; г) $\frac{46}{27}$; д) $-\frac{9}{28}$.

301*. Дадзеныя дзесятковыя дробы ператварыць у звычайныя:

а) 0,444444 . . .; г) −0,573636 . . .;
б) 10,521521 . . .; д) −2,001777 . . .;
в) 4,636363 . . .; е) 7,090909 . . .

302. Вядома, што нескарачальны дроб $\frac{m}{n}$ можна даць у выглядзе канечнага дзесятковага дробу. На якія лікі можа дзяліцца без астатку лік n?

303*. Чаму пры дзяленні цэлых лікаў «вугалком» атрымліваюцца заўсёды перыядычныя дробы?

304*. Даказаць, што дроб

$$0{,}12345678910111213\ldots,$$

які атрымліваецца, калі пасля нуля выпісаць запар усе натуральныя лікі, не з'яўляецца перыядычным.

§ 39. Здабыванне квадратных кораняў з рацыянальных лікаў

Як мы ведаем, у мностве рацыянальных лікаў заўсёды выканальнае дзеянне множання. У прыватнасці, вызначаны здабытак $\frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n}$. Гэты здабытак, як вядома, называецца квадратам ліку $\frac{m}{n}$ і абазначаецца $\left(\frac{m}{n}\right)^2$:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n}.$$

Такім чынам, калі некаторы лік з'яўляецца рацыянальным, то квадрат яго ёсць таксама рацыянальны лік. Гэты лік, відавочна, дадатны. А цяпер паставім адваротную задачу: ці ўсякі дадатны рацыянальны лік з'яўляецца квадратам некаторага рацыянальнага ліку? На мове алгебраічных ураўненняў гэта задача можа быць сфармулявана наступным чынам. Дадзена ўраўненне

$$x^2 = a,$$

дзе a — некаторы дадатны рацыянальны лік, x — невядомая велічыня. Ці заўсёды гэта ўраўненне мае рацыянальныя карані? Адказ на гэта пытанне аказваецца адмоўным. Рацыянальны лік a можна выбраць так, што ўраўненне $x^2 = a$ не будзе мець ні аднаго рацыянальнага кораня. У гэтым нас пераконвае, у прыватнасці, наступная тэарэма.

Тэарэма. ***Не існуе рацыянальнага ліку, квадрат якога роўны 2.***

Доказ будзем праводзіць метадам ад адваротнага. Дапусцім, што існуе рацыянальны лік $\frac{m}{n}$, квадрат якога роўны 2:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2.$$

Калі цэлыя лікі m і n маюць аднолькавыя множнікі, то дроб $\frac{m}{n}$ можна скараціць. Таму з самага пачатку мы маем права дапусціць, што дроб $\frac{m}{n}$ нескарачальны.

З умовы $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ вынікае, што

$$m^2 = 2n^2.$$

Паколькі лік $2n^2$ цотны, то і лік m^2 павінен быць цотным. Але тады будзе цотным і лік m. (Дакажыце гэта!) Такім чынам, $m = 2k$, дзе k — некаторы цэлы лік. Падстаўляючы гэты выраз для m у формулу $m^2 = 2n^2$, атрымліваем: $4k^2 = 2n^2$, адкуль

$$n^2 = 2k^2.$$

У такім выпадку лік n^2 будзе цотным; але тады павінен быць цотным і лік n. Выходзіць, што лікі m і n — цотныя. А гэта супярэчыць таму, што дроб $\frac{m}{n}$ нескарачальны. Значыць, наша зыходнае дапушчэнне аб існаванні дробу $\frac{m}{n}$, які задавальняе ўмове $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$, няправільнае. Застаецца прызнаць, што сярод усіх рацыянальных лікаў няма такога, квадрат якога быў бы роўны 2. Таму ўраўненне

$$x^2 = 2$$

у мностве р а ц ы я н а л ь н ы х лікаў невырашальнае. Аналагічнае заключэнне можна было б зрабіць і аб многіх ураўненнях выгляду

$$x^2 = a,$$

дзе a — дадатны цэлы лік. Тым не менш у VIII класе мы неаднаразова гаварылі аб коранях такіх ураўненняў. А дадатнаму кораню ўраўнення $x^2 = a$ мы нават далі спецыяльную назву — «корань квадратны з ліку a» і ўвялі для яго спецыяльнае абазначэнне: $\sqrt{a}$.

Такім чынам, сярод рацыянальных лікаў няма ліку $\sqrt{2}$.

Таму дадзены лік належыць мноству нейкіх новых, яшчэ не вывучаных намі лікаў. Як жа ўявіць сабе гэтыя лікі? Каб адказаць на гэта пытанне, успомнім правіла для здабывання квадратных кораняў. У прымяненні да ліку 2 гэта правіла дае:

$$\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$$

1	
24 | 4	100 | 96
281 | 1	400 | 281
2824 | 4	11900 | 11296
28282 | 2	60400 | 56564
282841 | 1	383600 | 282841
	100759

Працэс здабывання кораня ў дадзеным выпадку не можа закончыцца ні на якім кроку. У адваротным выпадку $\sqrt{2}$ быў бы роўны некатораму канечнаму дзесятковаму дробу і таму быў бы рацыянальным лікам. А гэта супярэчыць даказанай вышэй тэарэме. Такім чынам, лік $\sqrt{2}$ аказваецца бесканечным дзесятковым дробам. Гэты дроб не можа быць перыядычным, інакш яго, як і ўсякі іншы бесканечны перыядычны дроб, можна было б запісаць у выглядзе адносіны двух цэлых лікаў. А гэта таксама знаходзіцца ў супярэчнасці з даказанай вышэй тэарэмай. Такім чынам, ***$\sqrt{2}$ запісваецца ў выглядзе бесканечнага неперыядычнага дзесятковага дробу.***

Такім чынам, да бесканечных неперыядычных дзесятковых дробаў нас прыводзіць, напрыклад, дзеянне здабывання кораняў з цэлых лікаў.

У наступных параграфах мы разгледзім яшчэ адну задачу, якая, наогул кажучы, ніяк не звязана са здабываннем кораняў, але таксама прыводзіць нас да бесканечных неперыядычных дзесятковых дробаў.

Практыкаванні

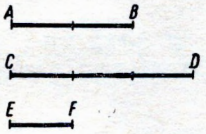
305. Назавіце некалькі натуральных лікаў, квадратныя карані з якіх былі б рацыянальнымі лікамі.

306. Дакажыце, што калі корань квадратны з натуральнага ліку з'яўляецца рацыянальным лікам, то гэты рацыянальны лік з'яўляецца абавязкова цэлым.

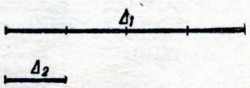
307. Дакажыце, што ўраўненне $x^3=5$ у мностве рацыянальных лікаў не мае кораняў.

§ 40. Сувымерныя і несувымерныя адрэзкі

Адрэзак Δ *называецца агульнай мерай адрэзкаў* Δ_1 *і* Δ_2, *калі ён укладваецца цэлы лік разоў у кожным з гэтых адрэзкаў.* Напрыклад, адрэзак *EF*, паказаны на рысунку 54, укладваецца ў *AB* 2 разы, а ў *CD* — 3 разы. Таму ён з'яўляецца агульнай мерай адрэзкаў *AB* і *CD*. Аналагічна гэтаму адрэзак Δ_2, паказаны на рысунку 55, з'яўляецца агульнай мерай адрэзкаў Δ_1 і Δ_2, таму што ў Δ_1 ён укладваецца 4 разы, а ў Δ_2 (у самім сабе) — адзін раз.



Рыс. 54.



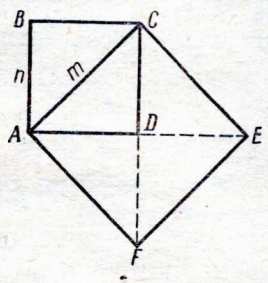
Рыс. 55.

Ці любыя два адрэзкі маюць агульную меру? Адказ на гэта пытанне будзе дадзен некалькімі радкамі ніжэй. А пакуль мы ўвядзём яшчэ адно азначэнне.

Два адрэзкі, якія маюць агульную меру, называюцца сувымернымі, а якія не маюць агульнай меры,— несувымернымі.

Цяпер пытанне аб тым, ці любыя два адрэзкі маюць агульную меру, можна перафразіраваць такім чынам: ці любыя два адрэзкі з'яўляюцца сувымернымі? Наступная тэарэма дае адмоўны адказ на гэта пытанне.

Тэарэма. ***Дыяганаль любога квадрата несувымерная з яго стараной.***



Рыс. 56.

Доказ будзем праводзіць метадам ад адваротнага. Дапусцім, што дыяганаль *AC* квадрата *ABCD* (рыс. 56) сувымерная з яго стараной *AB*. Тады існуе агульная мера гэтых адрэзкаў, гэта значыць адрэзак, які ў *AB* укладваецца роўна *n* разоў, а ў *AC* — роўна *m* разоў. Калі прыняць гэты адрэзак за адзінку даўжыні, то даўжыня *AB* выразіцца лікам *n*, а даўжыня *AC* — лікам *m*.

На дыяганалі *AC* пабудуем новы квадрат *ACEF*, як паказана на рысунку 56. Відавочна, што плошча гэтага квадрата ў два разы большая за плошчу квадрата *ABCD*:

$$S_{ACEF} = 2S_{ABCD},$$

але

$$S_{ABCD} = n^2, \text{ а } S_{ACEF} = m^2.$$

Таму $m^2 = 2n^2$, адкуль

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2.$$

Але гэта роўнасць супярэчыць тэарэме, даказанай у папярэднім параграфе: «Не існуе рацыянальнага ліку, квадрат якога роўны 2».

Значыць, наша зыходнае дапушчэнне няправільнае. Застаецца прызнаць, што дыяганаль любога квадрата несувымерная з яго стараной.

Цяпер мы можам зрабіць два важныя для далейшага вывады.

1. ***Калі адрэзак CD сувымерны з адзінкай даўжыні AB, то даўжыня яго не выражаецца ніякім рацыянальным лікам.***

Сапраўды, з прычыны таго, што адрэзкі AB і CD сувымерныя, знойдзецца трэці адрэзак EF, які ў AB укладваецца роўна n разоў, а ў CD роўна m разоў. Але ў такім выпадку n-я частка адрэзка AB павінна ўкладвацца ў CD роўна m разоў. Таму даўжыня CD выражаецца рацыянальным лікам $\frac{m}{n}$.

2. ***Калі адрэзак CD несувымерны з адзінкай даўжыні AB, то даўжыня яго не выражаецца ніякім рацыянальным лікам.***

Сапраўды, калі б даўжыня адрэзка CD выражалася некаторым рацыянальным лікам, напрыклад $\frac{p}{q}$, то q-я доля адрэзка AB укладвалася б у AB q разоў, а ў CD p разоў. Але ў такім выпадку q-ю долю адрэзка AB можна было б лічыць агульнай мерай адрэзкаў AB і CD. А гэта супярэчыць умове: адрэзкі AB і CD несувымерныя.

Практыкаванні

308. Дакажыце, што калі адрэзкі AB і CD сувымерныя, то n-я доля адрэзка AB сувымерная з m-й доляй адрэзка CD (m і n — адвольныя натуральныя лікі).

309. Дакажыце, што калі адрэзкі AB і CD несувымерныя, то n-я доля адрэзка AB несувымерная з m-й доляй адрэзка CD. (m і n — адвольныя натуральныя лікі).

310. Няхай Δ_1 і Δ_2 — два сувымерныя адрэзкі, прычым адрэзак Δ_1 даўжэйшы за адрэзак Δ_2. Дакажыце, што ў такім выпадку адрэзкі $\Delta_1+\Delta_2$ і $\Delta_1-\Delta_2$ будуць таксама сувымернымі.

Ці правільна адваротнае сцверджанне?

311. Дакажыце, што ў прамавугольным трохвугольніку катэт, які ляжыць супраць вугла ў 60°, несувымерны з гіпатэнузай.

312. Дакажыце, што калі адрэзак AB сувымерны з адрэзкам CD, а адрэзак CD сувымерны з адрэзкам EF, то адрэзак AB сувымерны з адрэзкам EF.

313. Дакажыце, што калі адрэзак AB сувымерны з адрэзкам CD, але несувымерны з адрэзкам EF, то адрэзкі CD і EF несувымерныя.

§ 41. Даўжыня адрэзка, несувымернага з адзінкай даўжыні

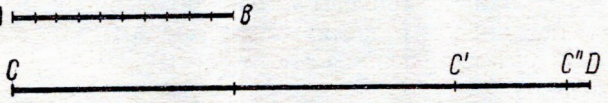
Вернемся да задачы вымярэння адрэзкаў, часткова ўжо разгледжанай намі ў папярэдніх параграфах. Няхай AB ёсць адрэзак, прыняты за адзінку даўжыні, а CD — вымяраемы адрэзак. Могуць быць два выпадкі:

1) адрэзкі AB і CD сувымерныя;

2) адрэзкі AB і CD несувымерныя.

У першым выпадку даўжыня адрэзка CD выразіцца некаторым рацыянальным лікам $\frac{m}{n}$. У другім выпадку даўжыня CD не можа быць выражана ніякім рацыянальным лікам. Гэты выпадак цяпер будзе з'яўляцца для нас найбольш цікавым. Яго вось мы і разгледзім. Адзін з найважнейшых вывадаў, да якога прыводзіць разгляд гэтага выпадку, заключаецца ў наступным: ***для вымярэння адрэзкаў рацыянальных лікаў не хапае.*** Для таго каб даўжыня кожнага адрэзка выражалася некаторым лікам, мы павінны да ўжо вядомых нам рацыянальных лікаў дадаць якіясьці новыя лікі.

Як жа ўявіць сабе гэтыя новыя лікі?



Рыс. 57.

Няхай адрэзак CD несувымерны з адзінкай даўжыні — адрэзкам AB. Будзем адкладваць адрэзак AB на адрэзку CD, пачынаючы ад пункта C (рыс. 57). Дапусцім, што ў выніку двух паслядоўных адкладванняў атрымліваецца некаторы «астатак» — адрэзак $C'D$, які меншы за адрэзак AB. Тады натуральна лічыць, што даўжыня CD набліжана выражаецца лікам 2. Падзелім адзінку даўжыні AB на 10 роўных частак і адну такую частку будзем адкладваць на $C'D$, пачынаючы ад пункта C'. Дапусцім, што пасля пяці такіх адкладванняў атрымліваецца «астатак» —

адрэзак $C''D$, меншы, чым дзесятая доля AB. Тады натуральна лічыць, што даўжыня CD набліжана выражаецца лікам 2,5. Пасля гэтага дзесятую долю AB падзелім, у сваю чаргу, на 10 роўных частак. У выніку мы атрымаем $\frac{1}{100}$ долю AB. Будзем адкладваць яе на адрэзку $C''D$*, пачынаючы ад пункта C''. Дапусцім, што пасля васьмі такіх паслядоўных адкладванняў атрымліваецца «астатак»— адрэзак $C'''D$, меншы, чым $\frac{1}{100}$ доля AB. Тады натуральна лічыць, што даўжыня адрэзка CD набліжана выражаецца лікам 2,58. Апісаны працэс можна было б працягваць неабмежавана. Пры гэтым кожны крок даваў бы нам усё больш і больш дакладныя, хаця і заўсёды набліжаныя, значэнні даўжыні адрэзка CD, напрыклад:

2;
2,5;
2,58;
2,583;
2,5833;
2,58337

і г. д.

Чаму мы ўпэўнены, што гэты працэс будзе працягвацца бясконца? Калі б ён абарваўся на якім-небудзь кроку, напрыклад на трэцім, то даўжыня CD выразілася б дакладна (а не набліжана) лікам 2,58. Але ў такім выпадку $\frac{1}{100}$ доля AB укладвалася б у AB 100 разоў, а ў CD 258 разоў. А гэта супярэчыць умове, згодна з якой адрэзкі AB і CD несувымерныя.

Цяпер натуральна дапусціць, што даўжыня адрэзка CD выражаецца бесканечным дзесятковым дробам

$$2{,}58337\ldots .$$

Гэты дроб не можа быць перыядычным, інакш яго можна было б запісаць у выглядзе $\frac{m}{n}$, дзе m і n — натуральныя лікі. Але тады n-я доля AB укладвалася б у AB n разоў, а ў CD m разоў, што таксама супярэчыць несувымернасці адрэзкаў AB і CD.

Такім чынам, даўжыня адрэзка CD выражаецца бесканечным неперыядычным дзесятковым дробам (2,58337 ...). Да аналагічнага вываду мы прыйшлі б, калі б замест адрэзка CD разгледзелі які-небудзь іншы адрэзак, несувымерны з адзінкай даўжыні AB.

---

* На рысунку 57 гэта ўжо не адзначана.

Такім чынам, ***калі некаторы адрэзак CD несувымерны з адзінкай даўжыні, то яго даўжыня запісваецца ў выглядзе бесканечнага неперыядычнага дзесятковага дробу.***

Практыкаванні

314. Ці можа даўжыня адрэзка Δ пры адной адзінцы даўжыні выражацца бесканечным перыядычным дробам, а пры другой адзінцы даўжыні — бесканечным неперыядычным дробам? Прывядзіце прыклады.

315. Ці сувымерны адрэзак CD з адзінкай даўжыні AB, калі даўжыня CD выражаецца:

а) канечным дзесятковым дробам;

б) бесканечным перыядычным дзесятковым дробам;

в) бесканечным неперыядычным дзесятковым дробам?

§ 42. Сапраўдныя лікі

У папярэднім параграфе мы пераканаліся, што для вымярэння адрэзкаў рацыянальных лікаў не хапае. Напомнім яшчэ раз, што рацыянальныя лікі — гэта лікі, якія можна прадставіць у выглядзе бесканечных перыядычных дзесятковых дробаў. А даўжыні некаторых адрэзкаў выражаюцца бесканечнымі неперыядычнымі дзесятковымі дробамі. Такім чынам, задача вымярэння адрэзкаў прыводзіць нас да неабходнасці пашырыць мноства рацыянальных лікаў шляхам далучэння да яго дадатных бесканечных неперыядычных дзесятковых дробаў. З такой жа неабходнасцю мы сутыкнуліся па сутнасці і ў § 39 пры разглядзе квадратных ураўненняў выгляду $x^2=a$, дзе a — некаторы рацыянальны (нават натуральны) лік. Патрэбы алгебры (напрыклад, выканальнасць дзеяння адымання) гавораць аб тым, што разам з дадатнымі мэтазгодна адразу ж разглядаць і адмоўныя бесканечныя неперыядычныя дзесятковыя дробы. Таму ў далейшым, гаворачы аб бесканечных неперыядычных дробах, мы будзем мець на ўвазе як дадатныя, так і адмоўныя дробы.

Лікі, якія можна прадставіць у выглядзе бесканечных неперыядычных дзесятковых дробаў, называюцца ірацыянальнымі (гэта значыць «нерацыянальнымі»).

Прыкладам ірацыянальных лікаў можа служыць любы з лікаў $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ і г. д. Ірацыянальнасць $\sqrt{2}$ мы фактычна даказалі ў § 39, а ірацыянальнасць лікаў $\sqrt{3}$ і $\sqrt{5}$ можа быць устаноўлена аналагічна. Не трэба, аднак, думаць, што ірацыянальныя лікі атрымліваюцца толькі пры здабыванні кораняў. Як было паказана ў папярэднім параграфе, да ірацыянальных лікаў прыводзіць і задача вымярэння адрэзкаў. А вымярэнне

адрэзкаў, наогул кажучы, неабавязкова звязана са здабываннем кораняў.

Класічны прыклад ірацыянальнага ліку, які сваім паходжаннем ніяк не звязаны са здабываннем кораняў, дае лік $\pi = 3{,}1415926536\ldots$ (адносіна даўжыні акружнасці да яе дыяметра). На жаль, мы не можам прывесці зараз іншых пераканаўчых прыкладаў. Але прыклады такія існуюць. Таму здабыванне кораняў з цэлых лікаў — далёка не адзіная крыніца ўтварэння ірацыянальных лікаў. Больш таго, сярод усіх ірацыянальных лікаў у пэўным сэнсе больш якраз такіх лікаў, якія сваім паходжаннем ніяк не звязаны са здабываннем кораняў. Аднак пытанне гэта даволі складанае; падрабязна спыняцца на ім мы тут не можам.

Усе рацыянальныя і ўсе ірацыянальныя лікі, узятыя разам, утвараюць мноства *сапраўдных*, або *вяшчэственных*, лікаў. Вывучаць гэта мноства мы пачнём у наступным параграфе.

Некаторымі ірацыянальнымі лікамі матэматыкі карысталіся яшчэ ў старажытныя часы. Да іх прыводзілі задачы геаметрыі, якія не маглі быць рэшаны на падставе існаваўшай тады арыфметыкі. Аднак у тыя часы ірацыянальныя лікі разглядаліся не як раўнапраўныя з рацыянальнымі, а як якіясьці выключныя лікі, што парушаюць гармонію арыфметыкі і геаметрыі. Па гэтай прычыне некаторыя прапанавалі нават выключыць ірацыянальныя лікі з матэматыкі.

Строгая тэорыя ірацыянальных лікаў была пабудавана толькі ў другой палавіне XIX стагоддзя. Асноўная заслуга ў гэтым належыць нямецкім вучоным Дэдэкінду (1831—1916), Кантару (1845—1918) і Веерштрасу (1815—1897).

Практыкаванні

316. а) Ці любы рацыянальны лік з'яўляецца сапраўдным? А наадварот?

б) Ці любы ірацыянальны лік з'яўляецца сапраўдным? А наадварот?

317. Даўжыня ці любога адрэзка выражаецца:

а) рацыянальным лікам;

б) ірацыянальным лікам;

в) сапраўдным лікам?

§ 43. Параўнанне сапраўдных лікаў

У гэтым параграфе, гаворачы аб сапраўдных ліках, мы будзем дапускаць, што ўсе яны зададзены ў выглядзе бесканечных дзесятковых дробаў. Спачатку разгледзім толькі дадатныя лікі.

*Два дадатныя сапраўдныя лікі называюцца роўнымі, калі ўсе адпаведныя дзесятковыя знакі іх аднолькавыя**. Калі ж адзін з лікаў змяшчае знак, які не супадае з адпаведным знакам дру-

* Бесканечныя перыядычныя дзесятковыя дробы з перыядам 9 мы выключаем з разгляду.

гога ліку, то лікі называюцца *няроўнымі*. Напрыклад, лік 5,6389... не роўны ліку 3,6389...; лік 0,146... не роўны ліку 0,148... і г. д.

Няхай α і β* — не роўныя паміж сабой дадатныя сапраўдныя лікі. Калі цэлыя часткі гэтых лікаў розныя, то большым лічыцца той з іх, які мае большую цэлую частку. Напрыклад:

$$5{,}6348\ldots > 3{,}9901\ldots;$$
$$1{,}0000\ldots > 0{,}5777\ldots.$$

Дапусцім цяпер, што цэлыя часткі няроўных лікаў α і β роўныя паміж сабой. Тады параўнаем іх першыя пасля коскі дзесятковыя знакі. Калі знакі розныя, то большым будзе той з лікаў α і β, у якім большы першы дзесятковы знак. Калі ж і гэтыя знакі аднолькавыя, то параўнаем другія пасля коскі знакі. Большым з лікаў α і β будзе той, у якога другі пасля коскі дзесятковы знак большы. Калі ж і гэтыя знакі аднолькавыя, то параўнаем трэція пасля коскі знакі і г. д. Рана ці позна мы прыйдзем да розных знакаў: у адваротным выпадку лікі α і β аказаліся б роўнымі адзін другому.

Прыклады.

$$37{,}1269\ldots > 37{,}0394\ldots;$$
$$110{,}0057\ldots > 110{,}0049\ldots;$$
$$0{,}3333\ldots > 0{,}3332\ldots.$$

Цяпер пакажам, як параўноўваюцца паміж сабой адмоўныя сапраўдныя лікі. *Два адмоўныя сапраўдныя лікі α і β называюцца роўнымі, калі роўныя іх абсалютныя значэнні:*

$$|\alpha| = |\beta|.$$

Калі ж $|\alpha| \neq |\beta|$, то адмоўныя лікі α і β называюцца *няроўнымі*. Напрыклад:

$$-5{,}6389\ldots \neq -3{,}6389\ldots;$$
$$-0{,}146\ldots \neq -0{,}147\ldots.$$

З двух адмоўных лікаў большым лічыцца той, абсалютная велічыня якога меншая. Напрыклад:

$-37{,}1269\ldots < -37{,}0394\ldots$, паколькі $37{,}1269\ldots > 37{,}0394\ldots$;

$-0{,}3333\ldots < -0{,}3332\ldots$, паколькі $0{,}3333\ldots > 0{,}3332\ldots$.

Нам засталося ўстанавіць, як параўноўваюцца паміж сабой сапраўдныя лікі розных знакаў.

Будзем лічыць, што *любы дадатны лік большы за любы адмоўны лік і лік 0, а лік 0, у сваю чаргу, большы за любы адмоўны лік.*

---

* α і β — грэчаскія літары; чытаюцца адпаведна: альфа і бэта.

Практыкаванні

318. Паміж дадзенымі лікамі паставіць адзін з наступных трох знакаў: $>$, $<$, $=$.

а) $5{,}63479\ldots$ і $5{,}63497\ldots$;

б) $-3{,}4833\ldots$ і $-3{,}5829\ldots$;

в) $-16{,}0010\ldots$ і $-16{,}0001\ldots$;

г) $15{,}25\ldots$ і $\frac{61}{4}$;

д) 0 і $-0{,}0003\ldots$.

319. Высветліць, які з двух дадзеных лікаў большы і які меншы (або паказаць, што гэтыя лікі роўныя адзін другому):

а) $-71{,}7171\ldots$ і $7{,}1717\ldots$;

б) $-\frac{3}{8}$ і $-0{,}375\ldots$;

в) $\frac{5}{9}$ і $0{,}5555\ldots$ (адны пяцёркі);

г) $0{,}3333\ldots$ і $\frac{1}{3}$.

§ 44. Геаметрычнае ізабражэнне сапраўдных лікаў

Геаметрычна сапраўдныя лікі, гэтак жа як і рацыянальныя, паказваюцца пунктамі прамой.

Няхай l — адвольная прамая, а O — некаторы яе пункт (гл. рыс. 58). Кожнаму дадатнаму сапраўднаму ліку α паставім у адпаведнасць пункт A, які ляжыць справа ад O на адлегласці ў α адзінак даўжыні.

Калі, напрыклад, $\alpha=2{,}1356\ldots$, то

$$2<\alpha<3$$
$$2{,}1<\alpha<2{,}2$$
$$2{,}13<\alpha<2{,}14$$

і г. д. Відавочна, што пункт A ў гэтым выпадку павінен знаходзіцца на прамой l правей пунктаў, якія адпавядаюць лікам

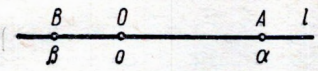
$$2;\ 2{,}1;\ 2{,}13;\ \ldots,$$

але лявей пунктаў, якія адпавядаюць лікам

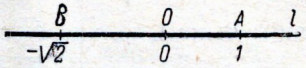
$$3;\ 2{,}2;\ 2{,}14;\ \ldots.$$

Можна паказаць, што гэтыя ўмовы вызначаюць на прамой l адзіны пункт A, які мы і разглядаем як геаметрычны вобраз сапраўднага ліку $\alpha=2{,}1356\ldots$.

Аналагічна, кожнаму адмоўнаму сапраўднаму ліку β паставім у адпаведнасць пункт B, які ляжыць злева ад O на адлегласці ў $|\beta|$ адзінак даўжыні. Нарэшце, ліку «нуль» паставім у адпаведнасць пункт O.



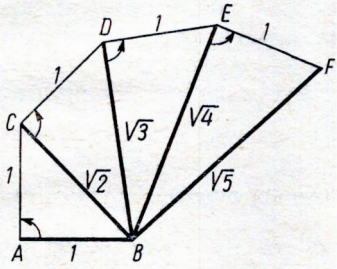
Рыс. 58.



Рыс. 59.

Так, ліку 1 на прамой l будзе адпавядаць пункт A, які знаходзіцца справа ад O на адлегласці ў адну адзінку даўжыні (рыс. 59), ліку $-\sqrt{2}$ — пункт B, які ляжыць злева ад O на адлегласці ў $\sqrt{2}$ адзінак даўжыні, і г. д.

Пакажам, як на прамой l пры дапамозе цыркуля і лінейкі можна адшукаць пункты, якія адпавядаюць сапраўдным лікам $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$ і г. д. Для гэтага перш за ўсё пакажам, як можна пабудаваць адрэзкі, даўжыні якіх выражаюцца гэтымі лікамі. Няхай AB ёсць адрэзак, прыняты за адзінку даўжыні (рыс. 60). У пункце A узвядзём да гэтага адрэзка перпендыкуляр і адкладзём на ім адрэзак AC, роўны адрэзку AB. Тады, прымяняючы тэарэму Піфагора да прамавугольнага трохвугольніка ABC, атрымаем



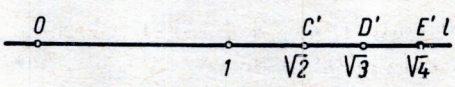
Рыс. 60.

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

Значыць, адрэзак BC мае даўжыню $\sqrt{2}$. Цяпер узвядзём перпендыкуляр да адрэзка BC у пункце C і выберам на ім пункт D так, каб адрэзак CD быў роўны адзінцы даўжыні AB. Тады з прамавугольнага трохвугольніка BCD знойдзем

$$BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}.$$

Значыць, адрэзак BD мае даўжыню $\sqrt{3}$. Працягваючы апісаны працэс далей, мы маглі б атрымаць адрэзкі BE, BF, ..., даўжыні якіх выражаюцца лікамі $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$ і г. д.



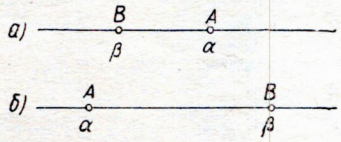
Рыс. 61.

Цяпер на прамой l лёгка знайсці тыя пункты, якія служаць геаметрычным ізабражэннем лікаў $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$ і г. д. Адкладваючы, напрыклад, справа ад пункта O адрэзак BC (рыс. 61), мы атрымаем пункт C', які служыць геаметрычным ізабражэннем ліку $\sqrt{2}$. Зусім гэтак жа, адкладваючы справа ад пункта O адрэзак BD, мы атрымаем пункт D', які з'яўляецца геаметрычным вобразам ліку $\sqrt{3}$, і г. д.

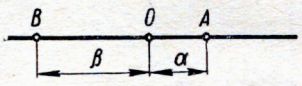
Не трэба, аднак, думаць, што пры дапамозе цыркуля і лінейкі на лікавай прамой l можна знайсці пункт, які адпавядае любому зададзенаму сапраўднаму ліку. Даказана, напрыклад, што, маючы ў сваім распараджэнні толькі цыркуль і лінейку, нельга пабудаваць адрэзак, даўжыня якога выражаецца лікам $\pi=3{,}14\ldots$. Таму на лікавай прамой l пры дапамозе такіх пабудаванняў нельга знайсці пункт, які адпавядае гэтаму ліку. Тым не менш такі пункт існуе.

Такім чынам, кожнаму сапраўднаму ліку α можна паставіць у адпаведнасць некаторы зусім пэўны пункт прамой l. Гэты пункт будзе знаходзіцца ад пачатковага пункта O на адлегласці ў $|\alpha|$ адзінак даўжыні і будзе ляжаць справа ад O, калі $\alpha>0$, і злева ад O, калі $\alpha<0$. Відавочна, што пры гэтым двум няроўным сапраўдным лікам будуць адпавядаць два розныя пункты прамой l. На самай справе, няхай ліку α адпавядае пункт A, а ліку β — пункт B. Тады, калі $\alpha>\beta$, то A будзе знаходзіцца правей B (рыс. 62, *а*); калі ж $\alpha<\beta$, то A будзе знаходзіцца лявей B (рыс. 62, *б*).

Гаворачы ў § 34 аб геаметрычным ізабражэнні рацыянальных лікаў, мы паставілі пытанне: ці любы пункт прамой можна разглядаць як геаметрычны вобраз некаторага рацыянальнага ліку? Тады мы не маглі даць адказу на гэта пытанне; цяпер жа мы можам адказаць на яго зусім пэўна. На прамой



Рыс. 62.



Рыс. 63.

ёсць пункты, якія служаць геаметрычным ізабражэннем ірацыянальных лікаў (напрыклад, $\sqrt{2}$). Таму не ўсякі пункт прамой абазначае рацыянальны лік. Але ў такім выпадку напрошваецца другое пытанне: ці любы пункт лікавай прамой можна разглядаць як геаметрычны вобраз некаторага сапраўднага ліку? Гэта пытанне рашаецца ўжо станоўча.

На самай справе, няхай A — адвольны пункт прамой l, які ляжыць справа ад O (рыс. 63). Даўжыня адрэзка OA выражаецца некаторым дадатным сапраўдным лікам α (гл. § 41). Таму пункт A з'яўляецца геаметрычным вобразам ліку α. Аналагічна ўстанаўліваецца, што кожны пункт B, які ляжыць злева ад O, можа разглядацца як геаметрычны вобраз адмоўнага сапраўднага ліку $-\beta$, дзе β — даўжыня адрэзка BO. Нарэшце, пункт O служыць геаметрычным ізабражэннем ліку 0. Зразумела, што два розныя пункты прамой l не могуць быць геаметрычным вобразам аднаго і таго ж сапраўднага ліку.

У выніку адзначаных вышэй прычын прамая, на якой дадзе-

ны ў якасці «пачатковага» некаторы пункт O (пры зададзенай адзінцы даўжыні), называецца *лікавай прамой.*

Вывад. ***Мноства ўсіх сапраўдных лікаў і мноства ўсіх пунктаў лікавай прамой знаходзяцца ва ўзаемна адназначнай адпаведнасці.***

Гэта азначае, што кожнаму сапраўднаму ліку адпавядае адзін, зусім пэўны пункт лікавай прамой і, наадварот, кожнаму пункту лікавай прамой пры такой адпаведнасці адказвае адзін, зусім пэўны сапраўдны лік.

Практыкаванні

320. Высветліць, які з двух пунктаў знаходзіцца на лікавай прамой лявей і які правей, калі гэтыя пункты адпавядаюць лікам:

а) 1,454545 ... і 1,455454 ...;
б) −12,0003 ... і −12,0002 ...;
в) 0 і −1,56673 ...;
г) 13,24 ... і 13,00 ... .

321. Высветліць, які з двух пунктаў знаходзіцца на лікавай прамой далей ад пачатковага пункта O, калі гэтыя пункты адпавядаюць лікам:

а) 5,2397 ... і 4,4996 ...;
б) −15,0001 і −15,1000 ...;
в) −0,3567 ... і −0,3557 ... .

322. У гэтым параграфе было паказана, што для пабудавання адрэзка даўжынёй у $\sqrt{n}$ пры дапамозе цыркуля і лінейкі можна зрабіць наступнае: спачатку пабудаваць адрэзак даўжынёй у $\sqrt{2}$, затым адрэзак даўжынёй у $\sqrt{3}$ і г. д., пакуль не дойдзем да адрэзка даўжынёй у $\sqrt{n}$. Але пры кожным фіксаваным $n \geqslant 3$ гэты працэс можна паскорыць. Як бы, напрыклад, вы пачалі будаваць адрэзак даўжынёй у $\sqrt{10}$?

323*. Як пры дапамозе цыркуля і лінейкі знайсці на лікавай прамой пункт, які адпавядае ліку $\frac{1}{\alpha}$, калі становішча пункта, які адпавядае ліку α, вядома?

§ 45. Дзесятковыя набліжэнні сапраўдных лікаў

Няхай α ёсць некаторы дадатны сапраўдны лік, дадзены ў выглядзе бесканечнага дробу. Спачатку мы дапусцім, што гэты дроб не з'яўляецца перыядычным з перыядам 0. (Напрыклад, у якасці α не можа выступаць лік $0{,}5 = 0{,}5000 \ldots$.) Тады дзесятковыя набліжэнні ліку α *з недахопам* вызначаюцца як лікі, якія

атрымліваюцца ў выніку паслядоўнага адкідвання ўсіх яго лічбаў, якія стаяць пасля коскі, пачынаючы з першай лічбы, потым з другой, затым з трэцяй і г. д. Напрыклад, для ліку $\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$ такімі набліжэннямі будуць:

$$1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ 1{,}41421;\ \ldots .$$

Калі апошнюю лічбу кожнага з дзесятковых набліжэнняў ліку α павялічыць на 1, то мы атрымаем паслядоўныя дзесятковыя набліжэнні ліку α *з лішкам*. Напрыклад, для ліку $\sqrt{2}$ такімі набліжэннямі будуць:

$$2;\ 1{,}5;\ 1{,}42;\ 1{,}415;\ 1{,}4143;\ 1{,}41422;\ \ldots .$$

Відавочна, што лік α большы за любое сваё дзесятковае набліжэнне з недахопам, але меншы за любое сваё дзесятковае набліжэнне з лішкам. Напрыклад, для ліку $\sqrt{2}$

$$1 < \sqrt{2} < 2$$
$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$$
$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$$
$$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$$
$$1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143$$
$$1{,}41421 < \sqrt{2} < 1{,}41422$$

і г. д.

Цяпер дапусцім, што α ёсць перыядычны дзесятковы дроб з перыядам 0. Прыкладам такога ліку можа служыць лік $1{,}47 = 1{,}4700\ldots$. Дзесятковыя набліжэнні гэтага ліку з недахопам натуральна вызначыць як лікі

$$1;\ 1{,}4;\ 1{,}47;\ 1{,}470;\ 1{,}4700;\ \ldots ,$$

а дзесятковыя набліжэнні з лішкам — як лікі

$$2;\ 1{,}5;\ 1{,}47;\ 1{,}470;\ 1{,}4700;\ \ldots .$$

Наогул, няхай нулявы перыяд ліку α пачынаецца з k-га дзесятковага знака пасля коскі (напрыклад, для ліку $1{,}47 = 1{,}470000\ldots$ $k=3$). Тады яго першыя $k-1$ дзесятковых набліжэнняў з недахопам і першыя $k-1$ дзесятковых набліжэнняў з лішкам вызначаюцца гэтак жа, як і ў выпадку, калі разглядаемы дроб з'яўляецца перыядычным з перыядам 0. Усе ж астатнія дзесятковыя набліжэнні лічацца роўнымі ліку α. Так, для ліку $0{,}373 = 0{,}37300\ldots$ дзесятковымі набліжэннямі будуць:

з недахопам: $0;\ 0{,}3;\ 0{,}37;\ 0{,}373;\ 0{,}3730;\ 0{,}37300;\ \ldots ,$
з лішкам: $1;\ 0{,}4;\ 0{,}38;\ 0{,}373;\ 0{,}3730;\ 0{,}37300;\ \ldots .$

Відавочна, што ў такім выпадку лік α не меншы за любое сваё дзесятковае набліжэнне з лішкам.

Мы паказалі, як састаўляюцца дзесятковыя набліжэнні (з недахопам і з лішкам) для любых дадатных сапраўдных лікаў. Аналагічна можна вызначыць дзесятковыя набліжэнні і для адвольных адмоўных лікаў. Мы не будзем прыводзіць тут агульных азначэнняў; пакажам толькі, як трэба знаходзіць дзесятковыя набліжэнні адмоўных лікаў на прыкладзе ліку

$$-\sqrt{2} = -1{,}41421\ldots .$$

Як мы ведаем (гл. § 43), з двух адмоўных лікаў большы той, абсалютная велічыня якога меншая. Таму з атрыманых вышэй суадносін

$$\begin{gathered}
1 < \sqrt{2} < 2 \\
1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5 \\
1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42 \\
1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415 \\
1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143 \\
1{,}41421 < \sqrt{2} < 1{,}41422 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{gathered}$$

вынікае, што

$$\begin{gathered}
-2 < -\sqrt{2} < -1 \\
-1{,}5 < -\sqrt{2} < -1{,}4 \\
-1{,}42 < -\sqrt{2} < -1{,}41 \\
-1{,}415 < -\sqrt{2} < -1{,}414 \\
-1{,}4143 < -\sqrt{2} < -1{,}4142 \\
-1{,}41422 < -\sqrt{2} < -1{,}41421 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{gathered}$$

Лікі, якія стаяць у левых частках гэтых няроўнасцей, натуральна назваць дзесятковымі набліжэннямі ліку $-\sqrt{2}$ з недахопам, а лікі, якія стаяць у правых частках,— дзесятковымі набліжэннямі ліку $-\sqrt{2}$ з лішкам. Відавочна, што лік $-\sqrt{2}$ большы за любое сваё дзесятковае набліжэнне з недахопам, але меншы за любое сваё дзесятковае набліжэнне з лішкам.

Дададзім, нарэшце, што для сапраўднага ліку 0 таксама можна пабудаваць дзесятковыя набліжэнні з недахопам і дзесятковыя набліжэнні з лішкам. Кожнае з такіх набліжэнняў лічыцца роўным нулю.

Такім чынам, з кожным сапраўдным лікам α можна звязаць дзве бесканечныя паслядоўнасці лікаў:

$$\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3', \alpha_4', \ldots;$$

$$\alpha_1'', \alpha_2'', \alpha_3'', \alpha_4'', \ldots .$$

Першая паслядоўнасць складаецца з дзесятковых набліжэнняў ліку α з недахопам, а другая — з дзесятковых набліжэнняў ліку α з лішкам. Пры гэтым

$$\alpha_1' \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1'',$$
$$\alpha_2' \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2'',$$
$$\alpha_3' \leqslant \alpha \leqslant \alpha_3'',$$
$$\alpha_4' \leqslant \alpha \leqslant \alpha_4'' \text{ і г. д.}$$

Важна адзначыць, што кожнае з дзесятковых набліжэнняў ліку α з'яўляецца рацыянальным лікам, хаця сам лік α можа быць ірацыянальным.

Практыкаванні

324. Знайсці некалькі першых дзесятковых набліжэнняў (з недахопам і з лішкам) для наступных дзесятковых лікаў:

а) $\sqrt{3}$; б) $-\sqrt{3}$; в) $\frac{11}{7}$, г) $-\frac{11}{7}$; д) 4; е) -4;

ж) $\frac{5}{8}$; з) $-\frac{5}{8}$.

325. Усе дзесятковыя набліжэнні сапраўднага ліку α з недахопам, пачынаючы з некаторага, супадаюць. Які лік α: рацыянальны або ірацыянальны?

326. Усе дзесятковыя набліжэнні сапраўднага ліку α з недахопам розныя. Ці можна сцвярджаць, што лік α ірацыянальны? Адказ растлумачыць на прыкладах.

§ 46. Складанне сапраўдных лікаў

Пакуль што мы ўмеем складваць адзін з другім толькі рацыянальныя лікі. Як мы ведаем,

$$\frac{m}{n} + \frac{k}{l} = \frac{ml+nk}{nl}.$$

А вось які сэнс укладваецца ў суму двух лікаў, з якіх хаця б адзін ірацыянальны, мы яшчэ не ведаем. Нам трэба будзе зараз даць азначэнне таго, што разумеецца пад сумай $\alpha+\beta$ двух адвольных сапраўдных лікаў α і β.

Для прыкладу разгледзім лікі $\frac{1}{3}$ і $\sqrt{2}$. Запішам іх у выглядзе бесканечных дзесятковых дробаў

$$\frac{1}{3} = 0{,}33333\ldots,$$
$$\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots.$$

Спачатку складзём адпаведныя дзесятковыя набліжэнні дадзеных лікаў з недахопам. Гэтыя набліжэнні, як адзначалася ў канцы папярэдняга параграфа, з'яўляюцца р а ц ы я н а л ь н ы м і лікамі. А складваць такія лікі мы ўжо ўмеем:

$$\begin{aligned} 0 + 1 &= 1 \\ 0{,}3 + 1{,}4 &= 1{,}7 \\ 0{,}33 + 1{,}41 &= 1{,}74 \\ 0{,}333 + 1{,}414 &= 1{,}747 \\ 0{,}3333 + 1{,}4142 &= 1{,}7475 \\ 0{,}33333 + 1{,}41421 &= 1{,}74754 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \end{aligned}$$

Затым складзём адпаведныя дзесятковыя набліжэнні дадзеных лікаў з лішкам:

$$\begin{aligned} 1 + 2 &= 3 \\ 0{,}4 + 1{,}5 &= 1{,}9 \\ 0{,}34 + 1{,}42 &= 1{,}76 \\ 0{,}334 + 1{,}415 &= 1{,}749 \\ 0{,}3334 + 1{,}4143 &= 1{,}7477 \\ 0{,}33334 + 1{,}41422 &= 1{,}74756 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \end{aligned}$$

Можна даказаць*, што існуе і прытым адзіны сапраўдны лік γ**, які большы за ўсе сумы дзесятковых набліжэнняў лікаў $\frac{1}{3}$ і $\sqrt{2}$ з недахопам, але меншы за ўсе сумы дзесятковых набліжэнняў гэтых лікаў з лішкам:

$$\begin{aligned} 1 < \gamma < 3 \\ 1{,}7 < \gamma < 1{,}9 \\ 1{,}74 < \gamma < 1{,}76 \\ 1{,}747 < \gamma < 1{,}749 \\ 1{,}7475 < \gamma < 1{,}7477 \\ 1{,}74754 < \gamma < 1{,}74756 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{aligned}$$

Згодна з азначэннем гэты лік γ і прымаецца за суму лікаў $\frac{1}{3}$ і $\sqrt{2}$:

$$\gamma = \frac{1}{3} + \sqrt{2}.$$

Відавочна, што $\gamma = 1{,}7475\ \ldots$.

---

* Строгі доказ гэтага факта выходзіць за межы нашай праграмы і таму тут не даецца.

** γ — грэчаская літара, чытаецца: гама.

Аналагічна можа быць вызначана і сума любых іншых дадатных сапраўдных лікаў, з якіх хаця б адзін ірацыянальны. Сутнасць справы не зменіцца і ў тым выпадку, калі адно з складаемых, а можа быць і абодва, будуць адмоўнымі.

Калі лікі α *і* β *рацыянальныя, то сума іх знаходзіцца па правілу складання рацыянальных лікаў* (гл. § 36).

Калі ж хаця б адзін з іх ірацыянальны, то сумай $\alpha+\beta$ *называецца такі сапраўдны лік, які большы за ўсе сумы адпаведных дзесятковых набліжэнняў гэтых лікаў з недахопам, але меншы за ўсе сумы адпаведных дзесятковых набліжэнняў гэтых лікаў з лішкам.*

Вызначанае такім чынам дзеянне складання падпарадкоўваецца наступным двум законам:

1) камутатыўнаму закону:

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha;$$

2) асацыятыўнаму закону:

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma).$$

Даказваць гэта мы не будзем. Вучні могуць зрабіць гэта самастойна. Адзначым толькі, што пры доказе прыйдзецца скарыстаць ужо вядомы нам факт: складанне рацыянальных лікаў падпарадкавана камутатыўнаму і асацыятыўнаму законам (гл. § 36).

Практыкаванні

327. Дадзеныя сумы запісаць у выглядзе дзесятковых дробаў, указаўшы не менш трох дакладных знакаў пасля коскі:

а) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$;

б) $\sqrt{2}+\frac{5}{8}$;

в) $(-\sqrt{2})+\sqrt{3}$;

г) $\sqrt{2}+(-\sqrt{3})$;

д) $\left(-\frac{1}{3}\right)+\sqrt{5}$;

е) $\frac{11}{9}+(-\sqrt{5})$;

ж) $\frac{3}{4}+(-\sqrt{5})$;

з) $\frac{1}{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

328. Знайсці некалькі першых дзесятковых набліжэнняў (з недахопам і з лішкам) для сапраўдных лікаў:

а) $\frac{1}{2}+\sqrt{7}$; б) $\sqrt{3}+\sqrt{7}$; в) $\sqrt{3}+(-\sqrt{7})$.

329. Зыходзячы з азначэння сумы сапраўдных лікаў, даказаць, што для любога ліку α

$$\alpha + (-\alpha) = 0.$$

330. Ці заўсёды сума двух бесканечных неперыядычных дробаў ёсць дроб неперыядычны? Адказ растлумачыць на прыкладах.

§ 47. Множанне сапраўдных лікаў

У гэтым параграфе мы пакажам, як можна прыйсці да натуральнага азначэння здабытку двух сапраўдных лікаў α і β, з якіх хаця б адзін з'яўляецца ірацыянальным. Пры гэтым мы будзем зыходзіць з таго, што множанне рацыянальных лікаў намі ўжо вывучана (гл. § 36).

Спачатку дапусцім, што лікі α і β — дадатныя. Няхай, напрыклад, $\alpha = \frac{1}{3}$, а $\beta = \sqrt{2}$. Запішам гэтыя лікі ў выглядзе бесканечных дзесятковых дробаў:

$$\frac{1}{3} = 0{,}33333\ldots;$$

$$\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots.$$

Перамножым адпаведна дзесятковыя набліжэнні дадзеных лікаў з недахопам. Гэтыя набліжэнні з'яўляюцца рацыянальнымі лікамі. А перамнажаць такія лікі мы ўжо ўмеем:

$$\begin{aligned}
0 \cdot 1 &= 0\\
0{,}3 \cdot 1{,}4 &= 0{,}42\\
0{,}33 \cdot 1{,}41 &= 0{,}4653\\
0{,}333 \cdot 1{,}414 &= 0{,}470862\\
0{,}3333 \cdot 1{,}4142 &= 0{,}47135286\\
0{,}33333 \cdot 1{,}41421 &= 0{,}4713986193\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Затым перамножым адпаведныя дзесятковыя набліжэнні дадзеных лікаў з лішкам:

$$\begin{aligned}
1 \cdot 2 &= 2\\
0{,}4 \cdot 1{,}5 &= 0{,}6\\
0{,}34 \cdot 1{,}42 &= 0{,}4828\\
0{,}334 \cdot 1{,}415 &= 0{,}47261\\
0{,}3334 \cdot 1{,}4143 &= 0{,}47152762\\
0{,}33334 \cdot 1{,}41422 &= 0{,}4714160948\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Можна даказаць, што існуе і прытым адзіны лік γ, які большы за ўсе здабыткі дзесятковых набліжэнняў лікаў $\frac{1}{3}$ і $\sqrt{2}$ з недахопам, але меншы за ўсе здабыткі дзесятковых набліжэнняў гэтых лікаў з лішкам:

$$0 < \gamma < 2$$
$$0{,}42 < \gamma < 0{,}6$$
$$0{,}4653 < \gamma < 0{,}4828$$
$$0{,}470862 < \gamma < 0{,}47261$$
$$0{,}47135286 < \gamma < 0{,}47152762$$
$$0{,}4713986193 < \gamma < 0{,}4714160948$$
. . . . . .

Згодна з азначэннем гэты лік γ і прымаецца за здабытак лікаў $\frac{1}{3}$ і $\sqrt{2}$:

$$\gamma = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2}.$$

Відавочна, што $\gamma = 0{,}471 \ldots$. Аналагічна можа быць вызначаны і здабытак любых іншых дадатных сапраўдных лікаў, з якіх хаця б адзін ірацыянальны.

Цяпер трэба разгледзець выпадак, калі хаця б адзін з сумножнікаў α і β адмоўны. Калі адмоўнымі з'яўляюцца абодва сумножнікі α і β, то

$$\alpha \cdot \beta = |\alpha| \cdot |\beta|.$$

Калі ж адзін з гэтых сумножнікаў з'яўляецца дадатным, а другі адмоўным, то

$$\alpha \cdot \beta = -|\alpha| \cdot |\beta|.$$

Напрыклад,

$$\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (-\sqrt{2}) = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2} = 0{,}471 \ldots;$$
$$\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \sqrt{2} = -\left(\frac{1}{3} \cdot \sqrt{2}\right) = -0{,}471 \ldots.$$

Нарэшце, калі хаця б адзін з сумножнікаў роўны нулю, то здабытак лічыцца роўным нулю, напрыклад,

$$\sqrt{2} \cdot 0 = 0,$$
$$0 \cdot (-\sqrt{2}) = 0$$

і г. д.

Цяпер мы можам даць агульнае азначэнне здабытку двух сапраўдных лікаў.

Калі лікі α і β рацыянальныя, то здабытак іх знаходзіцца па правілу множання рацыянальных лікаў (гл. § 36).

Калі хаця б адзін з лікаў α і β ірацыянальны і абодва яны дадатныя, то здабыткам іх называецца такі сапраўдны лік, які большы за ўсе здабыткі адпаведных дзесятковых набліжэнняў гэтых лікаў з недахопам, але меншы за ўсе здабыткі адпаведных дзесятковых набліжэнняў гэтых лікаў з лішкам.

Калі абодва лікі α *і* β *адмоўныя, то*

$$\alpha \cdot \beta = |\alpha| \cdot |\beta|.$$

Калі адзін з лікаў α *і* β *з'яўляецца дадатным, а другі адмоўным, то*

$$\alpha \cdot \beta = -(|\alpha| \cdot |\beta|).$$

Нарэшце, калі хаця б адзін з лікаў α *і* β *роўны нулю, то*

$$\alpha \cdot \beta = 0.$$

Няцяжка паказаць, што вызначанае такім чынам дзеянне множання падпарадкоўваецца наступным законам:

1) камутатыўнаму закону:

$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha;$$

2) асацыятыўнаму закону:

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma).$$

Акрамя таго, для любых сапраўдных лікаў α, β і γ выконваецца суадносіна

$$(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma,$$

якая выражае дыстрыбутыўны закон множання адносна складання.

Практыкаванні

331. Дадзеныя здабыткі запісаць у выглядзе дзесятковых дробаў, указаўшы не менш двух правільных знакаў пасля коскі:

а) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$;

б) $\sqrt{2} \cdot \frac{5}{8}$;

в) $(-\sqrt{2}) \cdot \sqrt{3}$;

г) $\sqrt{2} \cdot (-\sqrt{5})$;

д) $\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \sqrt{2}$;

е) $\frac{11}{9} \cdot (-\sqrt{5})$;

ж) $\frac{3}{4} \cdot (-\sqrt{6})$;

з) $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$.

332. Знайсці некалькі першых дзесятковых набліжэнняў (з недахопам і з лішкам) для сапраўдных лікаў:

а) $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{7}$; б) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}$; в) $\sqrt{3} \cdot (-\sqrt{7})$.

333. Зыходзячы з азначэння здабытку сапраўдных лікаў, даказаць, што для любога ліку a

$$a \cdot 1 = a.$$

334. Ці заўсёды здабытак двух бесканечных дзесятковых неперыядычных дробаў з'яўляецца неперыядычным дробам?

§ 48. Адыманне і дзяленне сапраўдных лікаў

Асноўнымі алгебраічнымі дзеяннямі ў мностве ўсіх сапраўдных лікаў, гэтак жа як і ў мностве ўсіх рацыянальных лікаў, з'яўляюцца складанне і множанне. Што ж датычыцца адымання і дзялення, то гэтыя дзеянні вызначаюцца як адваротныя ў адносінах да дзеянняў складання і множання.

1. Адыманне сапраўдных лікаў

Рознасцю $\alpha-\beta$ *двух сапраўдных лікаў* α *і* β *называецца такі лік* γ, *які ў суме з* β *дае* α.

Іншымі словамі, рознасць $\alpha-\beta$ вызначаецца як корань ураўнення

$$\beta+x=\alpha. \qquad (1)$$

Як і ў выпадку рацыянальных лікаў (гл. § 36), ураўненне (1) заўсёды мае і прытым адзінае рашэнне. Такім чынам, ***для любых сапраўдных лікаў*** α ***і*** β ***рознасць*** $\alpha-\beta$ ***існуе і вызначана адназначна.***

Пакажам, напрыклад, як могуць быць знойдзены набліжаныя значэнні рознасці

$$\sqrt{2}-\frac{1}{3}.$$

Замяніўшы ў гэтым выразе лік $\sqrt{2}$ яго любым дзесятковым набліжэннем з недахопам (1; 1,4; 1,41; 1,414; ...), а лік $\frac{1}{3}$ — яго любым дзесятковым набліжэннем з лішкам (1; 0,4; 0,34; 0,334; ...), мы атрымаем, відавочна, набліжанае значэнне рознасці $\sqrt{2}-\frac{1}{3}$ з недахопам. Наадварот, калі ў выразе $\sqrt{2}-\frac{1}{3}$ лік $\sqrt{2}$ замяніць яго любым дзесятковым набліжэннем з лішкам (2; 1,5; 1,42; 1,415; ...), а лік $\frac{1}{3}$ — яго любым дзесятковым набліжэннем з недахопам (0; 0,3; 0,33; 0,333; ...), то атрыманая рознасць будзе, відавочна, уяўляць сабой набліжанае значэнне $\sqrt{2}-\frac{1}{3}$ з лішкам. У прыватнасці,

$$1-1<\sqrt{2}-\frac{1}{3}<2-0,$$

або

$$0 < \sqrt{2} - \frac{1}{3} < 2.$$

Гэта вельмі грубая няроўнасць. Для атрымання больш дакладных даных аб рознасці $\sqrt{2} - \frac{1}{3}$ возьмем іншыя набліжэнні $\sqrt{2}$ і $\frac{1}{3}$:

$$1{,}4 - 0{,}4 < \sqrt{2} - \frac{1}{3} < 1{,}5 - 0{,}3,$$

або

$$1{,}0 < \sqrt{2} - \frac{1}{3} < 1{,}2.$$

Гэта няроўнасць дае ўжо значна больш інфармацыі аб рознасці $\sqrt{2} - \frac{1}{3}$. З яе, у прыватнасці, вынікае, што з дакладнасцю да 0,1

$$\sqrt{2} - \frac{1}{3} \approx 1{,}1.$$

Калі такая дакладнасць нас не задавальняе, мы можам прадоўжыць нашы разважанні:

$$1{,}41 - 0{,}34 < \sqrt{2} - \frac{1}{3} < 1{,}42 - 0{,}33,$$

або

$$1{,}07 < \sqrt{2} - \frac{1}{3} < 1{,}09.$$

Адсюль, у прыватнасці, атрымаем, што з дакладнасцю да 0,01

$$\sqrt{2} - \frac{1}{3} \approx 1{,}08.$$

Апісаны спосаб знаходжання значэнняў рознасці $\sqrt{2} - \frac{1}{3}$ можна было б прадаўжаць і далей. Пры гэтым будуць атрымлівацца ўсё больш і больш дакладныя значэнні гэтай рознасці. (Заўважым, аднак, што ні на якім кроку мы не можам атрымаць дакладнага значэння гэтай рознасці. Чаму?)

2. Дзяленне сапраўдных лікаў

Дзеллю $\alpha : \beta$ *ад дзялення сапраўднага ліку* α *на сапраўдны лік* β *называецца такі лік* γ, *які пры множанні на* β *дае* α.

Іншымі словамі, дзель $\alpha:\beta$ вызначаецца як корань ураўнення

$$\beta \cdot x = \alpha. \qquad (2)$$

Можна даказаць, што калі $\beta \neq 0$, то ўраўненне (2) мае і прытым адзіны корань. Калі ж $\beta = 0$, то гэта ўраўненне ці наогул не мае кораняў (пры $\alpha \neq 0$), ці мае бясконца многа кораняў (пры $\alpha = 0$); у апошнім выпадку любы лік з'яўляецца коранем ураўнення (2). Таму, ***калі $\beta \neq 0$, то дзель $\alpha:\beta$ існуе і вызначана адназначна; пры $\beta = 0$ дзель $\alpha:\beta$ не вызначана.***

Пакажам, напрыклад, як могуць быць знойдзены набліжаныя значэнні дзелі $\alpha:\beta$, калі $\alpha = 1{,}532\ldots$, а $\beta = 2{,}037\ldots$. Калі ў выразе $\alpha:\beta$ лік α замяніць яго любым дзесятковым набліжэннем з недахопам (1; 1,5; 1,53; 1,532; ...), а лік β — яго любым набліжаным значэннем з лішкам (3; 2,1; 2,04; 2,038; ...), то атрыманая дзель будзе, відавочна, уяўляць сабой набліжанае значэнне $\alpha:\beta$ з недахопам. Наадварот, калі ў выразе $\alpha:\beta$ лік α замяніць любым яго дзесятковым набліжэннем з лішкам (2; 1,6; 1,54; 1,533; ...), а лік β — любым яго дзесятковым набліжэннем з недахопам (2; 2,0; 2,03; 2,037; ...), то атрыманая дзель будзе служыць, відавочна, набліжаным значэннем $\alpha:\beta$ з лішкам.

У прыватнасці,

$$1{,}532:2{,}038 < \alpha:\beta < 1{,}533:2{,}037,$$

або

$$0{,}7517 < \alpha:\beta < 0{,}7526.$$

Гэта дае па меншай меры два верныя дзесятковыя знакі (пасля коскі) дзелі:

$$\alpha:\beta = 0{,}75\ldots$$

Практыкаванні

335. Вылічыць з дакладнасцю да 0,01:

а) $\sqrt{7} - \sqrt{3}$; б) $\sqrt{5} - \frac{5}{6}$;

в) $\sqrt{6} - \frac{3}{8}$; г) $0{,}25 - \sqrt{6}$.

336. Знайсці набліжаныя значэнні рознасці

$$1{,}7534\ldots - 0{,}6325\ldots$$

з дакладнасцю да 0,001.

337. Выканаць з дакладнасцю да 0,01:

а) $\frac{\sqrt{2}}{1{,}3657\ldots}$; б) $\frac{1}{3} : \sqrt{5}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{-\sqrt{2}}$.

338. Знайсці набліжаныя значэнні дзелі

$$\frac{0{,}023\ldots}{0{,}041\ldots}$$

з дакладнасцю да:

а) 0,1; б) 0,01.

339. Даказаць, што для любога сапраўднага ліку a, адроснага ад нуля,

$$a:a=1.$$

340. Роснасць паміж сапраўдным лікам α і адным з яго дзесятковых набліжэнняў ёсць лік рацыянальны. Якім з'яўляецца сам лік α: рацыянальным або ірацыянальным?

341. Ці можа дзель ад дзялення ірацыянальнага ліку на якое-небудзь яго дзесятковае набліжэнне быць лікам рацыянальным?

Задачы на паўтарэнне

342. Ці вырашальнае ўраўненне

$$a+x=b$$

(a і b — зададзеныя натуральныя лікі):

а) у мностве ўсіх натуральных лікаў;

б) у мностве ўсіх дадатных рацыянальных лікаў;

в) у мностве ўсіх цэлых лікаў?

343. Ці вырашальнае ўраўненне

$$ax=b$$

(a і b — зададзеныя цэлыя лікі):

а) у мностве ўсіх цэлых лікаў;

б) у мностве ўсіх рацыянальных лікаў?

344. Ці можа ўраўненне

$$\sqrt{m}+x=\sqrt{n}$$

(m і n — зададзеныя натуральныя лікі):

а) мець рацыянальны корань;

б) мець ірацыянальны корань;

в) не мець сапраўдных кораняў?

345. Лікі $\alpha+\beta$ і $\alpha-\beta$ рацыянальныя. Ці будуць рацыянальнымі лікі α і β?

346. Калі за адзінку даўжыні прыняць адрэзак Δ_1, то даўжыня адрэзка AB выразіцца рацыянальным лікам; калі ж у якасці адзінкі даўжыні выбраць адрэзак Δ_2, то даўжыня адрэзка AB выразіцца ірацыянальным лікам. Дакажыце, што адрэзкі Δ_1 і Δ_2 несувымерныя.

347. Ці можа здабытак двух перыядычных дзесятковых дробаў быць дробам неперыядычным?

348. Метадам ад адваротнага даказаць, што сума рацыянальнага ліку з ірацыянальным лікам ёсць лік ірацыянальны.

Даказанае сцверджанне сфармуляваць на мове бесканечных дзесятковых дробаў (перыядычных і неперыядычных).

349. Ці можа сума двух ірацыянальных лікаў быць лікам ірацыянальным? Адказ растлумачыць на прыкладах.

350. Ці можа здабытак двух ірацыянальных лікаў быць лікам рацыянальным? Адказ растлумачыць на прыкладах.

351. Ці можа здарыцца, што першыя 10 ступеней ліку a:

$$a,\ a^2,\ a^3,\ \ldots,\ a^{10},$$

будуць ірацыянальнымі, а наступныя 10 ступеней:

$$a^{11},\ a^{12},\ a^{13},\ \ldots,\ a^{20},$$

рацыянальнымі?

352. Няхай a і b — некаторыя рацыянальныя лікі. Дакажыце, што калі $a + b\sqrt{2} \neq 0$, то і $a - b\sqrt{2} \neq 0$. Прывесці не менш двух розных спосабаў доказу.

353. Даказаць, што лікі $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ і $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ з'яўляюцца ірацыянальнымі.

Раздзел III

КВАДРАТНЫ ТРОХЧЛЕН

§ 49. Вылучэнне з квадратнага трохчлена поўнага квадрата

Квадратным трохчленам адносна пераменнай велічыні называецца выраз выгляду ax^2+bx+c, *дзе* a, b *і* c — *зададзеныя лікі, прычым* $a\neq 0$.

Пераўтворым квадратны трохчлен ax^2+bx+c наступным чынам. Перш за ўсё вынесем за дужкі каэфіцыент пры x^2:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right).$$

Затым выраз $\frac{b}{a}x$ запішам у выглядзе $2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x$ (падвоены здабытак ліку $\frac{b}{2a}$ на лік x).

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\frac{c}{a}\right).$$

Да выразу, які стаіць у дужках, дададзім і адымем ад яго лік $\frac{b^2}{4a^2}$, што з'яўляецца квадратам ліку $\frac{b}{2a}$. У рэзультаце атрымаем

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right].$$

Заўважаючы цяпер, што

$$x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\frac{b^2}{4a^2}=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2,$$

атрымліваем

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]=$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Такім чынам,

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}. \qquad (1)$$

Пераўтварэнне квадратнага трохчлена да выгляду (1) называецца *вылучэннем поўнага квадрата*. Пакажам гэта пераўтварэнне на некаторых прыватных прыкладах:

1) $-2x^2-4x+5=-2\left(x^2+2x-\frac{5}{2}\right)=-2[(x^2+$

$+2x\cdot 1+1)-1-\frac{5}{2}]=-2\left[(x+1)^2-\frac{7}{2}\right]=-2(x+1)^2+7.$

2) $\frac{x^2}{3}-5x+7=\frac{1}{3}(x^2-15x+21)=$

$$=\frac{1}{3}\left[\left(x^2-2\cdot\frac{15}{2}\cdot x+\frac{225}{4}\right)-\frac{225}{4}+21\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\left[\left(x-\frac{15}{2}\right)^2-\frac{141}{4}\right]=\frac{1}{3}\left(x-\frac{15}{2}\right)^2-\frac{141}{12}.$$

Практыкаванні

Вылучыць поўны квадрат у наступных выразах (№ 354—361):

354. $2x^2+4x-3$.

355. $\frac{1}{3}x^2-4x+16$.

356. $-5x^2+20x-13$.

357. $-0{,}5x-0{,}25x^2-2{,}25$.

358. $(x-2)(x-4)$.

359. $ax^2-4a^2x+4a^3+3$.

360. $6a^2x-9a^3-ax^2+a-1$.

361. $(x+a)(x+b)$.

362. Даказаць, што квадратны трохчлен x^2+x+1 пры ўсіх значэннях x прымае дадатныя значэнні.

363. Даказаць, што квадратны трохчлен $-3x^2+12x-13$ пры ўсіх значэннях x прымае адмоўныя значэнні.

§ 50. Квадратныя ўраўненні

Ураўненні выгляду

$$ax^2+bx+c=0, \qquad (1)$$

дзе x — невядомая велічыня, a, b, c — дадзеныя лікі ($a\neq 0$), называюцца квадратнымі.

Вылучаючы ў левай частцы квадратнага ўраўнення поўны квадрат (гл. формулу (1) § 49), атрымліваем

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0,$$

або

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}. \qquad (2)$$

Відавочна, што ўраўненне (2) эквівалентна ўраўненню (1) (гл. § 2). Ураўненне (2) можа мець сапраўдныя корані толькі тады, калі $\frac{b^2-4ac}{4a^2}\geqslant 0$, або $b^2-4ac\geqslant 0$ (паколькі $4a^2>0$).

З прычыны той асобай ролі, якую адыгрывае выраз $D=b^2-4ac$ пры рашэнні ўраўнення (1), гэтаму выразу дадзена спецыяльная назва — *дыскрымінант* квадратнага ўраўнення $ax^2+bx+c=0$ (або дыскрымінант квадратнага трохчлена ax^2+bx+c). Такім чынам, ***калі дыскрымінант квадратнага ўраўнення адмоўны, то ўраўненне не мае сапраўдных кораняў.***

Калі ж $D=b^2-4ac\geqslant 0$, то з (2) атрымліваем

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

або

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}.$$

Калі дыскрымінант квадратнага ўраўнення неадмоўны, то гэта ўраўненне мае два сапраўдныя корані. Яны запісваюцца ў выглядзе дробу, у лічніку якога стаіць каэфіцыент ураўнення пры x, узяты з адваротным знакам, плюс-мінус корань квадратны з дыскрымінанта, а ў лічніку — падвоены каэфіцыент пры x^2.

Калі дыскрымінант квадратнага ўраўнення дадатны, то ўраўненне мае два розныя сапраўдныя корані:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \quad \text{і} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}.$$

Калі дыскрымінант квадратнага ўраўнення роўны нулю, то ўраўненне мае два роўныя сапраўдныя корані:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

(У гэтым выпадку часам гавораць, што ўраўненне мае адзін корань $x = -\frac{b}{2a}$.)

Прыклады.

1) Для ўраўнення $2x^2-x-3=0$ дыскрымінант $D=(-1)^2-4\cdot 2\cdot(-3)=25>0$. Ураўненне мае два розныя корані:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{25}}{4} = \frac{3}{2},$$

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{25}}{4} = -1.$$

2) Для ўраўнення $3x^2-6x+3=0$ $D=(-6)^2-4\cdot 3\cdot 3=0$. Гэта ўраўненне мае два роўныя сапраўдныя корані:

$$x_1 = x_2 = \frac{6}{2\cdot 3} = 1.$$

3) Для ўраўнення $5x^2+4x+7=0$ $D=4^2-4\cdot 5\cdot 7=-124<0$. Гэта ўраўненне не мае сапраўдных кораняў.

4) Высветліць, пры якіх значэннях a квадратнае ўраўненне $x^2+ax+1=0$:

а) мае два роўныя корані;

б) мае два розныя корані;

в) зусім не мае кораняў.

Дыскрымінант дадзенага квадратнага ўраўнення роўны

$$D=a^2-4.$$

Пры $|a|=2$ $D=0$; у гэтым выпадку ўраўненне мае два роўныя корані. Пры $|a|>2$ $D>0$; у гэтым выпадку ўраўненне мае два розныя корані. Нарэшце, калі $|a|<2$, то дадзенае ўраўненне не мае кораняў.

Практыкаванні

Рашыць ураўненні (№ 364—369):

364. $6x^2-x-1=0$.

365. $3x^2-5x+1=0$.

366. $x^2-x+1=0$.

367. $-x^2+8x-16=0$.

368. $2x^2-12x+12=0$.

369. $2x-x^2-6=0$.

370. Ці можна лік 15 запісаць у выглядзе сумы двух складаемых так, каб іх здабытак быў роўны 70?

371. Пры якіх значэннях a ўраўненне

$$x^2-2ax+a(1+a)=0:$$

а) мае два розныя корані;
б) мае толькі адзін корань;
в) не мае кораняў?

372. Пры якіх значэннях a ўраўненне

$$(1-a)x^2-4ax+4(1-a)=0:$$

а) не мае кораняў;
б) мае не больш аднаго кораня;
в) мае не менш аднаго кораня?

373. Пры якім значэнні a ўраўненне $x^2+ax+1=0$ мае адзіны корань? Чаму ён роўны?

374. У якіх межах знаходзіцца лік a, калі вядома, што ўраўненні $x^2+x+a=0$ і $x^2+x-a=0$ маюць аднолькавы лік кораняў?

375. Што вы можаце сказаць аб велічыні a, калі ўраўненні $4a(x^2+x)=a-2{,}5$ і $x(x-1)=1{,}25-a$ маюць аднолькавы лік кораняў?

376. Поезд быў затрыманы на станцыі на t *мін.* Каб нагнаць страчаны час, машыніст павялічыў скорасць на a *км/гадз* і на наступным перагоне ў b *км* ліквідаваў спазненне. З якой скорасцю поезд ішоў да затрымкі на станцыі?

377. Два пад'ёмныя краны, працуючы разам, разгрузілі баржу за t *гадз.* За які час можа разгрузіць баржу кожны кран паасобку, калі адзін з іх траціць на гэта на a *гадз* менш, чым другі?

378. Адзін з заводаў выконвае некаторы заказ на 4 дні хутчэй, чым другі. За які час можа выканаць заказ кожны завод, працуючы асобна, калі вядома, што пры сумеснай рабоце за 24 дні яны выканалі заказ у 5 разоў большы?

Рашыць ураўненні (№ 379, 380).

(Звярніце ўвагу на тое, што ў гэтых ураўненнях невядомае змяшчаецца ў назоўніках дробаў. Атрыманыя корані неабходна будзе праверыць!)

379. $\dfrac{6}{x^2-1}+\dfrac{3}{x+1}=\dfrac{2}{x-1}+1.$

380. $\dfrac{5}{x+a}-\dfrac{1}{a-x}=2+\dfrac{10a}{a^2-x^2}.$

381*. Пры якіх значэннях a ўраўненні

$$x^2+ax+1=0 \text{ і } x^2+x+a=0$$

маюць хаця б адзін агульны корань?

§ 51. Прыватныя віды квадратных ураўненняў

У гэтым параграфе мы вывучым некаторыя найбольш важныя прыватныя віды квадратных ураўненняў. Пры гэтым кожны раз, не гаворачы аб гэтым спецыяльна, мы будзем дапускаць, што дыскрымінант разглядаемага квадратнага ўраўнення неадмоўны.

1. Ураўненне з цотным каэфіцыентам пры x. Калі ва ўраўненні $ax^2 + bx + c = 0$ каэфіцыент пры x мае выгляд $b = 2k$ (напрыклад, $b = 4$, $b = 2\sqrt{2}$ і г. д.), то формула для кораняў гэтага ўраўнення некалькі спрошчваецца. Падставіўшы ў суадносіну

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

замест b лік $2k$, атрымаем

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Такім чынам, корані квадратнага ўраўнення $ax^2+2kx+c=0$ можна запісаць у выглядзе дробу, у лічніку якога палавіна каэфіцыента пры x, узятага з процілеглым знакам, плюс-мінус корань квадратны з квадрата гэтай палавіны без здабытку каэфіцыента пры x^2 і свабоднага члена, а ў лічніку — каэфіцыент пры x^2.

Напрыклад, каб рашыць ураўненне

$$5x^2-16x+3=0,$$

няма неабходнасці прымяняць агульную формулу

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

У дадзеным выпадку трэба аддаць перавагу даказанай вышэй формуле

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Скарыстоўваючы яе, атрымаем

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 15}}{5} = \frac{8 \pm \sqrt{49}}{5} = \frac{8 \pm 7}{5};$$

$$x_1 = \frac{1}{5}; \; x_2 = 3.$$

2. Прыведзенае квадратнае ўраўненне. Квадратнае ўраўненне называецца *прыведзеным*, калі каэфіцыент пры x^2 роўны 1. Агульны выгляд прыведзенага квадратнага ўраўнення такі:

$$x^2+px+q=0, \qquad (1)$$

дзе p і q — некаторыя карані.

Дапускаючы ў агульнай формуле для кораняў квадратнага ўраўнення

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$a=1$, $b=p$ і $c=q$, атрымаем формулу для кораняў прыведзенага квадратнага ўраўнення:

$$x=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2-4q}{4}}=$$

$$=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Такім чынам,

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Карані прыведзенага квадратнага ўраўнення роўны палавіне каэфіцыента пры x, узятага з процілеглым знакам, плюс-мінус корань квадратны з квадрата гэтай палавіны без свабоднага члена.

Прыклад. Няхай $x^2+4x-12=0$.

Тады

$$x=-2\pm\sqrt{4+12}=-2\pm 4,$$

або

$$x_1=2; \quad x_2=-6.$$

Заўвага. Любое квадратнае ўраўненне $ax^2+bx+c=0$ можна звесці да прыведзенага квадратнага ўраўнення пры дапамозе дзялення на a:

$$ax^2+bx+c=0,$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

Практыкаванні

382. Рашыць ураўненні, скарыстоўваючы ў кожным выпадку найбольш зручную формулу:

а) $3x^2-5x+2=0$;
б) $3x^2-20x-52=0$;
в) $x^2-10x+24=0$;
г) $x^2+7x-30=0$;
д) $5x^2+9x-14=0$;
е) $4x^2-x+10=0$.

§ 52. Тэарэма Віета

У § 51 мы атрымалі наступныя формулы для кораняў прыведзенага квадратнага ўраўнення з неадмоўным дыскрымінантам:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \text{ і } x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

З іх вынікае, што

$$x_1 + x_2 = -p,$$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) \cdot \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right).$$

Здабытак сумы двух лікаў на іх рознасць роўны рознасці квадратаў гэтых лікаў. Таму

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 = q.$$

Такім чынам,

$$x_1 + x_2 = -p,$$

$$x_1 \cdot x_2 = q.$$

Калі прыведзенае квадратнае ўраўненне мае сапраўдныя корані, то сума іх роўна каэфіцыенту пры x, узятаму з процілеглым знакам, а здабытак — свабоднаму члену гэтага ўраўнення.

Гэта ўласцівасць кораняў прыведзенага квадратнага ўраўнення носіць назву *тэарэмы Віета**.

Прыклад. Для ўраўнення $x^2 - 7x - 8 = 0$ $D = 81 > 0$. Таму ўраўненне мае два розныя сапраўдныя корані x_1 і x_2. Па тэарэме Віета

$$x_1 + x_2 = 7, \quad x_1 \cdot x_2 = -8.$$

Прапануем вучням рашыць дадзенае ўраўненне і пераканацца ў справядлівасці атрыманых намі суадносін.

Квадратнае ўраўненне агульнага выгляду $ax^2 + bx + c = 0$ дзяленнем на a зводзіцца да прыведзенага квадратнага ўраўнення

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Калі зыходнае ўраўненне $ax^2 + bx + c = 0$ мае сапраўдныя корані x_1 і x_2, то ўраўненне $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ павінна мець тыя ж

---

* Віет (1540—1603) — французскі матэматык.

самыя корані x_1 і x_2. Пры гэтым па тэарэме Віета павінна быць

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

Прыклад. Ураўненне $2x^2-2x-3=0$ мае дыскрымінант $D=28>0$. Таму яно мае два сапраўдныя корані x_1 і x_2, прычым

$$x_1+x_2=-\frac{-2}{2}=1;\qquad x_1\cdot x_2=\frac{-3}{2}=-\frac{3}{2}.$$

Прапануем вучням рашыць дадзенае ўраўненне і пераканацца ў справядлівасці атрыманых суадносін.

У далейшым нам патрэбна будзе тэарэма, адваротная тэарэме Віета. Фармулюецца яна наступным чынам:

Калі існуюць сапраўдныя лікі x_1 і x_2 такія, што $x_1+x_2=-p$, $x_1\cdot x_2=q$, то гэтыя лікі (x_1 і x_2) з'яўляюцца коранямі квадратнага ўраўнення $x^2+px+q=0$.

Доказ. Калі $x_1+x_2=-p$, то $x_2=-p-x_1$. Падстаўляючы гэты выраз для x_2 у суадносіну $x_1\cdot x_2=q$, атрымліваем

$$x_1(-p-x_1)=q,\quad -px_1-x_1^2=q,\quad x_1^2+px_1+q=0.$$

Але гэта азначае, што лік x_1 з'яўляецца коранем ураўнення $x^2+px+q=0$. Аналагічна даказваецца, што коранем гэтага ўраўнення з'яўляецца і лік x_2. Аднак гэта і так зразумела: лікі ж x_1 і x_2 уваходзяць у фармулёўку нашай тэарэмы зусім сіметрычна.

Практыкаванні

383. (Вусна.) Рашыць ураўненні:

1) $x^2-3x+2=0$;
2) $x^2+99x-100=0$;
3) $x^2+548x-549=0$;
4) $-x^2+6x-5=0$;
5) $-x^2-7x+8=0$;
6) $x^2-7x+12=0$;
7) $3x^2+x-2=0$;
8) $x^2-5x+6=0$.

384. Абазначым праз x_1 і x_2 корані ўраўнення

$$x^2-7x+10=0.$$

Не знаходзячы гэтых кораняў, вызначыць:

а) $x_1^2+x_2^2$; б) $x_1^3+x_2^3$; в) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$;

г) $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$; д) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$.

385. Тое ж, што і ў задачы 384, зрабіць для ўраўнення

$$-3x^2+x+24=0.$$

386. Пры якіх значэннях x выраз $(x-1)(x+5)$ роўны $(a-1)(a+5)$?

387. Даказаць, што корані ўраўнення $ax^2+bx+a=0$ (калі толькі яны існуюць!) уяўляюць сабой узаемна адваротныя лікі.

388. Вызначыць лік m так, каб ураўненне

$$x^2-12x+m=0$$

мела два сапраўдныя корані, адзін з якіх большы за другі на $2\sqrt{5}$.

389. Вызначыць лік a так, каб адзін з кораняў ураўнення

$$4x^2-15x+4a^3=0$$

быў квадратам другога.

390. Пры якіх значэннях a ўраўненне

$$x^2-4x+a=0$$

мае:

а) сапраўдныя корані;
б) сапраўдныя корані аднаго знака;
в) сапраўдныя корані розных знакаў;
г) адзін корань нулявы, а другі — дадатны;
д) адзін корань нулявы, а другі — адмоўны?

§ 53. Даследаванне знакаў кораняў квадратнага ўраўнення па яго каэфіцыентах

Выкарыстоўваючы тэарэму Віета, можна, не рашаючы ўраўнення $x^2+px+q=0$, вызначыць, якімі будуць яго корані — дадатнымі ці адмоўнымі. Але пры гэтым, безумоўна, трэба быць упэўненым у тым, што разглядаемае ўраўненне мае корані. Калі ж кораняў няма, то гаварыць аб знаках кораняў не мае сэнсу. Таму на працягу ўсяго гэтага параграфа мы будзем дапускаць, што разглядаемае прыведзенае квадратнае ўраўненне $x^2+px+q=0$ мае корані, гэта значыць дыскрымінант яго неадмоўны.

1) Няхай $q>0$, тады абодва корані маюць аднолькавыя знакі, паколькі $x_1\cdot x_2=q>0$. Калі да таго ж $p<0$, то $x_1+x_2=-p>0$ і, значыць, абодва корані дадатныя. Калі ж $p>0$, то $x_1+x_2=-p<0$, і тады абодва корані адмоўныя. У выпадку, калі $p=0$, ураўненне не будзе мець сапраўдных кораняў, таму што сума двух дадатных або двух адмоўных лікаў не можа быць роўна нулю.

2) Дапусцім цяпер, што $q<0$. Тады адзін з кораняў павінен быць дадатным, другі — адмоўным, паколькі $x_1\cdot x_2=q<0$. Калі пры гэтым $p>0$, то $x_1+x_2=-p<0$ і, значыць, абсалютная велічыня адмоўнага кораня больш дадатнага кораня. Калі ж

$p<0$, то $x_1+x_2=-p>0$. Гэта магчыма толькі тады, калі дадатны корань больш абсалютнай велічыні адмоўнага кораня. Пры $p=0$ $x_1+x_2=0$, адкуль $x_1=-x_2$. У гэтым выпадку корані роўныя па абсалютнай велічыні і процілеглыя па знаку.

3) Засталося разгледзець выпадак, калі $q=0$. Тады $x_1 \cdot x_2=0$, таму хаця б адзін з кораняў роўны нулю. Няхай для пэўнасці $x_1=0$; тады другі корань знойдзецца з умовы $x_1+x_2=-p$, адкуль $x_2=-p$. Значыць, у гэтым выпадку адзін корань роўны нулю, а другі з'яўляецца лікам, процілеглым каэфіцыенту p. Калі ж і $p=0$, то ўраўненне мае два роўныя корані: $x_1=x_2=0$.

Атрыманыя рэзультаты даследавання знакаў кораняў дадзены ў табліцы.

$q>0$			$q<0$			$q=0$
$p>0$	$p<0$	$p=0$	$p>0$	$p<0$	$p=0$	
$x_1<0$	$x_1>0$	Гэты выпадак немагчымы з прычыны зыходнага дапушчэння, што $D \geqslant 0$	Корані розных знакаў: $x_1<0$,	Корані розных знакаў: $x_1<0$,	Корані ўзаемна процілеглыя: $x_1=-x_2$	$x_1=0$
$x_2<0$	$x_2>0$		$x_2>0$, $\lvert x_1\rvert>x_2$	$x_2>0$, $\lvert x_1\rvert<x_2$		$x_2=-p$

Яшчэ раз адзначым: дадзеныя тут разважанні правільныя толькі ў дапушчэнні, што даследуемае ўраўненне мае сапраўдныя корані, гэта значыць яго дыскрымінант неадмоўны.

Разгледзім некалькі прыкладаў на даследаванне знакаў кораняў квадратных ураўненняў.

1) $x^2-8x-9=0$. Дыскрымінант гэтага ўраўнення роўны $D=64+36=100>0$, таму ўраўненне мае два розныя сапраўдныя корані. У выніку таго што $x_1 \cdot x_2=-9$, корані павінны мець розныя знакі, а паколькі $x_1+x_2=8$, то абсалютная велічыня адмоўнага кораня менш дадатнага кораня.

2) $x^2+7x+10=0$. Дыскрымінант гэтага ўраўнення роўны $D=49-40=9>0$, таму ўраўненне мае два розныя сапраўдныя корані. Паколькі $x_1 \cdot x_2=10>0$, то корані маюць аднолькавыя знакі. Акрамя таго, $x_1+x_2=-7$, значыць, абодва корані адмоўныя.

3) $x^2-x+1=0$. Для дадзенага ўраўнення $D=(-1)^2-4=$ $=-3<0$. Значыць, гэта ўраўненне не мае сапраўдных кораняў.

Атрыманыя вышэй рэзультаты адносяцца толькі да прыведзеных квадратных ураўненняў. Але падобныя даследаванні можна правесці і для любых квадратных ураўненняў ax^2+bx+ $+c=0$. Для гэтага спачатку трэба пры дапамозе дзялення на a прывесці дадзенае ўраўненне да прыведзенага квадратнага ўраў-

нення $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$, а затым для гэтага ўраўнення правесці апісаныя вышэй разважанні.

Няхай, напрыклад, трэба даследаваць знакі кораняў ураўнення $-3x^2+5x-2=0$. Дыскрымінант гэтага ўраўнення роўны $D=25-24=1>0$, таму яно мае два розныя сапраўдныя корані.

Падзяліўшы абедзве часткі ўраўнення на -3, атрымаем $x^2-\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}=0$. Адсюль відаць, што корані дадзенага ўраўнення маюць аднолькавыя знакі, паколькі $x_1\cdot x_2=\frac{2}{3}>0$. Акрамя таго, $x_1+x_2=\frac{5}{3}>0$. Значыць, абодва корані дадатныя.

Практыкаванні

Не рашаючы дадзеных ураўненняў (№ 391—400), даследаваць знакі іх кораняў:

391. $x^2-4x+3=0$.
392. $x^2-6x+5=0$.
393. $x^2-x-42=0$.
394. $x^2-x-6=0$.
395. $x^2+x+1=0$.
396. $6x^2-x-1=0$.
397. $-20x^2-3x+2=0$.
398. $x^2-6x+10=0$.
399. $-3x^2+17=0$.
400. $-5x^2+x-7=0$.

401. Пры якіх значэннях a корані ўраўнення

$$x^2+(1-a)x-a=0$$

маюць аднолькавыя знакі і пры якіх — розныя?

402. Пры якіх значэннях a корані ўраўнення

$$x^2+(a+6)x+(2a-1)(7-a)=0$$

маюць аднолькавыя знакі і пры якіх — розныя?

§ 54. Раскладанне квадратнага трохчлена на лінейныя множнікі

У гэтым параграфе мы разгледзім наступнае пытанне: у якім выпадку квадратны трохчлен ax^2+bx+c можна даць у выглядзе здабытку

$$(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)$$

двух лінейных адносна x множнікаў з сапраўднымі каэфіцыентамі a_1, b_1, a_2, b_2 ($a_1\neq0$, $a_2\neq0$)?

1. Дапусцім, што дадзены квадратны трохчлен ax^2+bx+c можа быць запісаны ў выглядзе

$$ax^2+bx+c=(a_1x+b_1)(a_2x+b_2). \qquad (1)$$

Правая частка формулы (1) ператвараецца ў нуль пры $x=-\frac{b_1}{a_1}$ і $x=-\frac{b_2}{a_2}$ (a_1 і a_2 па ўмове не роўны нулю). Але ў такім выпадку лікі $-\frac{b_1}{a_1}$ і $-\frac{b_2}{a_2}$ з'яўляюцца коранямі ўраўнення

$$ax^2+bx+c=0.$$

Значыць, дыскрымінант квадратнага трохчлена павінен быць адмоўным.

2. Наадварот, дапусцім, што дыскрымінант $D=b^2-4ac$ квадратнага трохчлена ax^2+bx+c неадмоўны. Тады гэты трохчлен мае сапраўдныя корані x_1 і x_2. Скарыстаўшы тэарэму Віета, атрымаем

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2]=$$
$$=a[(x^2-x_1x)-(x_2x-x_1x_2)]=a[x(x-x_1)-x_2(x-x_1)]=$$
$$=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Такім чынам,

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2), \qquad (2)$$

дзе x_1 і x_2 — корані трохчлена ax^2+bx+c. Каэфіцыент a можна ўнесці пад знак любога з двух лінейных множнікаў, напрыклад,

$$a(x-x_1)(x-x_2)=(ax-ax_1)(x-x_2).$$

Але гэта азначае, што ў разглядаемым выпадку квадратны трохчлен ax^2+bx+c можна даць у выглядзе здабытку двух лінейных множнікаў з сапраўднымі каэфіцыентамі.

Аб'ядноўваючы рэзультаты, атрыманыя ў пунктах 1 і 2, мы прыходзім да наступнай тэарэмы.

Тэарэма. ***Квадратны трохчлен ax^2+bx+c тады і толькі тады можна даць у выглядзе здабытку двух лінейных множнікаў з сапраўднымі каэфіцыентамі***

$$ax^2+bx+c=(a_1x+b_1)(a_2x+b_2),$$

калі дыскрымінант гэтага квадратнага трохчлена неадмоўны (гэта значыць, калі гэты трохчлен мае сапраўдныя корані).

Прыклад 1. Раскласці на лінейныя множнікі $6x^2-x-1$. Корані гэтага квадратнага трохчлена роўны $x_1=\frac{1}{2}$ і $x_2=-\frac{1}{3}$. Таму па формуле (2)

$$6x^2-x-1=6\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)=(2x-1)(3x+1).$$

$=6\left(x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)=6\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)=$

$x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{1}{3}$

Прыклад 2. Раскласці на лінейныя множнікі

$$x^2+x+1.$$

Дыскрымінант гэтага квадратнага трохчлена адмоўны

$$D=1^2-4\cdot1\cdot1=-3<0.$$

Таму дадзены квадратны трохчлен на лінейныя множнікі з сапраўднымі каэфіцыентамі не раскладваецца.

Практыкаванні

Раскласці на лінейныя множнікі наступныя выразы (№ 403—406):

403. $6x^2-7x+2$.

404. $2x^2-7ax+6a^2$.

405. x^2-x+1.

406. $x^2-3ax+2a^2-ab-b^2$.

Скараціць дробы (№ 407, 408):

407. $\dfrac{15x^2-8bx+b^2}{12x^2-bx-b^2}$.

408. $\dfrac{12a^2-a-1}{3a^2+5a-2}$.

Рашыць ураўненні:

409. $\dfrac{x}{x-10}-\dfrac{8}{x-6}=\dfrac{4x}{x^2-16x+60}$.

410. $\dfrac{x}{54(x-1)}-\dfrac{1}{(a+1)(a+x)}=\dfrac{1}{x^2+(a-1)x-a}$.

§ 55. Састаўленне квадратнага ўраўнення па зададзеных коранях

Дапусцім, што нам трэба саставіць квадратнае ўраўненне, коранямі якога былі б лікі x_1 і x_2. Відавочна, што ў якасці шукаемага ўраўнення можна выбраць ураўненне

$$a(x-x_1)(x-x_2)=0, \qquad (1)$$

дзе a — любы адрозны ад нуля сапраўдны лік. З другога боку, як было паказана ў § 51, кожнае квадратнае ўраўненне з коранямі x_1 і x_2 можна запісаць у выглядзе (1).

Такім чынам, формула (1) поўнасцю рашае пастаўленую вышэй задачу. З усіх квадратных ураўненняў корані x_1 і x_2 маюць ураўненні выгляду (1) і толькі яны.

Прыклад. Саставіць квадратнае ўраўненне, корані якога роўны 1 і —2.

Адказ. Корані 1 і —2 маюць усе квадратныя ўраўненні выгляду

$$a(x-1)(x+2)=0,$$

або

$$ax^2+ax-2a=0,$$

дзе a — любы адрозны ад нуля сапраўдны лік. Напрыклад, пры $a=1$ атрымліваецца ўраўненне

$$x^2+x-2=0.$$

Практыкаванні

411. Саставіць квадратнае ўраўненне, коранямі якога былі б лікі:

а) 2 і -3; б) -1 і -5; в) $\frac{1}{4}$ і $\frac{1}{6}$; г) $-\frac{1}{2}$ і $-\frac{1}{3}$.

412. Саставіць квадратнае ўраўненне з цэлымі каэфіцыентамі так, каб яго корані былі роўныя:

а) $-\frac{1}{5}$ і $\frac{2}{3}$; б) $\frac{4}{7}$ і 5; в) $-\frac{3}{2}$ і $\frac{2}{9}$; г) $-\frac{3}{10}$ і $-\frac{2}{5}$.

413. Саставіць квадратнае ўраўненне з цэлымі каэфіцыентамі, корані якога роўны $\frac{5}{7}$ і $-\frac{1}{2}$, а сума ўсіх каэфіцыентаў роўна 36.

414. Ці могуць коранямі квадратнага ўраўнення з натуральнымі каэфіцыентамі быць лікі $\frac{6}{5}$ і $-\frac{1}{7}$?

415. Саставіць квадратнае ўраўненне з цэлымі каэфіцыентамі, калі вядома, што адзін з кораняў роўны:

а) $2+\sqrt{3}$; б) $3-\sqrt{2}$.

§ 56. Біквадратныя ўраўненні

Біквадратнымі называюцца ўраўненні выгляду

$$ax^4+bx^2+c=0, \qquad (1)$$

дзе a, b і c — зададзеныя лікі, прычым $a\neq 0$.

Рашэнне такіх ураўненняў зводзіцца да рашэння квадратных ураўненняў. Сапраўды, дапускаючы ў (1) $y=x^2$, атрымліваем

$$ay^2+by+c=0.$$

Знайшоўшы з гэтага ўраўнення y і ўлічваючы, што $y=x^2$, лёгка атрымаць x.

Прыклад. Рашыць ураўненне

$$x^4-5x^2-36=0.$$

Дапускаючы $y=x^2$, атрымліваем

$$y^2-5y-36=0,$$

адкуль $y_1=-4$, $y_2=9$. Паколькі y можа прымаць толькі неадмоўныя значэнні (бо $y=x^2$), першы з гэтых кораняў з'яўляецца «пабочным». Значыць, $x^2=9$, адкуль $x_1=-3$, $x_2=3$.

Падобным спосабам можна рашаць і больш шырокі круг ураўненняў, а іменна ўраўненні выгляду

$$ax^{2n}+bx^n+c=0,$$

дзе n — любы натуральны лік. Дапускаючы тут

$$y=x^n,$$

мы прыходзім да квадратнага ўраўнення

$$ay^2+by+c=0.$$

Прыклад. Рашыць ураўненне

$$x^6-7x^3-8=0.$$

Дапускаючы $y=x^3$, атрымліваем

$$y^2-7y-8=0,$$

адкуль

$$y_1=-1,\quad y_2=8.$$

Успамінаючы, што $y=x^3$, атрымліваем наступныя два корані дадзенага ўраўнення:

$$x_1=-1,\quad x_2=2.$$

§ 57. Графік квадратнай функцыі

У гэтым параграфе мы пакажам, як будуецца графік квадратнай функцыі $y=ax^2+bx+c$. Наш разгляд прыйдзецца разбіць на рад асобных этапаў.

1. Графік функцыі $y=x^2$. Гэты графік будуецца «па пунктах». Саставім наступную табліцу значэнняў функцыі:

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	...
$y=x^2$	9	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9	...

Адзначым адпаведныя пункты на плоскасці каардынат і злучым іх плаўнай крывой (рыс. 64). Гэта крывая называецца *парабалай*. На рысунку 64 парабала $y=x^2$ начэрчана толькі пры $-3\leqslant x\leqslant 3$. Пры $|x|>3$ яна ідзе (і прытым даволі крута) усё вышэй і вышэй.

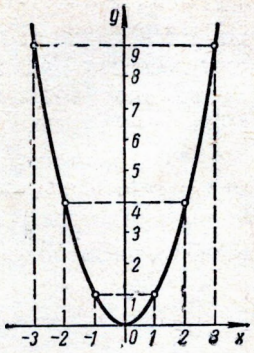
Гэта парабала мае наступныя асноўныя ўласцівасці:

1) Парабала $y=x^2$ цалкам ляжыць у верхняй паўплоскасці. Гэта адпавядае таму, што функцыя $y=x^2$ прымае толькі неадмоўныя значэнні. У пачатку каардынат парабала датыкаецца да восі абсцыс. Гэта самы нізкі пункт графіка; ён называецца *вяршыняй* парабалы.

2) Парабала сіметрычна адносна восі ардынат. Калі перагнуць рысунак 64 па восі y, то левая і правая часткі парабалы сумесцяцца. Гэта служыць графічнай ілюстрацыяй таго, што функцыя $y=x^2$ не мяняе сваіх значэнняў пры змяненні знака ў аргумента:

$$(-x)^2=x^2.$$

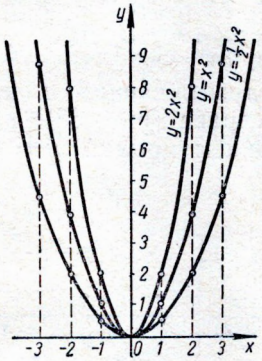
Такія функцыі называюцца *цотнымі*.



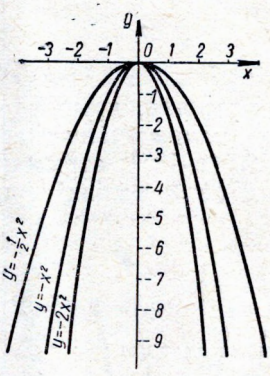
Рыс. 64.

2. Графік функцыі $y = ax^2$. Графік функцыі $y = ax^2$, гэтак жа як і графік функцыі $y = x^2$, лёгка будуецца «па пунктах».

Спачатку разгледзім выпадак, калі $a>0$. На рысунку 65 дадзены графікі функцый $y=ax^2$ пры $a=\frac{1}{2}$; 1; 2. Ва ўсіх гэтых выпадках атрымліваюцца крывыя, сіметрычныя адносна восі



Рыс. 65.



Рыс. 66.

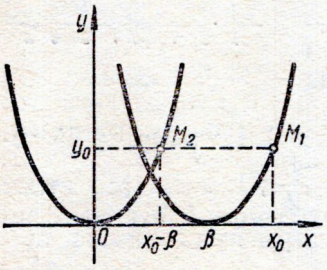
ардынат і размешчаныя цалкам у верхняй паўплоскасці. Кожная з гэтых крывых накіравана ўверх. Гэтыя крывыя, таксама як і крывая $y=x^2$, называюцца парабаламі. Пачатак каардынат з'яўляецца іх агульнай вяршыняй, а вось ардынат — іх агульнай воссю сіметрыі. З рысунка 65 відаць, што чым больш a, тым больш крутыя галіны парабалы $y=ax^2$; чым менш a, тым яны больш пакатыя.

Цяпер разгледзім выпадак, калі $a<0$. На рысунку 66 дадзены крывыя $y=ax^2$ пры $a=-\frac{1}{2}$; -1; -2. Гэтыя накіраваныя ўніз крывыя таксама называюцца парабаламі. Агульная вяршы-

ня — пачатак каардынат — з'яўляецца іх найвышэйшым пунктам. Вось ардынат для кожнай з гэтых крывых служыць воссю сіметрыі. Чым большая абсалютная велічыня α, тым больш крутыя галіны парабалы; чым яна меншая, тым больш пакатыя галіны парабалы.

3. Графік функцыі $y = \alpha(x - \beta)^2$. Параўнаем паміж сабой дзве функцыі $y_1 = \alpha(x - \beta)^2$ і $y_2 = \alpha x^2$, дзе $\beta > 0$. Няхай M_1 — адвольны пункт графіка першай функцыі (рыс. 67). Тады яго каардынаты (x_0, y_0) звязаны суадносінай

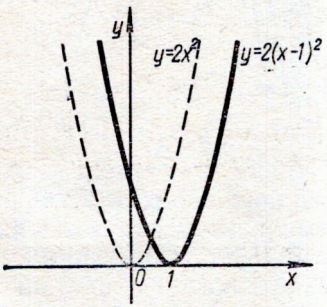
$$y_0 = \alpha(x_0 - \beta)^2.$$



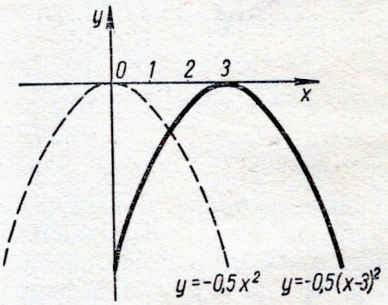
Рыс. 67.

Але гэта суадносіна паказвае, што пункт M_2 з каардынатамі $(x_0 - \beta, y_0)$ павінен належаць графіку другой функцыі. Значыць, кожны пункт крывой $y = \alpha(x - \beta)^2$ атрымліваецца з адпаведнага пункта крывой $y = \alpha x^2$ (гл. рыс. 67) пры дапамозе пераносу (або зрушэння) управа па напрамку восі x на адлегласць β. Таму і ўся ***крывая $y = \alpha(x - \beta)^2$ атрымліваецца пры дапамозе пераносу крывой $y = \alpha x^2$ управа на β.***

Напрыклад, крывая $y = 2(x-1)^2$ атрымліваецца з крывой $y = 2x^2$, калі апошнюю зрушыць на 1 управа (рыс. 68); крывая $y = -0{,}5(x-3)^2$ атрымліваецца зрушэннем крывой $y = -0{,}5x^2$ управа на 3 адзінкі (рыс. 69).



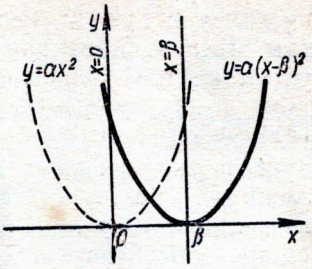
Рыс. 68.



Рыс. 69.

Вяршыняй парабалы $y = \alpha x^2$ з'яўляецца пункт з каардынатамі (0, 0), а воссю сіметрыі — прамая $x = 0$. Пры зрушэнні ўправа па напрамку восі x на адлегласць β пункт з каардынатамі (0, 0) пераходзіць у пункт з каардынатамі $(\beta, 0)$, а прамая

$x=0$ — у прамую $x=\beta$ (рыс. 70). Таму вяршыняй парабалы $y=\alpha(x-\beta)^2$ будзе пункт з каардынатамі $(\beta, 0)$, а воссю сіметрыі — прамая $x=\beta$.

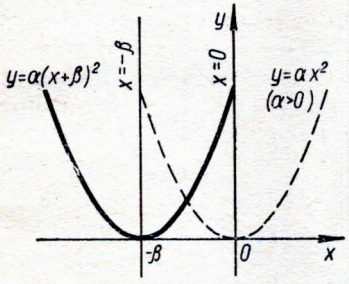


Рыс. 70.

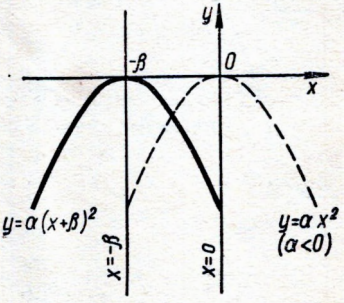
Парабала $y=\alpha x^2$ накіравана ўверх пры $\alpha>0$ і ўніз пры $\alpha<0$. Таму такі ж напрамак будзе мець і парабала $y=\alpha(x-\beta)^2$.

Такім чынам, графікам функцыі $y=\alpha(x-\beta)^2$ з'яўляецца парабала, накіраваная ўверх, калі $\alpha>0$, і ўніз, калі $\alpha<0$. Вяршыняй гэтай парабалы з'яўляецца пункт з каардынатамі $(\beta, 0)$, а воссю сіметрыі — прамая $x=\beta$.

Зусім гэтак жа не можа быць пабудаваны і графік функцыі $y=\alpha(x+\beta)^2$, дзе $\beta>0$. Ён уяўляе сабой парабалу, якая атрымліваецца пры дапамозе зрушэння парабалы $y=\alpha x^2$ *улева* на β. Гэта парабала накіравана ўверх, калі $\alpha>0$ (рыс. 71а), і ўніз, калі $\alpha<0$ (рыс. 71б). Вяршыня яе знаходзіцца ў пункце з каардынатамі $(-\beta, 0)$; воссю сіметрыі служыць прамая $x=-\beta$.

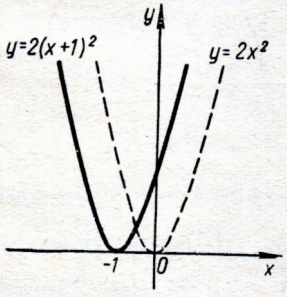


Рыс. 71а.

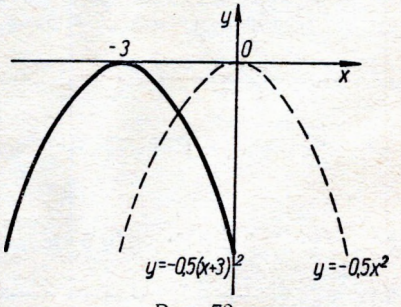


Рыс. 71б.

На рысунку 72 вы бачыце графік функцыі $y=2(x+1)^2$. Ён атрыман пры дапамозе паралельнага пераносу парабалы $y=2x^2$



Рыс. 72.

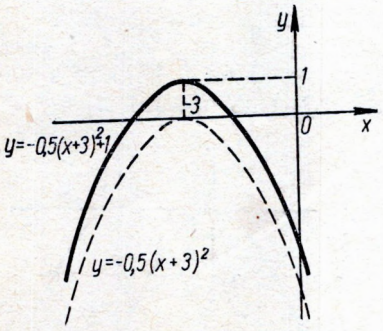


Рыс. 73.

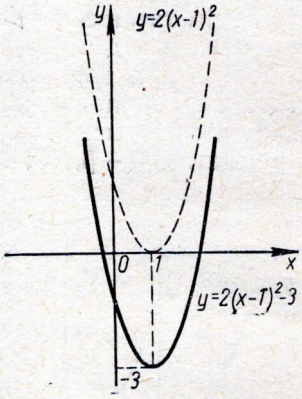
улева на 1. Графік функцыі $y=-0{,}5(x+3)^2$ (рыс. 73) атрыман пры дапамозе паралельнага пераносу парабалы $y=-0{,}5x^2$ улева на 3.

4. Графік функцыі $y=\alpha(x-\beta)^2+\gamma$. Гэты графік атрымліваецца пры дапамозе зрушэння парабалы $y=\alpha(x-\beta)^2$ па напрамку восі y уверх на адлегласць γ, калі $\gamma>0$, і ўніз на адлегласць $-\gamma$, калі $\gamma<0$. У выніку зрушэння атрымліваецца парабала з вяршыняй у пункце, каардынаты якога роўны (β, γ). Воссю сіметрыі такой парабалы служыць прамая $x=\beta$.

Пры зрушэнні ўверх або ўніз парабала $y=\alpha(x-\beta)^2$ не мяняе свайго напрамку. Таму парабалы $y=\alpha(x-\beta)^2+\gamma$ і $y=\alpha(x-\beta)^2$ маюць адзін і той жа напрамак: пры $\alpha>0$ накіраваны ўверх, а пры $\alpha<0$ — уніз.



Рыс. 74.



Рыс. 75.

У якасці прыкладу на рысунку 74 дадзен графік функцыі $y=-0{,}5(x+3)^2+1$, які атрымліваецца зрушэннем графіка $y=-0{,}5(x+3)^2$ уверх на 1. На рысунку 75 вы бачыце графік функцыі $y=2(x-1)^2-3$, атрыманы з графіка $y=2(x-1)^2$ зрушэннем уніз на 3 па восі сіметрыі.

5. Графік функцыі $y=ax^2+bx+c$. Як адзначалася ў § 49, квадратны трохчлен ax^2+bx+c можна запісаць у выглядзе

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Апошні выраз мае выгляд $\alpha(x-\beta)^2+\gamma$, дзе

$\alpha=a$; $\beta=-\frac{b}{2a}$; $\gamma=-\frac{b^2-4ac}{4a}$. Таму ***графікам функцыі $y=ax^2+bx+c$ з'яўляецца парабала з вяршыняй у пункце $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$. Воссю сіметрыі гэтай***

парабалы з'яўляецца прамая $x=-\frac{b}{2a}$. *Пры* a *парабала накіравана ўверх, а пры* $a<0$ *— уніз.*

§ 58. Прыклады пабудавання графікаў квадратнай функцыі

Прыклад 1. Пабудаваць графік функцыі $y=2x^2+12x+17$.

Пераўтворым квадратны трохчлен $2x^2+12x+17$, вылучыўшы поўны квадрат:

$$2x^2+12x+17=2\left(x^2+6x+\frac{17}{2}\right)=2\left[(x^2+2\cdot 3x+9)-9+\right.$$

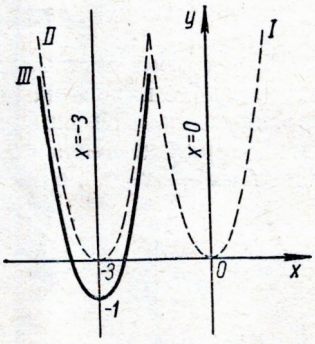
$$\left.+\frac{17}{2}\right]=2\left[(x+3)^2-\frac{1}{2}\right]=2(x+3)^2-1.$$

Цяпер пабудаванне графіка можна выконваць у наступнай паслядоўнасці.

1) «Па пунктах» будуем графік функцыі $y=2x^2$ (I, рыс. 76).

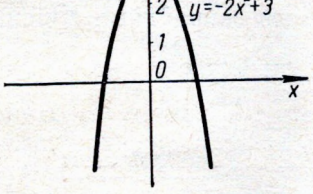
2) Зрушваем гэты графік на 3 адзінкі ўлева. У выніку атрымліваем крывую $y=2(x+3)^2$ (II, рыс. 76).

3) Гэту крывую апускаем уніз на 1 (III, рыс. 76). Атрыманая парабала і ёсць графік функцыі $y=2x^2+12x+17$. Яе вяршыня мае каардынаты $(-3;\ -1)$, а воссю сіметрыі з'яўляецца прамая $x=-3$.

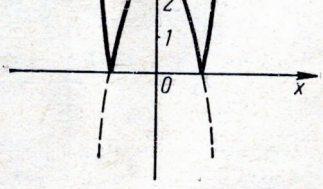


Рыс. 76.

Прыклад 2. Пабудаваць графік функцыі $y=|-2x^2+3|$. Спачатку пабудуем графік функцыі $y=-2x^2+3$ (рыс. 77а). Затым тую частку гэтага графіка, якая ляжыць вышэй восі x



Рыс. 77а.



Рыс. 77б.

яе $-2x^2+3>0$), аставім без змянення, а тую частку графіка, якая ляжыць ніжэй восі x (для яе $-2x^2+3<0$), адаб'ём сіметрычна адносна восі x. Атрыманая ў выніку гэтага крывая (рыс. 77б, суцэльная лінія) і ёсць графік функцыі $y=|-2x^2+3|$.

Практыкаванні

Пабудаваць графікі дадзеных функцый:

416. $y=-2x^2+1$.
417. $y=0{,}5x^2-2$.
418. $y=(x-2)^2+3$.
419. $y=(x+1)^2-2$.
420. $y=-2(x+1{,}5)^2+1$.
421. $y=2x^2-3x-2$.
422. $y=-3x^2+8x+3$.
423. $y=(x-3)(x-5)+1$.
424. $y=|-x^2+2|$.
425. $y=|3x^2-1|$.
426. $y=|x^2+x-2|$.
427. $y=|-x^2+3x-2|$.

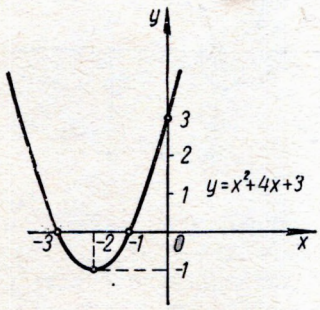
§ 59. Характарыстычныя пункты парабалы

Характарыстычнымі пунктамі парабалы $y=ax^2+bx+c$ мы называем яе вяршыню і пункты перасячэння з восямі каардынат.

Вяршыню мае любая парабала $y=ax^2+bx+c$. Каардынаты гэтай вяршыні лёгка знайсці, вылучыўшы ў квадратным трохчлене ax^2+bx+c поўны квадрат (гл. § 49). Напрыклад, для парабалы $y=x^2+4x+3$ маем:

$$x^2+4x+3=(x+2)^2-1.$$

Таму абсцыса вяршыні роўна -2, а ардыната -1 (рыс. 78).



Рыс. 78.

Пункт перасячэння з воссю y мае таксама любая парабала $y=ax^2+bx+c$. Абсцыса пункта перасячэння роўна, відавочна, нулю, а ардыната c. Яна атрымліваецца, калі ў выразе ax^2+bx+c дапусціць $x=0$. Напрыклад, пункт перасячэння парабалы $y=x^2+4x+3$ з воссю ардынат (рыс. 78) мае каардынаты (0, 3).

Пункты перасячэння з воссю x мае не ўсякая парабала $y=ax^2+bx+c$. Калі дыскрымінант $D=b^2-4ac$ дадатны, то ўраўненне $ax^2+bx+c=0$ мае два розныя сапраўдныя корані:

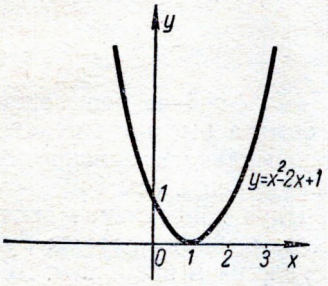
$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a};\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}.$$

У гэтым выпадку парабала $y=ax^2+bx+c$ перасякае вось x у двух пунктах з абсцысамі x_1 і x_2. Так, для квадратнага трохчлена x^2+4x+3 $D=16-12=4>0$. Гэты квадратны трохчлен мае два корані: $x_1=-1$; $x_2=-3$. Таму парабала $y=x^2+4x+3$ пера-

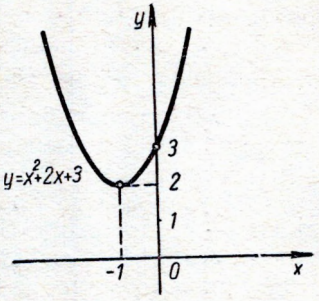
сякае вось x у двух пунктах (рыс. 78), абсцысы якіх роўны -1 і -3.

Калі $D=b^2-4ac=0$, то ўраўненне $ax^2+bx+c=0$ мае два роўныя сапраўдныя корані $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$. У гэтым выпадку ўраўненне парабалы можна запісаць у выглядзе $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$. Такая парабала датыкаецца да восі x у пункце з абсцысай $-\frac{b}{2a}$. Напрыклад, для квадратнага трохчлена x^2-2x+1 $D=0$. Ураўненне $x^2-2x+1=0$ мае два роўныя корані: $x_1=x_2=1$. Таму парабала $y=x^2-2x+1$ датыкаецца да восі x у пункце з абсцысай 1 (рыс. 79).

Калі $D=b^2-4ac<0$, то ўраўненне $ax^2+bx+c=0$ не мае сапраўдных кораняў. У гэтым выпадку парабала не перасякае восі x. Напрыклад, для квадратнага трохчлена x^2+2x+3 $D=-8<0$. Ураўненне $x^2+2x+3=0$ не мае сапраўдных кораняў. Парабала $y=x^2+2x+3$ не перасякае восі x (рыс. 80).



Рыс. 79.



Рыс. 80.

Характарыстычныя пункты парабалы заўсёды карысна знаходзіць пры пабудаванні графіка функцыі $y=ax^2+bx+c$. Гэта дазваляе больш дакладна пабудаваць графік.

Практыкаванні

Начарціць дадзеныя парабалы, указаўшы каардынаты характарыстычных пунктаў і ўраўненні восяў сіметрыі:

428. $y=3(x-2)^2-2$.

429. $y=-(x+1)^2+3$.

430. $y=3-2x-x^2$.

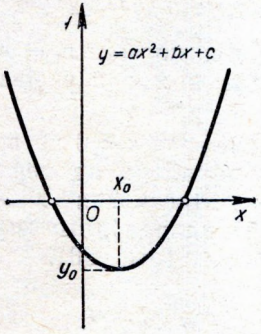
431. $y=2x^2-2x-4$.

432. $y=x^2+12x+22$.

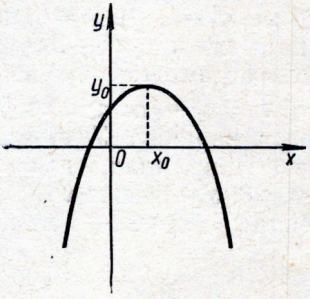
433. $y=x(1-x)$.

§ 60. Экстрэмальныя значэнні функцыі $y = ax^2 + bx + c$

Найменшае, або мінімальнае, з усіх значэнняў, якія прымае квадратная функцыя $y=ax^2+bx+c$, геаметрычна можна растлумачыць як ардынату самага нізкага пункта парабалы $y=ax^2+bx+c$ (рыс. 81), а найбольшае, або максімальнае, значэнне—як ардынату самага высокага пункта парабалы $y=ax^2+bx+c$ (рыс. 82).



Рыс. 81.



Рыс. 82.

Калі $a>0$, то парабала $y=ax^2+bx+c$ ідзе неабмежавана ўверх (рыс. 81). У гэтым выпадку самага высокага пункта парабалы не існуе. Таму не існуе і максімальнага значэння функцыі $y=ax^2+bx+c$. Але ў гэтым выпадку існуе самы нізкі пункт парабалы — яе вяршыня. Значыць, існуе мінімальнае значэнне функцыі $y=ax^2+bx+c$. Гэта мінімальнае значэнне (мы будзем яго абазначаць $y_{\min}$) роўна ардынаце вяршыні парабалы. Абсцыса гэтай вяршыні (абазначым яе $x_{\min}$) дае тое значэнне аргумента x, пры якім дасягаецца мінімум функцыі $y=ax^2+bx+c$.

Калі $a<0$, то парабала $y=ax^2+bx+c$ ідзе неабмежавана ўніз (рыс. 82). У гэтым выпадку самага нізкага пункта парабалы не існуе. Таму не існуе і мінімальнага значэння функцыі $y=ax^2+bx+c$. Затое існуе самы высокі пункт парабалы — яе вяршыня. Значыць, існуе максімальнае значэнне дадзенай функцыі. Гэта максімальнае значэнне (мы будзем абазначаць яго $y_{\max}$) роўна ардынаце вяршыні парабалы. Абсцыса гэтай вяршыні (абазначым яе $x_{\max}$) дае тое значэнне аргумента x, пры якім дасягаецца максімум функцыі $y=ax^2+bx+c$.

У § 57 было ўстаноўлена, што вяршыня парабалы $y=ax^2+bx+c$ незалежна ад таго, дадатнае a ці адмоўнае, мае каардынаты:

$$x=-\frac{b}{2a}; \qquad y=-\frac{b^2-4ac}{4a}. \tag{1}$$

Таму можна сказаць, што калі $a>0$, то функцыя $y=ax^2+bx+c$ прымае найменшае значэнне $y_{\min}=-\frac{b^2-4ac}{4a}$ пры $x_{\min}=-\frac{b}{2a}$. Найбольшага значэння гэтай функцыі не існуе. Калі $a<0$, то функцыя $y=ax^2+bx+c$ прымае найбольшае значэнне $y_{\max}=-\frac{b^2-4ac}{4a}$ пры $x_{\max}=-\frac{b}{2a}$. Найменшага значэння функцыі ў дадзеным выпадку не існуе.

Мінімальныя і максімальныя значэнні функцыі інакш называюцца *экстрэмальнымі*.

Прыклад 1. Знайсці экстрэмальнае значэнне функцыі $y=2x^2-4x-17$ і ўказаць, пры якім значэнні x функцыя прымае гэта экстрэмальнае значэнне.

Паколькі каэфіцыент пры x^2 дадатны, то дадзеная функцыя мае мінімальнае значэнне. Максімальнага значэння яна не мае. Каб знайсці мінімальнае значэнне, знойдзем каардынаты вяршыні парабалы $y=2x^2-4x-17$. Для гэтага вылучым поўны квадрат:

$$2x^2-4x-17=2\left(x^2-2x-\frac{17}{2}\right)=2\left[(x^2-2x+1)-1-\frac{17}{2}\right]=$$
$$=2(x-1)^2-19.$$

Адсюль робім вывад, што каардынаты вяршыні парабалы такія: $x=1$, $y=-19$. (Гэтыя каардынаты, зразумела, можна было б атрымаць і па формулах (1), калі ў іх дапусціць $a=2$, $b=-4$, $c=-17$.) Значыць, мінімальнае значэнне функцыі $y=2x^2-4x-17$ роўна -19. Яно дасягаецца пры $x=1$.

Прыклад 2. Знайсці экстрэмальнае значэнне функцыі $y=-x^2-4x+6$ і высветліць, пры якім значэнні аргумента x яно атрымліваецца.

Паколькі каэфіцыент пры x^2 адмоўны, то дадзеная функцыя мае максімальнае значэнне. Мінімальнага значэння яна не мае. Каб знайсці максімальнае значэнне, вылучым поўны квадрат:

$$-x^2-4x+6=-(x^2+4x-6)=-[(x^2+4x+4)-10]=$$
$$=-(x+2)^2+10.$$

Адсюль робім вывад, што максімальнае значэнне дадзенай функцыі роўна 10. Яно дасягаецца пры $x=-2$.

Практыкаванні

Знайсці экстрэмальныя значэнні дадзеных функцый і ўказаць, пры якіх значэннях аргумента яны дасягаюцца (№ 434—437):

434. $y=2x^2+12x+13$.

435. $y=-2x^2-4x-5$.

436. $y=|6x^2-x-1|$.

437. $y=|4x^2-4x-3|$.

438. Даказаць, што калі сума дзвюх велічынь пастаянная, то іх здабытак максімальны тады і толькі тады, калі гэтыя велічыні прымаюць роўныя значэнні. (Гэта сцверджанне з'яўляецца натуральным абагульненнем тэарэмы аб пастаяннай суме на выпадак любых, а не толькі дадатных велічынь; гл. раздз. I, § 17.)

§ 61. Квадратныя няроўнасці

Няроўнасці выгляду

$$ax^2+bx+c>0,$$
$$ax^2+bx+c\geqslant 0,$$
$$ax^2+bx+c<0,$$
$$ax^2+bx+c\leqslant 0,$$

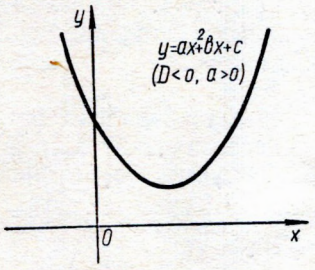
дзе a, b і c — зададзеныя лікі і $a\neq 0$, называюцца *квадратнымі* (або *няроўнасцямі другой ступені*).

У гэтым параграфе мы абмяжуемся толькі разглядам няроўнасцей выгляду

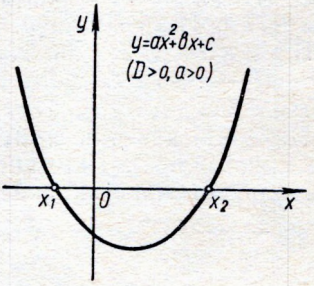
$$ax^2+bx+c>0.$$

Такія няроўнасці лепш за ўсё рашаць, выкарыстоўваючы геаметрычную ілюстрацыю. Разгледзім асобна два выпадкі: $a>0$ і $a<0$.

Выпадак 1. $a>0$. У гэтым выпадку парабала $y=ax^2+bx+c$ накіравана ўверх. Калі $D=b^2-4ac<0$, то квадратны трохчлен ax^2+bx+c не мае сапраўдных кораняў. Значыць, парабала $y=ax^2+bx+c$ не перасякае восі x і размешчана цалкам вышэй восі x (рыс. 83). Гэта азначае, што ў дадзеным выпадку няроўнасць $ax^2+bx+c>0$ выконваецца пры любых значэннях x.



Рыс. 83.



Рыс. 84.

Калі $D=b^2-4ac>0$, то парабала $y=ax^2+bx+c$ перасякае вось x у двух пунктах (рыс. 84) з абсцысамі:

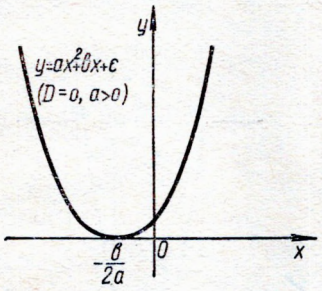
$$x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ і } x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Таму $ax^2+bx+c>0$ пры $x<x_1$, а таксама пры $x>x_2$.

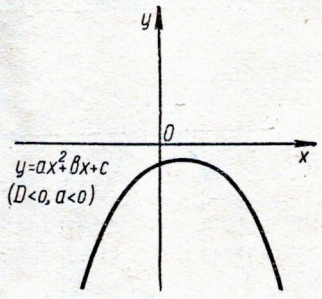
Нарэшце, калі $D=b^2-4ac=0$, то трохчлен ax^2+bx+c мае два роўныя корані $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$ і, такім чынам, можа быць дадзены ў выглядзе $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$.

У гэтым выпадку парабала $y=ax^2+bx+c$ датыкаецца да восі x у пункце з абсцысай $-\frac{b}{2a}$ (рыс. 85). Таму $ax^2+bx+c>0$ пры ўсіх значэннях x, акрамя $x=-\frac{b}{2a}$.

Выпадак 2. $a<0$. У гэтым выпадку парабала $y=ax^2+bx+c$ накіравана ўніз (гл. § 57).



Рыс. 85.



Рыс. 86.

Калі $D=b^2-4ac<0$, то ўраўненне $ax^2+bx+c=0$ не мае сапраўдных кораняў і, значыць, парабала $y=ax^2+bx+c$ ляжыць цалкам ніжэй восі x (рыс. 86). Таму няроўнасць $ax^2+bx+c>0$ не выконваецца ні пры якім значэнні x.

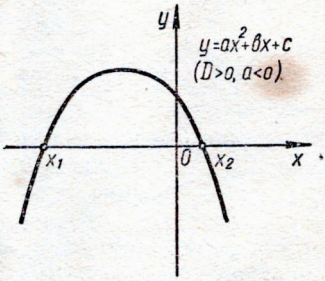
Калі $D=b^2-4ac>0$, то парабала $y=ax^2+bx+c$ перасякае вось x у двух пунктах з абсцысамі

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

(рыс. 87). У гэтым выпадку $ax^2+bx+c>0$ пры тых значэннях x, якія размешчаны паміж коранямі ўраўнення $ax^2+bx+c=0$, гэта значыць пры

$$x_1<x<x_2.$$



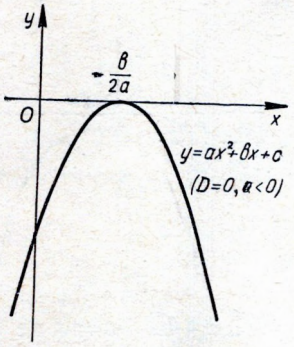
Рыс. 87.

Нарэшце, калі $D=b^2-4ac=0$, то парабала $y=ax^2+bx+c$ датыкаецца да восі x у пункце з абсцысай $x=-\frac{b}{2a}$ (рыс. 88).

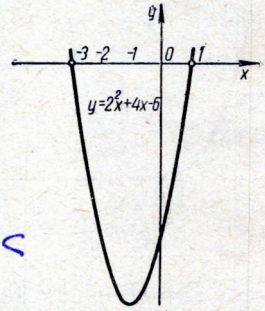
У такім выпадку няроўнасць $ax^2+bx+c>0$ не выконваецца ні пры якіх значэннях x.

З а ў в а г а 1. З разгледжанага вынікае, што калі дыскрымінант квадратнага трохчлена ax^2+bx+c дадатны, то гэты трохчлен можа прымаць як дадатныя, так і адмоўныя значэнні. Калі ж дыскрымінант адмоўны, то ўсе значэнні квадратнага трохчлена маюць адзін і той жа знак, а іменна знак каэфіцыента пры x^2.

З а ў в а г а 2. Пры рашэнні няроўнасці $ax^2+bx+c>0$ няма неабходнасці дакладна будаваць парабалу $y=ax^2+bx+c$ (напрыклад, зусім не трэба шукаць вяршыню парабалы, пункт перасячэння з воссю y і г. д.). Дастаткова толькі груба ўявіць сабе гэту крывую. Толькі адно патрэбна зрабіць выключна дакладна — гэта знайсці карані трохчлена ax^2+bx+c (пры $D\geqslant 0$).



Рыс. 88.



Рыс. 89.

§ 62. Прыклады рашэння квадратных няроўнасцей

П р ы к л а д 1. Рашыць няроўнасць $2x^2+4x-6>0$.

Квадратны трохчлен $2x^2+4x-6$ мае два сапраўдныя карані $x_1=-3$, $x_2=1$. Таму парабала $y=2x^2+4x-6$ перасякае вось x у двух пунктах, абсцысы якіх роўны -3 і 1. Паколькі каэфіцыент пры x^2 больш нуля, парабала $y=2x^2+4x-6$ накіравана ўверх (рыс. 89). З рысунка бачна, што трохчлен $2x^2+4x-6$ дадатны пры $x<-3$ і пры $x>1$.

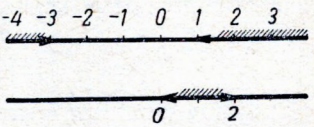
П р ы к л а д 2. Рашыць няроўнасць $-x^2+x-1>0$.

Дыскрымінант квадратнага трохчлена $-x^2+x-1$ адмоўны: $D=-3$. Таму пры ўсіх x значэнні функцыі $y=-x^2+x-1$ маюць адзін і той жа знак, а іменна знак каэфіцыента пры x^2, гэта значыць мінус. Такім чынам, няроўнасць $-x^2+x-1>0$ не выконваецца ні пры якіх значэннях x.

П р ы к л а д 3. Высветліць, пры якіх значэннях x дроб $\frac{x^2+2x-3}{2x-x^2}$ дадатны і пры якіх — адмоўны.

Спачатку дадзеным вышэй спосабам вызначым знакі лічніка і назоўніка дадзенага дробу, а затым параўнаем іх.

Лічнік x^2+2x-3 дадатны пры $x<-3$ і пры $x>1$ і адмоўны пры $-3<x<1$ (рыс. 90, верхняя лікавая вось). Назоўнік $2x-x^2$ дадатны пры $0<x<2$ і адмоўны пры $x<0$ і пры $x>2$ (рыс. 90, ніжняя лікавая вось). З рысунка 90 бачна, што дадзены дроб будзе дадатны пры $-3<x<0$ (у гэтым выпадку лічнік і назоўнік адмоўныя) і пры $1<x<2$ (у гэтым выпадку лічнік і назоўнік дадатныя); адмоўным ён будзе пры $x<-3$ (лічнік дадатны, назоўнік адмоўны), пры $0<x<1$ (лічнік адмоўны, назоўнік дадатны) і пры $x>2$ (лічнік дадатны, назоўнік адмоўны).



Рыс. 90.

Практыкаванні

Рашыць дадзеныя няроўнасці (№ 439—446):

439. $x^2-4x+3>0$.

440. $x^2-6x+5<0$.

441. $-5x^2+3x+2>0$.

442. $x(1-x)>0$.

443. $x^2+x+1<0$.

444. $x^2-x+1\geqslant 0$.

445. $x^2-6x+10\leqslant 0$.

446. $-3x^2+2x+1>0$.

447. Знайсці цэлыя значэнні x, якія задавальняюць няроўнасці

$$4x^2+4x-3<0.$$

Рашыць няроўнасці (№ 448, 449):

448. $\dfrac{x^2+2x-15}{x+1}<0$.

449. $\dfrac{x^2-6x-16}{-x^2+8x-12}>0$.

450. Знайсці цэлыя значэнні x, якія задавальняюць сістэме няроўнасцей

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-6x+5}{-3x^2+2x-7}<0, \\ x^2<16. \end{cases}$$

Пры якіх значэннях a дадзеныя няроўнасці (№ 451, 452) задавальняюцца для ўсіх значэнняў x:

451. $(a-1)x^2-(a+1)x+(a+1)>0$.

452. $(a-2)x^2+2(2a-3)x+5a-6<0$?

453. Пры якіх значэннях a ўраўненне

$$(a-3)x^2-2(3a-4)x+7a-6=0$$

мае сапраўдныя корані?

454. Пры якіх значэннях a ўраўненне

$$5(a+4)x^2-10x+a=0$$

мае:

а) сапраўдныя корані;
б) сапраўдныя корані аднаго знака;
в) сапраўдныя корані розных знакаў?

455. Не рашаючы ўраўнення

$$x^2-(a+1)x+(3a-5)=0,$$

вызначыць знакі яго кораняў.

§ 63. Рашэнне некаторых сістэм ураўненняў

У гэтым параграфе мы разгледзім некаторыя тыповыя сістэмы ўраўненняў, рашэнне якіх зводзіцца да рашэння квадратных ураўненняў.

Прыклад 1. Рашыць сістэму ўраўненняў

$$\begin{cases} x^2+3y^2-xy-2x+1=0, \\ x-y=1. \end{cases}$$

Паколькі другое ўраўненне гэтай сістэмы лінейнае адносна кожнай з пераменных x і y, то адна з гэтых пераменных, напрыклад y, лёгка выражаецца праз другую:

$$y=x-1.$$

Падстаўляючы гэты выраз для y у першае ўраўненне сістэмы, атрымліваем

$$x^2+3(x-1)^2-x(x-1)-2x+1=0,$$

адкуль

$$3x^2-7x+4=0; \quad x_1=\frac{4}{3}; \quad x_2=1.$$

Гэтым значэнням x згодна з другім ураўненнем сістэмы адпавядаюць наступныя значэнні y:

$$y_1=\frac{1}{3}; \quad y_2=0.$$

Такім чынам, дадзеная сістэма ўраўненняў мае два рашэнні:

$$x_1=\frac{4}{3}; \quad y_1=\frac{1}{3} \text{ і } x_2=1; \quad y_2=0.$$

Прыклад 2. Рашыць сістэму ўраўненняў:

$$\begin{cases} 14x^2-5xy+3y^2=16, \\ 6x^2-xy+y^2=8. \end{cases} \tag{1}$$

Характэрная асаблівасць гэтай сістэмы ўраўненняў заключаецца ў тым, што яна змяшчае толькі выразы x^2, y^2 і xy, сумарная ступень x і y у якіх пастаянная і роўная 2.

Для рашэння дадзенай сістэмы выканаем наступныя пераўтварэнні. Ад першага ўраўнення сістэмы (1) адымаем другое, памножанае на 2. У рэзультаце атрымаем ураўненне

$$2x^2-3xy+y^2=0, \qquad (2)$$

правая частка якога роўна 0.

Заўважым, што $x\neq 0$. У процілеглым выпадку з (2) вынікала б, што $y=0$, а гэта яўна супярэчыць ураўненням сістэмы (1). Але калі $x\neq 0$, то ўраўненне (2) можна пачленна падзяліць на x^2, што дае

$$2-3\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2=0.$$

Мы атрымалі квадратнае ўраўненне адносна $\frac{y}{x}$. З яго вынікае, што або $\frac{y}{x}=1$, або $\frac{y}{x}=2$.

Разгледзім гэтыя два выпадкі асобна.

1) Калі $\frac{y}{x}=1$, то $y=x$. Замена y у першым ураўненні дадзенай сістэмы на x прыводзіць да наступнага рэзультату:

$$14x^2-5x^2+3x^2=16, \text{ або } 12x^2=16.$$

Значыць, $x_1=\pm\sqrt{\frac{16}{12}}=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Адсюль атрымліваем наступныя два рашэнні дадзенай сістэмы:

$$x_1=\frac{2}{\sqrt{3}},\quad y_1=\frac{2}{\sqrt{3}};\quad x_2=-\frac{2}{\sqrt{3}},\quad y_2=-\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

2) Калі $\frac{y}{x}=2$, то $y=2x$. Замяняючы y у першым ураўненні дадзенай сістэмы на $2x$, атрымліваем

$$14x^2-10x^2+12x^2=16, \text{ або } 16x^2=16.$$

Значыць, $x=\pm 1$. Адсюль, улічваючы, што $y=2x$, атрымліваем яшчэ два рашэнні дадзенай сістэмы:

$$x_3=1,\quad y_3=2;\qquad x_4=-1,\quad y_4=-2.$$

Праверка паказвае, што ні адно з атрыманых чатырох рашэнняў сістэмы (1) не з'яўляецца «пабочным».

Адказ. Дадзеная сістэма ўраўненняў мае 4 рашэнні:

1) $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$, $y=\frac{2}{\sqrt{3}}$; 2) $x=-\frac{2}{\sqrt{3}}$, $y=-\frac{2}{\sqrt{3}}$;

3) $x=1$, $y=2$; 4) $x=-1$, $y=-2$.

Прыклад 3. Рашыць сістэму ўраўненняў

$$\begin{cases} x+y=6, \\ xy=-7. \end{cases}$$

Калі толькі дадзеная сістэма ўраўненняў мае рашэнне, то па тэарэме, адваротнай тэарэме Віета, гэта рашэнне павінна складацца з кораняў квадратнага ўраўнення (гл. § 52)·

$$z^2-6z-7=0.$$

Гэта ўраўненне мае корані $z_1=-1$, $z_2=+7$. Значыць, рашэннямі дадзенай сістэмы ўраўненняў могуць быць толькі наступныя дзве пары лікаў:

$$x_1=-1,\ y_1=7 \text{ і } x_2=7,\ y_2=-1.$$

Элементарная праверка паказвае, што кожная з гэтых пар лікаў з'яўляецца рашэннем нашай сістэмы.

Адказ. Дадзеная сістэма ўраўненняў мае два рашэнні:

$$x_1=-1,\ y_1=7 \text{ і } x_2=7,\ y_2=-1.$$

Прыклад 4. Рашыць сістэму ўраўненняў

$$\begin{cases} x-y=8, \\ xy=-7. \end{cases}$$

З другога ўраўнення вынікае, што $x\cdot(-y)=7$. Таму

$$\begin{cases} x+(-y)=8, \\ x\cdot(-y)=7. \end{cases}$$

Мы атрымалі сістэму ўраўненняў, зусім аналагічную сістэме, разгледжанай у прыкладзе 3. Толькі ролю невядомых адыгрываюць не x і y, як у прыкладзе 3, а x і $-y$. Таму далейшы ход рашэння гэтай сістэмы такі ж, як у прыкладзе 3. Вучням прапануецца правесці яго самастойна.

Прыклад 5. Рашыць сістэму ўраўненняў

$$\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ xy=-2. \end{cases}$$

З другога ўраўнення атрымаем $x^2y^2=4$. Але ў такім выпадку па тэарэме, адваротнай тэарэме Віета, x^2 і y^2 можна разглядаць як корані квадратнага ўраўнення

$$z^2-5z+4=0,$$

адкуль $z_1=4$, $z_2=1$. Таму магчымы два выпадкі:

1) $x^2=4$ і тады $y^2=1$ і 2) $x^2=1$ і тады $y^2=4$.

Выпадак 1. Калі $x=2$, то $y=-1$ (згодна з другім ураўненнем зыходнай сістэмы $xy=-2$). Калі $x=-2$, то $y=1$.

Выпадак 2. Калі $x=1$, то $y=-2$, калі ж $x=-1$, то $y=2$.

Мы атрымалі 4 рашэнні дадзенай сістэмы ўраўненняў:

$$\begin{array}{ll} x_1=2, & y_1=-1; \\ x_2=-2, & y_2=1; \\ x_3=1, & y_3=-2; \\ x_4=-1, & y_4=2. \end{array}$$

Практыкаванні

Рашыць дадзеныя сістэмы ўраўненняў:

456. $\begin{cases} x^2+3xy-y^2+2x-5y=-63, \\ x-y=-7. \end{cases}$

457. $\begin{cases} 2x^2-3xy-4y^2=25, \\ x^2-6y^2=250. \end{cases}$

458. $\begin{cases} 7x^2-6xy+12y^2=108, \\ x^2-\frac{5}{6}xy+\frac{7}{3}y^2=18. \end{cases}$

459. $\begin{cases} x+2y=13, \\ xy=15. \end{cases}$

460. $\begin{cases} 2x-3y=-18, \\ xy=-12. \end{cases}$

461. $\begin{cases} x^2-2y^2=-\frac{1}{4}, \\ xy=\frac{1}{4}. \end{cases}$

462. $\begin{cases} 2y^2-3x^2=-19, \\ xy=-6. \end{cases}$

463. $\begin{cases} x+xy+y=11, \\ x-xy+y=1. \end{cases}$

464. $\begin{cases} xy+y+x=11, \\ x^2y+y^2x=30. \end{cases}$

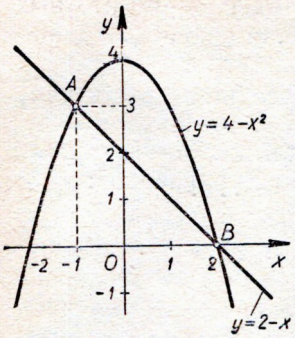
465. $\begin{cases} x^3+y^3=1, \\ x+y=1. \end{cases}$

466. $\begin{cases} x^2-y^2=-21, \\ x+y=-3. \end{cases}$

§ 64. Графічны спосаб рашэння некаторых сістэм ураўненняў

Некаторыя сістэмы ўраўненняў могуць быць рэшаны графічна. Праілюструем гэта на прыкладзе наступнай сістэмы:

$$\begin{cases} x^2+y=4, \\ x+y=2. \end{cases}$$



Рыс. 91.

На адным і тым жа рысунку начэрцім дзве крывыя, першая з якіх мае ўраўненне $x^2+y=4$, або $y=4-x^2$, а другая — ураўненне $x+y=2$, або $y=2-x$. Відавочна, што шукаемымі рашэннямі дадзенай сістэмы ўраўненняў будуць каардынаты пунктаў перасячэння гэтых дзвюх крывых.

Як відаць з рысунка 91, разглядаемыя крывыя перасякаюцца ў двух пунктах: A з каардынатамі $(-1, 3)$ і B з каардынатамі $(2, 0)$. Таму дадзеная сістэма ўраўненняў мае два рашэнні: $x=-1$, $y=3$ і $x=2$, $y=0$.

Практыкаванні

Рашыць графічна наступныя сістэмы ўраўненняў:

467. $\begin{cases} x^2+2y=10, \\ x-y=-1. \end{cases}$

468. $\begin{cases} 2x^2-y=-2, \\ 3x+y=1. \end{cases}$

469. $\begin{cases} y+2x^2=3, \\ x+y=2. \end{cases}$

470. $\begin{cases} y=x^2-1, \\ y=-x^2+2x-1. \end{cases}$

§ 65. Ірацыянальныя ўраўненні

Ірацыянальнымі ўраўненнямі называюцца ўраўненні, якія змяшчаюць невядомае пад знакам радыкала. Да такіх адносяцца, напрыклад, ураўненні

$$\sqrt{x-1}=3+\sqrt{x};\ \sqrt{x}=5-4x;$$

$$\sqrt[3]{2-x}=\sqrt[4]{x+6}+7x$$

і г. д.

Мы абмяжуемся разглядам ірацыянальных ураўненняў, якія змяшчаюць толькі квадратныя радыкалы. У сувязі з гэтым трэба напомніць, што квадратныя корані можна здабываць толькі з неадмоўных лікаў. Такія, напрыклад, выразы як $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-25}$, $\sqrt{-10}$, не маюць сэнсу. Далей, пад квадратным коранем з дадатнага ліку мы заўсёды падразумяваем яго арыфметычнае, гэта значыць дадатнае, значэнне. Так, $\sqrt{4}=2$, а не -2; $\sqrt{25}=5$, а не -5; $\sqrt{2}=1{,}4142\ldots$, а не $-1{,}4142\ldots$ і г. д.

Гэтых заўваг ужо дастаткова для таго, каб мы маглі разгледзець некалькі тыповых прыкладаў ірацыянальных ураўненняў.

Прыклад 1. Рашыць ураўненне

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}=3.$$

Квадратныя карані можна здабываць толькі з неадмоўных лікаў. Таму дапушчальныя значэнні невядомай велічыні x павінны задавальняць сістэме няроўнасцей

$$\begin{cases} x-2\geqslant 0, \\ 1-x\geqslant 0. \end{cases}$$

Першая няроўнасць гэтай сістэмы дае $x\geqslant 2$, другая $x\leqslant 1$. Відавочна, што адначасова гэтыя ўмовы выконвацца не могуць. Таму мноства дапушчальных значэнняў невядомай велічыні x у дадзеным выпадку пустое, гэта значыць не змяшчае ніводнага ліку. Але ў такім выпадку дадзенае ўраўненне не можа мець сапраўдных кораняў.

Разгледжаны прыклад вучыць нас пастаянна памятаць аб наступнай важнай акалічнасці. Перш чым рашаць тое ці іншае ірацыянальнае ўраўненне, трэба быць упэўненым, што мноства дапушчальных значэнняў невядомай велічыні не пустое. Калі ні адзін з лікаў не з'яўляецца дапушчальным для невядомай велічыні, то можна адразу ж сказаць, што ўраўненне не мае кораняў.

Прыклад 2. Рашыць ураўненне

$$\sqrt{x}+\sqrt{1-x}=-2.$$

Ні адзін з кораняў $\sqrt{x}$ і $\sqrt{1-x}$ не можа быць адмоўным. Таму ні пры якіх сапраўдных значэннях велічыні x сума гэтых кораняў не можа раўняцца -2. Значыць, дадзенае ўраўненне таксама не мае кораняў.

Заўважым, што тут не было неабходнасці даследаваць, якія значэнні можа прымаць невядомая велічыня x. Адсутнасць кораняў дадзенага ўраўнення мы ўстанавілі і без гэтага даследавання.

Мы разгледзелі два найпрасцейшыя прыклады ірацыянальных ураўненняў. У наступным параграфе будуць разгледжаны больш складаныя прыклады.

Практыкаванні

Паказаць, што дадзеныя ўраўненні не маюць кораняў:

471. $\sqrt{x-3}+\sqrt{x+3}=-1.$

472. $\sqrt{2x-7}+\sqrt{x}=0.$

473. $\sqrt{3x-5}+\sqrt{6-x}=-7.$

474. $\sqrt{4-4x}+\sqrt{x-2}=6.$

§ 66. Прыклады рашэння ірацыянальных ураўненняў

Звычайны спосаб рашэння ірацыянальных ураўненняў заключаецца ў вызваленні іх ад радыкалаў і звядзенні да ўжо вывучаных намі тыпаў алгебраічных ураўненняў (напрыклад, да лінейных або квадратных). Дасягнуць гэтага іншы раз удаецца шляхам пачленнага ўзвядзення ірацыянальнага ўраўнення ў ступень. Растлумачым гэта на радзе прыватных прыкладаў.

Прыклад 1. Рашыць ураўненне

$$x=\sqrt{2-x}.$$

Мноства дапушчальных значэнняў велічыні x вызначаецца няроўнасцю $x\leqslant 2$. Каб сярод усіх гэтых значэнняў знайсці корані нашага ўраўнення, узвядзём абедзве яго часткі ў квадрат. У рэзультаце атрымаем

$$x^2=2-x,$$
$$x^2+x-2=0,$$

адкуль

$$x_1=-2,\quad x_2=1.$$

Кожны з двух атрыманых лікаў трапляе ў мноства дапушчальных значэнняў велічыні x. Але гэта яшчэ не азначае, што -2 і 1 — корані дадзенага ўраўнення. Да ўраўнення ж $x^2=2-x$ мы прыйшлі шляхам пачленнага ўзвядзення ў квадрат зыходнага ўраўнення

$$x=\sqrt{2-x}.$$

Але да такога ж рэзультату мы прыйшлі б, калі б пачленна ўзвялі ў квадрат не гэта, а іншае ўраўненне $x=-\sqrt{2-x}$, адрознае ад дадзенага. Такім чынам, у рэзультаце выкананых пераўтварэнняў мы можам атрымаць новыя, пабочныя корані — корані ўраўнення $x=-\sqrt{2-x}$, якія нас у дадзеным выпадку не цікавяць. Вось чаму перш чым даць адказ на дадзеную задачу, неабходна зрабіць праверку атрыманых кораняў.

Пры $x=-2$ левая частка дадзенага ўраўнення прымае значэнне -2, а правая $\sqrt{4}=2$. Паколькі $-2\neq 2$, лік -2 не ёсць корань дадзенага ўраўнення. Пры $x=1$ абедзве часткі нашага ўраўнення прымаюць значэнні, роўныя 1. Таму 1 — корань гэтага ўраўнення.

Значыць, дадзенае ўраўненне мае адзін корань $x=1$. Што ж датычыцца да ліку -2, атрыманага намі вышэй, то ён, як і трэба было чакаць, з'яўляецца коранем ураўнення $x=-\sqrt{2-x}$.

Прыклад 2. Рашыць ураўненне

$$x=1+\sqrt{x+5}.$$

Мноства дапушчальных значэнняў велічыні ў дадзеным выпадку вызначаецца няроўнасцю $x \geqslant -5$.

Перанёсшы 1 з правай часткі ў левую і ўзвёўшы абедзве часткі атрыманага ўраўнення ў квадрат, мы прыходзім да ўраўнення

$$(x-1)^2 = (\sqrt{x+5})^2,$$

$$x^2-2x+1=x+5, \quad x^2-3x-4=0,$$

адкуль

$$x_1=4, \quad x_2=-1.$$

Праверка паказвае, што ў гэтых двух лікаў коранем дадзенага ўраўнення з'яўляецца толькі лік 4. Лік -1 з'яўляецца пабочным коранем.

Адказ. Дадзенае ўраўненне мае адзіны корань $x=4$.

Прыклад 3. Рашыць ураўненне

$$\sqrt{x-5}+\sqrt{10-x}=3.$$

Мноства дапушчальных значэнняў вызначаецца, відавочна, няроўнасцю

$$5 \leqslant x \leqslant 10.$$

Узвёўшы абедзве часткі дадзенага ўраўнення ў квадрат, мы атрымаем

$$x-5+2\sqrt{(x-5)(10-x)}+10-x=9,$$

$$2\sqrt{(x-5)(10-x)}=4, \quad \sqrt{(x-5)(10-x)}=2.$$

З апошнім ураўненнем мы зробім гэтак жа, як і з зыходным: узвядзём яго пачленна ў квадрат. У рэзультаце атрымаем

$$(x-5)(10-x)=4, \quad -x^2+15x-50=4, \quad x^2-15x+54=0.$$

Значыць, у рэзультаце двухкратнага пачленнага ўзвядзення дадзенага ўраўнення ў квадрат у спалучэнні з іншымі элементарнымі пераўтварэннямі мы прыйшлі да простага квадратнага ўраўнення, корані якога роўны

$$x_1=6, \quad x_2=9.$$

Праверка паказвае, што абодва гэтыя лікі з'яўляюцца коранямі дадзенага ўраўнення.

Адказ. $x_1=6$, $x_2=9$.

Прыклад 4. Рашыць ураўненне

$$\sqrt{x+7}+\sqrt{x-1}=4.$$

Мноства дапушчальных значэнняў невядомай велічыні x вызначаецца ў дадзеным выпадку няроўнасцю $x>1$. Гэта ўраўненне можна было б рашыць тым жа спосабам, якім мы рашалі папя-

рэдняе ўраўненне. Для гэтага нам прыйшлося б двойчы прымяняць метад пачленнага ўзвядзення ў квадрат.

Аднак у дадзеным выпадку лепш выкарыстаць наступны прыём. Памножым пачленна дадзенае ўраўненне на выраз $\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1}$, супрэжаны* выразу $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-1}$. У рэзультаце, выкарыстоўваючы формулу для здабытку сумы двух лікаў на іх рознасць, атрымаем

$$(\sqrt{x+7}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1}) = \\ = 4(\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1}),$$

або

$$(x+7)-(x-1) = 4(\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1}).$$

Адсюль

$$4(\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1}) = 8,$$
$$\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1} = 2.$$

Цяпер мы маем:

$$\sqrt{x+7}+\sqrt{x-1} = 4,$$
$$\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1} = 2.$$

Складаючы пачленна гэтыя ўраўненні, атрымліваем

$$2\sqrt{x+7} = 6,$$

адкуль

$$\sqrt{x+7} = 3, \quad x+7 = 9, \quad x = 2.$$

У працэсе рашэння дадзенага ўраўнення нам давялося абедзве яго часткі памножыць на $\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1}$. Але ў рэзультаце такога пераўтварэння маглі атрымацца пабочныя карані. Вось чаму цяпер неабходна праверыць, ці з'яўляецца атрыманы лік 2 коранем зыходнага ўраўнення.

Пры $x=2$ левая частка дадзенага ўраўнення прымае значэнне

$$\sqrt{9}+\sqrt{1} = 3+1 = 4.$$

Значыць, $x=2$ — корань дадзенага ўраўнення.

А д к а з. Дадзенае ўраўненне мае адзін корань $x=2$.

---

* Адзін выраз, які змяшчае знак радыкала, называецца *супрэжаным* другому выразу, які змяшчае знак радыкала, калі здабытак гэтых выразаў можна запісаць ужо без знака радыкала. Так, выраз $\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1}$ з'яўляецца супрэжаным выразу $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-1}$, паколькі $(\sqrt{x+7}+\sqrt{x-1})\times(\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1}) = (x+7)-(x-1) = 8$; выраз $\sqrt{a}+1$ будзе супрэжаным выразу $\sqrt{a}-1$, паколькі $(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1) = a-1$, і г. д.

Разгледжаныя метады рашэння ... кія, што, выкарыстоўваючы іх, мы не можам страціць ... раняў. Затое, як паказваюць прыклады 1 і 2 ... аць пабочныя ... рка ... раўненні з'яўляецца важнай састаўной часткай рашэння іра- ыянальных ураўненняў.

Практыкаванні

Рашыць ураўненні:

475. $\sqrt{7+\sqrt{x-3}}=2.$

476. $\sqrt{1-3x}=3+x.$

477. $21+\sqrt{2x-7}=x.$

478. $\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=3.$

479. $\sqrt{2x+1}=2\sqrt{x}-\sqrt{x-3}.$

480. $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}}=x+1.$

481. $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=\sqrt{2a}.$

482. $\sqrt{x-3}-\sqrt{x+3}=2-\sqrt{10}.$

§ 67. З гісторыі развіцця алгебры

Метады рашэння квадратных ураўненняў былі вядомы яшчэ ў старажытныя часы. Яны выкладаюцца, напрыклад, у вавілонскіх рукапісах часоў цара Хамурапі (XX ст. да н. э.), у працах старажытнагрэчаскага матэматыка Еўкліда (III ст. да н. э.), у старажытных кітайскіх і японскіх трактатах.

Многія матэматыкі старажытнасці рашалі квадратныя ўраўненні геаметрычным спосабам. Напрыклад, для рашэння ўраўнення $x^2+10x=39$ рабілі наступнае. Няхай $AB=x$, $BC=5$ $(=10:2)$. На старане $AC=AB+BC$ будаваўся квадрат, які разбіваўся на чатыры часткі, як паказана на рысунку 92. Відавочна, што сума плошчаў 1, 2 і 3-й частак роўна x^2+10x, або 39.

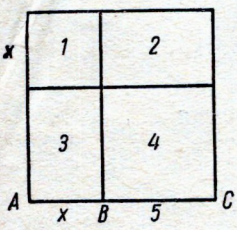
Калі да гэтай плошчы дадаць плошчу 4-й часткі, то ў рэзультаце атрымаецца 64 — плошча ўсяго квадрата. Але гэта ж плошча роўна $(x+5)^2$, таму што $AC=x+5$. Такім чынам,

$$(x+5)^2=64, \quad x+5=8, \quad x=3.$$

У некаторых старажытных рукапісах змяшчаюцца прыклады рашэння прыведзеных квадратных ураўненняў, якія па сутнасці адпавядаюць формуле

$$-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}. \qquad (1)$$

Праўда, задачы гэтыя рашаюцца не ў агульным выглядзе, а толькі пры пэўных лікавых значэннях каэфіцыентаў. Аднак метады рашэння не пакідаюць сумнення ў тым, што аўтарам іх былі знаёмы агульныя правілы. Тут трэба сказаць, што ў старажытныя часы літарныя абазначэнні яшчэ не выкарыстоўваліся. Сістэматычна іх увёў у матэматыку толькі французскі матэматык Віет, чыё імя носіць вядомая нам тэарэма аб коранях прыведзенага квадратнага ўраўнення. Адмоўныя лікі таксама не былі шырока вядомы вучоным старажытнасці. Таму аб формуле (1) як такой, безумоўна, не магло быць і гутаркі.



Рыс. 92.

Дастаткова падрабязна метады рашэння квадратных ураўненняў выкладзены ў працах славутага

...ал-Харэзмі (IX ст.). Адна з яго прац называецц... ...вал-мукабала», што ў перакладзе на беларускую мову ...учэнне аб прывядзенні і двухбаковым адыманні». ...гэтай кнізе разглядаліся і лінейныя ўраўненні. Адным з метадаў іх ...ўжэння быў метад названы «ал-джэбр». Ад гэтага слова і ўзнікла назва...

Задачы на паўтарэнне

483. Якія вядомыя вам фізічныя законы апісваюцца пры дапамозе квадратных функцый?

484. Чаму роўны лік c, калі пры любых значэннях a і b ураўненне $ax+bx+c=0$ заўсёды мае хоць бы адзін корань?

485. Пры якіх значэннях a корані ўраўнення

$$(a-1)x^2-2(a+1)x+(a+4)=0$$

роўныя паміж сабой?

486. Раскласці выраз

$$2x(2x+b)-a(4x-a)-ab$$

на лінейныя адносна x множнікі.

487. Вядома, што пры любых значэннях x квадратны трохчлен ax^2+bx+c прымае дадатныя значэнні. Даказаць, што $a\geqslant 0$, $c>0$. Ці можна сцвярджаць, што ў разглядваемым выпадку $b\geqslant 0$? Адказ растлумачыць прыкладамі.

488. Вядома, што пры любых значэннях x

$$a_1x^2+b_1x+c_1\geqslant a_2x^2+b_2x+c_2.$$

Даказаць, што $a_1\geqslant a_2$, $c_1\geqslant c_2$. Ці можна сцвярджаць, што ў разглядваемым выпадку $b_1\geqslant b_2$?

489*. Рашыць ураўненне

$$\frac{a^2}{x}-\frac{b^2}{x-1}=a^2+b^2.$$

490. Пры якіх значэннях x выраз $\frac{x-1}{(x+2)^2}$ прымае значэнне, роўнае $\frac{a-1}{(a+2)^2}$?

491. Рашыць ураўненне

$$x+\frac{bx}{x-2a}=\frac{2ab}{x-2a}.$$

492. Пры якіх значэннях a корані ўраўнення

$$x^2+x-a(1+a)=0$$

маюць:

а) аднолькавыя знакі;

б) розныя знакі?

493. Ці могуць выразы x^2-ax+1 і $2x^2+ax+3$ быць роўны пры трох розных значэннях x?

494. Пры якіх значэннях a няроўнасць

$$ax^2+(a-1)x+(a-1)<0$$

выконваецца для ўсіх значэнняў x?

Рашыць няроўнасці (№ 495, 496):

495. $\dfrac{x^2-5x+8}{x^2-8x+15}<0.$ **496.** $\dfrac{x+2}{x^2-7x+6}>0.$

497. Пры якіх значэннях a ўраўненне

$$(2a-1)x^2+(3-a)x+1=0$$

мае сапраўдныя корані?

498. Пры якіх значэннях a ўраўненне

$$5(10-a)x^2-10x+6-a=0:$$

а) мае корані;
б) мае не больш аднаго кораня;
в) не мае кораняў;
г) мае аднолькавыя корані;
д) мае корані аднолькавага знака;
е) мае корані розных знакаў?

Рашыць сістэмы ўраўненняў (№ 499—502):

499. $\begin{cases}\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=2,\\ xy=27.\end{cases}$ **501.** $\begin{cases}x^2-y^2=a,\\ x-y=b.\end{cases}$

500. $\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=-\dfrac{1}{10},\\ xy=50.\end{cases}$ **502.** $\begin{cases}\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=3,\\ x+y=2.\end{cases}$

Рашыць ураўненні (№ 503—505):

503*. $\sqrt{1+ax}=x+\sqrt{1-ax}.$

504. $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=1.$

505. $\sqrt{22-x}-\sqrt{10-x}=2.$

506. Не рашаючы ўраўнення

$$x^2+2ax+(a^2+a-1)=0,$$

вызначыць знакі яго кораняў.

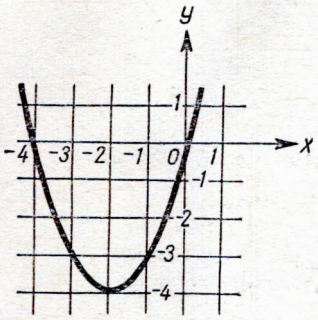
507. Даказаць, што корані ўраўнення $ax^2+bx+c=0$ (калі толькі яны існуюць!) адваротныя кораням ураўнення

$$cx^2+bx+a=0.$$

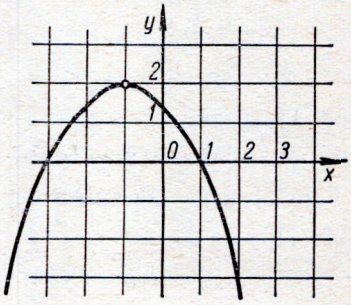
508. Ці могуць коранямі ўраўнення $x^2+px+q=0$ быць лікі p і q?

509. Пры якіх значэннях a сума квадратаў кораняў ураўнення $x^2+ax+(a-2)=0$ будзе мінімальнай?

510*. Пры якіх значэннях a сума кубаў кораняў ураўнення $3x^2+3(a+1)x+a^2=0$ будзе максімальнай?



Рыс. 93а.



Рыс. 93б.

511. Квадратнае ўраўненне $3x^2+bx+c=0$ мае адзіны корань, роўны 1. Чаму роўны b і c?

512. На неабмежаванай прамой, якая злучае дзве крыніцы святла рознай сілы I_1 і I_2, вызначыць пункт, роўнаасветлены абедзвюма крыніцамі. Адлегласць паміж крыніцамі роўна a.

Указанне. Асветленасць адваротна прапарцыянальна квадрату адлегласці ад крыніцы святла.

513. Патрэбнасць калгаса ў ячменю 4000 *ц*. Калі павялічыць ураджай ячменю на 8 *ц* з 1 *га*, то можна будзе паменшыць плошчу пасеву ячменю на 25 *га*. Колькі гектараў засеяна ячменем і які ўраджай у цэнтнерах з 1 *га*?

514. Напісаць ураўненні парабал, прыведзеных на рысунках 93а і 93б.

Раздзел IV

СТУПЕНЬ З РАЦЫЯНАЛЬНЫМ ПАКАЗЧЫКАМ. СТУПЕННАЯ ФУНКЦЫЯ

§ 68. Ступень з натуральным паказчыкам. Узвядзенне ў ступень здабытку і дзелі

Няхай a — адвольны сапраўдны лік, а n — натуральны лік, большы або роўны 2. Тады *n-я ступень ліку a* (абазначаецца a^n) *ёсць здабытак n лікаў, кожны з якіх роўны a:*

$$\underbrace{a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}.$$

Напрыклад,

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8,$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{81}.$$

Лік a у выразе a^n называецца *асновай,* а n — *паказчыкам* ступені. Першай ступенню сапраўднага ліку называецца сам гэты лік a. Па аналогіі з n-й ступенню ($n \geqslant 2$) ліку a першую ступень гэтага ліку трэба было б запісваць як a^1; але паколькі гэты выраз роўны a, то адзінку ў запісу a^1 звычайна апускаюць і пішуць проста a.

Ступені з натуральнымі паказчыкамі маюць рад важных уласцівасцей, якія мы разгледзім ніжэй.

Тэарэма 1. ***Ступень дадатнага ліку з любым натуральным паказчыкам дадатная.***

Ступень адмоўнага ліку з цотным паказчыкам дадатная, а з няцотным паказчыкам адмоўная.

Сапраўды, калі $a > 0$, то a^n як здабытак дадатных лікаў дадатны. Калі $a < 0$, то a^{2k} як здабытак цотнага ліку адмоўных лікаў дадатны, а a^{2k+1} як здабытак няцотнага ліку адмоўных лікаў адмоўны.

Прыклады.

$(-3)^4=81$ (цотны лік адмоўных сумножнікаў);

$(-2)^5=-32$ (няцотны лік адмоўных сумножнікаў).

Тэарэма 2. ***Каб узвесці ў ступень здабытак, дастаткова ўзвесці ў гэту ступень кожны сумножнік і рэзультаты перамножыць,*** гэта значыць

$$(a \cdot b)^n = a^n b^n.$$

Доказ. Па азначэнню ступені

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot \ldots \cdot (ab)}_{n}.$$

Выкарыстоўваючы камутатыўны і асацыятыўны законы множання, атрымліваем:

$$\underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot \ldots \cdot (ab)}_{n} = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \ldots \cdot b)}_{n} = a^n b^n,$$

што і трэба было даказаць.

Мы атрымалі правіла ўзвядзення ў ступень для выпадку двух сумножнікаў. На самай справе яно дакладнае для любога ліку сумножнікаў, напрыклад,

$$(a \cdot b \cdot c \cdot d)^n = a^n b^n c^n d^n.$$

Формулу $(ab)^n = a^n b^n$ часам больш карысна чытаць справа налева:

$$a^n b^n = (ab)^n.$$

Каб перамножыць ступені з аднолькавымі паказчыкамі, дастаткова перамножыць асновы гэтых ступеней, а паказчык пакінуць ранейшым.

Напрыклад, $2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 3)^3 = 6^3 = 216$;

$$12^5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \left(12 \cdot \frac{1}{4}\right)^5 = 3^5 = 243;$$

$$16^4 \cdot \left(\frac{1}{32}\right)^4 \cdot 4^4 = \left(16 \cdot \frac{1}{32} \cdot 4\right)^4 = 2^4 = 16.$$

Тэарэма 3. ***Каб узвесці ў ступень дроб, дастаткова ўзвесці ў гэту ступень асобна лічнік і назоўнік і першы рэзультат падзяліць на другі,*** гэта значыць

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0).$$

Доказ. Па азначэнню ступені і правілу множання дробаў

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Прыклады.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81};$$

$$\left(-\frac{5}{4}\right)^3 = -\frac{5^3}{4^3} = -\frac{125}{64}.$$

Практыкаванні

515. (В у с н а.) Якія з дадзеных лікаў з'яўляюцца дадатнымі і якія — адмоўнымі:

1) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$; 5) $-\left(-\frac{3}{7}\right)^3$; 9) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^{17}$;

2) $\left(-\frac{2}{5}\right)^4$; 6) $\left(-\frac{5}{2}\right)^n$; 10) $(2-\sqrt{5})^6$;

3) $(-3)^5$; 7) $(a\sqrt{3})^5$; 11) $\left(\sqrt{7}-\frac{5}{2}\right)^7$;

4) $-(-\sqrt{5})^6$; 8) $(-a\sqrt{2})^{99}$; 12) $(1-a)^{13}$?

516. Спрасціць выразы:

а) $2^2 \cdot 4^2 \cdot 8^2 \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^2$; в) $49^4 \cdot \left(-\frac{1}{343}\right)^4 \cdot 21^4$;

б) $5^3 \cdot 15^3 \cdot 25^3 \cdot \left(\frac{1}{125}\right)^3$; г) $\left(-\frac{10}{17}\right)^5 \cdot \left(-\frac{51}{2}\right)^5 \cdot \left(-\frac{1}{15}\right)^5$.

517. Ступені якіх лікаў не змяняюцца пры адвольным змяненні паказчыка?

§ 69. Множанне і дзяленне ступеней з аднолькавымі асновамі

Тэарэма 1. ***Каб перамножыць ступені з аднолькавымі асновамі, дастаткова паказчыкі ступеней скласці, а аснову пакінуць ранейшай,*** гэта значыць

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Д о к а з. Па азначэнню ступені

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m+n} = a^{m+n}.$$

Напрыклад,

$$2^2 \cdot 2^3 = 2^5 = 32; \quad (-3) \cdot (-3)^3 = (-3)^4 = 81.$$

Мы разгледзелі здабытак дзвюх ступеней. На самай жа справе даказаная ўласцівасць дакладная і для любога ліку ступеней з аднолькавымі асновамі.

Напрыклад,

$$a^m \cdot a^n \cdot a^k \cdot a^l = a^{m+n+k+l}.$$

Тэарэма 2. ***Каб падзяліць ступені з аднолькавымі асновамі, калі паказчык дзялімага большы за паказчык дзельніка, дастаткова ад паказчыка дзялімага адняць паказчык дзельніка, а аснову пакінуць ранейшай,*** гэта значыць пры $m > n$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0).$$

Доказ. Напомнім, што дзеллю ад дзялення аднаго ліку на другі называецца лік, які пры множанні на дзельнік дае дзялімае. Таму даказаць формулу

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},$$

дзе $a \neq 0$,— гэта ўсё роўна, што даказаць формулу

$$a^{m-n} \cdot a^n = a^m.$$

Калі $m > n$, то лік $m-n$ будзе натуральным; такім чынам, па тэарэме 1

$$a^{m-n} \cdot a^n = a^{(m-n)+n} = a^m.$$

Тэарэма 2 даказана.

Напрыклад, $\frac{3^{10}}{3^8} = 3^{10-8} = 3^2 = 9$; $\frac{4^6}{4^3} = 4^{6-3} = 4^3 = 64$.

Трэба звярнуць увагу на тое, што формула

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0)$$

даказана намі толькі ў дапушчэнні, што $m > n$. Таму з даказанага пакуль нельга рабіць, напрыклад, такіх вывадаў:

$$\frac{3^8}{3^{10}} = 3^{8-10} = 3^{-2}.$$

Да таго ж ступені з адмоўнымі паказчыкамі намі яшчэ не разглядаліся, і мы пакуль што не ведаем, які сэнс можна надаць выразу 3^{-2}.

Тэарэма 3. ***Каб узвесці ступень у ступень, дастаткова перамножыць паказчыкі, пакінуўшы аснову ступені ранейшай,*** гэта значыць

$$(a^n)^m = a^{nm}.$$

Доказ. Выкарыстоўваючы азначэнне ступені і тэарэму 1 гэтага параграфа, атрымліваем

$$(a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdot \ldots \cdot a^n}_{m} = a^{\overbrace{n+n+\ldots+n}^{m}} = a^{nm},$$

што і трэба было даказаць.

Напрыклад, $(2^3)^2 = 2^6 = 64$,

$$\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^5\right]^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}.$$

Формулу $(a^n)^m = a^{nm}$ часам карысна чытаць справа налева:

$$a^{nm} = (a^n)^m.$$

Практыкаванні

518. (Вусна.) Вызначыць x з ураўненняў:

1) $2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^5 \cdot 2^6 = 2^x$;

2) $3 \cdot 3^3 \cdot 3^5 \cdot 3^7 \cdot 3^9 = 3^x$;

3) $4^2 \cdot 4^4 \cdot 4^6 \cdot 4^8 \cdot 4^{10} = 2^x$;

4) $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{125} \cdot \frac{1}{625} = \frac{1}{5^x}$.

519. (Вусна.) Спрасціць:

1) $\frac{5^{10}}{5^8}$; 2) $\frac{(-7)^7}{(-7)^5}$;

3) $\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{99}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{95}}$; 4) $\frac{(\sqrt{2})^{15}}{(-\sqrt{2})^{11}}$; 5) $(4^2)^5$;

6) $\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^5\right]^2$; 7) $\left[\left(-\frac{6}{7}\right)^3\right]^4$; 8) $(9^6)^7$;

9) $\left[\frac{(-a)^m}{b^n}\right]^k$; 10) $\left[-\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^4\right]^3$.

520. (Вусна.) Спрасціць:

1) $\frac{(\sqrt{2})^{15}}{(\sqrt{2})^{17}}$; 3) $\frac{3^{48}}{(-3)^{100}}$;

2) $\frac{(-5)^{100}}{(-5)^{103}}$; 4) $\frac{(2\sqrt{3})^{10}}{12^5}$.

521. Дадзеныя выразы запісаць у выглядзе ступеней з аднолькавымі асновамі:

1) 32 і 64; 4) -27 і -243;

2) -1000 і 100; 5) 4^{100} і 32^{50};

3) 8^5 і 16^3; 6) $81^{75} \cdot 8^{200}$ і $3^{600} \cdot 4^{150}$.

Спрасціць выразы:

522. $(-2a)^6 - (-8a^3)^2 - [-(2a)^2]^3 - [2 \cdot (-a)^3]^2$.

523. $(-2a)^{10} - (-13a^5)^2 - [-(2a)^2]^5 - [2 \cdot (-a^5)]^2$.

524. $\left[\left(\frac{a^2b}{cd^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{ac^4}{b^2d^3}\right)^2\right] : \left[\left(\frac{a^2b^2}{cd^3}\right)^4 \cdot \left(\frac{c^2}{b^3d}\right)^3\right]$.

525. $\left[\left(\frac{mnp}{a^2b}\right)^4 : \left(\frac{m^2n^2}{a^3b^2}\right)^2\right] \cdot \left[\left(\frac{a^3b^4c}{mp^3}\right)^6 : \left(\frac{a^5b^8c^2}{m^2p^5}\right)^3\right]$.

§ 70. Параўнанне ступеней

Тэарэма 1. ***З дзвюх ступеней з аднолькавымі паказчыкамі і дадатнымі асновамі большая тая, аснова якой большая.*** Іншымі словамі, калі $a > b > 0$, то пры любым натуральным n

$$a^n > b^n.$$

Гэта ўласцівасць была даказана намі ў раздзеле I (§ 12).

Прыклад. Які лік большы: 2^{300} або 3^{200}?

Для рашэння гэтай задачы запішам дадзеныя лікі ў выглядзе ступеней з аднолькавымі паказчыкамі, выкарыстоўваючы тоеснасць

$$a^{mn} = (a^m)^n.$$

Маем:

$$2^{300} = 2^{3 \cdot 100} = (2^3)^{100} = 8^{100};$$

$$3^{200} = 3^{2 \cdot 100} = (3^2)^{100} = 9^{100}.$$

Паколькі $9 > 8$, то $9^{100} > 8^{100}$. Такім чынам,

$$3^{200} > 2^{300}.$$

Тэарэма 2. ***Калі $0 < a < 1$, то з дзвюх ступеней a^m і a^n большая тая, паказчык якой меншы.***

Калі $a > 1$, то з дзвюх ступеней a^m і a^n большая тая, паказчык якой большы.

Доказ. Няхай $m > n$. Тады $m = n + k$, дзе k — некаторы натуральны лік. Таму

$$a^m = a^{n+k} = a^n \cdot a^k,$$

Калі $0<a<1$, то $0<a^k<1$. Значыць, $a^m=a^n\cdot a^k<a^n$. Калі ж $a>1$, то $a^k>1$. Значыць, $a^m=a^n\cdot a^k>a^n$.

Напрыклад, $\left(\frac{1}{3}\right)^{100}<\left(\frac{1}{3}\right)^{50}$; $3^{100}>3^{50}$.

Практыкаванні

526. Дадзеныя выразы запісаць у выглядзе ступеней з аднолькавымі паказчыкамі і параўнаць іх па велічыні:

1) 4^2 і 2^8;

2) 27^3 і 9^6;

3) 125^2 і 25^3;

4) 4^{300} і 3^{400};

5) $-\frac{1}{8}$ і $\left(-\frac{1}{32}\right)^3$;

6) $\left(-\frac{6}{7}\right)^4$ і $\left(\frac{36}{49}\right)^6$;

7) $\left(\frac{1}{16}\right)^{100}$ і $\left(\frac{1}{2}\right)^{500}$.

527. Дадзеныя выразы запісаць у выглядзе ступеней з аднолькавымі асновамі і параўнаць іх па велічыні:

1) 8^5 і 16^3;

2) 4^{100} і 32^{50};

3) $(-3)^{75}$ і $(-27)^{15}$;

4) $81^{150}\cdot 8^{200}$ і $3^{600}\cdot 16^{75}$.

528. Што больш: $(a^n)^m$ ці $(a^m)^n$?

§ 71. Ступені з нулявымі і адмоўнымі паказчыкамі

У § 69 мы даказалі (глядзі тэарэму 2), што пры $m>n$

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}\quad (a\neq 0).$$

Зусім натуральнае жаданне распаўсюдзіць гэту формулу і на выпадак, калі $m\leqslant n$. Але тады лік $m-n$ будзе або адмоўны, або роўны нулю. А мы да гэтага часу гаварылі толькі аб ступенях з натуральнымі паказчыкамі. Такім чынам, мы сутыкаемся з неабходнасцю ўвесці ў разгляд ступені сапраўдных лікаў з нулявымі і адмоўнымі паказчыкамі.

А з н а ч э н н е 1. *Любы лік a, не роўны нулю, у нулявой ступені роўны адзінцы,* гэта значыць пры $a\neq 0$

$$a^0=1. \qquad (1)$$

Напрыклад, $(-13{,}7)^0=1$; $\pi^0=1$; $(\sqrt{2})^0=1$.

Лік 0 нулявой ступені не мае, гэта значыць выраз 0^0 не вызначаны.

А з н а ч э н н е 2. *Калі* $a \neq 0$ *і* n *— натуральны лік, то*

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \qquad (2)$$

гэта значыць *ступень любога ліку, не роўнага нулю, з цэлым адмоўным паказчыкам роўна дробу, лічнік якога ёсць адзінка, а назоўнік — ступень таго ж ліку а, але з паказчыкам, процілеглым паказчыку дадзенай ступені.*

Напрыклад, $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$;

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3} = -\frac{1}{\frac{1}{8}} = -8.$$

Прыняўшы гэтыя азначэнні, можна даказаць, што пры $a \neq 0$ формула

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad (3)$$

правільная для любых натуральных лікаў m і n, а не толькі для $m > n$.

Для доказу дастаткова абмежавацца разглядам двух выпадкаў: $m = n$ і $m < n$, паколькі выпадак $m > n$ ужо разгледжаны ў § 69.

Няхай $m = n$; тады $\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^n}{a^n} = 1$. Значыць, левая частка роўнасці (3) роўна 1. Правая ж частка пры $m = n$ ператвараецца ў

$$a^{m-n} = a^{n-n} = a^0.$$

Але па азначэнню $a^0 = 1$. Такім чынам, правая частка роўнасці (3) таксама роўна 1. Значыць, пры $m = n$ формула (3) правільная.

Цяпер дапусцім, што $m < n$. Падзяліўшы лічнік і назоўнік дробу $\frac{a^m}{a^n}$ на a^m, атрымаем

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{a^m}}.$$

Паколькі $n > m$, то $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$. Таму

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}.$$

Выкарыстоўваючы азначэнне ступені з адмоўным паказчыкам, можна запісаць $\frac{1}{a^{n-m}}=a^{-(n-m)}=a^{m-n}$. Значыць, пры $m<n$ $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$, што і трэба было даказаць. Формула (3) даказана цяпер для любых натуральных лікаў m і n.

З а ў в а г а. Адмоўныя паказчыкі дазваляюць запісваць дробы без назоўнікаў. Напрыклад,

$$\frac{1}{3}=3^{-1};\quad \frac{2}{5}=2\cdot 5^{-1};\ \text{наогул,}\ \frac{a}{b}=a\cdot b^{-1}.$$

Аднак не трэба думаць, што пры такім запісе дробы ператвараюцца ў цэлыя лікі. Напрыклад, 3^{-1} ёсць такі ж дроб, як і $\frac{1}{3}$, $2\cdot 5^{-1}$ — такі ж дроб, як і $\frac{2}{5}$, і г. д.

Практыкаванні

529. Вылічыць:

1) $3^{-3};\ 2^{-1};\ (-1)^5\cdot\frac{6}{3^{-1}}$;

2) $\frac{5^{-2}}{2^{-5}};\ \frac{(-2)^{-3}}{(\sqrt{3})^0};\ \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2};\ -\frac{10^{-2}}{(-2)^5}$;

3) $\left[6-4\left(\frac{3}{7}\right)^0\right]^{-2}$;

4) $\frac{3^2\cdot 3^{-1}+(-1{,}5)^0}{2^{-2}}$;

5) $\frac{2^{-3}-\left(\frac{3}{4}\right)^{-4}\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{10^{-1}+\left(-\frac{1}{5}\right)^0}$.

530. Запісаць без назоўнікаў дробы:

1) $\frac{1}{8}$; 2) $\frac{1}{625}$; 3) $\frac{10}{17}$; 4) $-\frac{2}{3}$.

531. Дадзеныя дзесятковыя дробы запісаць у выглядзе цэлых выразаў, выкарыстоўваючы адмоўныя паказчыкі:

1) 0,01; 2) 0,65; 3) —0,00033;
4) —0,5; 5) —7,125; 6) 75,75.

§ 72. Уласцівасці ступеней з цэлымі паказчыкамі

У § 68 і 69 мы даказалі наступныя ўласцівасці ступеней з натуральнымі паказчыкамі:

1) $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$;

2) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$;

3) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

4) $a^m : a^n = a^{m-n}$;

5) $(a^m)^n = a^{mn}$.

Усе гэтыя ўласцівасці справядлівыя і для ступеней з любымі цэлымі (дадатнымі, адмоўнымі і нулявымі) паказчыкамі, калі толькі лікі a і b не роўны нулю.

Дакажам, напрыклад, што пры $a \neq 0$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \qquad (1)$$

дзе m і n — любыя цэлыя лікі.

Паколькі для натуральных лікаў m і n формула (1) ужо даказана, то нам застаецца разгледзець толькі наступныя тры выпадкі: 1) лікі m і n адмоўныя; 2) адзін з лікаў m і n дадатны, а другі — адмоўны; 3) хоць бы адзін з лікаў m і n роўны нулю.

Выпадак 1. Няхай m і n — адмоўныя лікі. Тады па азначэнню ступені з адмоўным паказчыкам

$$a^m \cdot a^n = \frac{1}{a^{-m}} \cdot \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m} \cdot a^{-n}}.$$

Паколькі m і n адмоўныя, то $-m$ і $-n$ дадатныя. Таму

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-m-n} = a^{-(m+n)}.$$

Значыць, $\frac{1}{a^{-m} \cdot a^{-n}} = \frac{1}{a^{-(m+n)}}$. Выкарыстоўваючы азначэнне ступені з адмоўным паказчыкам, запішам:

$$\frac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}.$$

Такім чынам,

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Выпадак 2. Адзін з паказчыкаў m і n дадатны, а другі — адмоўны. Няхай, напрыклад, $m > 0$, а $n < 0$. Па азначэнню ступені з адмоўным паказчыкам

$$a^m \cdot a^n = a^m \cdot \frac{1}{a^{-n}} = \frac{a^m}{a^{-n}};$$

Лік $-n$ дадатны; значыць, па даказанаму ў § 71

$$\frac{a^m}{a^{-n}} = a^{m-(-n)} = a^{m+n}.$$

Таму

$$a^m \cdot a^n = \frac{a^m}{a^{-n}} = a^{m+n}.$$

Выпадак 3. Хоць бы адзін з паказчыкаў m і n роўны нулю. Няхай, напрыклад, $m=0$. Тады па азначэнню нулявой ступені

$$a^m \cdot a^n = a^0 \cdot a^n = 1 \cdot a^n = a^n,$$

але $a^{m+n} = a^{0+n} = a^n$. Значыць, формула

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

правільная і ў гэтым выпадку.

Такім чынам, пры $a \neq 0$ формула

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

правільная для любых цэлых лікаў m і n.

Аналагічна могуць быць даказаны і астатнія чатыры ўласцівасці ступеней з цэлымі паказчыкамі, упамянутыя ў пачатку гэтага параграфа.

Прыклады.

1) $4^{-5} \cdot 4^8 = 4^3 = 64$;

2) $(3^2)^{-4} = 3^{-8} = \frac{1}{6561}$;

3) $\left[\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\right]^3 = [(5^{-1})^{-2}]^3 = [5^2]^3 = 5^6 = 15625.$

У заключэнне адзначым яшчэ дзве ўласцівасці ступеней з цэлымі паказчыкамі (завучваць гэтыя ўласцівасці не трэба).

1) Калі $a > b > 0$ і n адмоўны, то $a^n < b^n$, гэта значыць ***з дзвюх ступеней з дадатнымі асновамі і аднолькавымі адмоўнымі паказчыкамі большая тая, аснова якой меншая.***

Напрыклад,

$$5^{-3} < 4^{-3} \quad \left(\frac{1}{125} < \frac{1}{64}\right); \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \quad (9 > 4)$$

і г. д.

2) ***Калі $0 < a < 1$, то з дзвюх ступеней a^m і a^n большая тая, паказчык якой меншы.***

Калі $a > 1$, то з дзвюх ступеней a^m і a^n большая тая, паказчык якой большы. Пад m і n тут падразумяваюцца любыя цэлыя лікі, а не толькі натуральныя.

Напрыклад, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$, або $32 > 16$;

$$2^{-5} < 2^{-4}, \text{ або } \frac{1}{32} < \frac{1}{16}$$

і г. д.

Прапануем вучням даказаць гэтыя ўласцівасці самастойна.

Практыкаванні

532. Вылічыць:

а) $a^5 \cdot a^{-3}$; $a^4 \cdot a^{-1}$; $a^3 : a^{-1}$; $a^{-3} : a^{-1}$;

б) $3a^5 \cdot 4a^4$; $5a^n : \frac{1}{2} a^{-n}$; $\frac{3}{2} a^{-m} : a^m$;

в) $3^{12} \left(\frac{1}{27}\right)^{-4}$; $8^{-5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{15}$; $\frac{2^{-1} \cdot a^3 (a+b)}{3^{-2} a^{-2} (a+b)^{-3}}$;

г) $[a - (1-a)^{-1}] \cdot \frac{(a-2) + a^0}{\frac{1}{a^{-2}} - a + 1}$;

д) $(x^{-2} + a^{-3})(x^{-2} - a^{-3})$;

е) $\frac{a^{-2}b^{-1} + a^{-1}b^{-2}}{a^{-2} - b^{-2}} + a^3 (a^2 + 2ab + b^2)^{-2}$.

533. Які лік большы:

а) 5^{-63} ці 5^{-64};

б) 5^{-63} ці 6^{-63};

в) 5^{-63} ці $\left(\frac{1}{5}\right)^{-33}$;

г) $\left(\frac{1}{5}\right)^{63}$ ці 5^{-63}?

534. Спрасціць выраз

$$\frac{[1{,}5(a-1)]^{-1}}{[3(a-b)]^{-2}} : \left[1 + a^{-1} - 2b^{-1} + \frac{(1-b^{-1})^2}{a^{-1} - 1}\right]$$

і знайсці яго лікавае значэнне пры

$$a = -4; \quad b = -\frac{1}{2}.$$

535. Пры якім паказчыку n ступень a^n не залежыць ад асновы a?

§ 73. Функцыі $y = x^n$ пры $n = 1, 2, 3$

Кожнаму значэнню велічыні x формула

$$y = x^n,$$

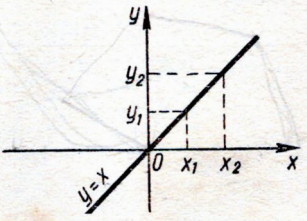
дзе n — натуральны лік, ставіць у адпаведнасць зусім пэўнае значэнне велічыні y. Такім чынам, гэта формула вызначае y як функцыю аргумента x. Разгледзім функцыі пры $n = 1, 2, 3$.

1. Функцыя $y = x$. Гэта функцыя вызначана для ўсіх значэнняў x. Таму можна сказаць, што вобласцю вызначэння функцыі $y = x$ з'яўляецца сукупнасць усіх лікаў.

Дадзеная функцыя прымае любыя лікавыя значэнні. Мноства ўсіх значэнняў, якія прымае тая ці іншая функцыя, называецца *вобласцю змянення* гэтай функцыі. Таму можна сказаць, што вобласцю змянення функцыі $y = x$ таксама з'яўляецца сукупнасць усіх лікаў.

Графік функцыі $y = x$ (рыс. 94) ёсць прамая, якая праходзіць праз пачатак каардынат і дзеліць першы і трэці каардынатныя вуглы папалам. Гэты графік добра ілюструе ўласцівасці функцыі $y = x$.

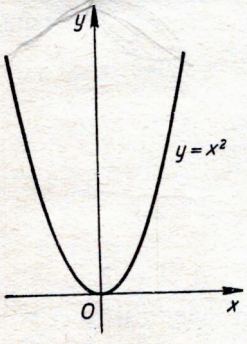
Так, большаму значэнню аргумента x адпавядае і большае значэнне функцыі y. Напрыклад, пры $x_2 > x_1$ $y_2 > y_1$ (рыс. 94). Такія функцыі прынята называць *манатонна ўзрастаючымі*.



Рыс. 94.

Функцыя $y = x$ *няцотная*. Гэта азначае, што пры перамене знака аргумента на процілеглы яна, не змяняючыся па абсалютнай велічыні, мяняе свой знак на процілеглы. Графік функцыі $y = x$ сіметрычны адносна пачатку каардынат.

2. Функцыя $y = x^2$. Гэта функцыя была падрабязна вывучана намі ў раздзеле III. Вобласцю яе вызначэння з'яўляецца мноства ўсіх сапраўдных лікаў, а вобласцю змянення — мноства ўсіх неадмоўных лікаў. Графікам гэтай функцыі з'яўляецца накіраваная ўверх парабала з вяршыняй у пачатку каардынат (рыс. 95). Як відаць з рысунка, пры адмоўных значэннях аргумента x функцыя $y = x^2$ *манатонна ўбывае*. Гэта азначае, што з двух адмоўных значэнняў аргумента большаму адпавядае меншае значэнне функцыі. Пры дадатных значэннях аргумента функцыя $y = x^2$ *манатонна ўзрастае*. Гэта азначае, што з двух дадатных значэнняў аргумента большаму адпавядае большае значэнне функцыі. Пры $x = 0$ функцыя прымае най-



Рыс. 95.

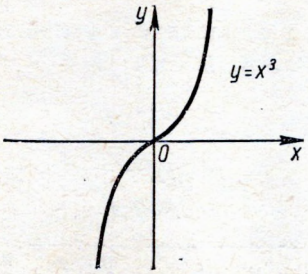
меншае значэнне, роўнае нулю. Найбольшага значэння функцыя не мае.

Функцыя $y=x^2$ *цотная*. Гэта азначае, што змяненне знака аргумента x на процілеглы не змяняе значэння функцыі y. Графік такой функцыі сіметрычны адносна восі y.

3. Функцыя $y=x^3$. Вобласцю вызначэння гэтай функцыі з'яўляецца мноства ўсіх сапраўдных лікаў. Функцыя з'яўляецца няцотнай, паколькі $(-x)^3=-x^3$. Таму для пабудавання яе графіка дастаткова скласці табліцу значэнняў толькі для дадатных значэнняў аргумента x.

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$y=x^3$	0	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{8}$	1	8	27

Значэнні функцыі для адмоўных x адрозніваюцца ад значэнняў функцыі для адпаведных дадатных x толькі знакамі. Напрыклад, пры $x=\frac{1}{4}$ $y=\frac{1}{64}$, таму пры $x=-\frac{1}{4}$ y будзе роўны $-\frac{1}{64}$; пры $x=2$ $y=8$; таму пры $x=-2$ y будзе роўны -8 і г. д. Цяпер, выкарыстоўваючы складзеную табліцу і ўласцівасць няцотнасці функцыі $y=x^3$, пабудуем графік гэтай функцыі (рыс. 96). Крывая, паказаная на рысунку 96, называецца *кубічнай парабалай*.



Рыс. 96.

Кубічная парабала наглядна дэманструе, што функцыя $y=x^3$ усюды манатонна ўзрастае, прымаючы любыя значэнні. Вобласцю змянення гэтай функцыі з'яўляецца сукупнасць усіх сапраўдных лікаў. Трэба асобна адзначыць паводзіны гэтай крывой паблізу пачатку каардынат. Тут кубічная парабала падыходзіць да восі, як бы адначасова і датыкаючыся да гэтай восі і перасякаючы яе.

Практыкаванні

536. Якія агульныя ўласцівасці маюць функцыі

$$y=x,\ y=x^2 \text{ і } y=x^3?$$

537. Пабудаваць графікі функцый:

а) $y=x^3-1$; в) $y=(x+2)^3$;

б) $y=(x-1)^3$; г) $y=|x^3|$.

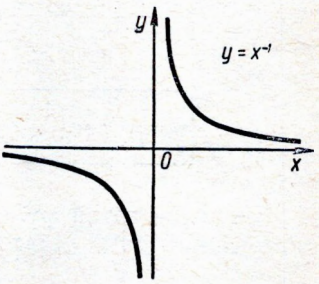
§ 74. Функцыі $y=x^n$ пры $n=-1$ і $n=-2$

1. Функцыя $y=x^{-1}$. Вобласцю вызначэння функцыі $y=x^{-1}$, або $y=\frac{1}{x}$, з'яўляецца мноства ўсіх сапраўдных лікаў, акрамя

нуля. Гэта функцыя няцотная, паколькі $\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$. Таму для пабудавання яе графіка дастаткова скласці табліцу значэнняў толькі для дадатных значэнняў аргумента x.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	2	3	4
$y = x^{-1}$	4	2	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

Выкарыстоўваючы гэту табліцу і ўласцівасць няцотнасці функцыі $y=x^{-1}$, пабудуем яе графік (рыс. 97). Гэты графік, як відаць з рысунка, складаецца з дзвюх крывых, адна з якіх цалкам знаходзіцца ў першым, а другая — у трэцім каардынатным вугле. Яны сіметрычны адна другой адносна пачатку каардынат. Разам гэтыя крывыя называюцца *гіпербалай*, а кожная з крывых паасобку — *галіной гіпербалы*.



Рыс. 97.

Заўважым, што пры ўсіх дадатных значэннях x функцыя $y=x^{-1}$ манатонна ўбывае. Тое ж правільна і для ўсіх адмоўных значэнняў x. Аднак было б памылкова сцвярджаць, што гэта функцыя з'яўляецца манатонна ўбываючай усюды. Напрыклад, значэнню аргумента $x_1=-1$ адпавядае значэнне функцыі $y_1=-1$, а значэнню аргумента $x_2=+1$ — значэнне функцыі $y_2=1$. Маем: $x_2>x_1$ і $y_2>y_1$. Для манатонна ўбываючай функцыі з $x_2>x_1$ павінна вынікаць $y_2<y_1$. Але тут гэтая ўмова не выконваецца. Такім чынам, гаварыць, што функцыя $y=x^{-1}$ усюды манатонна ўбывае, нельга. Аднак можна сказаць, што гэта функцыя ўбывае на любым адрэзку, на якім яна вызначана (гэта значыць на любым адрэзку восі x, які не змяшчае нуля).

Функцыя $y=x^{-1}$ прымае любыя лікавыя значэнні, акрамя нуля. Значыць, вобласцю яе змянення, гэтак жа як і вобласцю вызначэння, з'яўляецца мноства ўсіх сапраўдных лікаў, акрамя нуля.

Трэба звярнуць увагу на паводзіны функцыі $y=x^{-1}$ паблізу пункта $x=0$. Калі значэнні аргумента x неабмежавана набліжаюцца да нуля, застаючыся дадатнымі, то адпаведныя значэнні функцыі y неабмежавана ўбываюць. Калі ж значэнні аргумента x неабмежавана набліжаюцца да нуля, застаючыся адмоўнымі, то адпаведныя значэнні функцыі y неабмежавана ўбываюць.

2. Функцыя $y = x^{-2}$. Вобласцю вызначэння функцыі $y = x^{-2}$, або $y = \frac{1}{x^2}$, з'яўляецца мноства ўсіх сапраўдных лікаў, акрамя нуля. Паколькі

$$(-x)^{-2} = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2} = x^{-2},$$

то функцыя $y = x^{-2}$ цотная. Таму для пабудавання графіка гэтай функцыі дастаткова скласці табліцу яе значэнняў толькі для дадатных значэнняў x:

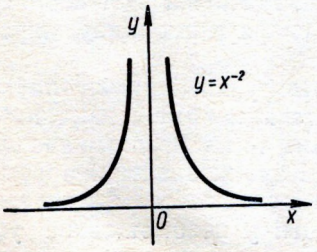
x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	2	3
$y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$	16	4	$\frac{16}{9}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$

Значэнні гэтай функцыі пры адмоўных x роўны яе значэнням пры адпаведных дадатных x. Напрыклад,

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 16.$$

Выкарыстоўваючы складзеную табліцу і ўласцівасць цотнасці функцыі $y = x^{-2}$, пабудуем яе графік (рыс. 98). Ён складаецца з дзвюх галін, адна з якіх цалкам размешчана ў першым, а другая — у другім каардынатным вугле. Гэтыя крывыя сіметрычны адна другой адносна восі ардынат. Неабходна падкрэсліць, што ні адну з іх паасобку нельга лічыць графікам функцыі $y = x^{-2}$. Толькі ўзятыя разам, яны ўтвараюць гэты графік.

Функцыя $y = x^{-2}$, або $y = \frac{1}{x^2}$, прымае толькі дадатныя значэнні. Таму графік яе размешчан цалкам вышэй восі x.



Рыс. 98.

Калі значэнні аргумента x неабмежавана ўзрастаюць (або неабмежавана ўбываюць), адпаведныя значэнні функцыі y неабмежавана набліжаюцца да нуля, застаючыся ўвесь час дадатнымі. Пры неабмежаваным набліжэнні значэнняў аргумента x да нуля (як злева, так і справа) адпаведныя значэнні функцыі y неабмежавана ўзрастаюць. Вобласцю змянення функцыі $y = x^{-2}$ з'яўляецца сукупнасць усіх дадатных лікаў.

Практыкаванні

538. Пабудаваць графікі функцый:

а) $y = (x - 1)^{-1}$; г) $y = |x|^{-1}$;

б) $y = (x + 2)^{-1}$; д) $y = x^{-2} - 2$;

в) $y = |x^{-1}|$; е) $y = \dfrac{x+2}{x+1}$.

§ 75. Корань *n*-й ступені з сапраўднага ліку *a*

Няхай n — натуральны лік, большы або роўны 2, а a — адвольны сапраўдны лік. Тады *коранем n-й ступені з ліку a* (абазначаецца $\sqrt[n]{a}$) *называецца лік, n-я ступень якога роўна a.*

Напрыклад, $\sqrt[3]{-8} = -2$, таму што $(-2)^3 = -8$; $\sqrt[4]{81} = 3$, таму што $3^4 = 81$. Лік -3 таксама з'яўляецца коранем 4-й ступені з ліку 81, паколькі $(-3)^4 = 3^4 = 81$.

Увайшло ў звычай корані другой ступені называць *квадратнымі*, а корані трэцяй ступені — *кубічнымі*. У выразах тыпу $\sqrt[2]{a}$ лік 2 звычайна апускаюць і пішуць проста $\sqrt{a}$.

Фактычна корань n-й ступені з сапраўднага ліку a мы вызначаем як корань ураўнення

$$x^n = a.$$

Ураўненні, як мы ведаем, могуць мець, а могуць і не мець кораняў. Зусім гэтак жа корань n-й ступені з ліку a можа існаваць, а можа і не існаваць. Калі ж ён існуе і колькі розных значэнняў можа ён прымаць? Гэта пытанне будзе разгледжана ў наступных параграфах.

Практыкаванні

539. У якую суму ператворыцца грашовы ўклад у a рублёў праз n год, калі штогадовы прырост складае $p\%$?

540. Вызначыць штогадовы прырост, калі вядома, што праз кожныя 20 год уклад павялічваецца ў два разы.

541. Прадукцыйнасць працы павялічваецца кожны год на адзін і той жа лік працэнтаў у параўнанні з мінулым годам. У выніку за тры гады яна ўзрасла на 27%. На колькі працэнтаў яна павялічвалася кожны год?

542. На колькі працэнтаў трэба павялічваць прадукцыйнасць працы штогод, каб за 7 год яна вырасла ў два разы?

§ 76. Корань *n*-й ступені з дадатнага ліку

Тэарэма 1. ***Для любога дадатнага ліку a існуе дадатны корань n-й ступені.***

Іншымі словамі, для любога натуральнага ліку n і любога дадатнага ліку a ўраўненне

$$x^n = a$$

мае дадатны корань.

Мы не будзем даказваць гэту тэарэму, а скажам толькі, як можна знаходзіць набліжанае значэнне дадатнага кораня ступені n з дадатнага ліку a. Знойдзем, напрыклад, набліжанае значэнне $\sqrt[3]{2}$.

Набліжанымі значэннямі кораня з дакладнасцю да 1 будуць, відавочна, 1 (з недахопам) і 2 (з лішкам). Каб знайсці першы дзесятковы знак набліжанага значэння $\sqrt[3]{2}$, знойдзем у радзе

1,0; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9; 2,0

два такія лікі, што стаяць побач, каб куб першага з іх быў менш 2, а куб другога — больш 2. Для гэтага возьмем з лікаў нашага рада сярэдні 1,5 і ўзвядзём яго ў куб. Мы знойдзем: $1{,}5^3 = 3{,}375$, што больш 2. Паколькі лікі, што стаяць справа ад 1,5, пры ўзвядзенні ў куб даюць рэзультат яшчэ большы, то мы можам адкінуць усю правую палавіну рада і далей выпрабоўваць толькі лікі:

1,1; 1,2; 1,3; 1,4.

Узвядзём у куб сярэдні з гэтых лікаў 1,2. Атрымаем 1,728, што менш 2. Куб ліку 1,1 будзе яшчэ меншы. Значыць, далейшаму выпрабаванню падлягаюць толькі лікі 1,3 і 1,4.

Узвёўшы ў куб 1,3, атрымаем 2,197, што больш 2. Значыць, мы знайшлі два лікі 1,2 і 1,3, такія, што куб першага з іх менш 2, а куб другога больш 2. Гэтыя лікі і будуць набліжанымі значэннямі $\sqrt[3]{2}$ з дакладнасцю да 0,1: 1,2 — з недахопам, а 1,3 — з лішкам.

Для знаходжання сотых доляў патрэбна выпрабаваць наступныя лікі:

1,21; 1,22; 1,23; 1,24; . . .; 1,29.

Узяўшы ў гэтым радзе сярэдні лік 1,25 і ўзвёўшы яго ў куб, знойдзем $1{,}25^3 = 1{,}953125$, што менш 2. Значыць, цяпер трэба выпрабаваць толькі лікі

1,26; 1,27; 1,28; 1,29.

Маем: $1{,}26^3 = 2{,}000376$, што больш 2. Значыць, набліжанымі значэннямі $\sqrt[3]{2}$ з дакладнасцю да 0,01 будуць: 1,25 (з недахопам) і 1,26 (з лішкам).

Калі дадзены працэс знаходжання паслядоўных дзесятковых знакаў кораня прадоўжыць далей, то мы будзем атрымліваць значэнні $\sqrt[3]{2}$ усё з большай і большай дакладнасцю.

Мы паказалі на прыкладзе, як набліжана, але з любой ступенню дакладнасці можна адшукаць корань трэцяй ступені з дадатнага ліку 2. Такім жа чынам можна знаходзіць набліжаныя значэнні кораня любой ступені з любога дадатнага ліку.

Адзначым, што калі $\sqrt[n]{a}$ дадзім у выглядзе канечнага дзесятковага дробу, то ў прынцыпе з дапамогай апісанага метаду значэнне кораня можна атрымаць абсалютна дакладна (а не набліжана).

Тэарэма 2. ***Усякі дадатны лік a мае роўна адзін дадатны корань ступені n.***

Доказ будзем весці метадам ад адваротнага. Дапусцім, што існуе некалькі розных дадатных кораняў n-й ступені з дадатнага ліку a. Няхай b і c — два такія корані. Тады

$$b^n = c^n = a. \qquad (1)$$

Паколькі лікі b і c розныя, то адзін з іх большы за другі. Няхай, напрыклад, $b > c$. Тады павінна быць $b^n > c^n$, але гэта супярэчыць суадносіне (1). Значыць, наша меркаванне аб існаванні некалькіх розных дадатных кораняў няправільнае. Такім чынам, існуе толькі адзін дадатны корань n-й ступені з дадатнага ліку a.

А ці існуюць адмоўныя корані n-й ступені з дадатнага ліку a? Адказ на гэта пытанне даюць наступныя тэарэмы.

Тэарэма 3. ***Адмоўны корань няцотнай ступені з дадатнага ліку не існуе.***

Іншымі словамі, пры дадатным a ўраўненне

$$x^{2k+1} = a$$

не мае адмоўных кораняў.

Доказ гэтай тэарэмы вельмі просты, і таму мы апускаем яго. Вучні без асаблівай цяжкасці могуць правесці яго самастойна.

Тэарэма 4. ***Адмоўны корань цотнай ступені з дадатнага ліку існуе і прытым толькі адзін. Ён адрозніваецца ад дадатнага кораня з гэтага ліку толькі знакам.***

Доказ. Няхай b ёсць дадатны корань ураўнення

$$x^{2k} = a \quad (a > 0).$$

Такі корань існуе па тэарэме 1. Але тады

$$b^{2k} = a$$

і, значыць,

$$(-b)^{2k}=a.$$

А гэта азначае, што адмоўны лік $-b$ з'яўляецца коранем n-й ступені з ліку a. Тым самым даказана *існаванне* адмоўнага кораня.

Дапусцім цяпер, што адмоўных кораняў ступені $2k$ з дадатнага ліку a некалькі. Няхай $-b$ і $-c$ — два такія корані. Тады

$$(-b)^{2k}=(-c)^{2k}=a.$$

Адсюль вынікае, што

$$b^{2k}=c^{2k}=a.$$

Значыць, існуюць два розныя дадатныя корані ступені $2k$ з дадатнага ліку a: b і c. Але гэта супярэчыць тэарэме 2. Такім чынам, наша меркаванне аб існаванні двух розных адмоўных кораняў ступені $2k$ з ліку a няправільнае. Тым самым даказана *адзінасць* адмоўнага кораня.

Тэарэма 4 даказана.

Аб'ядноўваючы цяпер тэарэмы 1, 2, 3 і 4, мы прыходзім да наступнага вываду:

Існуе роўна адзін корань няцотнай ступені з дадатнага ліку. Гэты корань дадатны.

Існуюць роўна два корані цотнай ступені з дадатнага ліку. Гэтыя корані роўныя па абсалютнай велічыні і процілеглыя па знаку.

Прыклады. $\sqrt[5]{32}=2$; $\sqrt[3]{125}=5$; $\sqrt[4]{16}=\pm 2$; $\sqrt[4]{81}=\pm 3$.

Практыкаванні

543. Знайсці ўсе значэнні кораняў:

а) $\sqrt[3]{125}$; в) $\sqrt[3]{4096}$;

б) $\sqrt[4]{1296}$; г) $\sqrt[4]{4096}$.

544. Ці можна сцвярджаць, што $\sqrt{9}>\sqrt{4}$?

545. Знайсці ўсе значэнні, якія можа прымаць выраз $\sqrt{4}+\sqrt{9}$.

§ 77. Арыфметычнае значэнне кораня

У папярэднім параграфе было паказана, што любы дадатны лік мае два корані цотнай ступені: дадатны і адмоўны. Напрыклад, $\sqrt{9}=\pm 3$; $\sqrt[4]{16}=\pm 2$ і г. д.

Дадатны корань цотнай ступені з дадатнага ліку называецца яго *арыфметычным значэннем* або *арыфметычным коранем*. Так, арыфметычным значэннем $\sqrt{9}$ будзе лік 3, а арыфметычным значэннем $\sqrt[6]{64}$ — лік 2.

Усюды ў далейшым пад $\sqrt[2k]{a}$ $(a>0)$ *мы будзем падразумяваць арыфметычны корань ступені* $2k$ *з ліку* a. Напрыклад, $\sqrt{16}=4$, $\sqrt{25}=5$ і г. д. У сувязі з гэтым карысна адзначыць наступную важную формулу:

$$\sqrt{x^2}=\begin{cases} x, \text{ калі } x>0, \\ -x, \text{ калі } x<0, \\ 0, \text{ калі } x=0. \end{cases}$$

Іншымі словамі,

$$\sqrt{x^2}=|x|.$$

Памылкова было б напісаць $\sqrt{x^2}=x$, таму што пры адмоўных значэннях x мы мелі б справу з адмоўным (неарыфметычным) коранем.

Прыклады.

1) $\sqrt{(4-a)^2}=|4-a|=\begin{cases} 4-a, \text{ калі } a<4, \\ a-4, \text{ калі } a>4, \\ 0, \text{ калі } a=4; \end{cases}$

2) $\sqrt{(x^2+x+1)^2}=x^2+x+1$.

У дадзеным выпадку знак модуля можна не пісаць, таму што пры любых значэннях x $x^2+x+1>0$.

Практыкаванні

546. Знайсці арыфметычныя значэнні кораняў:

а) $\sqrt{(x-1)^2}$; в) $\sqrt{(2x^2-3x+1)^2}$;

б) $\sqrt{(x+2)^2}$; г) $\sqrt{(-3x^2+x-1)^2}$.

547. Пабудаваць графікі функцый:

а) $y=\sqrt{(x-1)^2}$; в) $y=\sqrt{x^6}$;

б) $y=\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$; г) $y=-\sqrt{x^4}$.

548. Вылічыць суму

$$\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(3-x)^2}.$$

549. Пабудаваць графік функцыі

$$y=\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(3-x)^2}.$$

550. Рашыць ураўненне

$$\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt{(5-x)^2}=2.$$

551. Рашыць ураўненні:

а) $\sqrt{(x+6)^2} = x+6$;

б) $\sqrt{(1-2x)^4} = (1-2x)^2$;

в) $\sqrt{(x^2+2x-3)^2} = x^2+2x-3$;

г) $\sqrt{(8-4x-x^2)^2} = x^2+4x-8$.

§ 78. Корань n-й ступені з адмоўнага ліку $-a$.

Тэарэма 1. ***Кораняў цотнай ступені з адмоўнага ліку не існуе.***

Іншымі словамі, ураўненне

$$x^{2k} = -a \qquad (a>0)$$

не мае сапраўдных кораняў.

Мы прапануем вучням даказаць гэту тэарэму самастойна.

Тэарэма 2. ***Існуе і прытым толькі адзін корань няцотнай ступені з адмоўнага ліку. Гэты корань адмоўны.***

Іншымі словамі, ураўненне

$$x^{2k+1} = -a \qquad (a>0)$$

мае адзіны корань. Гэты корань з'яўляецца адмоўным.

Доказ. Перш за ўсё пакажам, што корань няцотнай ступені $2k+1$ з адмоўнага ліку $-a$ не можа быць дадатным. Калі б гэты корань (абазначым яго праз b) быў дадатным, то ў роўнасці $b^{2k+1} = -a$ левая частка была б дадатнай, а правая — адмоўнай.

Цяпер пакажам, што адмоўны корань няцотнай ступені $2k+1$ з адмоўнага ліку $-a$ існуе.

Лік a дадатны, і таму ён мае дадатны корань ступені $2k+1$ (тэарэма 1, § 76). Абазначым яго праз b. Тады

$$b^{2k+1} = a.$$

Адсюль вынікае, што

$$(-b)^{2k+1} = -b^{2k+1} = -a.$$

Але гэта і азначае, што адмоўны лік $-b$ з'яўляецца коранем ступені $2k+1$ з адмоўнага ліку $-a$.

Засталося толькі паказаць, што існуе не больш аднаго адмоўнага кораня няцотнай ступені $2k+1$ з ліку $-a$.

Для доказу дапусцім адваротнае, гэта значыць, што існуе некалькі такіх кораняў. Няхай $-b$ і $-c$ — два такія корані. Тады

$$(-b)^{2k+1} = -a, \ (-c)^{2k+1} = -a. \qquad (1)$$

Але паколькі лік $2k+1$ няцотны, то

$$(-b)^{2k+1} = -b^{2k+1};$$

$$(-c)^{2k+1} = -c^{2k+1};$$

Таму з (1) вынікае, што

$$b^{2k+1} = a,\ c^{2k+1} = a.$$

А гэта, у сваю чаргу, азначае, што дадатны лік a мае два розныя дадатныя корані ступені $2k+1$: b і c, але гэта супярэчыць тэарэме 2 з § 72.

Тэарэма поўнасцю даказана. Аб'ядноўваючы тэарэмы 1 і 2, мы прыходзім да наступнага вываду.

Кораняў цотнай ступені з адмоўнага ліку не існуе. Існуе роўна адзін корань няцотнай ступені з адмоўнага ліку. Гэты корань з'яўляецца адмоўным.

Прыклады.

Кораняў $\sqrt[4]{-81}$, $\sqrt[100]{-25}$ не існуе; $\sqrt[5]{-32} = -2$; $\sqrt[3]{-125} = -5$.

Практыкаванні

552. (Вусна.) Якія з дадзеных выразаў не маюць сэнсу: $\sqrt{-9}$; $\sqrt[3]{-8}$; $\sqrt{-0{,}25}$; $\sqrt[4]{-81}$; $\sqrt[7]{-2}$?

553. Знайсці вобласці вызначэння наступных функцый:

а) $y = \sqrt{x-1}$;

б) $y = \sqrt[5]{x-1}$;

в) $y = \sqrt[12]{3x^2+5x-2}$;

г) $y = \sqrt[8]{(x+2)(x-7)}$;

д) $y = \sqrt[6]{x^2+x+1}$;

е) $y = \sqrt[3]{3-x} + \sqrt[4]{5x-5}$.

§ 79. Здабыванне кораняў са здабытку і дзелі

Тэарэма 1. ***Корань n-й ступені са здабытку дадатных лікаў роўны здабытку кораняў n-й ступені з сумножнікаў,*** гэта значыць пры $a > 0$, $b > 0$ і натуральным n

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}. \qquad (1)$$

Д о к а з. Напомнім, што корань n-й ступені з дадатнага ліку ab ёсць такі дадатны лік, n-я ступень якога роўна ab. Таму даказаць роўнасць (1) — гэта ўсё роўна, што даказаць роўнасць

$$\left(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\right)^n = ab.$$

Па ўласцівасці ступені здабытку

$$\left(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n\cdot\left(\sqrt[n]{b}\right)^n.$$

Але па азначэнню кораня n-й ступені

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a,\ \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = b.$$

Таму

$$\left(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\right)^n = ab.$$

Тэарэма даказана.

Патрабаванне $a>0$, $b>0$ істотна толькі для цотнага n, паколькі пры адмоўных a і b і цотным n корані $\sqrt[n]{a}$ і $\sqrt[n]{b}$ не вызначаны. Калі ж n — няцотны лік, то формула (1) справядлівая для любых a і b (як дадатных, так і адмоўных).

П р ы к л а д ы.

$$\sqrt{16\cdot 121} = \sqrt{16}\cdot\sqrt{121} = 4\cdot 11 = 44;$$

$$\sqrt[3]{-125\cdot 27} = \sqrt[3]{-125}\cdot\sqrt[3]{27} = -5\cdot 3 = -15.$$

Формулу (1) карысна прымяніць пры вылічэнні кораняў, калі падкарэнны выраз даецца ў выглядзе здабытку дакладных квадратаў. Напрыклад,

$$\sqrt{153^2-72^2} = \sqrt{(153+72)(153-72)} =$$

$$= \sqrt{225\cdot 81} = 15\cdot 9 = 135.$$

Тэарэму 1 мы даказалі для выпадку, калі пад знакам радыкала ў левай частцы формулы (1) стаіць здабытак двух дадатных лікаў. На самай жа справе гэта тэарэма правільная для любога ліку дадатных сумножнікаў, гэта значыць пры любым натуральным $k\geqslant 2$:

$$\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_k} = \sqrt[n]{a_1}\cdot\sqrt[n]{a_2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{a_k}.$$

В ы н і к. Чытаючы гэту тоеснасць справа налева, мы атрымліваем наступнае правіла множання кораняў з аднолькавымі паказчыкамі:

$$\sqrt[n]{a_1}\cdot\sqrt[n]{a_2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{a_k} = \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_k}.$$

Каб перамножыць карані з аднолькавымі паказчыкамі, дастаткова перамножыць падкарэнныя выразы, пакінуўшы паказчык кораня ранейшым.

Напрыклад, $\sqrt{3}\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{3\cdot 8\cdot 6}=\sqrt{144}=12$.

Тэарэма 2. ***Корань n-й ступені з дробу, лічнік і назоўнік якога — дадатныя лікі, роўны дзелі ад дзялення кораня той жа ступені з лічніка на корань той жа ступені з назоўніка,*** гэта значыць пры $a>0$ і $b>0$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}. \qquad (2)$$

Даказаць роўнасць (2) — гэта значыць паказаць, што

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\frac{a}{b}.$$

Па правілу ўзвядзення дробу ў ступень і азначэнню кораня n-й ступені маем:

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n}=\frac{a}{b}.$$

Тым самым тэарэма даказана.

Патрабаванне $a>0$ і $b>0$ істотна толькі пры цотным n. Калі ж n няцотны, то формула (2) правільная і для адмоўных значэнняў a і b.

Прыклады.

$$\sqrt{\frac{36}{49}}=\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}}=\frac{6}{7};$$

$$\sqrt[3]{-\frac{64}{27}}=\frac{\sqrt[3]{-64}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{-4}{3}=-\frac{4}{3}.$$

Вынік. Чытаючы тоеснасць $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ справа налева, мы атрымліваем наступнае правіла дзялення дробаў з аднолькавымі паказчыкамі:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Каб падзяліць корані з аднолькавымі паказчыкамі, дастаткова падзяліць падкарэнныя выразы, пакінуўшы паказчык кораня ранейшым.

Напрыклад, $\frac{\sqrt{126}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{126}{14}} = \sqrt{9} = 3.$

Практыкаванні

554. У якім месцы доказу тэарэмы 1 мы выкарысталі тое, што a і b дадатныя?

Чаму пры няцотным n формула (1) правільная і для адмоўных лікаў a і b?

Пры якіх значэннях x правільныя дадзеныя роўнасці (№ 555—560):

555. $\sqrt{x^2-9} = \sqrt{x-3} \cdot \sqrt{x+3}$.

556. $\sqrt[4]{(x-2)(8-x)} = \sqrt[4]{x-2} \cdot \sqrt[4]{8-x}$.

557. $\sqrt[3]{(x+1)(x-5)} = \sqrt[3]{x+1} \cdot \sqrt[3]{x-5}$.

558. $\sqrt{x(x+1)(x+2)} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+2}$.

559. $\sqrt{(x-a)^3} = (\sqrt{x-a})^3$.

560. $\sqrt[3]{(x-5)^2} = (\sqrt[3]{x-5})^2$.

561. Вылічыць:

а) $\sqrt{173^2-52^2}$; в) $\sqrt{200^2-56^2}$;

б) $\sqrt{373^2-252^2}$; г) $\sqrt{242{,}5^2-46{,}5^2}$.

562. У прамавугольным трохвугольніку гіпатэнуза роўна 205 *см*, а адзін з катэтаў 84 *см*. Знайсці другі катэт.

563. У колькі разоў

а) $\sqrt{45}$ больш $\sqrt{5}$;

б) $\sqrt[3]{\frac{5}{256}}$ менш $\sqrt[3]{\frac{5}{64}}$?

§ 80. Здабыванне кораня са ступені. Узвядзенне кораня ў ступень. Здабыванне кораня з кораня

Няхай a — адвольны дадатны лік, а m і n — натуральныя лікі, прычым m дзеліцца без астатку на n. Тады

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}. \qquad (1)$$

Напрыклад, $\sqrt[3]{5^6} = 5^2 = 25$; $\sqrt[4]{3^{12}} = 3^3 = 27$.

Іншымі словамі, правільная наступная тэарэма.

Тэарэма 1. ***Каб здабыць корань са ступені дадатнага ліку, паказчык якой дзеліцца нацэла на паказ-***

чык кораня, дастаткова паказчык падкарэннага выразу падзяліць на паказчык кораня, пакінуўшы аснову ступені ранейшай.

Доказ. На аснове правіла ўзвядзення ступені ў ступень маем:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{mn}{n}} = a^m.$$

Але гэта азначае, што

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Тэарэма 2. ***Каб корань з дадатнага ліку ўзвесці ў ступень, дастаткова ўзвесці ў гэту ступень падкарэнны лік, пакінуўшы паказчык кораня без змянення,*** гэта значыць пры $a > 0$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}. \tag{2}$$

Сапраўды,

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a}}_{m} = \sqrt[n]{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Калі n — няцотны лік, то формула (2) правільная і для $a < 0$.

Прыклады.

$$\left(\sqrt[4]{2}\right)^3 = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8};$$

$$\left(\sqrt[6]{16}\right)^3 = \sqrt[6]{16^3} = \sqrt[6]{2^{12}} = 2^2 = 4;$$

$$\left(\sqrt[3]{-2}\right)^5 = \sqrt[3]{(-2)^5} = \sqrt[3]{-32}.$$

Тэарэма 3. ***Велічыня кораня з дадатнага ліку не зменіцца, калі паказчыкі кораня і падкарэннага выразу памножыць на адзін і той жа натуральны лік або падзяліць на іх агульны множнік.***

Іншымі словамі: 1. Калі $a > 0$ і m, n, k — натуральныя лікі, то

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}. \tag{3}$$

2. Калі $a > 0$ і k — агульны дзельнік лікаў m і n, то

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[\frac{n}{k}]{a^{\frac{m}{k}}}. \tag{4}$$

Даказаць формулу (3) — гэта значыць паказаць, што

$$\left(\sqrt[nk]{a^{mk}}\right)^n = a^m.$$

Па правілу ўзвядзення кораня ў ступень

$$\left(\sqrt[nk]{a^{mk}}\right)^n = \sqrt[nk]{a^{mkn}}.$$

Паказчык mkn ступені дзеліцца нацэла на паказчык nk кораня. Значыць, па тэарэме 1

$$\sqrt[nk]{a^{mkn}} = a^m.$$

Таму

$$\left(\sqrt[nk]{a^{mk}}\right)^n = a^m.$$

Гэта і азначае, што

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}.$$

Доказ формулы (4) праводзіцца аналагічна. Прапануем вучням правесці гэты доказ самастойна.

Прыклады.

$$\sqrt[4]{3} = \sqrt[8]{3^2};\quad \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[9]{2^6};\quad \sqrt[15]{a^{10}} = \sqrt[3]{a^2}.$$

Тэарэма 4. ***Каб здабыць корань з кораня, дастаткова перамножыць паказчыкі гэтых кораняў, не змяняючы падкарэннага ліку,*** гэта значыць

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a} \quad (a > 0). \tag{5}$$

Доказ. Па тэарэме 2

$$\left(\sqrt[nm]{a}\right)^n = \sqrt[nm]{a^n}.$$

Велічыня кораня не зменіцца, калі паказчык кораня і паказчык падкарэннага ліку падзяліць на іх агульны множнік (тэарэма 3); таму

$$\sqrt[nm]{a^n} = \sqrt[m]{a}.$$

Такім чынам,

$$\left(\sqrt[nm]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a}.$$

Але па азначэнню кораня гэта і значыць, што

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}.$$

Напрыклад,

$$\sqrt{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[6]{4};\quad \sqrt[5]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[15]{2}.$$

Практыкаванні

564. Спрасціць выразы:

1) $\sqrt[10]{2^5}$; 2) $\sqrt[12]{3^4}$; 3) $\sqrt[12]{(-3)^4}$; 4) $\sqrt[8]{a^4}$;

5) $\sqrt[6]{\frac{8}{27}}$; 6) $\sqrt{\frac{625}{256}}$; 7) $\sqrt[16]{\left(-\frac{36}{81}\right)^4}$.

565. Спрасціць выразы:

1) $\sqrt[6]{(\sqrt{7}-2)^3}$; 4) $\sqrt[10]{(\sqrt{3}-4)^2}$;

2) $\sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^2}$; 5) $\sqrt[8]{(\sqrt{5}-2)^4}$;

3) $\sqrt[9]{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^3}$; 6) $\sqrt[6]{(1-\sqrt{2})^3}$.

566. Спрасціць выразы:

1) $\sqrt[8]{[(x-1)(x+1)]^4}$; 2) $\sqrt[8]{(x^2-x+1)^4}$.

567. (В у с н а.) Спрасціць выразы:

1) $\sqrt{\sqrt[3]{6}}$; 5) $\sqrt[5]{\sqrt{10}}$;

2) $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$; 6) $\sqrt[7]{\sqrt{7}}$;

3) $\sqrt{\sqrt[4]{8}}$; 7) $\sqrt{\sqrt[3]{(-3)}}$;

4) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{-243}}$; 8) $\sqrt[9]{\sqrt[9]{9}}$.

§ 81. Вынясенне множніка з-пад знака кораня і ўвядзенне яго пад знак кораня

Іншы раз падкарэнны выраз раскладаецца на такія множнікі, корані з якіх здабываюцца даволі лёгка. У такіх выпадках выраз можна спрасціць пры дапамозе вынясення множніка з-пад знака кораня. Напрыклад,

$$\sqrt{12}=\sqrt{4\cdot 3}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3};$$

$$\sqrt[4]{1250}=\sqrt[4]{625\cdot 2}=\sqrt[4]{5^4\cdot 2}=\sqrt[4]{5^4}\cdot\sqrt[4]{2}=5\sqrt[4]{2}.$$

Вынясенне множніка за знак кораня дазваляе спрасціць і больш складаныя выразы. Так,

$$\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{98}=\sqrt{9\cdot 2}+\sqrt{25\cdot 2}-\sqrt{49\cdot 2}=$$
$$=3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-7\sqrt{2}=\sqrt{2};$$
$$\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{375}=\sqrt[3]{27\cdot 3}-\sqrt[3]{8\cdot 3}+\sqrt[3]{125\cdot 3}=$$
$$=3\sqrt[3]{3}-2\sqrt[3]{3}+5\sqrt[3]{3}=6\sqrt[3]{3}.$$

Іншы раз бывае карысным, наадварот, увесці які-небудзь множнік пад знак кораня.

Няхай, напрыклад, трэба вылічыць набліжанае значэнне $7\sqrt{8}$ з недахопам з дакладнасцю да 0,1. Увядзём 7 пад знак кораня. Для гэтага заўважым, што

$$7 = \sqrt{49}.$$

Таму

$$7\sqrt{8} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{49 \cdot 8} = \sqrt{392}.$$

Здабываючы корань з 392 звычайным спосабам, атрымаем наступнае набліжанае значэнне гэтага кораня з недахопам з дакладнасцю да 0,1: $\sqrt{392} \approx 19{,}7$. Калі б мы не ўвялі 7 пад знак кораня, а вылічылі б набліжанае значэнне $\sqrt{8}$ з дакладнасцю да 0,1 ($\sqrt{8} \approx 2{,}8$) і атрыманы рэзультат памножылі на 7, то атрымалі б $7\sqrt{8} \approx 19{,}6$, гэта значыць памыліліся б на 0,1. Гэты прыклад паказвае, якую карысць можа прынесці ўвядзенне множніка пад знак кораня.

Акрамя таго, увядзенне множніка пад знак кораня разам з іншымі пераўтварэннямі іншы раз значна спрашчае выраз. Напрыклад,

$$\sqrt[3]{16\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{16^2 \cdot 2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^8 \cdot 2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^9}} =$$
$$= \sqrt[6]{2^9} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}.$$

Практыкаванні

568. Не здабываючы кораняў, вызначыць, які з дадзеных лікаў большы:

а) $2\sqrt{3}$ ці $3\sqrt{2}$;

б) $2\sqrt[3]{3}$ ці $3\sqrt[3]{2}$;

в) $5\sqrt{7}$ ці $8\sqrt{3}$;

г) $3\sqrt[3]{4}$ ці $4\sqrt[3]{2}$.

569. Вылічыць:

а) $2\sqrt{3} - \sqrt{27} + 3\sqrt{12} - 2\sqrt{243}$;

б) $\sqrt{50} - 5\sqrt{8} + \sqrt{2} + \sqrt{128}$;

в) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{686} - \sqrt[3]{16}$.

570. Спрасціць:

а) $\sqrt{5\sqrt[3]{625}}$; б) $\sqrt[3]{3\sqrt[4]{3\sqrt[5]{3}}}$;

в) $\sqrt[4]{12\sqrt{9\sqrt[3]{4}}}$; д) $\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}}}$;

г) $\sqrt[5]{2\sqrt[4]{4\sqrt[3]{8}}}$; е) $\sqrt{\frac{a+1}{a-1}\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}}$.

571. Вылічыць з дакладнасцю да 0,01:

а) $2\sqrt{7}$; б) $5\sqrt{3}$; в) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$;

г) $2\sqrt{7}+5\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{6}$.

572. Вылічыць:

а) $(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}+\sqrt{6})\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\sqrt{3})$;

б) $(\sqrt{8}-3\sqrt{2}+\sqrt{10})\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{1{,}6}+3\sqrt{0{,}4})$;

в) $(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})\cdot(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})$;

г) $(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})\cdot(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})$.

573. Што больш:

а) $\sqrt{2}$ або $\sqrt[3]{3}$; в) $\sqrt{8}$ або $\sqrt[3]{19}$;

б) $\sqrt[3]{12}$ або $\sqrt{5}$; г) $\sqrt[12]{2}$ або $\sqrt[15]{3}$?

§ 82. Множанне і дзяленне кораняў

1. Множанне кораняў. У § 79 было атрымана правіла множання кораняў з а д н о л ь к а в ы м і паказчыкамі:

$$\sqrt[n]{a_1}\cdot\sqrt[n]{a_2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{a_k}=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_k}.$$

Каб перамножыць корані з р о з н ы м і паказчыкамі, іх трэба папярэдне прывесці да агульнага паказчыка, а затым перамножыць так, як корані з аднолькавымі паказчыкамі.

Няхай, напрыклад, трэба памножыць $\sqrt[n]{a}$ на $\sqrt[m]{b}$. Скарыстаўшы тэарэму 3, § 80, можна напісаць:

$$\sqrt[n]{a}=\sqrt[nm]{a^m};\ \sqrt[m]{b}=\sqrt[mn]{b^n}.$$

Адсюль

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[nm]{a^m}\cdot\sqrt[nm]{b^n}=\sqrt[nm]{a^mb^n}.$$

Напрыклад,

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}=\sqrt[6]{3^3}\cdot\sqrt[6]{9^2}=\sqrt[6]{3^3\cdot9^2}=\sqrt[6]{3^3\cdot3^4}=\sqrt[6]{3^7}=3\sqrt[6]{3}.$$

У якасці агульнага паказчыка для кораняў $\sqrt[n]{a}$ і $\sqrt[m]{b}$ зручней за ўсё выбіраць найменшае агульнае кратнае лікаў n і m. Напрыклад, калі нам трэба памножыць $\sqrt[4]{2}$ на $\sqrt[6]{32}$, то ў якасці агульнага паказчыка для дадзеных кораняў зручна выбраць лік 12, які з'яўляецца найменшым агульным кратным лікаў 4 і 6.

Тэарэма 3, § 80, дае: $\sqrt[4]{2} = \sqrt[12]{2^3}$, $\sqrt[6]{32} = \sqrt[12]{32^2} = \sqrt[12]{2^{10}}$. Таму

$$\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[6]{32} = \sqrt[12]{2^3} \cdot \sqrt[12]{2^{10}} = \sqrt[12]{2^{13}} = 2\sqrt[12]{2}.$$

2. Дзяленне кораняў. У § 79 было атрымана правіла дзялення кораняў з аднолькавымі паказчыкамі:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Каб падзяліць корані з р о з н ы м і паказчыкамі, папярэдне трэба іх прывесці да агульнага паказчыка, а затым падзяліць як корані з аднолькавымі паказчыкамі.

Напрыклад,

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[6]{4^2}}{\sqrt[6]{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{2^4}{2^3}} = \sqrt[6]{2}.$$

Практыкаванні

574. Выканаць дадзеныя дзеянні:

а) $\sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt[15]{a^4}$;

б) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a}$;

в) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{6}}$;

г) $a\sqrt{4a} \cdot \sqrt[4]{4a} \cdot a^2 \cdot \sqrt[8]{4a^3}$;

д) $\sqrt[12]{a^5} : \sqrt[4]{a}$;

е) $\sqrt[9]{a^8} : \sqrt[6]{a^5}$;

ж) $\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2}}$.

575. Што больш:

а) $\frac{\sqrt[15]{3^{10}}}{\sqrt[10]{3^3}}$ або $\frac{\sqrt[14]{3^9}}{\sqrt[9]{3^2}}$;

б) $\frac{\sqrt[8]{2^5}}{\sqrt[6]{2}}$ або $\frac{\sqrt[4]{2^7}}{\sqrt[3]{2^4}}$?

§ 83. Вызваленне ад радыкалаў у назоўніку дробу

Некаторыя дробы, якія маюць у назоўніку радыкалы, з дапамогай пераўтварэнняў могуць быць зведзены да дробаў, якія ўжо не маюць радыкалаў у назоўніках. Растлумачым гэта на радзе прыватных прыкладаў.

Прыклад 1. Вызваліцца ад радыкала ў назоўніку дробу $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Памножыўшы лічнік і назоўнік дадзенага дробу на $\sqrt{3}$, атрымаем $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

Прыклад 2. Вызваліцца ад радыкала ў назоўніку дробу $\frac{5}{\sqrt[3]{12}}$.

Лік 12, які стаіць пад знакам радыкала, раскладзём на сумножнікі: $12 = 2^2 \cdot 3$. Да поўнага куба не хапае, відавочна, множніка $2 \cdot 3^2 = 18$. Памножыўшы лічнік і назоўнік дадзенага дробу на $\sqrt[3]{18}$, атрымаем

$$\frac{5}{\sqrt[3]{12}} = \frac{5\sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{18}} = \frac{5\sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{2^2 \cdot 3} \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 3^2}} = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{18}}{2 \cdot 3} = \frac{5}{6}\sqrt[3]{18}.$$

Прыклад 3. Вызваліцца ад радыкалаў у назоўніку дробу $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

Памножыўшы лічнік і назоўнік дадзенага дробу на $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ (гэты выраз называецца супрэжаным да выразу $\sqrt{3}+\sqrt{2}$), атрымаем

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} = (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 = 3-2\sqrt{6}+2 = 5-2\sqrt{6}.$$

Прыклад 4. Вылічыць $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ з дакладнасцю да 0,1.

Разглядаючы прыклад 3, мы атрымаем $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = 5+2\sqrt{6}$.

Але $2\sqrt{6} = \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{24} \approx 4{,}8$ (з дакладнасцю да 0,1), таму $5+2\sqrt{6} \approx 9{,}8$ (з дакладнасцю да 0,1).

Калі б мы замест гэтага ў зыходны дроб падстаўлялі набліжаныя значэнні $\sqrt{3}$ і $\sqrt{2}$ з дакладнасцю да 0,1:

$$\sqrt{3} \approx 1{,}7; \quad \sqrt{2} \approx 1{,}4,$$

то атрымалі б

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \approx \frac{3{,}1}{0{,}3} \approx 10{,}3,$$ што дае значную памылку.

Прыклад 5. Вызваліцца ад радыкалаў у назоўніку дробу

$$\frac{4}{1+\sqrt{3}-\sqrt{2}}.$$

Вызваліцца ад радыкалаў у назоўніку дадзенага дробу можна ў два прыёмы. Спачатку памножым лічнік і назоўнік дадзенага дробу на $1+\sqrt{3}+\sqrt{2}$. У рэзультаце мы вызвалімся ад радыкала $\sqrt{2}$:

$$\frac{4}{1+\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{4\left[(1+\sqrt{3})+\sqrt{2}\right]}{\left[(1+\sqrt{3})-\sqrt{2}\right]\left[(1+\sqrt{3})+\sqrt{2}\right]}=$$

$$=\frac{4\left[1+\sqrt{3}+\sqrt{2}\right]}{(1+\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{4\left(1+\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{(4+2\sqrt{3})-2}=$$

$$=\frac{4\left(1+\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{2+2\sqrt{3}}=\frac{2\left(1+\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{1+\sqrt{3}}.$$

Затым лічнік і назоўнік атрыманага дробу памножым на $1-\sqrt{3}$. У рэзультаце атрымаем

$$\frac{2\left(1+\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{1+\sqrt{3}}=\frac{2\left(1+\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)}=$$

$$=\frac{2\left(1-\sqrt{3}+\sqrt{3}-3+\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)}{1-3}=2-\sqrt{2}+\sqrt{6}.$$

Прыклад 6. Вызваліцца ад радыкалаў у назоўніку дробу

$$\frac{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}}.$$

Памножым лічнік і назоўнік дадзенага дробу на няпоўны квадрат сумы лікаў $\sqrt[3]{5}$ і $\sqrt[3]{3}$, гэта значыць на $(\sqrt[3]{5})^2+\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{3}+(\sqrt[3]{3})^2$. Тады ў назоўніку атрымаецца рознасць кубаў лікаў $\sqrt[3]{5}$ і $\sqrt[3]{3}$: $(\sqrt[3]{5})^3-(\sqrt[3]{3})^3=5-3=2$, а ў лічніку $(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{5\cdot 3}+\sqrt[3]{3^2})=\sqrt[3]{5^3}+\sqrt[3]{5^2\cdot 3}+$ $+\sqrt[3]{5\cdot 3^2}+\sqrt[3]{3\cdot 5^2}+\sqrt[3]{5\cdot 3^2}+\sqrt[3]{3^3}=5+\sqrt[3]{75}+\sqrt[3]{45}+\sqrt[3]{75}+$ $+\sqrt[3]{45}+3=8+2\sqrt[3]{75}+2\sqrt[3]{45}$.

Таму $\dfrac{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}}=\dfrac{8+2\sqrt[3]{75}+2\sqrt[3]{45}}{2}=4+\sqrt[3]{75}+\sqrt[3]{45}.$

Практыкаванні

576. Вызваліцца ад радыкалаў у назоўніках дробаў:

1) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; 5) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$; 9) $\frac{15}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{7}}$;

2) $\frac{3}{\sqrt{6}}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{5}}$; 10) $\frac{1}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{24}}$;

3) $\frac{1}{\sqrt[3]{75}}$; 7) $\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$; 11) $\frac{12}{3+\sqrt{2}-\sqrt{5}}$;

4) $\frac{1}{\sqrt[3]{18}}$; 8) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$; 12) $\frac{31}{2+\sqrt{2}-\sqrt{5}}$.

577. Знайсці набліжаныя значэнні выразаў з дакладнасцю да 0,01:

а) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$; б) $\frac{13-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$; в) $\frac{36-5\sqrt{17}}{2-\sqrt{17}}$.

578. Вызваліцца ад радыкалаў у назоўніках дробаў:

1) $\frac{1}{\sqrt{5+\sqrt{2}}}$; 2) $\frac{1}{2-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}$; 3) $\frac{\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}}{\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}$.

Стар 35, 36

§ 84. Ступень дадатнага ліку з дадатным дробавым паказчыкам

У § 80 мы даказалі наступнае сцверджанне. Калі a — адвольны дадатны лік, а m і n — натуральныя лікі ($n \geqslant 2$), прычым m дзеліцца без астатку на n, то

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Зусім натуральна жаданне абагульніць гэту формулу для выпадку адвольных натуральных лікаў. Але дзяленне ў вобласці натуральных лікаў, наогул кажучы, невыканальнае. Таму дзель $\frac{m}{n}$ можа быць дробавым лікам. Такім чынам, мы сутыкаемся з неабходнасцю разгляду ступені з дробавымі паказчыкамі.

А з н а ч э н н е. Няхай a — адвольны дадатны лік і лікі m і n — адвольныя натуральныя лікі. Тады

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}. \qquad (1)$$

Напрыклад, $9^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{9^5} = \sqrt[4]{9^4 \cdot 9} = 9\sqrt[4]{9} = 9\sqrt{3}$;

$$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{2^6} = 4.$$

Ступень дадатнага ліку з дадатным дробавым паказчыкам ёсць корань, паказчык якога роўны назоўніку дадзенага дробавага паказчыка, а падкарэнны выраз — ступень зыходнага дадатнага ліку з паказчыкам, які роўны лічніку дадзенага дробавага паказчыка.

З а ў в а г а. Уведзенае азначэнне не распаўсюджваецца на ступені з а д м о ў н ы м і асновамі. Для адмоўных a формула (1) можа наогул не мець сэнсу. Напрыклад, пісаць $(-2)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{-2}$ нельга, паколькі выраз $\sqrt[4]{-2}$ не вызначаны.

Як мы ведаем, велічыня дробу $\frac{m}{n}$ не зменіцца, калі лічнік і назоўнік гэтага дробу памножыць на які-небудзь натуральны лік k або падзяліць на які-небудзь іх агульны дзельнік p.

$$\frac{m}{n} = \frac{mk}{nk}; \quad \frac{m}{n} = \frac{\frac{m}{p}}{\frac{n}{p}}.$$

Зусім зразумела, што ўведзенае намі азначэнне ступені $a^{\frac{m}{n}}$ будзе карэктным толькі ў тым выпадку, калі

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mk}{nk}}, \tag{2}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{\frac{m}{p}}{\frac{n}{p}}}. \tag{3}$$

І гэтыя суадносіны сапраўды выконваюцца*. Дакажам, напрыклад, формулу (2). Маем:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},$$

$$a^{\frac{mk}{nk}} = \sqrt[nk]{a^{mk}}.$$

Але $$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}.$$

Адсюль і атрымліваецца суадносіна (2).

---

* Паколькі p ёсць агульны дзельнік лікаў m і n, то лікі $\frac{m}{p}$ і $\frac{n}{p}$ з'яўляюцца цэлымі.

Формула (3), калі яе чытаць справа налева,

$$a^{\frac{\frac{m}{p}}{\frac{n}{p}}} = a^{\frac{m}{n}},$$

выражае па сутнасці тое ж самае, што і формула (2). Толькі ролю m тут адыгрывае цэлы лік $\frac{m}{p}$, ролю n — цэлы лік $\frac{n}{p}$, а ролю k — лік p. Таму ў спецыяльным доказе формула (3) не мае патрэбы.

Формулы (2) і (3) выражаюць наступны факт: ***велічыня ступені дадатнага ліку з дадатным дробавым паказчыкам не зменіцца, калі назоўнік і лічнік паказчыка памножыць на які-небудзь натуральны лік або падзяліць на іх агульны сумножнік.***

Напрыклад,

$$a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{4}{6}} = a^{\frac{6}{9}} = \dots,$$

$$a^{\frac{8}{16}} = a^{\frac{4}{8}} = a^{\frac{2}{4}} = \dots.$$

Практыкаванне

579. Вылічыць:

а) $64^{\frac{2}{3}}$; б) $27^{\frac{4}{3}}$; в) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$;

г) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{4}}$; д) $125^{\frac{5}{6}} : 5$; е) $144^{\frac{3}{4}} : 9$.

§ 35. Асноўныя ўласцівасці ступені дадатнага ліку з дадатным дробавым паказчыкам

У гэтым параграфе мы разгледзім асноўныя ўласцівасці ступені дадатнага ліку з дадатным дробавым паказчыкам. Паколькі ступень адмоўнага ліку з дадатным дробавым паказчыкам, наогул кажучы, не вызначана, то заўсёды, не агаворваючы гэта спецыяльна, мы будзем дапускаць, што аснова ступені ёсць лік дадатны.

Пералічым асноўныя ўласцівасці ступені, якія мы хочам разгледзець:

1) $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}$;

2) $(a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$;

3) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$;

4) $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}}$;

5) $\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}$, калі $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$.

Раней чым прыступіць да разгляду гэтых уласцівасцей, напомнім аб тым вельмі важным факце, аб якім мы гаварылі ў папярэднім параграфе.

Велічыня ступені з дробавым паказчыкам не зменіцца, калі лічнік і назоўнік паказчыка памножыць на любы натуральны лік або падзяліць на іх агульны множнік:

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mk}{nk}};$$

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{\frac{m}{p}}{\frac{n}{p}}}.$$

Цяпер пяройдзем да доказу 1-й уласцівасці ступені:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}.$$

Каб перамножыць дзве ступені з аднолькавымі асновамі, дастаткова паказчыкі ступеней скласці, а аснову пакінуць ранейшай.

Сапраўды,

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mq}{nq}}, \quad a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{pn}{qn}}.$$

Значыць,

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq}{nq}} \cdot a^{\frac{pn}{qn}} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{pn}}.$$

Па правілу множання кораняў з аднолькавымі паказчыкамі

$$\sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq} \cdot a^{pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq+pn}}.$$

Але

$$\sqrt[nq]{a^{mq+pn}} = a^{\frac{mq+pn}{nq}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}.$$

Таму

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}},$$

што і трэба было даказаць.

Прыклады.

$$3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = 3^1 = 3;$$

$$a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{4}{5}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{4}{5}} = a^{\frac{22}{15}} \quad (a > 0).$$

1-я ўласцівасць ступені, якую мы даказалі для двух сумножнікаў, на самай справе правільная і для любога ліку сумножнікаў. Напрыклад,

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}.$$

Астатнія ўласцівасці ступеней з дробавым паказчыкам прапануем вучням сфармуляваць і даказаць самастойна.

Практыкаванні.

580. Даказаць тоеснасці:

а) $\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right) = a - b;$

б) $\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right) = a + b;$

в) $\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right) = a - b.$

581. Што больш:

а) $8^{\frac{3}{2}}$ або $12^{\frac{3}{4}}$; в) $12^{\frac{3}{2}}$ або $18^{\frac{2}{3}}$;

б) $64^{\frac{4}{3}}$ або $36^{\frac{3}{2}}$; г) $\left(\frac{1}{18}\right)^{\frac{3}{4}}$ або $\left(\frac{1}{12}\right)^{\frac{4}{3}}$?

582. Спрасціць:

$$\frac{3\sqrt{a}}{a} + a^{\frac{1}{6}}\sqrt[3]{a} - \frac{a^{\frac{2}{7}}}{\sqrt[21]{a}} - \frac{3a^0}{\sqrt{a}} \quad (a > 0).$$

583. Спрасціць выразы:

а) $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}}\right)^{-4}$; б) $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \dfrac{x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}}}{x-y}$;

в) $\left[\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}{a-b} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right] \cdot (a-b) + 1.$

584. Якое значэнне прымае выраз

$$\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} - 4^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\left(27x^{\frac{9}{10}}\right)^{\frac{5}{3}}}{\left(3^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{10}}\right)^{10}} + 6\sqrt{x}$$

пры ўмове, што $x^3 = 3^{10}$.

§ 86. Ступень дадатнага ліку з адмоўным дробавым паказчыкам

Падобна да таго як у § 71 мы вызначылі ступень a^{-n} ліку a з адмоўным цэлым паказчыкам $-n$, можна вызначыць і ступень $a^{-\frac{m}{n}}$ дадатнага ліку a з адмоўным дробавым паказчыкам $-\frac{m}{n}$.

Няхай a — адвольны дадатны лік, а m і n — натуральныя лікі. Тады па азначэнню

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}.$$

Ступень дадатнага ліку з адмоўным дробавым паказчыкам роўна адзінцы, падзеленай на ступень таго ж ліку з паказчыкам, процілеглым паказчыку дадзенай ступені.

Напрыклад, $8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{4}$;

$$27^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{27^{\frac{5}{6}}} = \frac{1}{\sqrt[6]{27^5}} = \frac{1}{\sqrt[6]{3^{15}}} = \frac{1}{\sqrt{3^5}} = \frac{1}{9\sqrt{3}}.$$

Цяпер мы ведаем, што ўяўляе сабой ступень дадатнага ліку з любым рацыянальным паказчыкам.

Ступені з рацыянальнымі паказчыкамі маюць наступныя асноўныя ўласцівасці:

1) $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$;

2) $(ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$;

3) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$;

4) $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}}$;

5) $\dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$.

Часткова гэтыя ўласцівасці былі даказаны намі ў папярэдніх параграфах, але толькі для дадатных паказчыкаў. Зараз жа мы можам даказаць іх для адвольных рацыянальных паказчыкаў.

Дакажам, напрыклад, уласцівасць 1.

Для дадатных паказчыкаў $\frac{m}{n}$ і $\frac{p}{q}$ доказ быў дадзены ў папярэднім параграфе. Таму нам трэба разгледзець наступныя выпадкі:

1) абодва паказчыкі адмоўныя;
2) адзін з паказчыкаў адмоўны, а другі — дадатны;
3) хаця б адзін з паказчыкаў роўны нулю.

Няхай m, n, p і q — натуральныя лікі.

Пакажам, што

$$a^{-\frac{m}{n}} \cdot a^{-\frac{p}{q}} = a^{-\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}.$$

Сапраўды, па азначэнню ступені з адмоўным паказчыкам

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}, \quad a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}},$$

таму

$$a^{-\frac{m}{n}} \cdot a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \cdot \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}},$$

але

$$\frac{1}{a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}} = a^{-\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)} = a^{-\frac{m}{n}-\frac{p}{q}},$$

адкуль і вынікае патрэбная суадносіна.

Мы разгледзелі выпадак, калі паказчыкі кожнай з дзвюх ступеней адмоўныя. Зараз разгледзім выпадак, калі адзін з іх дадатны, а другі адмоўны. Дакажам, напрыклад, што

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{-\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}.$$

Маем:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{-\frac{p}{q}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}}.$$

Калі $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$, то па ўласцівасці, разгледжанай у папярэднім параграфе,

$$\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}.$$

Калі $\frac{m}{n} < \frac{p}{q}$, то

$$\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q} - \frac{m}{n}}},$$

але

$$\frac{1}{a^{\frac{p}{q} - \frac{m}{n}}} = a^{-\left(\frac{p}{q} - \frac{m}{n}\right)} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}.$$

Нарэшце, калі $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, то

$$\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = 1 = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}.$$

Тут мы скарыстоўваем азначэнне $a^0 = 1$. Такім чынам, пры любых суадносінах паміж $\frac{m}{n}$ і $\frac{p}{q}$

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{-\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}.$$

Нам засталося разгледзець выпадак, калі з дзвюх ступеней з аднолькавымі асновамі хаця б адна мае нулявы паказчык. Дакажам, напрыклад, што

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^0 = a^{\frac{m}{n} + 0}.$$

Сапраўды, $a^0 = 1$ і $\frac{m}{n} + 0 = \frac{m}{n}$. Таму

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^0 = a^{\frac{m}{n}} \cdot 1 = a^{\frac{m}{n}},$$

$$a^{\frac{m}{n} + 0} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Уласцівасць 1 даказана.

Аналагічна можна даказаць і ўсе астатнія ўласцівасці. Заў-

важым, што калі ў папярэднім параграфе мы маглі гаварыць аб уласцівасці 6 толькі пры $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$, то цяпер, выкарыстоўваючы азначэнне ступені дадатнага ліку з адмоўным дробавым паказчыкам, мы можам даказаць яе і для выпадку, калі $\frac{m}{n} \leqslant \frac{p}{q}$.

Напрыклад,

$$\frac{16^{\frac{3}{4}}}{16^{\frac{4}{5}}} = 16^{\frac{3}{4}-\frac{4}{5}} = 16^{-\frac{1}{20}} = (2^4)^{-\frac{1}{20}} = 2^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2}}.$$

Практыкаванні

585. Вылічыць:

а) $9^{-\frac{3}{2}}$; б) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$; в) $\left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{4}{3}}$;

г) $(25)^{-\frac{3}{2}}$; д) $(27)^{-\frac{5}{6}} \cdot 3^{2,5}$; е) $(6{,}25)^{-\frac{3}{4}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$.

Вылічыць (№ 586—592):

586. $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^0\right]^{-0,5} - 7{,}5 \cdot 4^{-\frac{3}{2}} - (-2)^{-4} + 81^{0,25}$.

587. $0{,}027^{-\frac{1}{3}} - \left(-\frac{1}{6}\right)^{-2} + 256^{0,75} - 3^{-1} + (5{,}5)^0$.

588. $\left(\frac{9}{16}\right)^{-\frac{5}{2}} : \left(\frac{25}{36}\right)^{-\frac{3}{2}} + \left[\left(\frac{4}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-\frac{2}{5}} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$.

589. $\left(9^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} - \left(25^{\frac{5}{2}}\right)^{-\frac{1}{10}} + \left[\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{6}{7}}\right]^0 : 36^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}}$.

590. $\left[4^{-\frac{1}{4}} + \left(\frac{1}{2^{-\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right] \cdot \left[4^{-0,25} - \left(2\sqrt{2}\right)^{-\frac{4}{3}}\right]$.

591. $\left[\left(a^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}\right)^{-1} \cdot (a-x) - \frac{a+x}{a^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}}}\right] \cdot 2\,(ax)^{-\frac{1}{3}}$.

592. $(1-a^2)^{-\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{1+a^2(1-a^2)^{-1}}\times$

$$\times\frac{(1-a^2)^{\frac{1}{2}}+a^2(1-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{1-a^2}\qquad(|a|<1).$$

593. Якое значэнне прымае выраз

$$\left[\frac{(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}+(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}}{(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}-(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}}\right]^{-2}\text{ пры }x=\left(\frac{m^2+n^2}{2mn}\right)^{\frac{1}{2}},$$

калі: 1) $n>m>0$; 2) $m>n>0$; 3) $m=n=1$?

594. Вылічыць

$$\left(x^{-2}+a^{-\frac{2}{3}}x^{-\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(a^{-2}+a^{-\frac{4}{3}}x^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

пры $x=\left(1-a^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}}$ $(0<a<1)$.

595. Спрасціць выраз

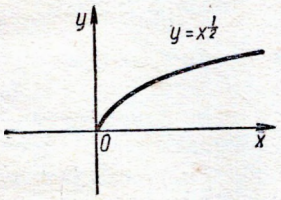
$$\left[\frac{\left(a^{\frac{3}{4}}-b^{\frac{3}{4}}\right)\left(a^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{3}{4}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\sqrt{ab}\right]\cdot\frac{2\sqrt{2{,}5}\,(a-b)^{-1}}{(10)^{-\frac{1}{2}}}.$$

§ 87. Функцыі $y=x^r$ пры $r=\frac{1}{2}$ і $r=\frac{1}{3}$

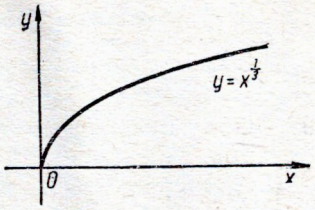
Функцыя $y=x^{\frac{1}{2}}$. Функцыя $y=x^{\frac{1}{2}}$, або $y=\sqrt{x}$, вызначана для ўсіх неадмоўных значэнняў аргумента x; таму вобласцю яе вызначэння з'яўляецца сукупнасць усіх неадмоўных лікаў. Графік гэтай функцыі (пабудаваны «па пунктах») паказаны на рысунку 99. Функцыя $y=x^{\frac{1}{2}}$ прымае любыя неадмоўныя значэнні; таму вобласцю яе змянення з'яўляецца сукупнасць усіх неадмоўных лікаў.

Дадзеная функцыя з'яўляецца манатонна ўзрастаючай. Гэта добра відаць на графіку, але можа быць строга даказана і без выкарыстання графіка. (З двух дадатных лікаў большаму адпавядае большы квадратны корань.)

Функцыя $y = x^{\frac{1}{3}}$. Функцыя $y = x^{\frac{1}{3}}$, або $y = \sqrt[3]{x}$, вызначана для ўсіх сапраўдных значэнняў аргумента x. Аднак мы абмяжуемся разглядам яе паводзін толькі для дадатных значэнняў x.



Рыс. 99.



Рыс. 100.

Графік функцыі $y=x^{\frac{1}{3}}$ для $x>0$ паказаны на рысунку 100. Як відаць з гэтага рысунка, паводзіны функцыі $y=x^{\frac{1}{3}}$ пры $x>0$ зусім аналагічны паводзінам функцыі $y=x^{\frac{1}{2}}$: яна прымае толькі дадатныя значэнні і з'яўляецца манатонна ўзрастаючай.

Практыкаванні

596. Выкарыстоўваючы графік функцыі $y=x^{\frac{1}{2}}$, знайдзіце набліжаныя значэнні кораняў:

а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{5}$.

597. Пабудаваць графікі функцый:

1) $y = \sqrt{x-1}$; 6) $y = \sqrt[3]{x-2}$;

2) $y = \sqrt{x}-1$; 7) $y = \sqrt[3]{x}-2$;

3) $y = \sqrt{x+2}$; 8) $y = \sqrt[3]{x+1}$;

4) $y = \sqrt{x}+2$; 9) $y = \sqrt[3]{x}+1$;

5) $y = -2\sqrt{x}$; 10) $y = -2\sqrt[3]{x}$.

598. Як размяшчаюцца адзін адносна другога графікі функцый:

а) $y = \sqrt{x}$ і $y = \sqrt{x+a}$;

б) $y = \sqrt[3]{x}$ і $y = a\sqrt[3]{x}$?

599. На рысунку 101 вы бачыце графік функцыі $y = \sqrt{x}$. Памылкова чарцёжнік забыў адзначыць на чарцяжы адзінку даўжыні (маштаб). Як з дапамогай цыркуля і лінейкі вызначыць па чарцяжу адзінку даўжыні?

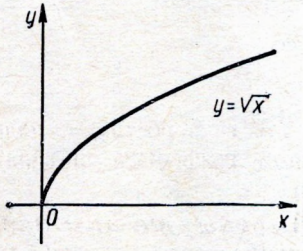
§ 88. Агульныя ўласцівасці ступенных функцый

Ступеннымі функцыямі называюцца функцыі выгляду $y = ax^r$, дзе a і r — дадзеныя сапраўдныя лікі. Згодна з гэтым азначэннем паказчык ступені r можа быць як рацыянальным, так і ірацыянальным. Але паколькі мы яшчэ не ведаем, што такое ступень з ірацыянальным паказчыкам, то пакуль абмяжуемся толькі выпадкам, калі лік r рацыянальны. Акрамя таго, мы будзем лічыць, што $a = 1$. Пасля таго як функцыя $y = x^r$ будзе вывучана, даследаванне функцый $y = ax^r$ не выклікае асаблівых цяжкасцей.

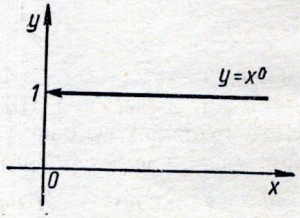
Некаторыя прыватныя прыклады ступенных функцый $y = x^r$ $\left(\text{пры } r = 1,\ 2,\ 3,\ -1,\ -2,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}\right)$ ужо разглядаліся намі ў § 73, 74, 87. Зараз мы разгледзім уласцівасці функцыі пры любым рацыянальным r.

Паколькі ступень x^r з рацыянальным паказчыкам r вызначана, наогул кажучы, толькі для дадатных значэнняў x, то і функцыю $y = x^r$ мы будзем разглядаць толькі для дадатных значэнняў аргумента x.

Ступенныя функцыі маюць наступныя асноўныя ўласцівасці.



Рыс. 101.



Рыс. 102.

Уласцівасць 1. ***Пры дадатных значэннях аргумента x ступенная функцыя $y = x^r$ прымае толькі дадатныя значэнні.***

Сапраўды, калі $r = 0$, то $x^r = 1 > 0$. Калі $r = \frac{m}{n}$, дзе m і n — натуральныя лікі, то $x^r = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$. Але $x > 0$; значыць, x^m таксама больш нуля, таму і $\sqrt[n]{x^m} > 0$. Калі $r = -\frac{m}{n}$, дзе m і

n — натуральныя лікі, то $x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$. Але $x^{\frac{m}{n}} > 0$, значыць, і $\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}} > 0$.

На рысунках 102—104 вы бачыце графікі ступеннай функцыі $y = x^r$ пры розных значэннях r.

Кожная з прыведзеных крывых размешчана вышэй восі x. Гэта і служыць графічным пацверджаннем 1-й уласцівасці ступеннай функцыі.

Уласцівасць 2. ***Калі лік r дадатны, то пры дадатных значэннях аргумента x ступенная функцыя $y = x^r$ з'яўляецца манатонна ўзрастаючай.***

Доказ. Няхай $r = \frac{m}{n} > 0$, $x_2 > x_1 > 0$. Дакажам, што $x_2^r > x_1^r$.

Гэта і будзе азначаць, што пры дадатных значэннях аргумента x функцыя $y = x^r$ манатонна ўзрастае.

Маем:

$$x_1^r = x_1^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x_1^m}; \quad x_2^r = x_2^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x_2^m}.$$

Паколькі $x_2 > x_1 > 0$, то $x_2^m > x_1^m$, прычым абодва гэтыя лікі дадатныя. Таму і

$$\sqrt[n]{x_2^m} > \sqrt[n]{x_1^m},$$

гэта значыць $x_2^{\frac{m}{n}} > x_1^{\frac{m}{n}}$, або $x_2^r > x_1^r$.

Як відаць з рысунка 103, крывыя $y = x^r$ з ростам x падымаюцца ўсё вышэй і вышэй. Гэта з'яўляецца графічным пацверджаннем 2-й уласцівасці ступеннай функцыі.

Уласцівасць 3. ***Калі лік r адмоўны, то пры дадатных значэннях аргумента x функцыя $y = x^r$ з'яўляецца манатонна ўбываючай.***

Доказ. Няхай $x_2 > x_1 > 0$ і $r = -\frac{m}{n}$, дзе m і n — натуральныя лікі. Пакажам, што

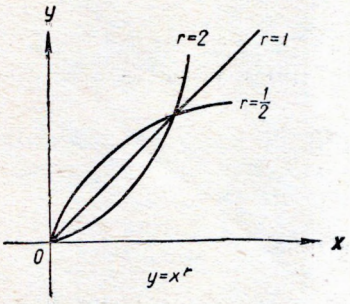
$$x_2^r < x_1^r.$$

Гэта і будзе азначаць, што пры дадатных значэннях аргумента x функцыя $y = x^r$ манатонна ўбывае. Маем:

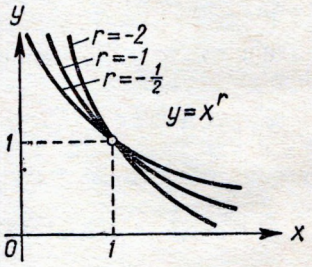
$$x_2^r = x_2^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{x_2^{\frac{m}{n}}}; \quad x_1^r = x_1^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{x_1^{\frac{m}{n}}}.$$

Паколькі $x_2 > x_1 > 0$, то па 2-й уласцівасці ступеннай функцыі $x_2^{\frac{m}{n}} > x_1^{\frac{m}{n}}$. Значыць,

$$\frac{1}{x_2^{\frac{m}{n}}} < \frac{1}{x_1^{\frac{m}{n}}}, \qquad x_2^{-\frac{m}{n}} < x_1^{-\frac{m}{n}},$$



Рыс. 103.



Рыс. 104.

або $x_2^r < x_1^r$, што і трэба было даказаць.

У заключэнне адзначым яшчэ адну важную ўласцівасць ступеннай функцыі.

Уласцівасць 4. ***Калі лік r дадатны, то пры неабмежаваным набліжэнні x да 0 адпаведныя значэнні функцыі $y = x^r$ неабмежавана набліжаюцца да 0; пры неабмежаваным узрастанні x адпаведныя значэнні функцыі $y = x^r$ неабмежавана ўзрастаюць.***

Калі лік r адмоўны, то пры неабмежаваным набліжэнні x да 0 адпаведныя значэнні функцыі $y = x^r$ неабмежавана ўзрастаюць; пры неабмежаваным росце x адпаведныя значэнні функцыі $y = x^r$ неабмежавана набліжаюцца да нуля.

Гэту ўласцівасць ступенных функцый лёгка зразумець, калі разглядаць графікі, якія паказаны на рысунках 103 і 104. Строгага доказу гэтых уласцівасцей мы не прыводзім.

Практыкаванні

600. Што больш:

а) $\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{6}{11}}$ або $\left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{6}{11}}$;

б) $(2\sqrt{3})^{\frac{2}{3}}$ або $(3\sqrt{2})^{\frac{2}{3}}$;

в) $0{,}357^{-\frac{1}{3}}$ або $0{,}358^{-\frac{1}{3}}$;

г) $(\sqrt{21})^{-\frac{2}{7}}$ або $(2\sqrt{5})^{-\frac{2}{7}}$?

601. Вядома, што m, n, p і q — натуральныя лікі, прычым $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$. Што можна сказаць аб дадатным ліку a, калі:

а) $a^{\frac{m}{n}} > a^{\frac{p}{q}}$; б) $a^{-\frac{m}{n}} > a^{-\frac{p}{q}}$?

602. Якія з дадзеных лікаў больш 1 і якія менш 1:

а) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{10}{3}}$; б) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-\frac{6}{5}}$; в) $\left(\frac{13}{17}\right)^{0}$?

Задачы на паўтарэнне

603. Якія вядомыя вам фізічныя законы апісваюцца з дапамогай ступенных функцый $y = ax^r$? Які фізічны сэнс маюць у іх параметры a і r?

604. Якія з прыведзеных ніжэй формул выражаюць тэарэмы і якія — азначэнні (m і n — адвольныя натуральныя лікі):

а) $a^0 = 1$; в) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$;

б) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$; г) $a^m : a^n = a^{m-n}$?

605. Пабудаваць графікі наступных функцый:

а) $y = \sqrt{(x-2)^2}$ і $y = x - 2$;

б) $y = \sqrt[3]{(x+1)^3}$ і $y = x + 1$;

в) $y = \sqrt{[(x-3)(x+2)]^2}$ і $y = (x-3)(x+2)$.

606*. Вылічыць $\left(a + x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(a - x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}$ пры $x = 4(a-1)$.

Вызваліцца ад радыкалаў у назоўніках дробаў (№ 607, 608):

607. $\frac{3 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 5\sqrt{6}}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{6}}$. **608.** $\frac{2 + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5} - \sqrt{3}}$.

Размясціць у парадку ўзрастання лікі (№ 609—611):

609. $\left(\frac{9}{4}\right)^{-0,1}$; $\left(\frac{9}{4}\right)^{0,2}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{6}}$.

610. $\left(\frac{4}{7}\right)^{-\frac{2}{3}}$; $\left(\frac{49}{16}\right)^{\frac{4}{3}}$; $\left(\frac{16}{49}\right)^{-\frac{1}{4}}$.

611. $\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{5}}$; $\left(\frac{125}{27}\right)^{-\frac{1}{15}}$; $\left(\frac{9}{25}\right)^{-4}$.

612. Даказаць формулы складаных радыкалаў:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}};$$

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

$$(a>0,\ b>0,\ \sqrt{a^2-b}>0).$$

Выкарыстоўваючы формулы складаных радыкалаў, спрасціць выразы (№ 613—615):

613. $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$. **614.** $\sqrt{6-\sqrt{20}}$.

615. $\sqrt{10-2\sqrt{21}}$.

616. Даказаць, што пры $1\leqslant x\leqslant 2$

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2.$$

Рашыць ураўненні (№ 617—619):

617. $\left(\frac{2\sqrt{x}}{x^2}\right)^{-3}=\left[(x\sqrt{x})^{-1}\right]^{-\frac{1}{2}}$.

618. $\left[(\sqrt[3]{x})^{-\frac{1}{2}}\right]^{\frac{6}{5}}=\left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right]^{\frac{6}{5}}$.

619. $\left(\frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3}}\right)^{-\frac{4}{5}}=\left(\sqrt[3]{x^2\sqrt{x^3}}\right)^{\frac{6}{7}}$.

Дадзеныя выразы (№ 620—623) спрасціць шляхам вынясення множнікаў за знак радыкала.

620. $\sqrt{a^3b}$. **622.** $\sqrt[3]{a^5b^2}$.

621. $\sqrt[3]{a^3b^2}$. **623.** $\sqrt[4]{a^5b^7}$.

624. Размясціць у парадку ўзрастання лікі:

$$1;\ \sqrt{2};\ \sqrt[3]{3};\ \sqrt[4]{4}.$$

625. Вылічыць

$$\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[12]{y^{19}}} \cdot \left(\frac{x^{-\frac{1}{2}} \sqrt[3]{y}}{\sqrt[4]{xy^{-1}}} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{x^{-\frac{3}{8}}}{y^{-\frac{2}{3}}} \right)^{\frac{4}{3}}$$

пры

$$x = 5, \quad y = 20.$$

626. Вылічыць

$$\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} \right)^{-2} \cdot (x^{-1} + y^{-1}) + \frac{2}{\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} \right)^{3}} \cdot \left(x^{-\frac{1}{2}} + y^{-\frac{1}{2}} \right),$$

калі вядома, што

$$\sqrt[3]{x} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{9} \right)^{-\frac{1}{3}}; \qquad \sqrt[7]{y} = \sqrt[7]{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{-1}.$$

Раздзел V

ТРЫГАНАМЕТРЫЧНЫЯ ФУНКЦЫІ

§ 89. Паняцце вектара і восі

Усе велічыні, якія вывучаюцца ў матэматыцы і фізіцы, можна разбіць на дзве групы. Да адной групы адносяцца тыя велічыні, якія цалкам характарызуюцца іх лікавымі значэннямі. Гэта даўжыня, плошча, аб'ём, час, маса і іншыя велічыні. Калі мы скажам, што даўжыня алоўка 10 *см* або тэмпература паветра роўна —5°, то даўжыня алоўка і тэмпература паветра тым самым будуць поўнасцю вызначаны. Але побач з такімі велічынямі існуюць і велічыні, якія нельга поўнасцю ахарактарызаваць лікавымі значэннямі. З фізікі, напрыклад, вядома, што сіла, скорасць, паскарэнне і некаторыя іншыя велічыні характарызуюцца не толькі сваімі лікавымі значэннямі, але і напрамкамі. Калі на матэрыяльны пункт дзейнічае сіла 5 *кГ*, то для таго каб сказаць, да чаго гэта прывядзе, трэба ведаць яшчэ напрамак гэтай сілы. Для поўнага апісання падобных велічынь побач з лікавымі значэннямі неабходна задаваць і іх напрамкі.

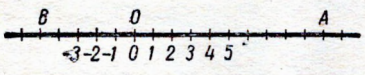
Велічыні, якія поўнасцю вызначаюцца сваімі лікавымі значэннямі, называюцца скалярнымі. Велічыні, якія характарызуюцца не толькі сваімі лікавымі значэннямі, але і напрамкамі, называюцца вектарнымі велічынямі.

Любую скалярную велічыню можна характарызаваць адрэзкам лікавай прамой. Напрыклад, даўжыню алоўка 10 *см* можна характарызаваць адрэзкам OA (рыс. 105), даўжыня якога роўна даўжыні алоўка. Тэмпературу —5° можна характарызаваць на лікавай прамой адрэзкам OB (рыс. 105), дзе пункт B знаходзіцца ад пункта O на адлегласці ў 5 адзінак даўжыні і ляжыць злева ад O, паказваючы, што на дварэ 5° марозу, а не цяпла.

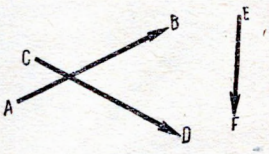
Такая інтэрпрэтацыя вектарных велічынь была б няпоўнай. Але падобна да таго як скалярныя велічыні можна характарызаваць адрэзкам лікавай прамой, вектарныя велічыні можна характарызаваць *накіраванымі адрэзкамі*, або *вектарамі*.

Вектар ёсць накіраваны адрэзак, гэта значыць адрэзак з фіксаваным становішчам свайго пачатку і свайго канца.

Напрамкам вектара лічыцца напрамак ад яго пачатку да яго канца. Звычайна вектар абазначаецца дзвюма літарамі, над якімі ставіцца стрэлачка, накіраваная вастрыём управа.



Рыс. 105.



Рыс. 106.

Пры гэтым першая літара абазначае пачатак вектара, а другая — канец. Так, вектары, якія паказаны на рысунку 106, абазначаюцца

$$\overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{CD},\quad \overrightarrow{EF}.$$

Адзіна істотнай характарыстыкай адрэзка з'яўляецца яго *даўжыня*. Вектар жа мае некалькі характарыстык: *пачатак, напрамак, даўжыню*. Кожная з гэтых характарыстык з'яўляецца па-свойму важнай. Няведанне хаця б адной з іх робіць вектар нявызначаным.

Побач з паняццем вектара, або накіраванага адрэзка, вялікую ролю ў матэматыцы адыгрывае таксама паняцце *накіраванай прамой*, або *восі*.

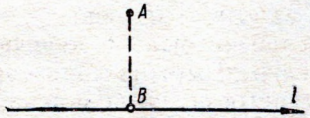
Практыкаванні

627. Якія з дадзеных велічынь з'яўляюцца скалярнымі і якія вектарнымі: аб'ём, скорасць, маса, паскарэнне, сіла току?

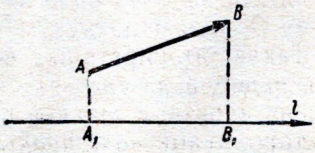
§ 90. Праекцыя вектара на вось

Як вядома, праекцыяй пункта A на вось l называецца аснова B перпендыкуляра, апушчанага з пункта A на гэту вось (рыс. 107).

Праекцыяй вектара $\overrightarrow{AB}$ на вось l называецца велічыня адрэзка A_1B_1, які злучае праекцыю пачатку дадзенага вектара



Рыс. 107.

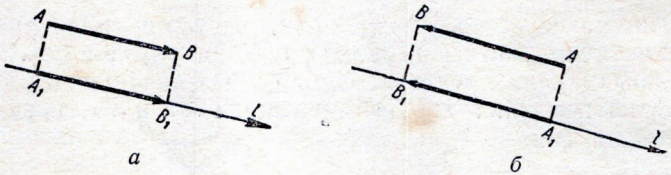


Рыс. 108.

з праекцыяй яго канца на вось l (рыс. 108—111). *Гэта велічыня лічыцца дадатнай, калі напрамак вектара* $\overrightarrow{A_1B_1}$ *супадае з напрамкам восі l, і адмоўнай у адваротным выпадку.*

Разгледзім некалькі прыкладаў.

1. Вектар $\overrightarrow{AB}$ даўжынёй r паралельны восі l. Калі напрамак гэтага вектара супадае з напрамкам восі l (рыс. 109, *а*), то яго праекцыя на вось l роўна r. Калі ж напрамак вектара AB процілеглы напрамку восі l (рыс. 109, *б*), то яго праекцыя роўна $-r$.

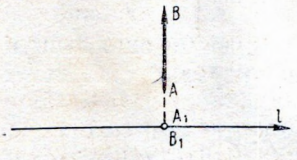


а *б*

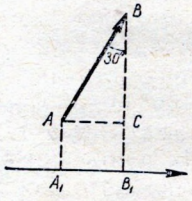
Рыс. 109.

2. Вектар $\overrightarrow{AB}$ перпендыкулярны да восі l (рыс. 110). У гэтым выпадку пункты A і B праектуюцца ў адзін і той жа пункт. Таму праекцыя $\overrightarrow{AB}$ на вось l роўна нулю.

3. Вектар $\overrightarrow{AB}$, які мае даўжыню r, размешчаны адносна восі l так, як паказана на рысунку 111. Тады яго праекцыя на



Рыс. 110.



Рыс. 111.

вось l роўна даўжыні адрэзка A_1B_1 або AC. З прамавугольнага трохвугольніка ABC знаходзім $AC = \frac{r}{2}$ (катэт, які ляжыць супраць вугла 30°, роўны палавіне гіпатэнузы).

Практыкаванні

628. Як зменіцца праекцыя вектара на вось, калі:

а) даўжыню вектара павялічыць у два разы;

б) напрамак вектара змяніць на процілеглы, а напрамак восі пакінуць ранейшым;

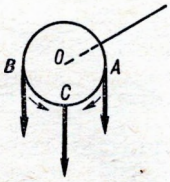
в) напрамак восі змяніць на процілеглы, а напрамак вектара пакінуць ранейшым;

г) напрамак восі і напрамак вектара змяніць на процілеглыя?

629. Што можна сказаць аб узаемным размяшчэнні вектара і восі, калі пры змяненні напрамку вектара на процілеглы праекцыя гэтага вектара на вось не зменіцца?

§ 91. Свабодныя і звязаныя вектары

Як ужо адзначалася ў § 89, кожны вектар вызначаецца сваім пачаткам (або пунктам прыкладання), напрамкам і даўжынёй. Пункт прыкладання вектара асабліва важна ўлічваць пры рашэнні фізічных задач. Няхай, напрыклад, на дыск, замацаваны



Рыс. 112.



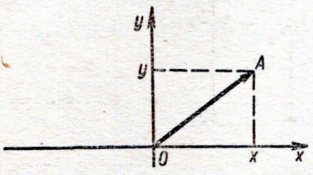
Рыс. 113.

на восі (рыс. 112), дзейнічае сіла $F=1$ *кГ*, накіраваная вертыкальна ўніз. Калі гэта сіла прыкладзена ў пункце A, то дыск пад яе дзеяннем будзе вярцецца па гадзіннікавай стрэлцы. Калі гэта сіла прыкладзена да пункта B, то дыск будзе вярцецца супраць гадзіннікавай стрэлкі. Калі ж сіла F прыкладзена да пункта C, то дыск будзе знаходзіцца ў стане спакою.

У матэматыцы ў асноўным разглядаюцца толькі такія задачы, у якіх пункт прыкладання вектара не адыгрывае істотнай ролі. Прыкладам можа служыць хаця б наступная задача: які вугал утвараюць паміж сабой вектары $\vec{AB}$ і $\vec{CD}$ (рыс. 113)? У далейшым мы будзем мець справу толькі з такімі вектарамі. Яны называюцца *свабоднымі*, у адрозненне ад *звязаных* вектараў, для вывучэння якіх важна ведаць, дзе размяшчаюцца іх пачатковыя пункты. Свабодныя вектары, дзе б яны ні пачыналіся, заўсёды можна перанесці так, каб іх пачатковыя пункты супалі; напрамкі вектараў і іх даўжыні застануцца ранейшымі. Зручна лічыць, што пунктам прыкладання свабоднага вектара з'яўляецца пачатак каардынат. Таму ў далейшым мы будзем у асноўным разглядаць толькі вектары, якія выходзяць з пачатку каардынат.

§ 92. Каардынаты вектара на плоскасці

Няхай xOy — прамавугольная сістэма каардынат. *Праекцыі x і y вектара $\overrightarrow{OA}$* (рыс. 114) *на восі абсцыс і ардынат называюцца каардынатамі гэтага вектара.* Каардынаты вектара звычайна запісваюцца ў выглядзе (x, y), а сам вектар так: $\overrightarrow{OA} = (x, y)$.

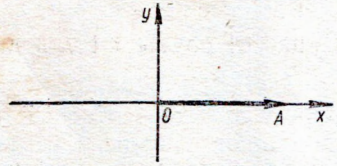


Рыс. 114.

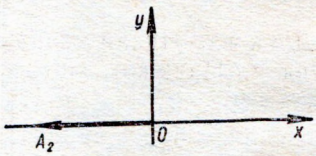
Разгледзім некалькі прыкладаў.

1. Няхай вектар $\overrightarrow{OA}$ даўжыні r ляжыць на восі x і накіраваны ў той жа бок, што і вось x (рыс. 115, *а*). Тады $\overrightarrow{OA_1} = (r, 0)$. Калі б напрамак вектара $\overrightarrow{OA}$ быў процілеглы напрамку восі x (рыс. 115, *б*), то мы мелі б $\overrightarrow{OA_2} = (-r, 0)$. Аналагічна, вектар $\overrightarrow{OA_3}$, паказаны на рысунку 115, *в*, мае каардынаты $(0, r)$, а вектар $\overrightarrow{OA_4}$, паказаны на рысунку 115, *г*,— каардынаты $(0, -r)$.

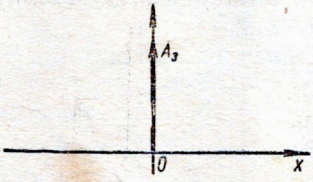
2. Вектар $\overrightarrow{OB_1}$ даўжыні r, што ўтварае з восямі каардынат роўныя вуглы (рыс. 116, *а*), мае каардынаты $\left(\frac{r}{\sqrt{2}}; \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$. Гэта лёгка даказаць, калі разгледзець прамавугольны трохвугольнік OB_1C_1.



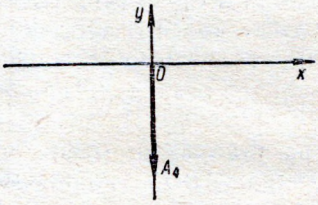
а



б



в



г

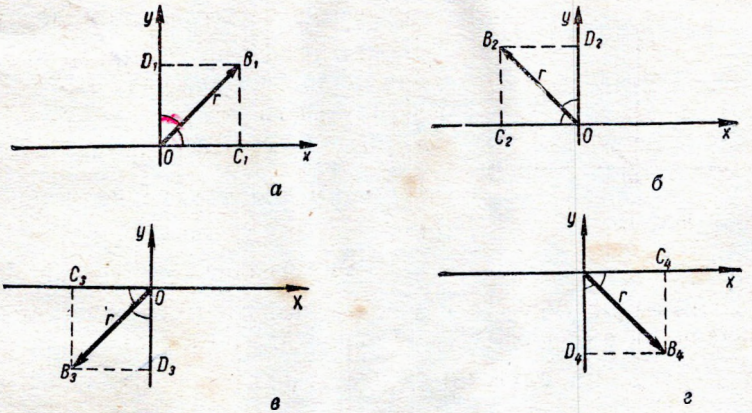
Рыс. 115.

Аналагічна, вектары $\overrightarrow{OB_2}$, $\overrightarrow{OB_3}$ і $\overrightarrow{OB_4}$, паказаныя на рысунках 116, *б*, *в* і *г*, адпаведна маюць каардынаты

$$\overrightarrow{OB_2} = \left(-\frac{r}{\sqrt{2}}; \frac{r}{\sqrt{2}}\right), \quad \overrightarrow{OB_3} = \left(-\frac{r}{\sqrt{2}}; -\frac{r}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\overrightarrow{OB_4} = \left(\frac{r}{\sqrt{2}}; -\frac{r}{\sqrt{2}}\right).$$

Каардынаты з'яўляюцца вычарпальнай характарыстыкай любога вектара, таму што па каардынатах можна пабудаваць і сам вектар. Ведаючы каардынаты, лёгка знайсці і даўжыню вектара.



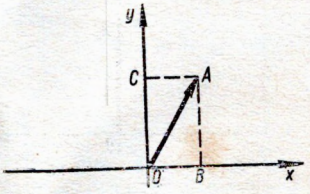
Рыс. 116.

Тэарэма. ***Квадрат даўжыні любога вектара роўны суме квадратаў яго каардынат.***

Доказ. Няхай каардынаты вектара $\overrightarrow{OA}$ роўны x і y, а даўжыня r. Пакажам, што

$$r^2=x^2+y^2. \qquad (1)$$

Калі вектар $\overrightarrow{OA}$ ляжыць на якой-небудзь каардынатнай восі, то, як было паказана вышэй, адна з яго каардынат роўна нулю, а другая або $+r$, або $-r$. У гэтым выпадку роўнасць (1) правільная. Калі вектар $\overrightarrow{OA}$ ляжыць у першай чвэрці (рыс. 117), то (1) вынікае з тэарэмы Піфагора, якая прыменена да трохвугольніка ABO. Аналагічна будзе і ў выпадку, калі вектар $\overrightarrow{OA}$ ляжыць у якой-небудзь іншай чвэрці (дакажыце гэта!).



Рыс. 117.

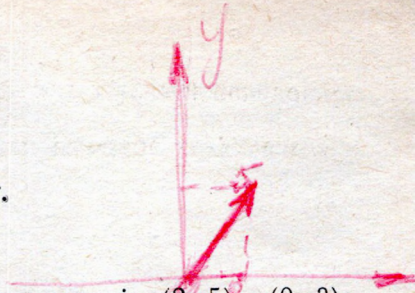
З даказанай тэарэмы вынікае наступны важны для далейшага вынік: *любая каардыната вектара па абсалютнай велічыні не перавышае даўжыні гэтага вектара.* Іншымі словамі, калі вектар даўжынёй r мае каардынаты x і y, то

$$|x|\leqslant r, \quad |y|\leqslant r.$$

Сапраўды,

$$r^2=x^2+y^2.$$

Таму $r^2 \geqslant x^2$, адкуль $|x| \leqslant r$.
Аналагічна даказваецца, што $|y| \leqslant r$.



Практыкаванні

630. Пабудаваць вектары з каардынатамі: (2; 5); (0; 3); (4; 0); (—1; 2); (0; —3); (—7; —6).

631. Як зменяцца каардынаты вектара, калі:

а) напрамак вектара змяніць на процілеглы;

б) паменшыць даўжыню вектара ў два разы, не мяняючы напрамку?

632. Знайсці даўжыні вектараў з каардынатамі: (3; 4); (—5; 12); (0; —75); $(2; \sqrt{5})$.

633*. Што ўяўляе сабой мноства канцоў вектараў, калі каардынаты (x, y) гэтых вектараў задавальняюць ураўненню

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2?$$

§ 93. Абагульненне паняцця вугла і дугі

У геаметрыі мы разглядалі ў асноўным вуглы, меншыя за «поўны» вугал, гэта значыць за вугал у 360°. Часцей за ўсё (напрыклад, у трохвугольніках) гэта былі нават вуглы, меншыя за «разгорнуты» (180°). Але іншы раз нам даводзілася мець справу і з вугламі, большымі за 360°. Успомніце хаця б тэарэму аб вуглах выпуклага многавугольніка: сума ўсіх унутраных вуглоў выпуклага n-вугольніка роўна

$$2d(n-2).$$

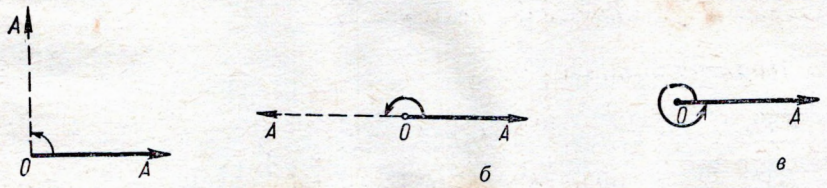
Згодна з гэтай тэарэмай сума ўнутраных вуглоў выпуклага пяцівугольніка роўна

$$2d \cdot 3=6d=540°.$$

Як жа ўявіць сабе такі вугал?

Любы вугал можна разглядаць як фігуру, якая ўтвараецца вярчэннем праменя вакол свайго пачатковага пункта. Напрыклад, вугал у 90° атрымаецца, калі прамень $\overrightarrow{OA}$ (рыс. 118, *а*) зробіць чвэрць поўнага абароту вакол пункта O. Аналагічна разгорнуты вугал атрымаецца, калі гэты прамень зробіць палавіну абароту вакол пункта O (рыс. 118, *б*); поўны вугал апісваецца ў выніку аднаго поўнага абароту (рыс. 118, *в*) і г. д. Вугал, большы за поўны, атрымаецца, калі прамень зробіць больш аднаго абароту вакол пункта O. Напрыклад, у выніку $1\frac{1}{8}$ абароту

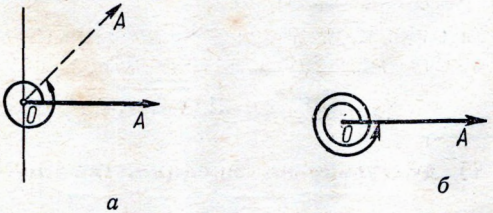
ўтвараецца вугал, у $1\frac{1}{8}$ разы большы за поўны (рыс. 119, *а*); у выніку двух абаротаў атрымліваецца вугал, у 2 разы большы



а *б* *в*

Рыс. 118.

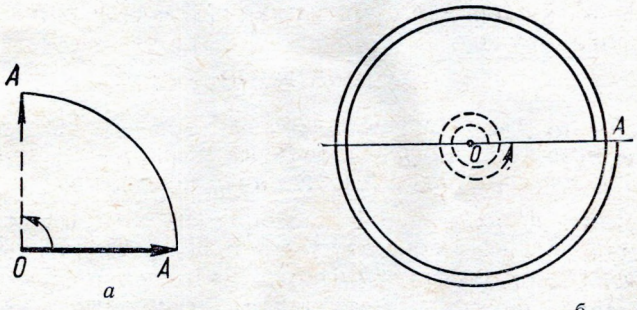
за поўны (рыс. 119, *б*). Падобныя вуглы апісваюць, напрыклад, стрэлкі гадзінніка, лопасці прапелера самалёта і г. д.



а *б*

Рыс. 119.

У той час як сам прамень пры павароце вакол свайго пачатковага пункта апісвае вугал, любы яго пункт, які адрозніваецца ад пачатковага пункта, апісвае дугі акружнасці. Калі, напрыклад, прамень зробіць чвэрць поўнага абароту, то пункт *A* (рыс. 120, *а*) апіша чвэрць поўнай дугі (гэта значыць чвэрць акружнасці радыуса *OA*); пры двух поўных абаротах праменя



а *б*

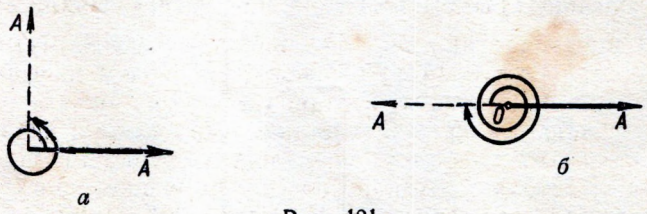
Рыс. 120.

(рыс. 120, *б*) пункт *A* апіша дугу, якая ў два разы большая за поўную дугу, і г. д. Уяўленне аб такіх дугах дае, напрыклад, наматаная на шпульку нітка.

Прамень можна вярцець вакол пачатковага пункта ў двух напрамках: па гадзіннікавай стрэлцы і супраць гадзіннікавай стрэлкі. Напрамак супраць гадзіннікавай стрэлкі прынята называць *дадатным*, а па гадзіннікавай стрэлцы — *адмоўным*. Адпаведна гэтаму вуглы і дугі, атрыманыя пры вярчэнні восі супраць гадзіннікавай стрэлкі, прынята лічыць *дадатнымі*; вуглы і дугі, атрыманыя пры вярчэнні восі па гадзіннікавай стрэлцы, прынята лічыць *адмоўнымі*.

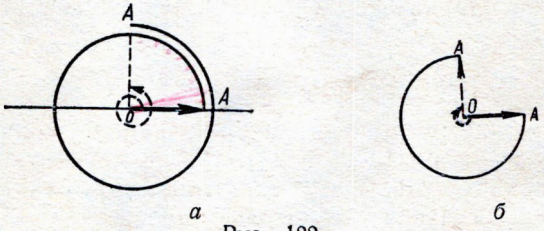
За адзінку вымярэння вуглоў і дуг, як і ў геаметрыі, мы прымем адпаведна вугал у 1 градус і дугу ў 1 градус.

Вугал у 1 градус — гэта вугал, які апіша прамень, зрабіўшы $^1/_{360}$ *частку поўнага абароту вакол свайго пачатковага пункта супраць гадзіннікавай стрэлкі.* Пры такой адзінцы вымярэння вугал, які апісваецца ў выніку аднаго поўнага абароту супраць



Рыс. 121.

гадзіннікавай стрэлкі, роўны 360°, а па гадзіннікавай стрэлцы —360°. Вугал, паказаны на рысунку 121, *а*, роўны $360° \cdot 1\frac{1}{4} = 450°$, а вугал, паказаны на рысунку 121, *б*, роўны $-360° \cdot 1\frac{1}{2} = -540°$.

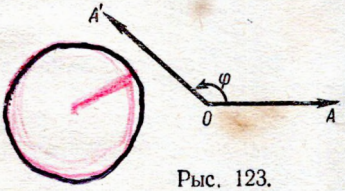


Рыс. 122.

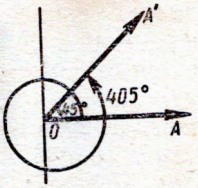
Дуга ў 1 градус — гэта дуга, якую апісвае пункт праменя пры павароце гэтага праменя на вугал у 1 градус. Напрыклад, дуга, паказаная на рысунку 122, *а*, роўна $1\frac{1}{4} \cdot 360° = 450°$, а дуга, паказаная на рысунку 122, *б*, роўна $-\frac{3}{4} \cdot 360° = -270°$.

Дугу ў 1 градус і вугал у 1 градус не трэба атаясамліваць.

Гэта розныя, хаця і блізкія паняцці. Каб не блытаць іх, часам вугал у 1 градус называюць *вуглавым градусам*, а дугу ў 1 градус — *дугавым градусам*. Дуга заўсёды змяшчае столькі дугавых градусаў, колькі вуглавых градусаў змяшчае вугал, які ёй адпавядае.



Рыс. 123.



Рыс. 124.

У заключэнне прымем наступнае пагадненне. Няхай вугал φ* утвораны вярчэннем праменя $\overrightarrow{OA}$ вакол пункта O (рыс. 123). Зыходнае становішча OA гэтага праменя будзем называць *пачатковай стараной вугла* φ, а становішча OA', якое ён зойме ў выніку вярчэння,— *канечнай стараной вугла* φ. Калі пачатковыя стораны двух роўных вуглоў супадаюць, то супадуць, відавочна, і іх канечныя стораны. Адваротнае сцверджанне, наогул кажучы, няправільнае. Так, вуглы ў 45° і 45°+360°=405° (рыс. 124) не роўныя адзін другому, хаця пачатковыя і канечныя стораны іх супадаюць.



Практыкаванні

634. Якія вуглы апісваюць мінутная і гадзіннікавая стрэлкі за: а) 5 *мін*; б) 5 *гадз*?

635. У якіх каардынатных чвэрцях заканчваюцца вуглы:

а) 75° і −75°; в) 140° і −140°;

б) 1000° і −1000°; г) 191° і −191°?

636. Ці могуць вуглы φ і −φ заканчвацца ў адной і той жа чвэрці? Ці могуць яны мець адну і тую ж канечную старану?

637. Напісаць агульны выгляд вуглоў, якія заканчваюцца:

а) на дадатнай частцы восі абсцыс;

б) на адмоўнай частцы восі абсцыс;

в) на дадатнай частцы восі ардынат;

г) на адмоўнай частцы восі ардынат;

д) на бісектрысе 1-га каардынатнага вугла;

е) на бісектрысе 1-га або на бісектрысе 3-га каардынатнага вугла;

ж) на бісектрысе 4-га каардынатнага вугла.

---

* φ — грэчаская літара; чытаецца: фі.

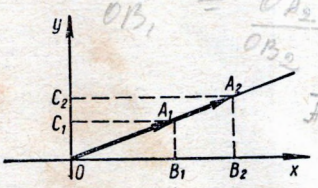
§ 94. Тэарэма аб адносінах каардынат вектара да яго даўжыні

Няхай два вектары $\vec{OA}_1=(x_1, y_1)$ і $\vec{OA}_2=(x_2, y_2)$, даўжыні якіх роўны адпаведна r_1 і r_2, ляжаць на адной прамой і накіраваны ў адзін і той жа бок, як паказана на рысунку 125. Тады $x_1=OB_1$, $y_1=A_1B_1$; $x_2=OB_2$, $y_2=A_2B_2$. З падобнасці трохвугольнікаў OA_1B_1 і OA_2B_2 вынікае, што

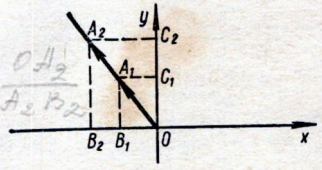
$$\frac{A_1B_1}{OA_1}=\frac{A_2B_2}{OA_2} \text{ і } \frac{OB_1}{OA_1}=\frac{OB_2}{OA_2},$$

або

$$\frac{y_1}{r_1}=\frac{y_2}{r_2}; \quad \frac{x_1}{r_1}=\frac{x_2}{r_2}. \tag{1}$$



Рыс. 125.



Рыс. 126.

Калі б вектары $\vec{OA}_1$ і $\vec{OA}_2$ ляжалі ў другой чвэрці (рыс. 126), то аналагічна папярэдняму мы мелі б

$$x_1=-OB_1, \quad y_1=A_1B_1;$$
$$x_2=-OB_2, \quad y_2=A_2B_2.$$
$$\frac{A_1B_1}{OA_1}=\frac{A_2B_2}{OA_2}, \quad \frac{OB_1}{OA_1}=\frac{OB_2}{OA_2},$$

або

$$\frac{y_1}{r_1}=\frac{y_2}{r_2}, \quad \frac{-x_1}{r_1}=\frac{-x_2}{r_2},$$

адкуль зноў атрымліваюцца суадносіны (1). Такім жа чынам можна было б разгледзець і выпадкі, калі вектары $\vec{OA}_1$ і $\vec{OA}_2$ ляжаць у 3-й або 4-й чвэрцях. Мы тады прыйшлі б да суадносіны (1).

Формулы (1) справядлівыя таксама і ў выпадку, калі вектары $\vec{OA}_1$ і $\vec{OA}_2$ ляжаць на якой-небудзь восі каардынат. Напрыклад, у выпадку, паказаным на рысунку 127,

$$x_1=0; \quad y_1=r_1; \quad x_2=0; \quad y_2=r_2.$$

Таму

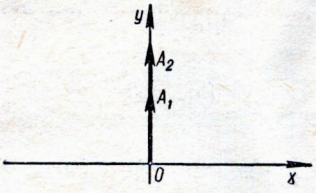
$$\frac{y_1}{r_1} = 1 = \frac{y_2}{r_2}; \quad \frac{x_1}{r_1} = 0 = \frac{x_2}{r_2}.$$

Вучні могуць самастойна разгледзець і іншыя магчымыя выпадкі размяшчэння вектараў $\vec{OA}_1$ і $\vec{OA}_2$ на восях каардынат і пераканацца, што формулы (1) правільныя ў гэтых выпадках.

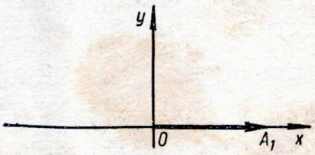
Роўнасці

$$\frac{y_1}{r_1} = \frac{y_2}{r_2} \text{ і } \frac{x_1}{r_1} = \frac{x_2}{r_2}$$

гавораць аб тым, што адносіны $\frac{x}{r}$ і $\frac{y}{r}$ каардынат x і y вектара да яго даўжыні r не залежаць ад даўжыні вектара. Пры змяненні даўжыні вектара гэтыя адносіны застаюцца нязменнымі, хаця самі каардынаты x і y пры гэтым, вядома, мяняюцца.



Рыс. 127.



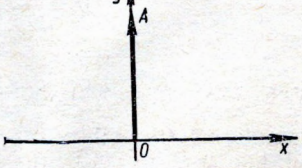
Рыс. 128.

Ад чаго ж у такім выпадку залежаць гэтыя адносіны? Каб адказаць на гэта пытанне, разгледзім два прыклады. Калі вектар $\vec{OA}_1$ даўжынёй r ляжыць на дадатнай паўвосі абсцыс (рыс. 128), то яго каардынаты $x=r$, $y=0$. Таму для такога вектара

$$\frac{x}{r} = 1, \quad \frac{y}{r} = 0.$$

Калі ж вектар $\vec{OA}$ ляжыць на дадатнай паўвосі ардынат (рыс. 129), то, як мы бачылі вышэй,

$$\frac{x}{r} = 0, \quad \frac{y}{r} = 1.$$



Рыс. 129.

Ужо з гэтых прыватных прыкладаў відаць, што адносіны каардынат вектара да яго даўжыні мяняюцца пры змяненні напрамку вектара.

Такім чынам, мы даказалі наступную тэарэму.

Тэарэма. *Адносіны*

$$\frac{x}{r} \text{ і } \frac{y}{r}$$

каардынат вектара да яго даўжыні не залежаць ад даўжыні вектара, але залежаць ад яго напрамку.

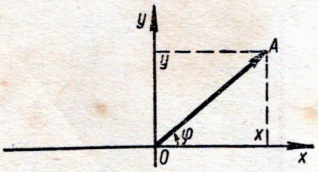
Практыкаванні

638. Ці залежаць ад даўжыні r вектара $\vec{OA}$:
а) яго каардынаты x і y;
б) адносіны $\frac{x}{r}$ і $\frac{y}{r}$?

639. Ці залежыць адносіна $\frac{x}{y}$ каардынат вектара ад яго даўжыні r?

§ 95. Вызначэнне трыганаметрычных функцый вугла

Няхай φ — адвольны вугал (рыс. 130). На канечнай старане гэтага вугла возьмем вектар $\vec{OA}$ адвольнай даўжыні r. Абсцысу гэтага вектара абазначым x, а ардынату y. Як было паказана ў папярэднім параграфе, адносіны $\frac{y}{r}$ і $\frac{x}{r}$ залежаць толькі ад напрамку вектара $\vec{OA}$, які вызначаецца вуглом φ, і не залежаць ад даўжыні вектара r. Таму гэтыя велічыні з'яўляюцца своеасаблівымі характарыстыкамі вугла φ.



Рыс. 130.

Адносіна ардынаты вектара, які ўтварае з воссю Ox вугал φ, *да даўжыні гэтага вектара называецца сінусам вугла* φ (абазначаецца $\sin\varphi$):

$$\sin\varphi = \frac{y}{r}. \qquad (1)$$

Адносіна абсцысы вектара, які ўтварае з воссю Ox вугал φ, *да даўжыні гэтага вектара называецца косінусам вугла* φ (абазначаецца $\cos\varphi$):

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}. \qquad (2)$$

Адносіна сінуса вугла φ *да яго косінуса называецца тангенсам вугла* φ (абазначаецца $\operatorname{tg}\varphi$):

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}. \qquad (3)$$

Адносіна косінуса вугла φ *да яго сінуса называецца катангенсам вугла* φ (абазначаецца $\operatorname{ctg}\varphi$):

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}. \tag{4}$$

Велічыня, адваротная косінусу вугла φ, *называецца секансам вугла* φ (абазначаецца $\sec\varphi$):

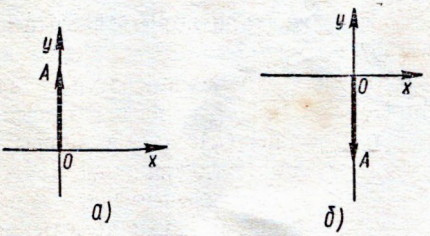
$$\sec\varphi = \frac{1}{\cos\varphi}. \tag{5}$$

Велічыня, адваротная сінусу вугла φ, *называецца касекансам вугла* φ (абазначаецца $\operatorname{cosec}\varphi$):

$$\operatorname{cosec}\varphi = \frac{1}{\sin\varphi}. \tag{6}$$

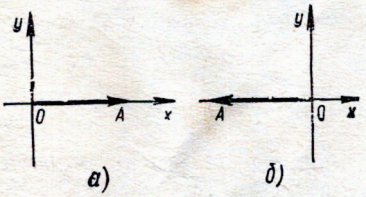
Лёгка зразумець, што для вострых вуглоў уведзеныя такім чынам азначэнні поўнасцю супадаюць з тымі, якія ўжо вядомы нам па курсу геаметрыі.

Сінус і косінус вызначаны для любога вугла φ, паколькі выразы $\frac{x}{r}$ і $\frac{y}{r}$ маюць сэнс пры любым дадатным r. Што датычыцца $\operatorname{tg}\varphi$, $\operatorname{ctg}\varphi$, $\sec\varphi$ і $\operatorname{cosec}\varphi$, то яны вызначаны не для ўся-



Рыс. 131.

кага вугла φ. Тангенс і секанс з прычыны (3) і (5) вызначаны толькі для тых вуглоў, косінусы якіх адрозніваюцца ад нуля, а катангенс і касеканс з прычыны (4) і (6) — для тых вуглоў, сінусы якіх адрозніваюцца ад нуля.



Рыс. 132.

Калі $\cos\varphi = \frac{x}{r} = 0$, то $x = 0$. Гэта можа быць толькі тады, калі вектар $\vec{OA}$ перпендыкулярны да восі абсцыс (рыс. 131, *а* і 131, *б*).

У гэтым выпадку вугал φ можа прымаць значэнні

$$\pm 90°;\ \pm 270°;\ \pm 450°;\ \pm 630°;\ \ldots .$$

Усе гэтыя значэнні можна запісаць адной формулай:

$$\varphi = 90°(2n+1),$$

дзе n — любы цэлы лік (дадатны, адмоўны або нуль).

Такім чынам, ***тангенс і секанс вызначаны для ўсіх вуглоў φ, акрамя вуглоў $\varphi = 90°(2n+1)$.***

Калі $\sin\varphi = \frac{y}{r} = 0$, то $y = 0$. Гэта магчыма толькі тады, калі вектар $\vec{OA}$ ляжыць на восі абсцыс (рыс. 132, *а* і 132, *б*). У гэтым выпадку вугал φ можа прымаць значэнні:

$$0°;\ \pm 180°;\ \pm 360°;\ \pm 540°;\ \ldots .$$

Усе гэтыя значэнні можна запісаць адной формулай:

$$\varphi = 180°n,$$

дзе n — любы цэлы лік (дадатны, адмоўны або нуль). Таму ***катангенс і касеканс вызначаны для ўсіх вуглоў φ, акрамя $\varphi = 180°n$.***

Калі $\varphi \neq 90°m$ (m — цэлы лік), то вызначаны і $\operatorname{tg}\varphi$ і $\operatorname{ctg}\varphi$, прычым

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x};$$

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}} = \frac{x}{y}.$$

Такім чынам,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x};\quad \operatorname{ctg}\varphi = \frac{x}{y}. \tag{7}$$

Кожнаму вуглу φ адпавядаюць зусім пэўныя значэнні $\sin\varphi$ і $\cos\varphi$. Акрамя таго, кожнаму вуглу $\varphi \neq 90°(2n+1)$ адпавядаюць зусім пэўныя значэнні $\operatorname{tg}\varphi$ і $\sec\varphi$, а кожнаму вуглу $\varphi \neq 180°n$ — зусім пэўныя значэнні $\operatorname{ctg}\varphi$ і $\operatorname{cosec}\varphi$.

Таму $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\operatorname{tg}\varphi$, $\operatorname{ctg}\varphi$, $\sec\varphi$, $\operatorname{cosec}\varphi$ з'яўляюцца функцыямі вугла φ. Гэтыя функцыі называюцца *трыганаметрычнымі функцыямі вугла.*

З прычыны простай сувязі паміж вугламі і дугамі (гл. § 93) можна гаварыць аб трыганаметрычных функцыях не толькі вугла, але і дугі. Пад сінусам (косінусам, тангенсам і г. д.) дугі ў α дугавых градусаў разумеюць лік, роўны сінусу (косінусу, тангенсу і г. д.) вугла ў α вуглавых градусаў.

Практыкаванні

640. Для якіх з дадзеных вуглоў 65°, 90°, 180°, 270°, 720°, 810°, 900° не вызначаны:

а) тангенс; б) катангенс?

641. (В у с н а.) Знайсці $\operatorname{tg}\varphi$, калі вядома, што:

а) $\sin\alpha=0{,}6$, $\cos\alpha=0{,}8$;

б) $\sin\alpha=0$, $\cos\alpha=1$;

в) $\sin\alpha=-1$, $\cos\alpha=0$.

642. Ці існуе вугал α, для якога і $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$ не вызначаны?

643. Знайсці значэнні трыганаметрычных функцый вугла φ, які ўтварае з воссю x вектар $\vec{OA}$ з каардынатамі $(-2, 2)$.

644. Знайсці значэнні трыганаметрычных функцый вугла φ, які ўтварае з воссю x вектар $\vec{OA}$ з каардынатамі $\left(1, -\sqrt{3}\right)$.

§ 96. Трыганаметрычны круг. Восі тангенсаў і катангенсаў

Сінус і косінус вугла φ мы вызначылі адносінамі:

$$\sin\varphi=\frac{y}{r},\quad \cos\varphi=\frac{x}{r}, \tag{1}$$

дзе x і y — каардынаты вектара, які ўтварае з воссю абсцыс вугал φ, а r — яго даўжыня. Паколькі адносіны $\frac{y}{r}$ і $\frac{x}{r}$ не залежаць ад даўжыні вектара, то ў якасці r можна выбраць любы дадатны лік. Зручней за ўсё дапусціць $r=1$. Тады формулы (1) прымаюць найбольш просты выгляд:

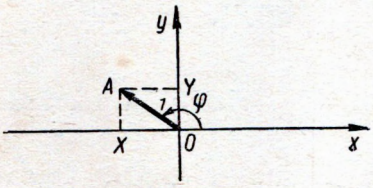
$$\sin\varphi=y,\quad \cos\varphi=x. \tag{2}$$

Сінус вугла φ роўны ардынаце, а косінус — абсцысе вектара адзінкавай даўжыні, які выходзіць з пачатку каардынат і ўтварае з воссю Ox вугал φ (рыс. 133).

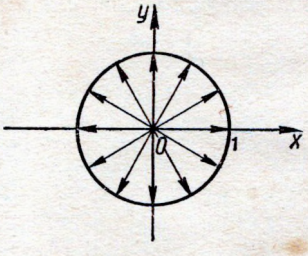
У § 92 мы даказалі, што каардынаты вектара не перавышаюць па абсалютнай велічыні даўжыні гэтага вектара. Таму з (2)

вынікае, што ***сінус і косінус любога вугла не могуць прымаць значэнні, большыя па абсалютнай велічыні, чым 1.***

Усе вектары адзінкавай даўжыні цалкам ляжаць у кругу радыуса 1 з цэнтрам у пачатку каардынат (рыс. 134). Гэтым



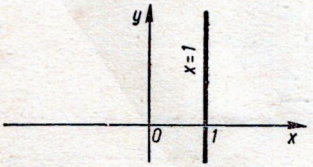
Рыс. 133.



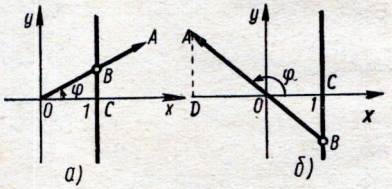
Рыс. 134.

кругам зручна карыстацца пры вывучэнні трыганаметрычных функцый (асабліва сінуса і косінуса). Таму ён атрымаў спецыяльную назву — *трыганаметрычны круг.*

Прамая $x=1$ (рыс. 135) называецца *воссю тангенсаў.* Кожнаму вуглу $\varphi \neq 90°(2n+1)$ можна паставіць у адпаведнасць пункт B на восі тангенсаў, які з'яўляецца пунктам перасячэння канечнай стараны вугла φ (або яе працягу) з воссю тангенсаў (рыс. 136, *а* і 136, *б*).



Рыс. 135.



Рыс. 136.

Тангенс вугла φ роўны ардынаце адпаведнага пункта B на восі тангенсаў.

Сапраўды, калі вугал φ заканчваецца ў 1-й чвэрці (рыс. 136, *а*), то згодна з формулай (7), § 95,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{BC}{OC} = \frac{BC}{1} = BC.$$

Але BC якраз і ёсць ардыната пункта B. Калі ж вугал φ заканчваецца ў 2-й чвэрці (рыс. 136, *б*), то, выбіраючы на яго канечнай

старане адвольны пункт A і разглядаючы вектар $\overrightarrow{OA}$, атрымліваем:

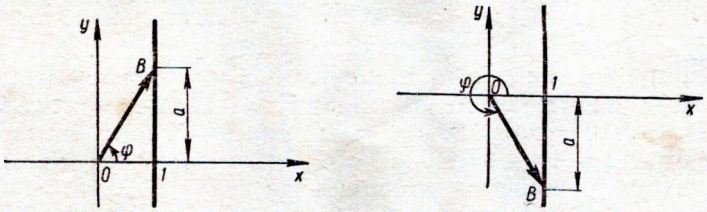
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} = \frac{AD}{-OD} = -\frac{AD}{OD}.$$

З падобнасці трохвугольнікаў OAD і OBC вынікае, што

$$\frac{AD}{OD} = \frac{BC}{OC}.$$

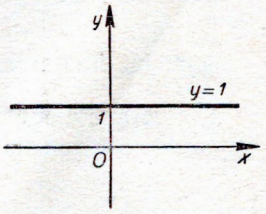
Таму $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{-BC}{OC} = -\dfrac{BC}{1} = -BC$. Але $-BC$ якраз і ёсць ардыната пункта B.

Аналагічна можна даказаць справядлівасць нашага сцвярджання і для вуглоў φ, якія заканчваюцца ў 3-й і 4-й чвэрцях.



Рыс. 137.

У адрозненне ад $\sin\varphi$ і $\cos\varphi$, якія прымаюць толькі значэнні ад -1 да 1 (уключаючы гэтыя два значэнні), $\operatorname{tg}\varphi$ ***можа быць роўны любому сапраўднаму ліку.*** На самай справе, якім бы ні быў лік a, заўсёды, выбіраючы на восі тангенсаў пункт B з ардынатай a і злучаючы яго з пунктам O, мы атрымаем вектар $\overrightarrow{OB}$, які ўтварае з воссю x некаторы вугал φ. Тангенс гэтага вугла роўны a (гл. рыс. 137, $а$ для $a>0$ і рыс. 137, $б$ для $a<0$). Таму для любога ліку a можна ўказаць такі вугал φ, што $\operatorname{tg}\varphi = a$.

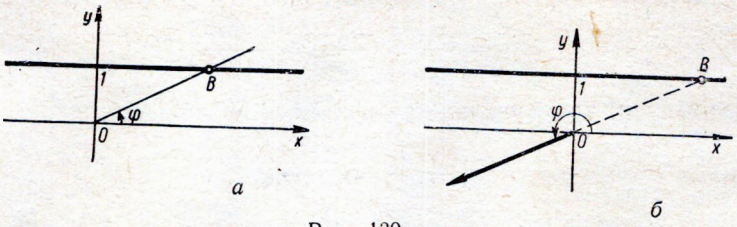


Рыс. 138.

Прамая $y=1$ (рыс. 138) называецца *воссю катангенсаў*. Кожнаму вуглу $\varphi \neq 180°n$ можна паставіць у адпаведнасць пункт B на восі катангенсаў, які з'яўляецца пунктам перасячэння канечнай стараны вугла φ (або яе працягу) з воссю катангенсаў (рыс. 139, $а$ і 139, $б$).

Катангенс вугла φ роўны абсцысе адпаведнага пункта B на восі катангенсаў. Гэта сцверджанне мы прапануем вучням даказаць самастойна.

Як і $\operatorname{tg}\varphi$, ***катангенс вугла можа быць роўны любому сапраўднаму ліку.***



Рыс. 139.

Практыкаванні

645. Выкарыстоўваючы трыганаметрычны круг, паказаць, што для любога вострага вугла α

$$\sin\alpha+\cos\alpha>1.$$

646. Паказаць, што вуглам 35° і 215° адпавядаюць адны і тыя ж пункты на восі тангенсаў.

Тое ж для вуглоў 215° і $-145°$.

647. Выкарыстоўваючы вось тангенсаў і вось катангенсаў, паказаць, што $\operatorname{tg}45°=\operatorname{ctg}225°=1$.

648. Ці правільныя сцверджанні:

а) кожнаму вуглу φ адпавядае адзін зусім пэўны пункт восі тангенсаў;

б) кожнаму пункту восі тангенсаў адпавядае зусім пэўны вугал φ?

649. Ці можа сінус некаторага вугла быць роўны $\frac{\pi}{3}$?

650. Ці можа секанс некаторага вугла быць роўны $\frac{\pi}{4}$?

651. Дакажыце геаметрычна, выкарыстоўваючы вось тангенсаў і вось катангенсаў, што для любога вострага вугла φ

$$\operatorname{tg}\varphi\cdot\operatorname{ctg}\varphi=1.$$

§ 97. Пабудаванне вугла па зададзеных значэннях яго трыганаметрычных функцый

У гэтым параграфе мы на канкрэтных задачах пакажам, як будуюцца вуглы па вядомых значэннях іх трыганаметрычных функцый.

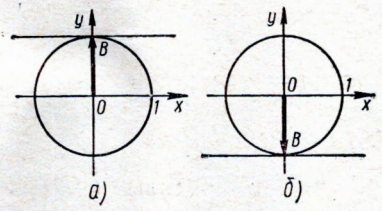
З а д а ч а 1. *Пабудаваць вугал φ, сінус якога роўны a.*

Калі $|a|>1$, тады пабудаваць такі вугал немагчыма, таму што ён наогул не існуе (сінус любога вугла па абсалютнай велічыні не перавышае адзінкі). Калі ж $|a|\leqslant 1$, тады робім наступнае. Праводзім акружнасць радыуса 1 з цэнтрам у пачатку каар-

дынат. На восі Oy адзначаем пункт B з ардынатай a (рыс. 140) і праводзім праз яго прамую, паралельную восі абсцыс. Пункты перасячэння гэтай прамой з акружнасцю абазначым праз A_1 і A_2. Вектары $\overrightarrow{OA_1}$ і $\overrightarrow{OA_2}$ маюць адзінкавую даўжыню, а іх ардынаты роўны a. Таму ўсе вуглы, для якіх $\overrightarrow{OA_1}$ і $\overrightarrow{OA_2}$ з'яўляюцца канечнымі старанамі, маюць сінус, роўны a.



Рыс. 140.



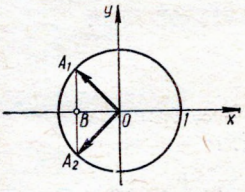
Рыс. 141.

З а ў в а г а. Калі $a=1$, то апісаным вышэй спосабам мы атрымаем не два, а толькі адзін вектар $\overrightarrow{OB}$, які ўтварае шукаемыя вуглы з дадатным напрамкам восі абсцыс (рыс. 141, $а$). У гэтым выпадку $\varphi=90°+360°n$. Аналагічна будзе і пры $a=-1$ (рыс. 141, $б$). У гэтым выпадку $\varphi=-90°+360°n$.

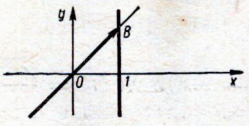
З а д а ч а 2. *Пабудаваць вугал* φ, *косінус якога роўны* a.

Як і ў задачы 1, патрабуемае пабудаванне можна выканаць толькі пры $|a|\leqslant 1$.

На восі Ox адзначаем пункт B з абсцысай a і праз яго праводзім прамую, паралельную восі ардынат (рыс. 142, на гэтым рысунку лік a адмоўны). Пункты перасячэння гэтай прамой з адзінкавай акружнасцю абазначым праз A_1 і A_2. Шукаемымі вугламі будуць вуглы, для якіх канечнымі старанамі з'яўляюцца OA_1 і OA_2.



Рыс. 142.



Рыс. 143.



Рыс. 144.

З а д а ч а 3. *Пабудаваць вугал* φ, *тангенс якога роўны* a.

На восі тангенсаў адзначаем пункт B з ардынатай a (рыс. 143). Усе вуглы, канечныя стораны якіх ляжаць на прамой OB, маюць тангенс, роўны a.

З а д а ч а 4. *Пабудаваць вугал* φ, *катангенс якога роўны* a.

На восі катангенсаў адзначаем пункт B з абсцысай a (рыс. 144). Усе вуглы, канечныя стораны якіх ляжаць на прамой OB, маюць катангенс, роўны a.

Практыкаванне

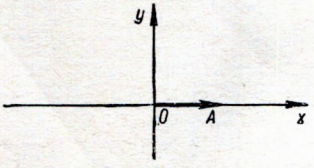
652. Пабудаваць вугал φ па наступных даных:

1) $\sin\varphi=\frac{1}{3}$;
2) $\sin\varphi=-0{,}5$;
3) $\sin\varphi=-1$;
4) $\cos\varphi=-\frac{1}{3}$;
5) $\cos\varphi=0{,}4$;
6) $\cos\varphi=1$;
7) $\operatorname{tg}\varphi=3$;
8) $\operatorname{tg}\varphi=-2$;
9) $\operatorname{ctg}\varphi=5$;
10) $\operatorname{ctg}\varphi=-4$;
11) $\sec\varphi=1{,}5$;
12) $\operatorname{cosec}\varphi=-2$.

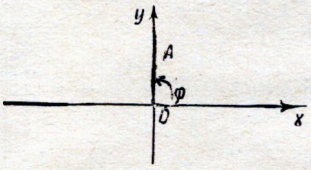
§ 98. Значэнні трыганаметрычных функцый некаторых вуглоў

1. Няхай вектар адзінкавай даўжыні $\vec{OA}$ ўтварае з воссю абсцыс вугал $\varphi=0°$ (рыс. 145). Тады яго каардынаты x і y роўны адпаведна 1 і 0. Такім чынам,

$$\sin 0°=y=0,\quad \cos 0°=x=1.$$



Рыс. 145.



Рыс. 146.

Адсюль

$$\operatorname{tg}0°=\frac{\sin 0°}{\cos 0°}=0,\ \sec 0°=\frac{1}{\cos 0°}=1.$$

Катангенс і касеканс гэтага вугла не вызначаны.

2. Калі $\varphi=90°$ (рыс. 146), то каардынаты вектара $\vec{OA}$ адзінкавай даўжыні роўны $x=0$, $y=1$. Такім чынам,

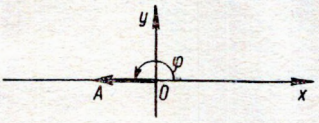
$$\sin 90°=y=1,\quad \cos 90°=x=0.$$

Таму

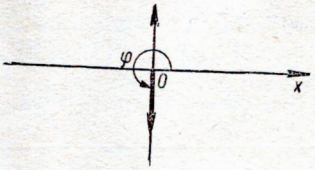
$$\operatorname{ctg}90°=\frac{\cos 90°}{\sin 90°}=0,\ \operatorname{cosec}\ 90°=\frac{1}{\sin 90°}=1.$$

Тангенс і секанс гэтага вугла не вызначаны.

3. Пры $\varphi=180°$ (рыс. 147) $x=-1$, $y=0$. Таму $\sin 180°=0$, $\cos 180°=-1$, $\operatorname{tg} 180°=0$, $\sec 180°=-1$. Катангенс і касеканс гэтага вугла не вызначаны.



Рыс. 147.



Рыс. 148.

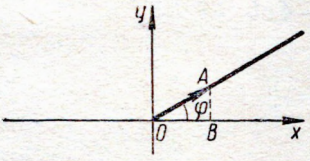
4. Пры $\varphi=270°$ (рыс. 148) $x=0$, $y=-1$. Таму $\sin 270°=-1$, $\cos 270°=0$, $\operatorname{ctg} 270°=0$, $\operatorname{cosec} 270°=-1$. Тангенс і секанс гэтага вугла не вызначаны.

5. Няхай $\varphi=30°$ (рыс. 149). Тады $x=OB$, $y=AB$.

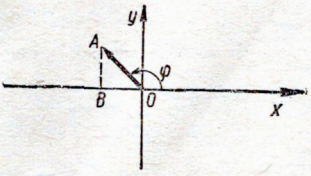
З трохвугольніка AOB знаходзім: $AB=\frac{1}{2}$ (катэт, які ляжыць супраць вугла ў 30°, роўны палавіне гіпатэнузы). Выкарыстоўваючы тэарэму Піфагора, атрымліваем:

$$OB=\sqrt{OA^2-AB^2}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Таму $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y=\frac{1}{2}$.



Рыс. 149.



Рыс. 150.

Такім чынам,

$$\sin 30°=\frac{1}{2};\quad \cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2};\quad \operatorname{tg} 30°=\frac{1}{\sqrt{3}};\quad \operatorname{ctg} 30°=\sqrt{3}.$$

6. Няхай $\varphi=135°$ (рыс. 150). Тады калі $OA=1$, то

$$x=-OB=-\frac{1}{\sqrt{2}},\quad y=AB=\frac{1}{\sqrt{2}}$$ (у $\triangle OAB$ $OB=AB$, паколькі $\angle AOB=45°$).

Такім чынам, $\sin 135° = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos 135° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\operatorname{tg} 135° = -1$; $\operatorname{ctg} 135° = -1$; $\sec 135° = -\sqrt{2}$; $\operatorname{cosec} 135° = \sqrt{2}$.

Аналагічна можна было б знайсці значэнні трыганаметрычных функцый і некаторых іншых вуглоў. Значэнні трыганаметрычных функцый вуглоў 0°, 30°, 45°, 60°, 90° трэба ведаць на памяць.

Прыводзім табліцу гэтых значэнняў.

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не існуе
$\operatorname{ctg}\alpha$	не існуе	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Практыкаванні

Вылічыць (№ 653—659):

653. $2\sin 30° + 3\cos 30° - 2\operatorname{tg} 30° - 4\operatorname{ctg} 30° + \sec 30° - \operatorname{cosec} 30°$.

654. $5\sin 45° + 2\cos 45° + 3\operatorname{tg} 45° - 10\operatorname{ctg} 45° - 4\sec 45° - 7\operatorname{cosec} 45°$.

655. $\sin 60° + \cos 60° - \operatorname{tg} 60° - \operatorname{ctg} 60° + \sec 60° - \operatorname{cosec} 60°$.

656. $3\sin 0° - 5\cos 0° + 7\operatorname{tg} 0° + \sec 0°$.

657. $\sin 90° - 6\cos 90° + 3\operatorname{ctg} 0° + 5\operatorname{cosec} 0°$.

658. $\sin 270° + \cos 270° - \operatorname{ctg} 270°$.

659. $\frac{1}{2}\sin 180° - \sqrt{3}\cos 180° + \frac{1 + \operatorname{tg} 180°}{1 - \operatorname{tg} 180°} + \sec 180°$.

660. Знайсці трыганаметрычныя функцыі вуглоў:

а) $-30°$; б) $-45°$; в) $-60°$; г) $-90°$.

Вылічыць:

661. $\dfrac{\sin 45^\circ \cos 60^\circ - \cos(-45^\circ)\sin(-60^\circ)}{\operatorname{tg}^2 30^\circ - \sin^2 90^\circ \cdot \cos^3 270^\circ}$.

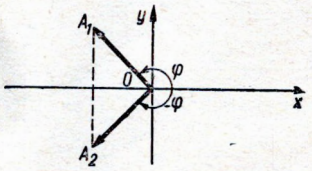
662. $\dfrac{\sec(-30^\circ) + \operatorname{cosec}(-30^\circ)}{\sin^2(-30^\circ) + \operatorname{cosec}^2(-30^\circ)}$.

§ 99. Цотнасць трыганаметрычных функцый

Вуглы φ і $-\varphi$ утвараюцца пры павароце праменя ў двух процілеглых напрамках (па гадзіннікавай стрэлцы і супраць гадзіннікавай стрэлкі). Таму канечныя стораны $\vec{OA}_1$ і $\vec{OA}_2$ гэтых вуглоў сіметрычны адносна восі абсцыс (рыс. 151).

Каардынаты вектараў адзінкавай даўжыні $\vec{OA}_1 = (x_1, y_1)$ і $\vec{OA}_2 = (x_2, y_2)$ задавальняюць суадносінам:

$$x_2 = x_1, \quad y_2 = -y_1.$$



Рыс. 151.

Таму

$$\cos(-\varphi) = \cos\varphi, \quad \sin(-\varphi) = -\sin\varphi.$$

Такім чынам, ***сінус з'яўляецца няцотнай, а косінус — цотнай функцыяй вугла.***

Далей маем:

$$\operatorname{tg}(-\varphi) = \frac{\sin(-\varphi)}{\cos(-\varphi)} = \frac{-\sin\varphi}{\cos\varphi} = -\operatorname{tg}\varphi,$$

$$\operatorname{ctg}(-\varphi) = \frac{\cos(-\varphi)}{\sin(-\varphi)} = \frac{\cos\varphi}{-\sin\varphi} = -\operatorname{ctg}\varphi.$$

Таму ***тангенс і катангенс з'яўляюцца няцотнымі функцыямі вугла.***

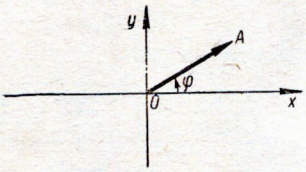
Практыкаванне

663. Сярод дадзеных функцый знайсці цотныя і няцотныя:

1) $y = \sin(-x)$;
2) $y = \cos(-x)$;
3) $y = \operatorname{tg}(2x)$;
4) $y = \sin x \cos x$;
5) $y = \sec x$;
6) $y = \operatorname{cosec} x$;
7) $y = \sin^2 x$;
8) $y = \cos^2 x$;
9) $y = \sin x + \operatorname{tg} x$.

§ 100. Перыядычнасць функцый sin φ і cos φ

Дапусцім, што вектар $\vec{OA}=(x, y)$ адзінкавай даўжыні ўтварае з воссю абсцыс вугал φ (рыс. 152). Калі зрабіць поўны абарот вектара $\vec{OA}$ вакол пункта O супраць гадзіннікавай стрэлкі, то атрымаецца вугал $\varphi+360°$. Але вектар $\vec{OA}$ пры гэтым зойме першапачатковае становішча, а таму каардынаты яго x і y не зменяцца. Такім чынам,



Рыс. 152.

$$y=\sin\varphi=\sin(\varphi+360°),$$
$$x=\cos\varphi=\cos(\varphi+360°).$$

Гэтыя суадносіны паказваюць, што значэнні функцый sin φ і cos φ не змяняюцца, калі іх аргумент павялічыць на 360°.

Няхай $f(x)$ ёсць некаторы выраз, які залежыць ад пераменнай велічыні x. (Напрыклад, $f(x)=x^2$, $f(x)=\sin x$ і г. д.). Тады роўнасць

$$y=f(x)$$

вызначае y як функцыю аргумента x.

Калі пры любых значэннях аргумента x

$$f(x+T)=f(x),$$

дзе T *— некаторы лік, які адрозніваецца ад нуля, то функцыя* $f(x)$ *называецца перыядычнай, а лік* T *— яе перыядам.* Згодна з гэтым азначэннем функцыі sin x і cos x з'яўляюцца перыядычнымі з перыядам $T=360°$.

Пры n поўных абаротах вектара $\vec{OA}$ супраць гадзіннікавай стрэлкі ўтвараецца вугал $\varphi+360°n$, а па гадзіннікавай стрэлцы — вугал $\varphi-360°n$. У кожным з гэтых выпадкаў каардынаты x і y вектара не змяняюцца, а таму не змяняюцца sin φ і cos φ. Такім чынам,

$$\cos\varphi=\cos(\varphi+360°n),$$
$$\sin\varphi=\sin(\varphi+360°n), \qquad (1)$$

дзе n — любы цэлы лік (дадатны, адмоўны або нуль).

Формулы (1) паказваюць, што кожны з вуглоў

$$360°;\ 720°;\ 1080°;\ \ldots\ (n=1, 2, 3, \ldots),$$
$$-360°;\ -720°;\ -1080°;\ \ldots\ (n=-1, -2, -3, \ldots)$$

з'яўляецца перыядам функцый sin φ і cos φ. Такім чынам, гэтыя перыядычныя функцыі маюць бясконцае мноства перыядаў.

Можна даказаць, што любая перыядычная функцыя (а не толькі sin φ і cos φ) мае бясконцае мноства перыядаў.

Гаворачы аб перыядзе функцыі, зручна з бясконцага мноства ўсіх перыядаў мець на ўвазе які-небудзь адзін зусім пэўны перыяд. Звычайна пад ім разумеюць *найменшы дадатны перыяд функцыі**.

З усіх разгледжаных вышэй перыядаў функцыі $\sin\varphi$ найменшым дадатным перыядам з'яўляецца вугал у 360°. Але, можа быць, існуе яшчэ меншы вугал, які мы проста ўпусцілі, але які таксама з'яўляецца перыядам функцыі $\sin\varphi$? Каб вырашыць гэта пытанне, дапусцім, што найменшы дадатны перыяд функцыі $\sin\varphi$ роўны T. Тады пры любым φ

$$\sin(\varphi+T)=\sin\varphi.$$

У прыватнасці, пры $\varphi=0$ атрымаем

$$\sin T=\sin 0°=0.$$

Але нулю роўны сінусы толькі тых дадатных вуглоў, якія кратныя вуглу ў 180° (гл. § 95), гэта значыць вуглоў у 180°, 360°, 540° і г. д. Таму адзіным «канкурэнтам» для вугла ў 360° з'яўляецца вугал у 180°. Ці будзе ён перыядам функцыі $\sin\varphi$? Калі б гэта было так, то роўнасць $\sin(\varphi+180°)=\sin\varphi$ павінна была б выконвацца пры ўсіх значэннях φ. У прыватнасці, пры $\varphi=90°$ мы атрымалі б

$$\sin 270°=\sin 90°.$$

Але $\sin 270°=-1$, а $\sin 90°=1$ (гл. § 98). Таму вугал у 180° не з'яўляецца перыядам функцыі $\sin\varphi$. Застаецца прызнаць, што ***перыядам*** (гэта значыць найменшым дадатным перыядам) ***функцыі*** $\sin\varphi$ ***з'яўляецца вугал у 360°.***

Аналагічна можна даказаць, ***што перыядам функцыі*** $\cos\varphi$ ***таксама з'яўляецца вугал у 360°.***

Прапануем вучням пераканацца ў гэтым самастойна.

Практыкаванні

664. Даказаць наступныя суадносіны:

а) $\sin 740°=\sin 20°$;

б) $\sin(-1000°)=\sin 80°$;

в) $\cos 54°=\cos(-1026°)$;

г) $\cos(-1750°)=\cos 50°$.

665. Дадзеныя выразы пераўтварыць так, каб вуглы, якія ў іх уваходзяць, былі дадатнымі і не перавышалі 360°:

а) $\sin 820°$; б) $\cos(-7363°)$; в) $\sin(-600°)$.

---

* Трэба, аднак, мець на ўвазе, што найменшага дадатнага перыяду ў перыядычнай функцыі можа і не быць. Падрабязна аб гэтым гл. у раздзеле IX, ч. II.

666. Дадзеныя выразы пераўтварыць так, каб вуглы, якія ў іх уваходзяць, па абсалютнай велічыні не перавышалі 180°:

а) $\cos 729°$; в) $\sin(-535°)$;

б) $\sin 1268°$; г) $\cos(-1001°)$.

667. Даказаць, што вугал у 540° з'яўляецца адным з перыядаў функцыі $y=\cos 2x$.

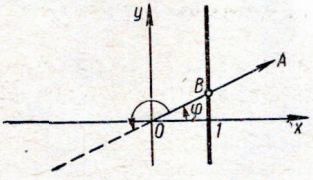
668. Даказаць, што вугал у 360° з'яўляецца адным з перыядаў функцыі $y=\operatorname{tg} x$.

669. Даказаць, што любы перыяд T функцыі $y=\cos x$ з'яўляецца коранем ураўнення $\cos x=1$.

Ці будзе правільным адваротнае сцверджанне?

§ 101. Перыядычнасць функцый $\operatorname{tg}\varphi$ і $\operatorname{ctg}\varphi$

Мы ведаем, што тангенс вугла φ роўны ардынаце адпаведнага пункта B на восі тангенсаў (рыс. 153). Пры павароце вектара $\vec{OA}$, які ўтварае з воссю абсцыс вугал φ, на 180° супраць гадзіннікавай стрэлкі вектар зменіць свой напрамак на процілеглы, але адпаведны пункт B на восі тангенсаў застанецца ранейшым. Таму не зменіцца і тангенс вугла. Такім чынам, пры любым φ



Рыс. 153.

$$\operatorname{tg}(\varphi+180°)=\operatorname{tg}\varphi.$$

Гэта азначае, што функцыя $\operatorname{tg}\varphi$ з'яўляецца перыядычнай з перыядам 180°. Але ці будзе вугал у 180° найменшым дадатным перыядам гэтай функцыі?

Дапусцім, што найменшы дадатны перыяд функцыі $\operatorname{tg}\varphi$ роўны T. Тады для ўсіх дапушчальных значэнняў φ павінна быць

$$\operatorname{tg}(\varphi+T)=\operatorname{tg}\varphi.$$

У прыватнасці, пры $\varphi=0$ атрымаем:

$$\operatorname{tg} T=\operatorname{tg} 0°=0.$$

Але тангенс дадатнага вугла роўны нулю толькі тады, калі сінус гэтага вугла роўны нулю, гэта значыць $T=180°$, 360°, 540° і г. д. Такім чынам, ніякі дадатны вугал, меншы за 180°, не можа быць перыядам функцыі $\operatorname{tg}\varphi$. Застаецца прызнаць, што ***перыядам*** (гэта значыць найменшым дадатным перыядам) ***функцыі*** $\operatorname{tg}\varphi$ ***з'яўляецца вугал у 180°.***

Аналагічна можна даказаць, што ***перыядам функцыі*** $\operatorname{ctg}\varphi$ ***таксама з'яўляецца вугал у 180°.*** Прапануем вучням пераканацца ў гэтым самастойна.

Практыкаванні

670. Дадзеныя выразы пераўтварыць так, каб вуглы, якія ў іх уваходзяць, былі дадатнымі і не перавышалі 180°:

а) $\operatorname{tg} 205°$; б) $\operatorname{tg}(-185°)$;

в) $\operatorname{ctg} 300°$; г) $\operatorname{ctg}(-210°)$.

671. Дадзеныя выразы пераўтварыць так, каб вуглы, якія ў іх уваходзяць, па абсалютнай велічыні не перавышалі 90°:

а) $\operatorname{tg} 375°$; б) $\operatorname{ctg}(-93°)$; в) $\operatorname{ctg} 530°$.

672. Даказаць, што вугал у 120° з'яўляецца адным з перыядаў функцыі $y=\operatorname{ctg} 3x$.

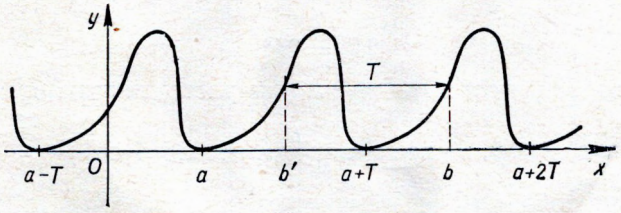
673. Даказаць, што любы перыяд T функцыі $y=\operatorname{ctg} x$ з'яўляецца коранем ураўнення

$$\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

Ці будзе правільным адваротнае сцверджанне?

§ 102. Аб перыядычных функцыях

Калі функцыя $f(x)$ перыядычная з перыядам T, то па значэннях гэтай функцыі на любым адрэзку даўжыні T можна аднавіць яе значэнні на ўсёй лікавай прамой.



Рыс. 154.

Сапраўды, няхай перыядычная функцыя $f(x)$ зададзена ў інтэрвале $(a,\ a+T)$, дзе T — перыяд гэтай функцыі (рыс. 154). Пакажам, як можна вызначыць значэнні гэтай функцыі ў інтэрвале $(a+T,\ a+2T)$. Для любога пункта b з гэтага інтэрвалу можна знайсці пункт b' з інтэрвалу $(a,\ a+T)$, які знаходзіцца ад b на адлегласці T. З прычыны перыядычнасці функцыі $f(x)$

$$f(b)=f(b').$$

Такім чынам, па зададзеных значэннях функцыі $f(x)$ у інтэрвале $(a,\ a+T)$ можна аднавіць значэнні гэтай функцыі ў інтэрвале $(a+T,\ a+2T)$. Затым, зыходзячы са значэння функцыі $f(x)$ у інтэрвале $(a+T,\ a+2T)$, можна аднавіць яе значэнні ў інтэрвале

$(a+2T,\ a+3T)$. Пасля гэтага такім жа чынам можна знайсці значэнні функцыі $f(x)$ у інтэрвале $(a+3T,\ a+4T)$ і г. д. Аналагічна можна вызначыць значэнні функцыі $f(x)$ і ва ўсіх пунктах лікавай прамой, якія ляжаць улева ад адрэзка $(a,\ a+T)$.

Такім чынам, задаванне перыядычнай з перыядам T функцыі $f(x)$ на любым інтэрвале даўжыні T дае магчымасць поўнасцю ахарактарызаваць яе на ўсёй лікавай прамой. Таму для даследавання функцыі $f(x)$, перыядычнай з перыядам T, дастаткова вывучыць яе паводзіны толькі на якім-небудзь інтэрвале даўжыні T. Напрыклад, для даследавання функцый $y=\sin\varphi$ і $y=\cos\varphi$ дастаткова разгледзець іх толькі пры $0°\leqslant\varphi\leqslant360°$. Для даследавання функцыі $y=\operatorname{tg}\varphi$ можна было б абмежавацца інтэрвалам $0°\leqslant\varphi\leqslant180°$. Але пры $\varphi=90°$ $\operatorname{tg}\varphi$ не вызначаны. Таму ў дадзеным выпадку мэтазгодна выбраць які-небудзь іншы інтэрвал, у кожным пункце якога функцыя $y=\operatorname{tg}\varphi$ была б вызначана. Мы аддадзім перавагу інтэрвалу $-90°<\varphi<90°$. Аднак у прынцыпе можна было б выбраць, зразумела, і інтэрвал $0°\leqslant\varphi\leqslant180°$. Для вывучэння функцыі $y=\operatorname{ctg}\varphi$ мэтазгодна выбраць інтэрвал $0°<\varphi<180°$.

Практыкаванні

674. Як дабудаваць графік функцыі, перыядычнай з перыядам T, калі ён зададзены толькі ў інтэрвале $0\leqslant x\leqslant T$?

675. Ці можа перыядычная з перыядам T функцыя $f(x)$ задавальняць умове

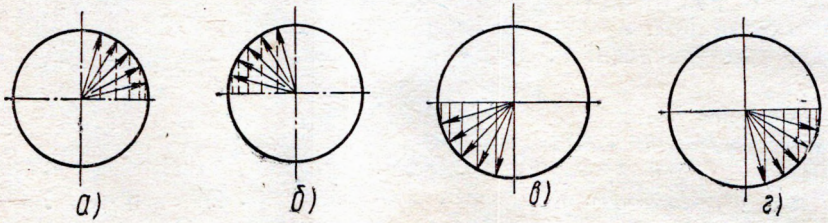
$$f(2T)=2f(T)?$$

Калі можа, то ў якім выпадку? Адказ растлумачыць прыкладамі.

§ 103. Змяненне функцый $\sin\varphi$ і $\cos\varphi$

Выкарыстоўваючы трыганаметрычны круг, высветлім, як пры змяненні аргумента φ змяняюцца функцыі $\sin\varphi$ і $\cos\varphi$.

Няхай вугал φ неперарыўна ўзрастае ад 0° да 90°. Тады ардыната адпаведнага вектара (рыс. 155, *а*) будзе неперарыўна ўзрастаць ад 0 да 1. Значыць, пры павелічэнні вугла ад 0° да 90° сінус яго ўзрастае ад 0 да 1.

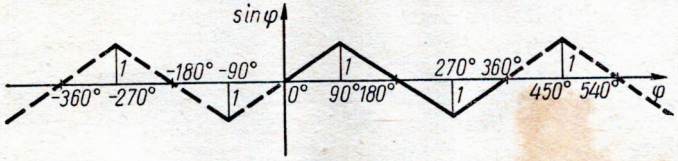


Рыс. 155.

Калі вугал φ неперарыўна ўзрастае ад 90° да 180°, то ардыната адпаведнага вектара будзе неперарыўна памяншацца ад 1 да 0 (рыс. 155, *б*). Значыць, пры павелічэнні вугла φ ад 90° да 180° сінус яго памяншаецца ад 1 да 0.

Такім жа чынам можна ўстанавіць, што пры ўзрастанні вугла φ ад 180° да 270° сінус яго памяншаецца ад 0 да —1 (рыс. 155, *в*), а пры ўзрастанні вугла φ ад 270° да 360° сінус яго павялічваецца ад —1 да 0 (рыс. 155, *г*).

Схематычна паводзіны функцыі $\sin\varphi$ пры змяненні вугла ў інтэрвале ад 0° да 360° паказаны суцэльнай лініяй на рысунку 156. Пункцірная лінія схематычна паказвае змяненне функцыі $\sin\varphi$ у іншых інтэрвалах. Яна атрымана пры дапамозе перыядычнага прадаўжэння суцэльнай лініі ўлева і ўправа.



Рыс. 156.

Калі вугал φ заканчваецца ў 1-й або ў 2-й чвэрці (рыс. 155, *а* і 155, *б*), то ардыната адпаведнага вектара дадатная. Таму сінусы вуглоў, якія заканчваюцца ў 1-й і 2-й чвэрцях, дадатныя. Калі ж вугал φ заканчваецца ў 3-й або ў 4-й чвэрці (рыс. 155, *в* і 155, *г*), то ардыната адпаведнага вектара адмоўная. Таму і сінусы такіх вуглоў адмоўныя. Да тых жа вывадаў, зразумела, можна было б прыйсці і з разгляду схемы паводзін функцыі $\sin\varphi$ (гл. рыс. 156).

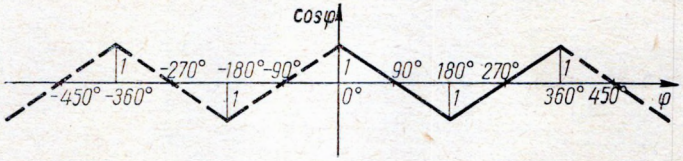
З адзначаных вышэй уласцівасцей трэба асабліва падкрэсліць наступную ўласцівасць вострых вуглоў: ***чым большы востры вугал, тым большы яго сінус.*** Так, $\sin 55° > \sin 54°$; $\sin 13°56' > \sin 13°54'$ і г. д. Гэта сцверджанне, правільнае для вострых вуглоў, не распаўсюджваецца на адвольныя вуглы. Напрыклад, вугал у 180° большы за вугал у 0°. Аднак $\sin 180° = \sin 0° = 0$.

Аналагічна таму, як мы вывучылі функцыю $\sin\varphi$, можа быць разгледжана і функцыя $\cos\varphi$. Мы прапануем вучням правесці гэты разгляд самастойна. Пры гэтым могуць быць скарыстаны тыя ж самыя рысункі 155, *а*, 155, *б*, 155, *в* і 155, *г*. Прывядзём толькі канчатковы вынік.

Пры павелічэнні вугла ад 0° да 90° косінус яго памяншаецца ад 1 да 0; пры павелічэнні вугла ад 90° да 180° косінус яго памяншаецца ад 0 да —1; пры павелічэнні вугла ад 180° да 270° косінус яго павялічваецца ад —1 да 0; пры павелічэнні вугла ад 270° да 360° косінус яго павялічваецца ад 0 да 1.

Схематычна паводзіны функцыі $y=\cos\varphi$ пры змяненні аргумента φ у інтэрвале ад 0° да 360° паказваюцца суцэльнай лініяй

на рысунку 157. Пункцірная лінія схематычна паказвае змяненне функцыі $\cos\varphi$ у іншых інтэрвалах. Такая карціна абумоўлена перыядычнасцю косінуса. Як відаць з рысунка ў 155 і 157, косінусы вуглоў, якія заканчваюцца ў 1-й або 4-й чвэрці, дадатныя; косінусы вуглоў, якія заканчваюцца ў 2-й або 3-й чвэрці, адмоўныя.



Рыс. 157.

Трэба асабліва падкрэсліць наступную ўласцівасць косінусаў вострых вуглоў: ***чым большы востры вугал, тым меншы яго косінус.*** Так, $\cos 55° < \cos 54°$; $\cos 13°56' < \cos 13°54'$ і г. д. Гэта сцверджанне, правільнае для вострых вуглоў, не распаўсюджваецца на адвольныя вуглы. Напрыклад, вугал у 270° большы за вугал у 180°. Разам з тым, $\cos 270° > \cos 180°$ $(0 > -1)$.

Практыкаванні

676. Вызначыць знакі наступных выразаў:

1) $\sin 153°$; 2) $\sin 273°$; 3) $\sin 301°$;
4) $\sin(-402°)$; 5) $\cos 73°$; 6) $\sin 910°$;
7) $\cos(-1230°)$; 8) $\cos 140°$; 9) $\sin 1000° \cdot \cos 1000°$.

677. Даказаць няроўнасці:

1) $\sin 61° > \sin 60°$; 2) $\sin 92° < \sin 91°$;
3) $\sin 196° > \sin 201°$; 4) $\sin 353° < \sin 359°$;
5) $\cos 79° < \cos 78°$; 6) $\cos 102° > \cos 150°$;
7) $\cos 190° < \cos 200°$; 8) $\cos 290° < \cos 310°$.

678. Які лік большы:

а) $\sin 735°$ або $\sin(-1066°)$;
б) $\sin(-313°)$ або $\sin 790°$;
в) $\cos 860°$ або $\cos 510°$;
г) $\cos(-20°)$ або $\cos(-10°)$?

679. У якіх чвэрцях можа заканчвацца вугал φ, калі:

а) $\sin\varphi \cos\varphi > 0$; б) $\sin\varphi \cos\varphi < 0$?

680. У якіх чвэрцях можа заканчвацца вугал φ, калі:

а) $\cos 2\varphi > 0$, $\sin 2\varphi < 0$; б) $\cos 2\varphi < 0$, $\sin 2\varphi > 0$?

681. У якіх чвэрцях можа заканчвацца вугал α, калі:

а) $|\sin\alpha| = -\sin\alpha$;

б) $|\cos\alpha| = \cos\alpha$;

в) $|\sin(-\alpha)| = -\sin\alpha$?

682. Размясціць у парадку ўзрастання велічыні:

а) $\sin(-55°)$; $\sin 600°$; $\sin 1295°$;

б) $\cos 654°$; $\cos(-67°)$; $\cos 295°$.

683. Як змяняецца $\sin 2\varphi$ пры змяненні вугла φ:

а) ад $0°$ да $45°$;

б) ад $90°$ да $135°$;

в) ад $135°$ да $180°$;

г) ад $5760°$ да $5805°$?

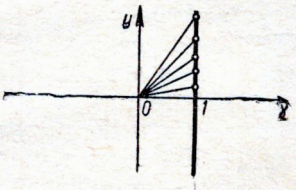
684. Як змяняецца $\cos 3\varphi$ пры змяненні вугла φ ад $3660°$ да $3690°$?

§ 104. Змяненне функцый $\operatorname{tg}\varphi$ і $\operatorname{ctg}\varphi$

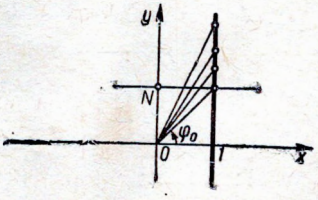
Як было адзначана ў § 102, для поўнага даследавання функцыі $\operatorname{tg}\varphi$ дастаткова вывучыць яе толькі ў інтэрвале ад $-90°$ да $90°$.

Пры $\varphi = \pm 90°$ $\operatorname{tg}\varphi$ не вызначаны. Але калі вугал φ, застаючыся ў межах ад $-90°$ да $90°$, хоць нямнога адрозніваецца ад $\pm 90°$, то выраз $\operatorname{tg}\varphi$ ужо вызначаны. Паглядзім, як жа паводзіць сябе функцыя $\operatorname{tg}\varphi$, калі яе аргумент φ блізкі да $\pm 90°$.

Па меры таго як вугал φ набліжаецца да $90°$, застаючыся менш $90°$, ардыната адпаведнага пункта на восі тангенсаў



Рыс. 158.



Рыс. 159.

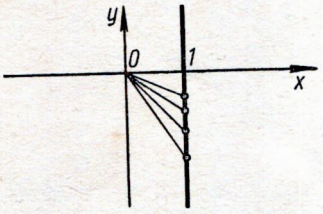
(рыс. 158) неабмежавана ўзрастае. Які б вялікі лік N мы ні ўзялі, заўсёды можна знайсці такі вугал φ_0 (рыс. 159), што для

ўсіх вуглоў φ, большых за φ_0, будзе: $\operatorname{tg}\varphi > N$. Гэта ўласцівасць тангенса *ўмоўна* запісваецца так:

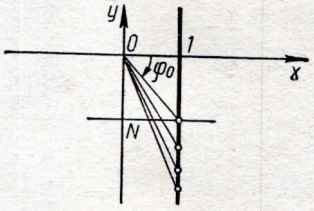
$$\lim_{\substack{\varphi \to 90^\circ \\ (\varphi < 90^\circ)}} \operatorname{tg}\varphi = +\infty$$

(чытаецца: прэдзел тангенса φ, калі φ імкнецца да 90°, застаючыся пры гэтым менш 90°, роўны плюс бесканечнасці).

Па меры таго як вугал φ набліжаецца да —90°, застаючыся пры гэтым больш —90°, ардыната адпаведнага пункта на восі тангенсаў, будучы адмоўнай, неабмежавана ўзрастае па абсалютнай велічыні (рыс. 160). Які б вялікі лік N мы ні ўзялі, заўсёды можна знайсці такі вугал φ_0 (рыс. 161), што для ўсіх вуг-



Рыс. 160.

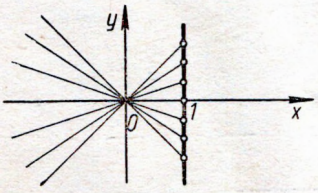


Рыс. 161.

лоў φ, меншых чым φ_0, але большых —90°, будзе $|\operatorname{tg}\varphi| > N$, прычым $\operatorname{tg}\varphi < 0$. Гэта ўласцівасць тангенса *ўмоўна* запісваецца так:

$$\lim_{\substack{\varphi \to -90^\circ \\ (\varphi > -90^\circ)}} \operatorname{tg}\varphi = -\infty$$

(чытаецца: прэдзел тангенса φ, калі φ імкнецца да —90°, застаючыся пры гэтым больш —90°, роўны мінус бесканечнасці).



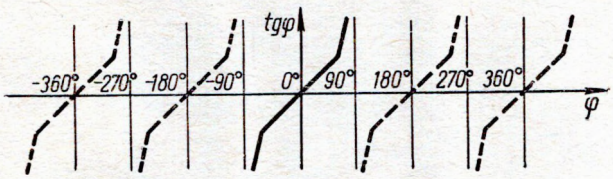
Рыс. 162.

Мы даследавалі паводзіны функцыі $\operatorname{tg}\varphi$ паблізу канечных пунктаў інтэрвалу (—90°, 90°). Даследаваць $\operatorname{tg}\varphi$ унутры гэтага інтэрвалу вельмі проста. Як ужо гаварылася ў § 96, $\operatorname{tg}\varphi$ можа прымаць любыя лікавыя значэнні. З рысунка 162 лёгка зразумець, што, чым большае значэнне аргумента φ у інтэрвале (—90°, 90°), тым большай будзе ардыната адпаведнага пункта на восі тангенсаў. Значыць, з двух адвольных вуглоў гэтага інтэрвалу большаму адпавядае большы тангенс.

Прынята гаварыць, што ***пры павелічэнні вугла ад —90° да +90° тангенс яго ўзрастае ад —∞ да +∞.***

Схематычна паводзіны функцыі $\operatorname{tg}\varphi$ у інтэрвале $-90° < \varphi < 90°$ паказваюцца суцэльнай лініяй на рысунку 163. Пункцірныя лініі на тым жа рысунку даюць уяўленне аб змяненні функцыі $\operatorname{tg}\varphi$ у іншых інтэрвалах змянення аргумента φ. Такая карціна тлумачыцца перыядычнасцю тангенса (гл. § 102).

Неабходна асоба адзначыць наступнае. Калі вугал φ набліжаецца да 90°, застаючыся пры гэтым м е н ш 90°, то $\operatorname{tg}\varphi$ неабмежавана ў з р а с т а е. Калі ж вугал φ набліжаецца да 90°,

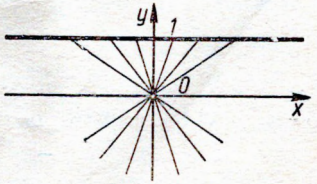


Рыс. 163.

застаючыся пры гэтым б о л ь ш 90° (гл. рыс. 163), то $\operatorname{tg}\varphi$ неабмежавана ў б ы в а е. Аналагічна можна сфармуляваць і закон змянення функцыі $\operatorname{tg}\varphi$, калі $\varphi \to -90°$.

Вуглам, якія заканчваюцца ў 1-й і 3-й чвэрцях, адпавядаюць пункты на восі тангенсаў з дадатнымі ардынатамі (рыс. 162). Таму тангенсы гэтых вуглоў дадатныя. Вуглам, якія заканчваюцца ў 2-й і 4-й чвэрцях, адпавядаюць пункты на восі тангенсаў з адмоўнымі ардынатамі (рыс. 162). Таму тангенсы гэтых вуглоў адмоўныя.

Такім чынам, мы разгледзелі функцыю $y = \operatorname{tg}\varphi$. Аналагічна можна было б даследаваць і функцыю $\operatorname{ctg}\varphi$. Няцяжка бачыць (рыс. 164), што



Рыс. 164.

$$\lim_{\substack{\varphi \to 0° \\ (\varphi > 0°)}} \operatorname{ctg}\varphi = +\infty; \qquad \lim_{\substack{\varphi \to 180° \\ (\varphi < 180°)}} \operatorname{ctg}\varphi = -\infty.$$

З двух вуглоў, якія заключаны ў інтэрвале (0°, 180°), большаму адпавядае меншы катангенс.

Прынята гаварыць, што ***пры павелічэнні вугла ад 0° да 180° катангенс яго памяншаецца ад*** $+\infty$ ***да*** $-\infty$.

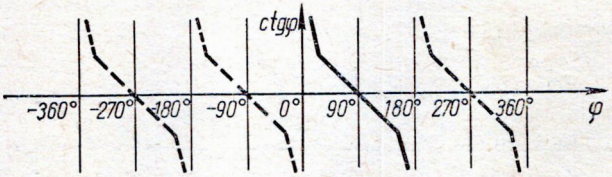
Схематычна паводзіны функцыі $\operatorname{ctg}\varphi$ паказаны на рысунку 165.

Катангенсы вуглоў, якія заканчваюцца ў 1-й і 3-й чвэрцях, дадатныя; катангенсы вуглоў, якія заканчваюцца ў 2-й і 4-й чвэрцях, адмоўныя.

Практыкаванні

685. Вызначыць знакі наступных выразаў:

1) $\operatorname{tg} 153°$;
2) $\operatorname{ctg} 270°$;
3) $\operatorname{tg} 301°$;
4) $\operatorname{ctg}(-402°)\cdot\operatorname{tg} 1°$;
5) $\operatorname{tg} 73°$;
6) $\operatorname{ctg}(-910°)$;
7) $\operatorname{tg}(-1230°)$;
8) $\operatorname{tg} 140°\cdot\operatorname{ctg} 240°$;
9) $\operatorname{tg} 546°-1$.



Рыс. 165.

686. Які лік большы:

1) $\operatorname{tg} 92°$ або $\operatorname{tg} 91°$;
2) $\operatorname{tg} 61°$ або $\operatorname{tg} 60°$;
3) $\operatorname{tg} 353°$ або $\operatorname{tg} 359°$;
4) $\operatorname{ctg} 290°$ або $\operatorname{ctg} 310°$;
5) $\operatorname{ctg} 102°$ або $\operatorname{ctg} 150°$;
6) $\operatorname{ctg}(-313°)$ або $\operatorname{ctg} 790°$;
7) $\operatorname{ctg}(-20°)$ або $\operatorname{ctg}(-10°)$;
8) $\operatorname{tg} 407°$ або $\operatorname{ctg} 497°$?

687. У якіх чвэрцях можа заканчвацца вугал φ, калі:

а) $|\operatorname{tg}\varphi|=\operatorname{tg}\varphi$;
б) $|\operatorname{ctg}(-\varphi)|=-\operatorname{ctg}\varphi$;
в) $\operatorname{tg} 2\varphi>0$;
г) $\operatorname{ctg} 2\varphi<0$?

688. У якіх чвэрцях маюць аднолькавыя знакі:

а) $\sin\varphi$ і $\operatorname{tg}\varphi$;
б) $\cos\varphi$ і $\operatorname{ctg}\varphi$;
в) $\cos\varphi$ і $\operatorname{tg}\varphi$;
г) $\operatorname{tg}\varphi$ і $\operatorname{ctg}\varphi$?

689. Якія пары трыганаметрычных функцый маюць аднолькавыя знакі ва ўсіх чвэрцях?

690. Дадзеныя выразы размясціць у парадку ўзрастання:

а) $\operatorname{tg}(-55°)$; $\operatorname{tg} 600°$; $\operatorname{tg} 1295°$;
б) $\operatorname{ctg} 295°$; $\operatorname{ctg}(-67°)$; $\operatorname{ctg} 654°$.

691. Якія трыганаметрычныя функцыі ўнутранага вугла трохвугольніка могуць прымаць адмоўныя значэнні і калі іменна?

692. Ці могуць быць адмоўнымі значэнні трыганаметрычных функцый:

а) палавіны ўнутранага вугла трохвугольніка,

б) паўсумы двух унутраных вуглоў трохвугольніка,

в) паўрознасці двух унутраных вуглоў трохвугольніка?

§ 105. Табліцы значэнняў трыганаметрычных функцый

У § 98, выкарыстоўваючы вядомыя з геаметрыі ўласцівасці прамавугольных трохвугольнікаў, мы паказалі, як можна знайсці значэнні трыганаметрычных функцый некаторых вуглоў, напрыклад 30°, 45°, 60° і г. д. Акрамя таго, мы паказалі, як знаходзяцца значэнні трыганаметрычных функцый вуглоў, канечныя стораны якіх ляжаць на якой-небудзь восі каардынат (90°, 180°, 270° і г. д. Але да гэтага часу застаецца незразумелым, як адшукваюцца значэнні трыганаметрычных функцый адвольных вуглоў, такіх, напрыклад, як 12°, 91°, 1239° і г. д.

Матэматыка ўжо даўно мае вельмі эфектыўныя метады вызначэння значэнняў трыганаметрычных функцый любога вугла. Аднак разгляд гэтых метадаў выходзіць далёка за межы школьнай праграмы. Таму мы можам толькі адзначыць, што ў цяперашні час існуюць табліцы набліжаных значэнняў трыганаметрычных функцый вуглоў з вельмі высокай ступенню дакладнасці. У некаторых з гэтых табліц памылкі не перавышаюць $10^{-7}=$ $=0{,}0000001$. Мы будзем карыстацца «Чатырохзначнымі матэматычнымі табліцамі» У. М. Брадзіса. У іх на старонках 52—54 дадзена табліца, па якой з дакладнасцю да 0,0001 можна вызначаць сінусы і косінусы вострых вуглоў з інтэрвалам у адну мінуту.

Уваходнымі данымі ў табліцу з'яўляюцца велічыні вуглоў: у радках адзначаны градусы, а ў слупках — мінуты. Кожны радок табліцы мае дзве пометкі — левую і правую. Напрыклад, першы радок на старонцы 53 памечаны злева як 35°, а справа як 54°; апошні радок на той жа старонцы памечаны злева як 69°, а справа як 20°. Аналагічна кожны слупок мае дзве пометкі — верхнюю і ніжнюю. Напрыклад, другі слупок на старонцы 53 зверху памечаны як 6′, а знізу як 54′; наступны слупок зверху памечаны як 12′, а знізу як 48′ і г. д.

Знаходжанне сінуса вугла. Няхай, напрыклад, трэба знайсці сінус вугла 37°. Адшукваем лік, які стаіць на перасячэнні радка з *левай* пометкай 37° і слупка з *верхняй* пометкай 0′. Гэта лік 0,6018 (для кароткасці ў табліцы дадзены толькі дробавыя часткі лікаў, паколькі цэлыя часткі ўсіх гэтых лікаў роўны нулю). Значыць, з дакладнасцю да 0,0001 $\sin 37° \approx 0{,}6018$. Калі б нам трэба было знайсці $\sin 37°24′$, то мы павінны былі б узяць лік у радку з левай пометкай 37° і слупку з верхняй пометкай 24′.

Гэта лік 0,6074. Значыць, з дакладнасцю да 0,0001 $\sin 37°24' \approx \approx 0{,}6074$.

Дапусцім цяпер, што нам трэба знайсці $\sin 37°26'$. Слупка з верхняй пометкай 26′ у табліцы няма. У такім выпадку трэба скарыстаць папраўкі, змешчаныя ў правай частцы табліцы. Запішам 37°26′, як 37°24′+2′. Цяпер да $\sin 37°24' \approx 0{,}6074$ трэба д а д а ц ь папраўку на 2′. Гэту папраўку адшукваем у радку з левай пометкай 37° і слупку з пометкай 2′. Яна роўна 5. Таму

$$\begin{aligned} \sin 37°26' = \sin(37°24' + 2') &\approx 0{,}6074 \\ &+ \quad 5 \\ &\overline{\quad 0{,}6079.} \end{aligned}$$

Такім чынам, з дакладнасцю да 0,0001 $\sin 37°26' \approx 0{,}6079$.

Калі б нам трэба было знайсці $\sin 37°29'$, то мы зрабілі б наступнае: 37°29′=37°30′−1′. У табліцы знаходзім $\sin 37°30' = 0{,}6088$; папраўка на 1′ роўна 2. Таму

$$\begin{aligned} \sin 37°29' = \sin(37°30' - 1') &\approx 0{,}6088 \\ &- \quad 2 \\ &\overline{\quad 0{,}6086.} \end{aligned}$$

Значыць, з дакладнасцю да 0,0001 $\sin 37°29' \approx 0{,}6086$.

З гэтых прыкладаў няцяжка зразумець правіла ўліку папраўкі пры знаходжанні сінуса: ***калі дадзены вугал большы за той, які адзначаны ў табліцы, то папраўка пры знаходжанні сінуса дадаецца; калі ж дадзены вугал меншы за той, які адзначаны ў табліцы, то папраўка адымаецца.***

Гэта правіла лёгка зразумець: чым большы вострый вугал, тым большы яго сінус, і наадварот, чым меншы вострый вугал, тым меншы яго сінус.

Знаходжанне косінуса вугла. Няхай, напрыклад, трэба знайсці косінус вугла 37°. Адшукваем лік, які стаіць на перасячэнні радка з *правай* пометкай 37° і слупка з *ніжняй* пометкай 0. Гэта лік 0,7986. Значыць, з дакладнасцю да 0,0001 $\cos 37° \approx 0{,}7986$. Калі б нам трэба было знайсці $\cos 37°24'$, то мы павінны былі б узяць лік у радку з правай пометкай 37° і слупку з ніжняй пометкай 24′. Гэта лік 0,7944. Значыць, $\cos 37°24' \approx 0{,}7944$.

Дапусцім цяпер, што нам трэба знайсці $\cos 37°26'$. Тады мы знаходзім па табліцы $\cos 37°24' = 0{,}7944$, а затым а д ы м а е м ад гэтага ліку папраўку на 2′. Гэту папраўку адшукваем у радку з правай пометкай 37° і слупку з пометкай 2′. Яна роўна 4. Таму

$$\cos 37°26' = \cos(37°24' + 2') \approx 0{,}7944 - 0{,}0004 = 0{,}7940.$$

Такім чынам, з дакладнасцю да 0,0001 $\cos 37°24' \approx 0{,}7940$. Калі б нам трэба было знайсці $\cos 37°29'$, то мы зрабілі б наступнае:

$37°29' = 37°30' - 1'$. У табліцы знаходзім $\cos 37°30' \approx 0{,}7934$; папраўка на 1′ роўна 2. Таму

$$\cos 37°29' = \cos(37°30' - 1') \approx 0{,}7934 + 0{,}0002 = 0{,}7936.$$

Значыць, з дакладнасцю да 0,0001 $\cos 37°29' \approx 0{,}7936$.

З гэтых прыкладаў няцяжка зразумець правіла ўліку папраўкі пры знаходжанні косінуса: ***калі дадзены вугал большы за той, які адзначаны ў табліцы, то папраўка пры знаходжанні косінуса адымаецца; калі ж дадзены вугал меншы за той, які адзначаны ў табліцы, то папраўка дадаецца.***

У аснове гэтага правіла ляжыць наступная ўласцівасць косінуса: чым большы востры вугал, тым меншы яго косінус; чым меншы востры вугал, тым большы яго косінус.

Знаходжанне тангенса і катангенса вугла. Табліцы тангенсаў і катангенсаў змешчаны ў табліцах У. М. Брадзіса на старонках 55—58. Гэтыя табліцы складзены аналагічна табліцам сінусаў і косінусаў, і таму мы не будзем падрабязна іх апісваць. Адзначым толькі правіла ўліку папраўак: ***калі дадзены вугал большы за той, які адзначаны ў табліцы, то пры знаходжанні тангенса папраўка дадаецца, а пры знаходжанні катангенса — адымаецца.*** Наадварот, ***калі дадзены вугал меншы за той, які адзначаны ў табліцы, то пры знаходжанні тангенса папраўка адымаецца, а пры знаходжанні катангенса — дадаецца.***

Вучням прапануецца самастойна абгрунтаваць гэта правіла.

Прыклады. Знайсці $\operatorname{tg} 37°29'$. Па табліцы знаходзім $\operatorname{tg} 37°30' \approx 0{,}7673$. Папраўка на 1′ роўна 5. Таму $\operatorname{tg} 37°29' = \operatorname{tg}(37°30' - 1') \approx 0{,}7673 - 0{,}0005 = 0{,}7668$.

Знайсці $\operatorname{ctg} 37°29'$. Па табліцы знаходзім $\operatorname{ctg} 37°30' \approx 1{,}3032$. У табліцы мы прачытаем проста 3032. Гэта дробавая частка тангенса. Цэлая частка дадзена ніжэй. Яна роўна 1 і пастаянная для катангенсаў усіх вуглоў ад 30° да 35°. Папраўка на 1′ роўна 8. Таму $\operatorname{ctg} 37°29' = \operatorname{ctg}(37°30' - 1') \approx 1{,}3032 + 0{,}0008 = 1{,}3040$.

У заключэнне адзначым, што тангенсы вуглоў, блізкіх да 90° (ад 76° да 90°), і катангенсы вуглоў, блізкіх да 0° (ад 0° да 14°), знаходзяцца па табліцы (стар. 57, 58) без выкарыстання папраўак.

Мы паказалі, як з дапамогай матэматычных табліц знаходзяцца значэнні трыганаметрычных функцый вострых вуглоў. А што рабіць, калі вугал, які цікавіць нас, не з'яўляецца вострым (напрыклад, 91°, 127° і г. д.)? Гэта пытанне мы вырашым пазней. Пакуль толькі адзначым, што для знаходжання сінуса, косінуса, тангенса і катангенса любога вугла (у тым ліку і не вострага!) зусім дастаткова тых табліц, якія мы толькі што разгледзелі.

Практыкаванні

693. Для кожнага з наступных вуглоў знайсці сінус, косінус, тангенс і катангенс:

1) 20°48′;	2) 35°06′;	3) 61°12′;	4) 88°54′;
5) 20°50′;	6) 35°05′;	7) 61°13′;	8) 88°51′;
9) 44°03′;	10) 45°07′;	11) 87°11′;	12) 65°05′.

694. Самалёт, бачны з базы пошукавай групы пад вуглом 12°, радзіруе на базу, што ён знаходзіцца на вышыні 800 *м* над адшукваемым аб'ектам. Знайсці адлегласць ад базы да адшукваемага аб'екта.

695. Пры фатаграфаванні адваротнага боку Месяца аўтаматычная міжпланетная станцыя знаходзілася ад Месяца на адлегласці, прыкладна роўнай 65 000 *км*. Пад якім вуглом быў бачны ў гэты час Месяц? Радыус Месяца прыняць роўным 1740 *км*.

§ 106. Выкарыстанне трыганаметрычных табліц для знаходжання вострага вугла па значэннях яго трыганаметрычных функцый

Трыганаметрычныя табліцы можна выкарыстоўваць не толькі для знаходжання значэнняў трыганаметрычных функцый вострых вуглоў, але і для знаходжання вострых вуглоў па зададзеных значэннях іх трыганаметрычных функцый.

Няхай, напрыклад, трэба знайсці востры вугал φ, сінус якога роўны 0,5135. Адшукваем гэты лік у табліцы на старонках 52—54. Заўважаем, што ён стаіць на перасячэнні радка з левай пазнакай 30° і слупка з верхняй пазнакай 54′. Значыць, $\varphi \approx 30°54'$. Паспрабуем цяпер знайсці востры вугал φ, сінус якога роўны 0,9526. Такога ліку ў табліцы няма. Найбліжэйшы да яго лік у табліцы роўны 0,9527. Запішам 0,9526 у выглядзе 0,9527—0,0001. Лік 0,9527 адпавядае вуглу 72°18′, а 0,0001 — папраўцы на 1′. Таму $\varphi \approx 72°18' - 1' = 72°17'$. Гэтак жа можна знаходзіць вуглы і па значэннях іх косінуса, тангенса і катангенса. Адказы, як правіла, будуць набліжанымі з дакладнасцю да 1′.

Асаблівую ўвагу пры рашэнні падобных задач трэба звяртаць на правіла ўліку паправак. Няхай, напрыклад, трэба знайсці востры вугал φ, катангенс якога роўны 2,710. У табліцы на старонках 55—58 адшукваем лік, найбліжэйшы да 2,710. Такім лікам з'яўляецца 2,703. Запішам 2,710 у выглядзе 2,703+0,007. Лік 2,703 адпавядае катангенсу вугла 20°18′, а 0,007 — папраўцы на 3′. Таму шукаемы вугал φ роўны $\varphi \approx 20°18' - 3' = 20°15'$. Папраўку ў дадзеным выпадку трэба адымаць, а не дадаваць, таму што з двух вострых вуглоў меншаму адпавядае большы катангенс.

Практыкаванні

696. Знайсці востры вугал па дадзенаму значэнню яго сінуса (косінуса):

а) 0,1874; б) 0,5577; в) 0,9078;
г) 0,9903; д) 0,2682; е) 0,8264;
ж) 0,9412; з) 0,4381; і) 0,8760;
к) 0,9441; л) 0,9944; м) 0,0020.

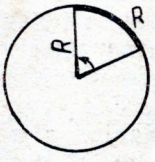
697. Знайсці востры вугал φ па дадзенаму значэнню яго тангенса (катангенса):

а) 0,2698; б) 2,2250; в) 3,9230; г) 19,1900;
д) 0,0090; е) 0,5782; ж) 3,9910; з) 1,7400;
і) 2,7440; к) 0,3832; л) 0,1844; м) 0,0008.

§ 107. Радыяннае вымярэнне вуглоў і дуг

Падобна да таго як адлегласці не заўсёды зручна вымяраць у сантыметрах, час у секундах, масу ў грамах і г. д.— вуглы і дугі не заўсёды зручна вымяраць у градусах. Таму разам з градусам вельмі часта ўжываецца і іншая адзінка вымярэння вуглоў і дуг — радыян.

1 вуглавы радыян ёсць цэнтральны вугал, што абапіраецца на дугу акружнасці, даўжыня якой роўна радыусу гэтай акружнасці (рыс. 166).



Рыс. 166.

У гэтым азначэнні фігурыруе акружнасць, і таму натуральна паставіць пытанне: а ці не залежыць вугал у 1 радыян ад радыуса гэтай акружнасці? Было б вельмі дрэнна, калі б такая залежнасць існавала. Тады адзін і той жа вугал, напрыклад вугал у 30°, змяшчаў бы розны лік радыянаў у залежнасці ад таго, з якой акружнасцю яго звязваюць. Аднак у гэтых адносінах усё добра. Сапраўды, акружнасць радыуса R мае даўжыню $2\pi R$. Таму яе дуга даўжынёю ў R складае $\frac{1}{2\pi}$ частку акружнасці; але ў такім выпадку цэнтральны вугал, які ёй адпавядае, павінен складаць $\frac{1}{2\pi}$ частку поўнага вугла, гэта значыць вугла ў 360°:

$$1 \text{ радыян} = \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57^\circ 17' 45''.$$

Такі вугал не залежыць ад R. Відавочна, што

$$2\pi \text{ радыянаў} = 360^\circ,$$

таму

$$1^\circ = \frac{2\pi}{360} \text{ радыяна} \approx 0{,}017 \text{ радыяна.}$$

1 дугавы радыян ёсць такая дуга акружнасці, якой адпавядае цэнтральны вугал у 1 вуглавы радыян.

Увайшло ў звычай слова «радыян» у выразах: «$\varphi = 1$ радыяну», «$\varphi = 10$ радыянам», «$\varphi = -3$ радыянам» і г. д.— апускаць і пісаць проста:

$$\varphi = 1, \quad \varphi = 10, \quad \varphi = -3 \text{ і г. д.}$$

Гэтыя выразы не трэба блытаць з выразамі

$$\varphi = 1^\circ, \quad \varphi = 10^\circ, \quad \varphi = -3^\circ \text{ і г. д.}$$

Такія вуглы, як вуглы ў 30°, 45°, 60°, 90°, 135° і інш., вельмі часта будуць сустракацца ў практыкаваннях. Радыянную меру гэтых вуглоў карысна памятаць:

$$30^\circ = \frac{\pi}{6}; \quad 45^\circ = \frac{\pi}{4}; \quad 60^\circ = \frac{\pi}{3}; \quad 90^\circ = \frac{\pi}{2}; \quad 135^\circ = \frac{3}{4}\pi \text{ і г. д.}$$

У «Чатырохзначных матэматычных табліцах» У. М. Брадзіса на старонках 59—61 змешчаны табліцы для пераводу градуснай меры вугла (дугі) у радыянную. Гэтымі ж табліцамі можна карыстацца і для рашэння адваротнай задачы, гэта значыць для ператварэння радыяннай меры вугла ў градусную. На старонках 62—64 у табліцах У. М. Брадзіса змешчаны значэнні функцый $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ і $\operatorname{tg}\varphi$ для вуглоў φ, выражаных у радыянах.

Калі пад φ разумець вугал, які выражаны ў радыянах, то перыядам функцый $\sin\varphi$ і $\cos\varphi$ будзе вугал 2π, а перыядам функцый $\operatorname{tg}\varphi$ і $\operatorname{ctg}\varphi$ — вугал π.

Практыкаванні

698. Дадзеныя вуглы выразіць у радыянах:

а) 40°; б) 150°; в) 315°; г) 1000°.

699. Дадзеныя вуглы выразіць у градусах:

а) $\frac{\pi}{7}$; б) $\frac{3}{5}\pi$; в) 7π; г) $\frac{5}{2}\pi$.

700. У якой чвэрці заканчваюцца вуглы:

1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $-\frac{2\pi}{3}$; 3) $\frac{21\pi}{4}$; 4) 0,80; 5) 3; 6) $-3{,}25$;

7) 100; 8) $-\frac{1}{3}$?

701. Вылічыць:

а) $a^2 \sin\frac{\pi}{2} + b^2 \cos 0 + 2ab \cos\pi$;

б) $3\cos\frac{\pi}{2} - 4\sin^3\frac{3\pi}{2} + 8\operatorname{tg}\pi$;

в) $2\cos\pi + 6\operatorname{ctg}\frac{3}{2}\pi - 5\sin 2\pi$;

г) $2\operatorname{tg} 0 + \sin\pi - \cos\frac{3}{2}\pi - \operatorname{ctg}\pi$.

702. Для якіх значэнняў x выраз $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ не вызначаны?

703. Якія з дадзеных велічынь з'яўляюцца дадатнымі і якія адмоўнымі:

а) $\sin\frac{15\pi}{4}$; б) $\cos 2$; в) $\operatorname{tg}\frac{5}{2}\pi$; г) $\operatorname{ctg} 100$?

Выкарыстоўваючы трыганаметрычныя табліцы, вылічыць:

704. $\sin 0{,}5 + \cos 2{,}7 + \operatorname{tg} 0{,}6 \cdot \operatorname{ctg} 2{,}8$.

705. $\operatorname{tg} 2{,}5 + \operatorname{ctg} 1{,}5 + \sin 0{,}3 \cdot \cos 0{,}3$.

706. Пры якой умове даўжыня дугі акружнасці роўна яе радыяннай меры?

707. Што больш:

а) $\sin 0{,}63$ або $\sin 0{,}87$;

б) $\cos 1{,}8$ або $\cos 1{,}83$;

в) $\sin 4^\circ$ або $\sin 4$;

г) $\operatorname{tg}\left(\frac{5}{6}\right)^\circ$ або $\operatorname{tg}\frac{5}{6}$?

§ 108. Трыганаметрычныя функцыі лікавага аргумента

Да цяперашняга часу, гаворачы аб трыганаметрычных функцыях, мы лічылі, што аргументамі гэтых функцый з'яўляюцца вуглы або дугі. Цяпер мы хочам разгледзець трыганаметрычныя функцыі л і к а в а г а аргумента. Такое жаданне зусім натуральнае. Калі мы гаворым, напрыклад, аб квадратнай функцыі $y = ax^2$, то пад x мы разумеем проста лік. Гэты лік можа характарызаваць час у свабодным падзенні цел $\left(s = \frac{gt^2}{2}\right)$, супраціўленне электрычнага ланцуга ў законе Джоўля — Ленца $(Q = IR^2)$ і г. д.

Чаму ж у такім выпадку, гаворачы аб функцыі $y=\operatorname{tg} x$, мы пад x павінны разумець абавязкова вугал?

Азначэнне. *Сінусам ліку x называецца лік, роўны сінусу вугла ў x радыянаў. Косінусам ліку x называецца лік, роўны косінусу вугла ў x радыянаў.*

Аналагічна вызначаюцца і іншыя трыганаметрычныя функцыі лікавага аргумента x. Напрыклад, $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ і г. д. Тут ужо $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ і $\frac{\pi}{6}$ — не вуглы, выражаныя ў радыянах, а проста лікі.

Практыкаванні

Якія з дадзеных лікаў з'яўляюцца дадатнымі і якія адмоўнымі (№ 708, 709):

708. а) $\sin 3$; б) $\cos 6$; в) $\operatorname{tg} 9$; г) $\operatorname{ctg} 12$.

709. а) $\cos(-5)$; б) $\operatorname{tg}(-10)$; в) $\sin(-15)$; г) $\operatorname{ctg}(-20)$?

§ 109. Алгебраічныя суадносіны паміж трыганаметрычнымі функцыямі аднаго і таго ж аргумента

Перш за ўсё адзначым ужо вядомыя нам тоеснасці

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \qquad (1)$$

і

$$\operatorname{ctg}\varphi=\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}. \qquad (2)$$

З гэтых дзвюх тоеснасцей вынікае, што

$$\operatorname{tg}\varphi\cdot\operatorname{ctg}\varphi=1. \qquad (3)$$

Цяпер пакажам, што для любога вугла

$$\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1^*. \qquad (4)$$

Дапусцім, што $\vec{OA}=(x, y)$ ёсць вектар адзінкавай даўжыні, які ўтварае з воссю x вугал φ (рыс. 167). Тады

$$\sin\varphi=y,$$
$$\cos\varphi=x.$$

Квадрат даўжыні любога вектара роўны суме квадратаў яго каардынат. З гэтага сцверджання і вынікае формула (4).

---

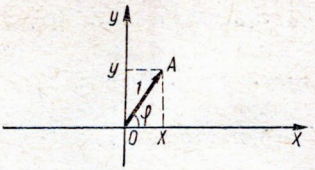
* Выразы $\sin^2\varphi$, $\cos^2\varphi$ і г. д. ужываюцца для запісу квадратаў $(\sin\varphi)^2$, $(\cos\varphi)^2$ і г. д.

Нам вядомы наступныя суадносіны:

$$\sec\varphi = \frac{1}{\cos\varphi} \qquad (5)$$

і

$$\operatorname{cosec}\varphi = \frac{1}{\sin\varphi}. \qquad (6)$$



Рыс. 167.

Да атрыманых шасці тоеснасцей дададзім яшчэ дзве:

$$1 + \operatorname{tg}^2\varphi = \sec^2\varphi, \qquad (7)$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\varphi = \operatorname{cosec}^2\varphi. \qquad (8)$$

Дакажам, напрыклад, тоеснасць (7):

$$1 + \operatorname{tg}^2\varphi = 1 + \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{1}{\cos^2\varphi} = \sec^2\varphi.$$

Аналагічна даказваецца і тоеснасць (8).

Практыкаванні

710. Ці могуць $\sin\varphi$ і $\cos\varphi$ адначасова раўняцца нулю?

711. Ці могуць $\operatorname{tg}\varphi$ і $\operatorname{ctg}\varphi$ па абсалютнай велічыні быць:
а) абодва больш 1; б) абодва менш 1?

712. Ці можа адзін з лікаў $\operatorname{tg}\varphi$ і $\operatorname{ctg}\varphi$ быць дадатным, а другі адмоўным?

713. Якая вобласць дапушчальных значэнняў φ у тоеснасці $\operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{ctg}\varphi = 1$?

714. Даказаць няроўнасць $|\sec\varphi| \geqslant 1$ не менш чым двума спосабамі.

715. Выразіць $\dfrac{3\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + 2\cos\alpha}$ праз $\operatorname{tg}\alpha$.

716. Знайсці $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$, калі $\sin\alpha + \cos\alpha = a$.

§ 110. Знаходжанне значэнняў трыганаметрычных функцый вугла па значэнню якой-небудзь адной з іх

Выкарыстоўваючы асноўныя трыганаметрычныя тоеснасці, атрыманыя ў § 109, лёгка знайсці значэнні ўсіх трыганаметрычных функцый $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$, калі вядома значэнне якой-небудзь адной з іх. Растлумачым гэта на канкрэтных прыкладах.

Прыклад 1. Знайсці значэнні трыганаметрычных функцый вугла φ, калі вядома, што $\sin\varphi = \dfrac{3}{5}$.

З тоеснасці $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$ знаходзім: $\cos^2\varphi=1-\sin^2\varphi=\frac{16}{25}$. Таму $\cos\varphi=\pm\frac{4}{5}$.

Знак + або — трэба выбіраць у залежнасці ад таго, у якой чвэрці заканчваецца вугал φ. Па ўмове $\sin\varphi=\frac{3}{5}>0$. Значыць, вугал φ заканчваецца або ў 1-й, або ў 2-й чвэрці. Калі ён заканчваецца ў 1-й чвэрці, то $\cos\varphi=+\frac{4}{5}$. Калі ж ён заканчваецца ў 2-й чвэрці, то $\cos\varphi=-\frac{4}{5}$. У першым выпадку

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{4};\quad \sec\varphi=\frac{1}{\cos\varphi}=\frac{5}{4};$$

$$\operatorname{ctg}\varphi=\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}=\frac{4}{3};\quad \operatorname{cosec}\varphi=\frac{1}{\sin\varphi}=\frac{5}{3}.$$

У другім выпадку

$$\operatorname{tg}\varphi=-\frac{3}{4};\quad \operatorname{ctg}\varphi=-\frac{4}{3};\quad \sec\varphi=-\frac{5}{4};\quad \operatorname{cosec}\varphi=\frac{5}{3}.$$

Прыклад 2. Знайсці значэнні трыганаметрычных функцый вугла φ, калі вядома, што ён заканчваецца ў 4-й чвэрці і $\operatorname{tg}\varphi=-\frac{3}{4}$.

Выкарыстоўваючы тоеснасць $1+\operatorname{tg}^2\varphi=\sec^2\varphi$, знойдзем $\sec\varphi$:

$$\sec\varphi=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}=\sqrt{1+\left(-\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{5}{4}.$$

Знак + перад радыкалам мы ўзялі таму, што вугал φ па ўмове заканчваецца ў 4-й чвэрці, $\sec\varphi=\frac{1}{\cos\varphi}$, а косінус вугла, які заканчваецца ў 4-й чвэрці, дадатны; таму дадатны і $\sec\varphi$. Далей атрымліваем:

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sec\varphi}=\frac{4}{5}.$$

Цяпер, выкарыстоўваючы тоеснасць $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$, знойдзем $\sin\varphi$:

$$\sin\varphi=-\sqrt{1-\cos^2\varphi}=-\frac{3}{5}.$$

Тут перад радыкалам трэба браць знак —, паколькі сінус вугла, які заканчваецца ў 4-й чвэрці, адмоўны.

Заўважым, што ў дадзеным выпадку больш рацыянальна было б знайсці $\sin\varphi$ з тоеснасці $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$. Аднак мы свядома атрымалі $\sin\varphi$ іншым шляхам, каб яшчэ раз паказаць, як трэба выбіраць знак (+ або —) перад радыкалам.

Такім чынам, мы атрымалі $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, $\operatorname{tg}\varphi$ і $\sec\varphi$. Пасля гэтага лёгка знайсці значэнні і іншых трыганаметрычных функцый вугла φ:

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} = -\frac{4}{3}; \quad \operatorname{cosec}\varphi = \frac{1}{\sin\varphi} = -\frac{5}{3}.$$

Практыкаванні

717. Знайсці значэнні трыганаметрычных функцый вугла па наступных даных:

1) $\sin\alpha = 0{,}6, \quad 0° < \alpha < 90°$;

2) $\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{3}, \quad \pi < \alpha < \dfrac{3}{2}\pi$;

3) $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}, \quad 270° < \alpha < 360°$;

4) $\cos\alpha = -0{,}8, \quad 180° < \alpha < 270°$;

5) $\operatorname{tg}\alpha = -2, \quad \dfrac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$;

6) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{3}, \quad 180° < \alpha < 270°$.

718. Знайсці значэнні трыганаметрычных функцый вугла φ, калі вядома, што

$$\sin\varphi = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \quad (a > b > 0)$$

і вугал φ заканчваецца не ў 1-й чвэрці.

719. Знайсці значэнні трыганаметрычных функцый вугла φ, калі вядома, што $\operatorname{tg}\varphi = a^2 - 1$ ($|a| \leqslant 1$) і вугал φ заканчваецца не ў 2-й чвэрці.

§ 111. Формулы прывядзення

Т э а р э м а. ***Для любога вугла*** φ

$$\sin(90° + \varphi) = \cos\varphi. \tag{1}$$

Д о к а з. Калі вугал φ заканчваецца ў 1-й чвэрці (рыс. 168, *а*),

то вугал $90°+\varphi$ павінен заканчвацца ў 2-й чвэрці. Выкарыстоўваючы адзінкавы круг, атрымліваем:

$$\sin(90°+\varphi)=BD,\quad \cos\varphi=OC.$$

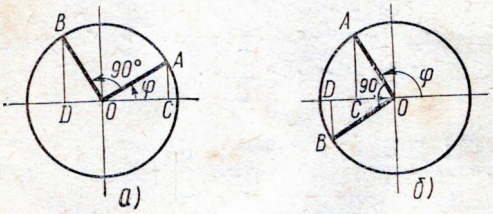
Але трохвугольнікі OAC і BOD роўныя; таму $BD=OC$. Адсюль вынікае роўнасць (1).

Калі вугал заканчваецца ў 2-й чвэрці (рыс. 168, *б*), то вугал $90°+\varphi$ павінен заканчвацца ў 3-й чвэрці. Выкарыстоўваючы адзінкавы круг, атрымаем:

$$\sin(90°+\varphi)=-BD,\quad \cos\varphi=-OC.$$

Трохвугольнікі OAC і BOD роўныя; таму $BD=OC$. Значыць, $-BD=-OC$, або $\sin(90°+\varphi)=\cos\varphi$.

Аналагічна можна разгледзець выпадкі, калі вугал φ заканчваецца ў 3-й або ў 4-й чвэрці. Тоеснасць (1) лёгка праверыць і ў выпадку, калі канечная старана вугла φ ляжыць на якой-небудзь восі каардынат. Прапануем вучням самастойна пераканацца ў гэтым.



Рыс. 168.

З даказанай тоеснасці (1) вынікае рад іншых важных тоеснасцей. Замяніўшы ў (1) φ на $-\varphi$, атрымліваем:

$$\sin(90°-\varphi)=\cos(-\varphi)=\cos\varphi. \qquad (2)$$

Каб атрымаць аналагічную формулу для $\cos(90°-\varphi)$, заменім у (2) φ на $90°-\varphi$. У рэзультаце атрымаем:

$$\sin[90°-(90°-\varphi)]=\cos(90°-\varphi),$$

або

$$\sin\varphi=\cos(90°-\varphi).$$

Такім чынам,

$$\cos(90°-\varphi)=\sin\varphi. \qquad (3)$$

З (2) і (3) вынікае:

$$\operatorname{tg}(90°-\varphi)=\frac{\sin(90°-\varphi)}{\cos(90°-\varphi)}=\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}=\operatorname{ctg}\varphi,$$

$$\operatorname{tg}(90°-\varphi)=\operatorname{ctg}\varphi. \qquad (4)$$

Аналагічна,

$$\operatorname{ctg}(90^\circ - \varphi) = \frac{\cos(90^\circ - \varphi)}{\sin(90^\circ - \varphi)} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \operatorname{tg}\varphi,$$

$$\operatorname{ctg}(90^\circ - \varphi) = \operatorname{tg}\varphi. \qquad (5)$$

Формулы

$$\sin(90^\circ - \varphi) = \cos\varphi,$$
$$\cos(90^\circ - \varphi) = \sin\varphi,$$
$$\operatorname{tg}(90^\circ - \varphi) = \operatorname{ctg}\varphi,$$
$$\operatorname{ctg}(90^\circ - \varphi) = \operatorname{tg}\varphi$$

часам называюць *формуламі дапаўняльнага вугла*. Гэта звязана з тым, што вуглы $90^\circ - \varphi$ і φ дапаўняюць адзін другі да прамога вугла. Гэтыя формулы вельмі проста запомніць: адна функцыя замяняецца на другую, падобную да першай (сінус на косінус, косінус на сінус, тангенс на катангенс, катангенс на тангенс).

Напрыклад, $\sin 40^\circ = \cos 50^\circ$; $\operatorname{tg} 70^\circ = \operatorname{ctg} 20^\circ$ і г. д.

Цяпер атрымаем формулы для вугла $90^\circ + \varphi$. Адну з такіх формул мы ўжо даказалі вышэй:

$$\sin(90^\circ + \varphi) = \cos\varphi.$$

Астатнія формулы лёгка атрымліваюцца з формул дапаўняльнага вугла і ўласцівасці цотнасці (няцотнасці) трыганаметрычных функцый. Маем:

$$\cos(90^\circ + \varphi) = \cos[90^\circ - (-\varphi)] = \sin(-\varphi) = -\sin\varphi;$$
$$\operatorname{tg}(90^\circ + \varphi) = \operatorname{tg}[90^\circ - (-\varphi)] = \operatorname{ctg}(-\varphi) = -\operatorname{ctg}\varphi;$$
$$\operatorname{ctg}(90^\circ + \varphi) = \operatorname{ctg}[90^\circ - (-\varphi)] = \operatorname{tg}(-\varphi) = -\operatorname{tg}\varphi.$$

Зыходзячы з гэтых формул, можна атрымаць формулы для вуглоў $180^\circ \pm \varphi$. Напрыклад,

$$\sin(180^\circ + \varphi) = \sin[90^\circ + (90^\circ + \varphi)] = \cos(90^\circ + \varphi) = -\sin\varphi;$$
$$\sin(180^\circ - \varphi) = \sin[90^\circ + (90^\circ - \varphi)] = \cos(90^\circ - \varphi) = \sin\varphi.$$

Аналагічна даказваюцца формулы

$$\cos(180^\circ + \varphi) = -\cos\varphi; \quad \cos(180^\circ - \varphi) = -\cos\varphi.$$

Каб атрымаць адпаведныя формулы для тангенса і катангенса, можна выкарыстаць выведзеныя суадносіны для сінуса і косінуса, улічваючы, што

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}, \quad \operatorname{ctg}\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

Аднак у дадзеным выпадку лепш за ўсё зыходзіць з таго, што вугал у 180° з'яўляецца перыядам функцый $\operatorname{tg}\varphi$ і $\operatorname{ctg}\varphi$. Адсюль адразу ж атрымліваем:

$$\operatorname{tg}(180°+\varphi)=\operatorname{tg}\varphi,$$
$$\operatorname{tg}(180°-\varphi)=\operatorname{tg}(-\varphi)=-\operatorname{tg}\varphi,$$
$$\operatorname{ctg}(180°+\varphi)=\operatorname{ctg}\varphi,$$
$$\operatorname{ctg}(180°-\varphi)=\operatorname{ctg}(-\varphi)=-\operatorname{ctg}\varphi.$$

З формулы для вуглоў $180°\pm\varphi$ можна атрымаць аналагічныя формулы для вуглоў $270°\pm\varphi$.

Формулы для вуглоў $360°\pm\varphi$ лёгка атрымліваюцца, калі ўлічыць, што вугал $360°$ з'яўляецца агульным перыядам трыганаметрычных функцый. Падрабязна спыняцца на гэтым мы не будзем. Прывядзём толькі поўную табліцу патрэбных нам формул.

Функцыя / Вугал	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
φ	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\operatorname{tg}\varphi$	$\operatorname{ctg}\varphi$
$90°-\varphi\ \left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$	$\operatorname{ctg}\varphi$	$\operatorname{tg}\varphi$
$90°+\varphi\ \left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)$	$\cos\varphi$	$-\sin\varphi$	$-\operatorname{ctg}\varphi$	$-\operatorname{tg}\varphi$
$180°-\varphi\ (\pi-\varphi)$	$\sin\varphi$	$-\cos\varphi$	$-\operatorname{tg}\varphi$	$-\operatorname{ctg}\varphi$
$180°+\varphi\ (\pi+\varphi)$	$-\sin\varphi$	$-\cos\varphi$	$\operatorname{tg}\varphi$	$\operatorname{ctg}\varphi$
$270°-\varphi\ \left(\frac{3}{2}\pi-\varphi\right)$	$-\cos\varphi$	$-\sin\varphi$	$\operatorname{ctg}\varphi$	$\operatorname{tg}\varphi$
$270°+\varphi\ \left(\frac{3}{2}\pi+\varphi\right)$	$-\cos\varphi$	$\sin\varphi$	$-\operatorname{ctg}\varphi$	$-\operatorname{tg}\varphi$
$360°-\varphi\ (2\pi-\varphi)$	$-\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$-\operatorname{tg}\varphi$	$-\operatorname{ctg}\varphi$
$360°+\varphi\ (2\pi+\varphi)$	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\operatorname{tg}\varphi$	$\operatorname{ctg}\varphi$

Завучваць гэтыя формулы няма неабходнасці. Дастаткова памятаць наступнае:

1) калі ў формуле змяшчаюцца вуглы $180°$ і $360°$ (π і 2π), то назва функцыі не змяняецца; калі ж у формуле змяшчаюцца вуглы $90°$ і $270°$ $\left(\frac{\pi}{2}\right.$ і $\left.\frac{3}{2}\pi\right)$, то

назва функцыі змяняецца на падобную (сінус на косінус, тангенс на катангенс і г. д.);

2) каб вызначыць знак у правай частцы формулы (+ або —), дастаткова, лічачы вугал φ вострым, вызначыць знак выразу, які стаіць у левай частцы формулы.

Няхай, напрыклад, трэба вызначыць $\operatorname{tg}(90°+\varphi)$. Перш за ўсё мы заўважаем, што ў формуле змяшчаецца вугал 90°. Таму ў першай частцы шукаемай формулы павінен стаяць $\operatorname{ctg}\varphi$. Каб вызначыць знак перад $\operatorname{ctg}\varphi$, дапусцім, што вугал φ востры. Тады вугал $90°+\varphi$ павінен заканчвацца ў 2-й чвэрці. Але тангенс вугла, які заканчваецца ў 2-й чвэрці, адмоўны. Таму перад $\operatorname{ctg}\varphi$ трэба ўзяць знак —. Такім чынам,

$$\operatorname{tg}(90°+\varphi) = -\operatorname{ctg}\varphi.$$

Аналагічна ўстанаўліваецца формула

$$\cos(180°-\varphi) = -\cos\varphi.$$

Паколькі ў формуле змяшчаецца вугал у 180°, назва функцыі не змяняецца. Калі вугал φ востры, то вугал $180°-\varphi$ павінен заканчвацца ў 2-й чвэрці. Але косінус вугла, які заканчваецца ў 2-й чвэрці, адмоўны. Таму ў правай частцы формулы павінен стаяць знак —.

Атрыманыя вышэй формулы носяць назву *формул прывядзення*. Прычыны такой назвы будуць высветлены ў наступным параграфе.

Практыкаванні

Спрасціць выразы (№ 720—727):

720. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

721. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

722. $\sin(\pi+\alpha)-\operatorname{tg}(\pi-\alpha)$.

723. $\cos(\pi-\alpha)+\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)$.

724. $\sin(270°-\alpha)+\cos(270°+\alpha)$.

725. $\operatorname{tg}(270°+\alpha)-\operatorname{ctg}(270°-\alpha)$.

726. $\operatorname{tg}(\alpha-360°)-\sin(\alpha+360°)$.

727. $\cos(\alpha-360°)-\operatorname{ctg}(\alpha-360°)$.

728. Даказаць, што калі прамыя $y=k_1x$ і $y=k_2x$ перпендыкулярны адна другой, то $k_1k_2=-1$.

729. $\operatorname{tg} x = 3$. Чаму роўны тангенс дапаўняльнага вугла?

730. $\sin \varphi = 0{,}6$. Чаму роўны сінус дапаўняльнага вугла?

731. Што больш:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \text{ або } \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)?$$

Спрасціць выразы (№ 732—734):

732. $\sin(\pi + 1) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$.

733. $\sin^2 2(\pi + 1) + \cos^2 2(\pi - 1)$.

734. $$\frac{[\sin^2(9\pi + 0{,}5) + \sin^2(0{,}5 - 7{,}5\pi)] \cdot \sin\left(\frac{1}{2} - \pi\right)}{\cos\left(\frac{3}{2}\pi - 0{,}5\right) \cdot \operatorname{tg}(0{,}5 - 0{,}5\pi)}.$$

Даказаць тоеснасці (№ 735—739):

735. $\cos(45° + \alpha) = \sin(45° - \alpha)$.

736. $\cos(20° - \alpha) + \sin(250° + \alpha) = 0$.

737. $\sin(112° - \alpha) + \cos(\alpha + 158°) = 0$.

738. $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}(90° - x) = 1$.

739*. $\operatorname{tg} 1° \cdot \operatorname{tg} 2° \cdot \operatorname{tg} 3° \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 87° \cdot \operatorname{tg} 88° \cdot \operatorname{tg} 89° = 1$.

740. Даказаць, што сінус сумы двух вуглоў трохвугольніка роўны сінусу трэцяга вугла.

741. 1) Даказаць, што плошча любога чатырохвугольніка роўна палавіне здабытку яго дыяганалей на сінус вугла паміж імі.

2) Даказаць, што з усіх прамавугольнікаў з дадзенай дыяганаллю найбольшую плошчу мае квадрат.

3) Які чатырохвугольнік з дыяганалямі d_1 і d_2 мае максімальную плошчу?

742. Што больш:

а) $\sin 26°$ або $\cos 40°$;

б) $\operatorname{tg} 57°$ або $\operatorname{ctg} 20°$;

в) $\sin 0{,}63$ або $\cos 0{,}87$;

г) $\operatorname{tg}\frac{3}{8}\pi$ або $\operatorname{ctg}\frac{5}{16}\pi$?

§ 112. Вызначэнне па табліцах значэнняў трыганаметрычных функцый любога вугла

У § 105 мы паказалі, як, выкарыстоўваючы «Чатырохзначныя матэматычныя табліцы» У. М. Брадзіса, можна вызначыць, чаму роўна значэнне той ці іншай трыганаметрычнай функцыі любога вострага вугла. Цяпер гэту ж самую задачу мы рэшым для любога (а не толькі для вострага) вугла α.

Перш за ўсё заўважым, што вугал α можна лічыць дадатным. У адваротным выпадку мы выкарысталі б формулы

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha;$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha;$$
$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$$

і звялі б тым самым задачу да знаходжання трыганаметрычных значэнняў дадатнага вугла.

Далей можна лічыць, што вугал α знаходзіцца ў межах

$$0° \leqslant \alpha < 360°, \text{ або } 0 \leqslant \alpha < 2\pi.$$

Сапраўды, ва ўсіх іншых выпадках вугал α можна запісаць у такім выглядзе:

$$\alpha = 360° \cdot n + \alpha_1,$$

або

$$\alpha = 2n\pi + \alpha_1,$$

дзе n — некаторы натуральны лік, а α_1 знаходзіцца ў межах

$$0° \leqslant \alpha_1 < 360°, \text{ або } 0° \leqslant \alpha_1 < 2\pi.$$

Паколькі вугал у 360° (або ў 2π радыянаў) ёсць агульны перыяд сінуса, косінуса, тангенса і катангенса, то

$$\sin\alpha = \sin(360° \cdot n + \alpha_1) = \sin\alpha_1,$$
$$\cos\alpha = \cos(360° \cdot n + \alpha_1) = \cos\alpha_1,$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(360° \cdot n + \alpha_1) = \operatorname{tg}\alpha_1,$$
$$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(360° \cdot n + \alpha_1) = \operatorname{ctg}\alpha_1.$$

Такім чынам, наша задача зводзіцца да знаходжання значэнняў трыганаметрычных функцый вугла α_1, заключанага ў інтэрвале

$$0° \leqslant \alpha_1 < 360°, \text{ або } 0 \leqslant \alpha_1 < 2\pi.$$

Калі цяпер вугал α_1 востры, то значэнні яго трыганаметрычных функцый можна вызначыць па табліцах У. М. Брадзіса. Калі ж $\alpha_1 > 90°$, то ці $\alpha_1 = 90° + \alpha_2$,

ці $\alpha_1 = 180° + \alpha_2$,

ці $\alpha_1 = 270° + \alpha_2$,

дзе α_2 — ужо вострy вугал. Выкарыстоўваючы формулы прывядзення, мы можам цяпер звесці нашу задачу да знаходжання значэнняў трыганаметрычных функцый вострага вугла α_2.

Прыклады. 1) Знайсці $\sin 757°24'$.

Маем:

$$757°24' = 360° \cdot 2 + 37°24'.$$

Таму

$$\sin 757°24' = \sin (360° \cdot 2 + 37°24') = \sin 37°24'.$$

Сінус вугла ў $37°24'$ знаходзім па табліцы У. М. Брадзіса. Ён аказваецца роўным 0,6074. Таму

$$\sin 757°24' = 0{,}6074.$$

2) Знайсці $\operatorname{tg}(-1927°30')$.

Перш за ўсё заўважым, што

$$\operatorname{tg}(-1927°30') = -\operatorname{tg} 1927°30'.$$

Цяпер запішам вугал $1927°30'$ у выглядзе

$$1927°30' = 360° \cdot 5 + 127°30';$$

Адсюль

$$\operatorname{tg}(1927°30') = \operatorname{tg}(360° \cdot 5 + 127°30') = \operatorname{tg} 127°30';$$

але $127°30' = 90° + 37°30'$. Таму, выкарыстоўваючы формулы прывядзення, атрымліваем:

$$\operatorname{tg} 127°30' = \operatorname{tg}(90° + 37°30') = -\operatorname{ctg} 37°30'.$$

Канчаткова атрымліваем, выкарыстоўваючы табліцы У. М. Брадзіса,

$$\operatorname{tg}(-1927°30') = \operatorname{ctg} 37°30' = 1{,}3032.$$

Значыць, для таго каб знаходзіць значэнні трыганаметрычных функцый $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ і $\operatorname{ctg} x$ для любых значэнняў x, зусім дастаткова ўмець знаходзіць значэнні гэтых функцый толькі для $0° \leqslant x \leqslant 90°$ $\left(\text{або } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$; для ўсіх жа астатніх x значэнні функцый можна знайсці, скарыстоўваючы ўжо вядомыя нам трыганаметрычныя тоеснасці. Адсюль можна зрабіць наступны вывад:

Паводзіны функцый $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ ***і*** $\operatorname{ctg} x$ ***пры ўсіх значэннях*** x ***цалкам вызначаюцца іх паводзінамі пры*** $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Практыкаванне

743. Выкарыстоўваючы «Чатырохзначныя матэматычныя таблiцы», знайсцi сiнусы, косiнусы, тангенсы i катангенсы наступных вуглоў:

1) 112°14′;
2) 217°47′;
3) 233°21′;
4) 165°58′;
5) 283°13′;
6) 351°05′;
7) 100°17′;
8) 275°57′;
9) 824°22′;
10) 1307°21′;
11) 1715°39′;
12) 3928°15′;
13) 5;
14) 6,3;
15) 1000;
16) 3,14.

7113-114-115

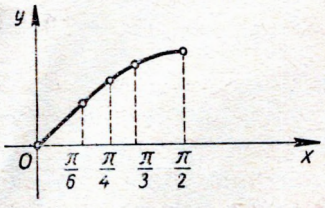
§ 113. Графік функцыі $y = \sin x$

Як было адзначана ў папярэднім параграфе, паводзiны функцыі $y=\sin x$ на ўсёй лiкавай прамой (або пры ўсiх значэннях аргумента x) поўнасцю вызначаюцца яе паводзiнамi ў iнтэрвале $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$. Таму перш за ўсё мы пабудуем графiк функцыі $y=\sin x$ iменна ў гэтым iнтэрвале. Складзём наступную табліцу значэнняў нашай функцыі:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Адзначаючы адпаведныя пункты на плоскасцi каардынат i злучаючы iх плаўнай лiнiяй, мы атрымлiваем крывую, дадзеную на рысунку 169. Для пабудавання яе можна было б выбраць i большую колькасць пунктаў. Пры гэтым нам давялося б выкарыстоўваць трыганаметрычныя табліцы.

Атрыманую крывую можна было б пабудаваць i геаметрычна, не складаючы табліцы значэнняў функцыі $y=\sin x$. Першую чвэрць акружнасцi радыуса 1 (рыс. 170) падзелiм на 8 роўных частак i праз пункты дзялення правядзём прамыя, паралельныя восi x. Ардынаты пунктаў дзялення акружнасцi ўяўляюць сабой сiнусы адпаведных вуглоў. Першая чвэрць акружнасцi адпавядае вуглам ад 0 да $\frac{\pi}{2}$. Таму



Рыс. 169

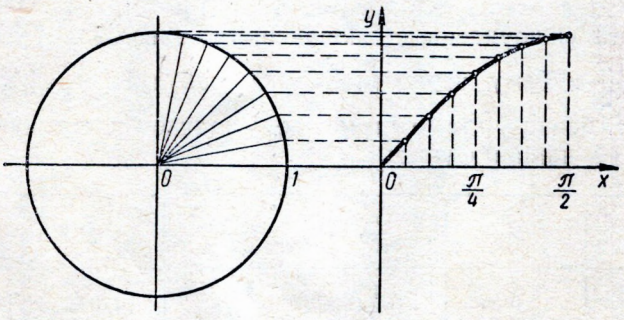
на восі x возьмем адрэзак $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ і падзелім яго на 8 роўных частак. З пунктаў дзялення ўзвядзём перпендыкуляры да перасячэння з раней праведзенымі гарызантальнымі прамымі. Пункты перасячэння злучым плаўнай лініяй.

Цяпер звернемся да інтэрвалу $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$. Кожнае значэнне аргумента x з гэтага інтэрвалу можна запісаць у выглядзе

$$x = \frac{\pi}{2} + \varphi,$$

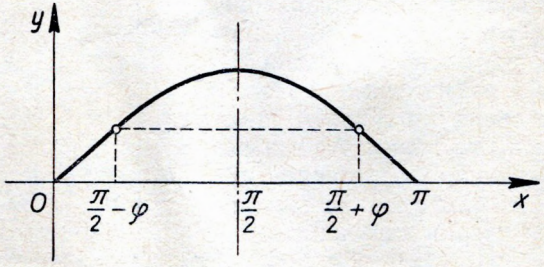
дзе $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Па формулах прывядзення

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \cos\varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right).$$



Рыс. 170.

Пункты восі x з абсцысамі $\frac{\pi}{2} + \varphi$ і $\frac{\pi}{2} - \varphi$ сіметрычны адзін другому адносна пункта восі x з абсцысай $\frac{\pi}{2}$, і сінусы ў гэтых пунктах аднолькавыя. Гэта дазваляе атрымаць графік функцыі



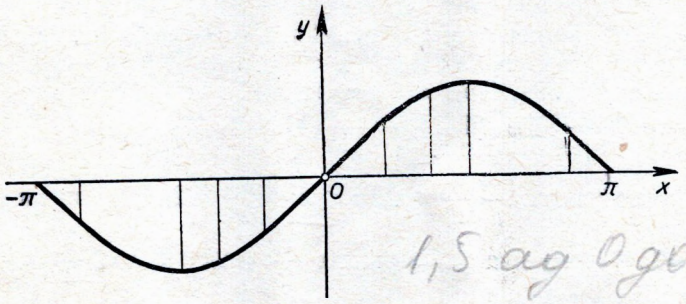
Рыс. 171.

$y = \sin x$ у інтэрвале $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ шляхам простага сіметрычнага адлюстравання графіка гэтай функцыі ў інтэрвале $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ адносна прамой $x = \frac{\pi}{2}$ (рыс. 171).

Цяпер, выкарыстоўваючы ўласцівасць няцотнасці функцыі $y = \sin x$,

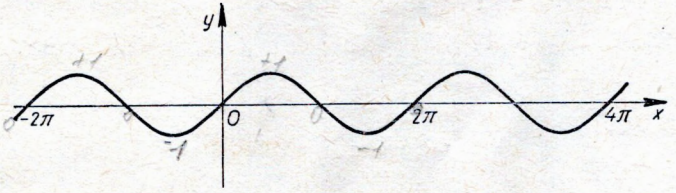
$$\sin(-x) = -\sin x,$$

лёгка пабудаваць графік гэтай функцыі ў інтэрвале $[-\pi; 0]$. Гэта пабудаванне выканана на рысунку 172.



Рыс. 172.

Функцыя $y = \sin x$ перыядычная з перыядам 2π. Таму для пабудавання ўсяго графіка гэтай функцыі дастаткова крывую, паказаную на рысунку 172, прадоўжыць улева і ўправа перыядычна з перыядам 2π. Атрыманая ў выніку гэтага крывая (рыс. 173) называецца *сінусоідай*. Яна і з'яўляецца графікам функцыі $y = \sin x$.



Рыс. 173.

Рысунак 173 добра ілюструе ўсе тыя ўласцівасці функцыі $y = \sin x$, якія раней былі даказаны намі. Напомнім гэтыя ўласцівасці.

1) Функцыя $y=\sin x$ вызначана для ўсіх значэнняў x, так што вобласцю яе вызначэння з'яўляецца сукупнасць усіх сапраўдных лікаў.

2) Функцыя $y=\sin x$ абмежаваная. Усе значэнні, якія яна прымае, знаходзяцца ў інтэрвале ад -1 да 1, уключаючы гэтыя два лікі. Значыць, вобласць змянення гэтай функцыі вызначаецца няроўнасцю $-1 \leqslant y \leqslant 1$. Пры $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ функцыя прымае найбольшыя значэнні, роўныя 1, а пры $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ — найменшыя значэнні, роўныя -1.

3) Функцыя $y=\sin x$ з'яўляецца няцотнай (сінусоіда сіметрычная адносна пачатку каардынат).

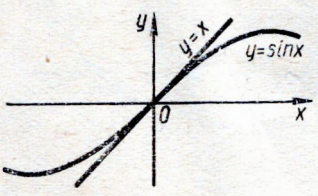
4) Функцыя $y=\sin x$ перыядычная з перыядам 2π.

5) У інтэрвалах $2n\pi<x<\pi+2n\pi$ (n — любы цэлы лік) яна дадатная, а ў інтэрвалах $\pi+2k\pi<x<2\pi+2k\pi$ (k — любы цэлы лік) яна адмоўная. Пры $x=k\pi$ функцыя ператвараецца ў нуль. Таму гэтыя значэнні аргумента x (0; $\pm\pi$; $\pm 2\pi$; ...) называюцца *нулямі функцыі* $y=\sin x$.

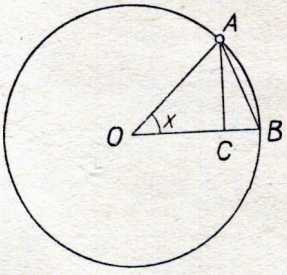
6) У інтэрвалах $-\frac{\pi}{2}+2n\pi<x<\frac{\pi}{2}+2n\pi$ функцыя $y=\sin x$ манатонна ўзрастае, а ў інтэрвалах $\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{3}{2}\pi+2k\pi$ яна манатонна ўбывае.

Трэба асабліва звярнуць увагу на паводзіны функцыі $y=\sin x$ паблізу пункта $x=0$. Як відаць з рысунка 174, у наваколлі пункта $x=0$ сінусоіда амаль зліваецца з бісектрысай 1-га і 3-га каардынатных вуглоў. Таму пры малых вуглах x, выражаных у радыянах, або пры малых па абсалютнай велічыні лікавых значэннях x (як дадатных, так і адмоўных)

$$\sin x \approx x.$$



Рыс. 174.



Рыс. 175.

Напрыклад,

$$\sin 0{,}012 \approx 0{,}012; \quad \sin(-0{,}05) \approx -0{,}05;$$

$$\sin 2^\circ = \sin\frac{\pi \cdot 2}{180} = \sin\frac{\pi}{90} \approx \frac{\pi}{90} \approx 0{,}03.$$

Разам з тым трэба адзначыць, што пры любых значэннях x

$$|\sin x| \leqslant |x|. \qquad (1)$$

Сапраўды, няхай радыус акружнасці, паказанай на рысунку 175, роўны 1, а $\angle AOB = x$. Тады $\sin x = AC$. Але $AC < AB$, а AB, у сваю чаргу, менш даўжыні дугі AB, на якую апіраецца вугал x. Даўжыня гэтай дугі роўна, відавочна, x, таму што радыус акружнасці роўны 1. Такім чынам, пры $0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}$

$$\sin x < x.$$

Адсюль з прычыны няцотнасці функцыі $y = \sin x$ лёгка паказаць, што пры $-\frac{\pi}{2} \leqslant x < 0$

$$|\sin x| < |x|.$$

Нарэшце, пры $x = 0$

$$|\sin x| = |x|.$$

Такім чынам, для $|x| \leqslant \frac{\pi}{2}$ няроўнасць (1) даказана. На самай жа справе гэта няроўнасць правільная і пры $|x| > \frac{\pi}{2}$, з прычыны таго, што $|\sin x| \leqslant 1$, а $\frac{\pi}{2} > 1$.

Практыкаванні

744. Па графіку функцыі $y = \sin x$ вызначыць:

а) $\sin 2$; б) $\sin 4$; в) $\sin(-3)$.

745. Па графіку функцыі $y = \sin x$ вызначыць, які лік з інтэрвалу $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ мае сінус, роўны:

а) 0,6; б) $-0{,}8$.

746. Па графіку функцыі $y = \sin x$ вызначыць, які лік мае сінус, роўны $\frac{1}{2}$.

747. Знайсці набліжана (без выкарыстання табліц):

а) $\sin 1^\circ$; в) $\sin(-0{,}015)$;

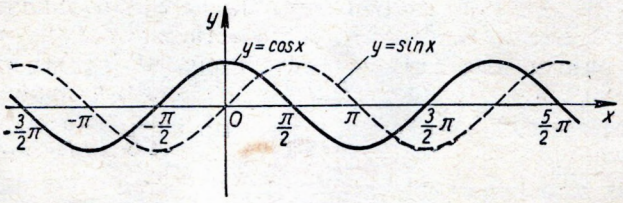
б) $\sin 0{,}03$; г) $\sin(-2^\circ 30')$.

§ 114. Графік функцыі $y = \cos x$

Як мы ведаем,

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Таму калі $\cos x$ прымае некаторае значэнне a пры $x = x_0$, то пры $x = x_0 + \frac{\pi}{2}$ гэта ж значэнне a прыме і $\sin x$. Калі аргумент x тлумачыць як час, то можна сказаць, што значэнне функцыі $y = \sin x$ нібы «спазняецца», або «адстае» ад адпаведных значэнняў функцыі $y = \cos x$ на $\frac{\pi}{2}$. Адсюль можна зрабіць вывад, што графік функцыі $y = \cos x$ атрымліваецца пры дапамозе зрушэння графіка функцыі $y = \sin x$ уздоўж восі абсцыс улева на адлегласць $\frac{\pi}{2}$ (рыс. 176).



Рыс. 176.

Такім чынам, графікам функцыі $y = \cos x$ з'яўляецца сінусоіда, зрушаная ўлева на $\frac{\pi}{2}$. Часам такую крывую называюць *касінусоідай*.

Касінусоіда добра ілюструе ўсе асноўныя ўласцівасці функцыі $y = \cos x$, якія раней былі намі даказаны. Прапануем вучням яшчэ раз сфармуляваць гэтыя ўласцівасці і даць ім графічную інтэрпрэтацыю.

Практыкаванні

748. Па графіку функцыі $y = \cos x$ вызначыць:

а) $\cos 3$; б) $\cos 4$; в) $\cos(-2)$.

749. Па графіку функцыі $y = \cos x$ вызначыць, які лік з інтэрвалу $[0, \pi]$ мае косінус, роўны:

а) 0,6; б) $-0{,}8$.

750. Па графіку функцыі $y=\cos x$ вызначыць, якія лікі маюць косінус, роўны $\frac{1}{2}$.

751. Пры малых (па абсалютнай велічыні) значэннях x касінусоіда $y=\cos x$ мае такі ж выгляд, як і парабала $y=1-\frac{x^2}{2}$ (пакажыце гэта!). Таму для малых значэнняў x

$$\cos x \approx 1-\frac{x^2}{2}.$$

Выкарыстоўваючы гэту формулу, вылічыце набліжана:

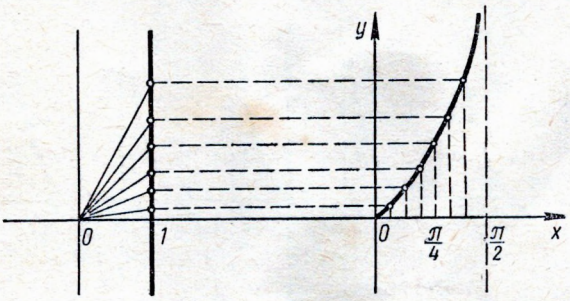
а) $\cos 1°$; в) $\cos(-0{,}015)$;

б) $\cos 0{,}03$; г) $\cos(-2°30')$.

Атрыманыя рэзультаты параўнайце з таблічнымі.

§ 115. Графікі функцый $y=\operatorname{tg} x$ і $y=\operatorname{ctg} x$

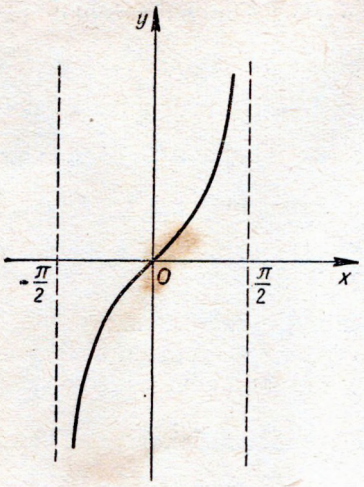
Схематычна паводзіны функцыі $y=\operatorname{tg} x$ былі паказаны на рысунку 163 (гл. стар. 243). Цяпер мы начэрцім дакладны графік гэтай функцыі. Для гэтага выкарыстаем геаметрычнае пабудаванне, аналагічнае таму, якое было апісана ў § 113 для пабудавання сінусоіды (гл. рыс. 170). Мы не будзем падрабязна спыняцца на гэтым пабудаванні, а абмяжуемся толькі тым, што дадзім адпаведны рысунак (рыс. 177). Вучні без асаблівай цяжкасці змогуць разабрацца ў ім самастойна.



Рыс. 177.

Цяпер, выкарыстоўваючы графік функцыі $y=\operatorname{tg} x$ у інтэрвале $0<x<\frac{\pi}{2}$, можна пабудаваць графік гэтай функцыі і ў інтэрвале $-\frac{\pi}{2}<x<0$. Для гэтага выкарыстаем тоеснасць

$$\operatorname{tg}(-\varphi) = -\operatorname{tg}\varphi.$$



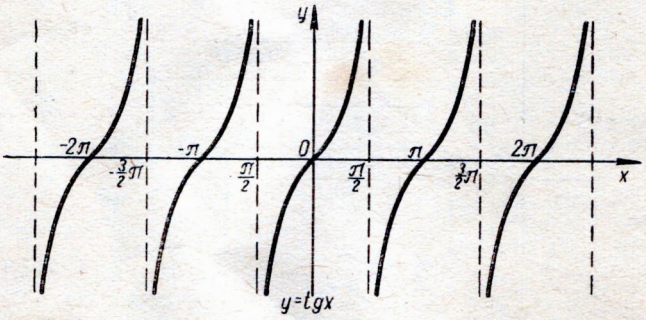
Рыс. 178.

Яна гаворыць аб тым, што графік функцыі $y=\operatorname{tg} x$ сіметрычны адносна пачатку каардынат. Адсюль адразу ж атрымліваецца тая частка графіка, якая адпавядае значэнням $-\frac{\pi}{2}<x<0$ (рыс. 178).

Функцыя $y=\operatorname{tg} x$ перыядычная з перыядам π. Таму цяпер для пабудавання яе графіка нам застаецца толькі прадоўжыць перыядычна крывую, дадзеную на рысунку 178, улева і ўправа з перыядам π. У выніку атрымліваецца крывая, якая называецца *тангенсоідай* (рыс. 179).

Тангенсоіда добра ілюструе ўсе тыя асноўныя ўласцівасці функцыі $y=\operatorname{tg} x$, якія раней былі даказаны намі. Напомнім гэтыя ўласцівасці.

1) Функцыя $y=\operatorname{tg} x$ вызначана для ўсіх значэнняў x, акрамя $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$, дзе n — любы цэлы лік. Такім чынам, вобласцю яе вызначэння з'яўляецца сукупнасць усіх сапраўдных лікаў, акрамя $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$.



Рыс. 179.

2) Функцыя $y=\operatorname{tg} x$ не абмежавана. Яна можа прымаць як любыя дадатныя, так і любыя адмоўныя значэнні. Значыць, вобласцю яе змянення з'яўляецца сукупнасць усіх сапраўдных лікаў. Сярод гэтых лікаў нельга знайсці ні найбольшы, ні найменшы.

3) Функцыя $y=\operatorname{tg} x$ няцотная (тангенсоіда сіметрычная адносна пачатку каардынат).

4) Функцыя $y=\operatorname{tg} x$ перыядычная з перыядам π.

5) У інтэрвалах

$$n\pi < x < \frac{\pi}{2} + n\pi$$

функцыя $y=\operatorname{tg} x$ дадатная, а ў інтэрвалах

$$-\frac{\pi}{2} + n\pi < x < n\pi$$

адмоўная. Пры $x=n\pi$ функцыя $y=\operatorname{tg} x$ ператвараецца ў нуль. Таму гэтыя значэнні аргумента ($0; \pm\pi; \pm 2\pi; \pm 3\pi; \ldots$) называюцца *нулямі функцыі* $y=\operatorname{tg} x$.

6) У інтэрвалах

$$-\frac{\pi}{2} + n\pi < x < \frac{\pi}{2} + n\pi$$

функцыя манатонна ўзрастае. Можна сказаць, што ў любым інтэрвале, у якім функцыя $y=\operatorname{tg} x$ вызначана, яна з'яўляецца манатонна ўзрастаючай. Аднак памылкова было б лічыць, што функцыя $y=\operatorname{tg} x$ манатонна ўзрастае ўсюды. Так, напрыклад (гл. рыс. 179), $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{4}$. Аднак $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) < \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$. Гэта тлумачыцца тым, што ў інтэрвал, які злучае пункты $x=\frac{\pi}{4}$ і $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}$, пападае значэнне $x=\frac{\pi}{2}$, пры якім функцыя $y=\operatorname{tg} x$ не вызначана.

Для пабудавання графіка функцыі $y=\operatorname{ctg} x$ трэба выкарыстаць тоеснасць

$$\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

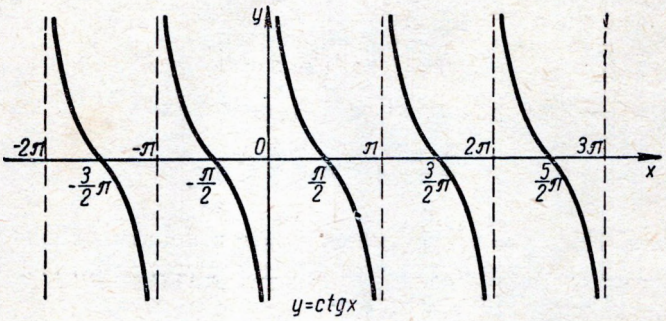
Яна ўказвае на наступны парадак пабудавання графіка:

1) тангенсоіду $y=\operatorname{tg} x$ трэба зрушыць улева па восі абсцыс на адлегласць $\frac{\pi}{2}$;

2) атрыманую крывую адлюстраваць сіметрычна адносна восі абсцыс.

У выніку такога пабудавання атрымліваецца крывая, дадзеная на рысунку 180. Гэту крывую часам называюць *катангенсоідай*.

Катангенсоіда добра ілюструе ўсе асноўныя ўласцівасці функцыі $y=\operatorname{ctg} x$. Прапануем вучням сфармуляваць гэтыя ўласцівасці і даць ім графічную інтэрпрэтацыю.



Рыс 180.

Практыкаванні

752. Выкарыстоўваючы графікі функцый $y=\operatorname{tg} x$ і $y=\operatorname{ctg} x$, знайсці найменшыя дадатныя карані ўраўненняў:

а) $\operatorname{tg} x=-3$; в) $\operatorname{ctg} x=-3$;

б) $\operatorname{tg} x=2$; г) $\operatorname{ctg} x=2$.

753. Выкарыстоўваючы графікі функцый $y=\operatorname{tg} x$ і $y=\operatorname{ctg} x$, знайсці ўсе карані ўраўненняў:

а) $\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$; б) $\operatorname{ctg} x=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

§ 116. Доказ трыганаметрычных тоеснасцей

Пры доказе любых тоеснасцей, і ў прыватнасці трыганаметрычных, звычайна выкарыстоўваюць наступныя спосабы:

1) выраз, які стаіць у адной частцы роўнасці, з дапамогай тоесных пераўтварэнняў прыводзяць да выразу, што стаіць у другой частцы роўнасці;

2) выразы, якія стаяць у левай і правай частках тоеснасці, з дапамогай тоесных пераўтварэнняў прыводзяць да аднаго і таго ж выгляду;

3) даказваюць, што рознасць паміж левай і правай часткамі дадзенай тоеснасці роўна нулю.

Растлумачым гэта на некаторых прыватных прыкладах.

Прыклад 1. Даказаць тоеснасць

$$\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha.$$

Выкарыстоўваючы формулу для рознасці квадратаў двух лікаў, атрымліваем

$$\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha).$$

Але $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Таму

$$\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha,$$

што і трэба было даказаць.

Прыклад 2. Даказаць тоеснасць

$$|\sin\alpha| = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}}.$$

Гэту тоеснасць мы будзем даказваць шляхам пераўтварэння выразу, які стаіць у правай частцы.

1-ы спосаб.

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos\alpha \cdot \sin\alpha}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{1}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}} = \sin^2\alpha.$$

Таму

$$\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}} = \sqrt{\sin^2\alpha} = |\sin\alpha|.$$

2-і спосаб. Перш за ўсё заўважым, што $\operatorname{ctg}\alpha \neq 0$; у адваротным выпадку не меў бы сэнсу выраз $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$. Але калі $\operatorname{ctg}\alpha \neq 0$, то лічнік і назоўнік падкарэннага выразу можна памножыць на $\operatorname{ctg}\alpha$, не змяняючы значэння дробу. Значыць,

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha}.$$

Выкарыстоўваючы тоеснасць

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1 \text{ і } 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha,$$

атрымліваем

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha} = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha} = \frac{1}{\operatorname{cosec}^2\alpha} = \sin^2\alpha.$$

Таму

$$\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}}=|\sin\alpha|,$$

што і трэба было даказаць.

З а ў в а г а. Патрэбна звярнуць увагу на тое, што левая частка даказанай тоеснасці ($|\sin\alpha|$) вызначана пры ўсіх значэннях α, а правая — толькі пры

$$\alpha\neq\frac{\pi}{2}\cdot n.$$

Таму пры ўсіх д а п у ш ч а л ь н ы х значэннях α $\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}}=|\sin\alpha|$. Наогул жа гэтыя выразы не эквівалентныя адзін другому.

П р ы к л а д 3. Даказаць тоеснасць

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)+\cos(\pi-\alpha)=\cos(2\pi+\alpha)-3\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

Ператворым левую і правую часткі гэтай тоеснасці, выкарыстоўваючы формулы прывядзення:

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)+\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha-\cos\alpha=-2\cos\alpha,$$

$$\cos(2\pi+\alpha)-3\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha-3\cos\alpha=-2\cos\alpha.$$

Такім чынам, выразы, якія стаяць у абедзвюх частках дадзенай тоеснасці, прыведзены да аднаго і таго ж выгляду. Тым самым тоеснасць даказана.

П р ы к л а д 4. Даказаць тоеснасць

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1=-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha.$$

Пакажам, што рознасць паміж левай і правай часткамі дадзенай тоеснасці роўна нулю. Маем:

$$\begin{aligned}&(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1)-(-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha)=\\&=(\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)-1=\\&=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-1=1-1=0.\end{aligned}$$

Тым самым тоеснасць даказана.

П р ы к л а д 5. Даказаць тоеснасць

$$\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}.$$

Гэту тоеснасць можна разглядаць як прапорцыю. Але каб даказаць справядлівасць прапорцыі $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, дастаткова пака-

заць, што здабытак яе крайніх членаў *ad* роўны здабытку яе сярэдніх членаў *bc*. Так мы зробім і ў дадзеным выпадку. Пакажам, што

$$(1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha) = \cos\alpha \cdot \cos\alpha.$$

Сапраўды,

$$(1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha) = 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha.$$

Па гэтаму прыкладу можна было б зрабіць заўвагу, аналагічную заўвазе да прыкладу 2.

Практыкаванні

Даказаць тоеснасці (№ 754—763):

754. $\dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} + \dfrac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{2}{\sin\alpha}.$

755. $\dfrac{\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha - 1}{\operatorname{ctg}^2\alpha} = \sin^2\alpha.$

756. $\dfrac{\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 + \cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$

757. $2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) + 1 = 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha).$

758. $\sqrt{1 + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = |\sin\alpha + \cos\alpha|.$

759. $\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha = \operatorname{ctg}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha.$

760. $|\sin\alpha| = \sqrt{(\sec^2\alpha - 1)(1 - \sin^2\alpha)}.$

761. $\dfrac{2\cos^2\alpha - 1}{1 - 2\sin\alpha\cos\alpha} - \dfrac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} = \dfrac{4\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}.$

762. $\sqrt{\dfrac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}} = \dfrac{|\cos\alpha|}{1 + \sin\alpha}.$

763. $\sqrt{\dfrac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}} = \dfrac{1 + \cos\alpha}{|\sin\alpha|}.$

Спрасціць выразы (№ 764—769):

764. $\sqrt{\dfrac{r}{1 + \cos\alpha} + \dfrac{r}{1 - \cos\alpha}}.$

765. $\sqrt{(1 + \operatorname{tg}\alpha)^2 + (1 - \operatorname{tg}\alpha)^2}.$

766. $\dfrac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{ctg}\alpha}.$

767. $\dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} + \dfrac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha}.$

768. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$.

769. $\dfrac{1+\cos\alpha+\cos^2\alpha}{1+\sec\alpha+\sec^2\alpha}$.

770. Знайсці значэнне выразу $\dfrac{5\cos\alpha+6\sin\alpha}{3\sin\alpha-7\cos\alpha}$, калі вядома, што $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{3}$.

771. Знайсці значэнне выразу $\dfrac{4\sin\alpha-\cos\alpha}{\cos\alpha-4\sin\alpha}$, калі вядома, што катангенс вугла α не вызначаны.

772. Знайсці значэнні выразу $\dfrac{5\sin\alpha+6\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$, калі вядома, што $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{1}{2}$.

Даказаць тоеснасці (№ 773—779):

773. $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha-1}=\dfrac{\operatorname{cosec}\alpha+1}{\operatorname{ctg}\alpha}$.

774. $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

775. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$.

776. $\operatorname{tg}\left(\alpha+\dfrac{3}{2}\pi\right)-2\operatorname{ctg}\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2-3\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$.

777. $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin(\alpha+\pi)+\sin\left(\alpha+\dfrac{3}{2}\pi\right)+$

$+\sin(\alpha+2\pi)=\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)+\cos(\alpha+\pi)+$

$+\cos\left(\alpha+\dfrac{3}{2}\pi\right)+\cos(\alpha+2\pi)$.

778. $\dfrac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+1}{\operatorname{tg}\alpha-1}$.

779. $\dfrac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha$.

§ 117. Арксінус ліку a

Няхай пра вугал φ вядома толькі тое, што сінус яго роўны $\frac{1}{2}$:

$$\sin\varphi = \frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Ці зможам мы знайсці гэты вугал?

Як вядома, $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Таму магчыма, што $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

Разам з тым з прычыны перыядычнасці сінуса

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Таму не выключана таксама магчымасць, што $\varphi = \frac{\pi}{6} + 2\pi$.

Наогул, якім бы ні быў цэлы лік n,

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Значыць, шукаемым вуглом φ можа быць любы з вуглоў

$$\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{6} \pm 2\pi,\ \frac{\pi}{6} \pm 4\pi,\ \frac{\pi}{6} \pm 6\pi$$

і г. д. Такім чынам, па значэнню свайго сінуса вугал вызначаецца неадназначна.

Такой неадназначнасці, аднак, можна пазбегнуць, калі патрэбаваць, каб шукаемы вугал φ знаходзіўся ў пэўных межах. Напрыклад, пры дадатковай умове, што $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, роўнасць (1) вызначае адзіны вугал $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Калі б мы ў якасці дапаўняльнага абмежавання, якое накладваецца на вугал φ, выбралі ўмову $0 < \varphi < \pi$, то задача зноў была б неазначальнай. У інтэрвале $(0, \pi)$ сінусоіда $y = \sin x$ (гл. рыс. 181) перасякаецца з прамой $y = \frac{1}{2}$ у двух пунктах M_1 і M_2. Абсцыса пункта M_1 роўна $\frac{\pi}{6}$, а абсцыса пункта M_2 роўна $\frac{5\pi}{6}$. Таму ў інтэрвале $(0, \pi)$ існуюць два вуглы φ, сінусы якіх роўны $\frac{1}{2}$:

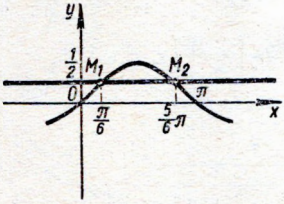
$$\varphi_1 = \frac{\pi}{6}, \qquad \varphi_2 = \frac{5}{6}\pi.$$

Якія ж абмежаванні трэба накласці на вугал φ, каб роўнасць

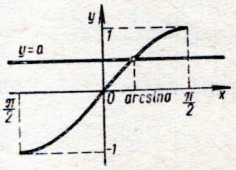
$$\sin\varphi = a \qquad (2)$$

вызначала гэты вугал адназначна? Адзін з магчымых шляхоў рашэння гэтай задачы наступны. Перш за ўсё заўважым, што калі $|a|>1$, то роўнасць (2) наогул не вызначае ніякага вугла: пры любых жа значэннях φ

$$|\sin\varphi| \leqslant 1.$$



Рыс. 181.



Рыс. 182.

Далей будзем лічыць, што вугал змяняецца ў інтэрвале ад $-\frac{\pi}{2}$ да $\frac{\pi}{2}$. Тады сінус яго неперарыўна ўзрастае ад -1 да $+1$ (рыс. 182). Якім бы ні быў лік a, што не перавышае па абсалютнай велічыні адзінкі, у інтэрвале $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ сінусоіда $y = \sin x$ абавязкова перасячэцца з прамой $y = a$ і прытым толькі ў адным пункце. Таму пры любым $|a| \leqslant 1$ роўнасць (2) у інтэрвале $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ вызначае і прытым адзіны вугал φ. Гэты вугал прынята называць *арксінусам a* і абазначаць $\arcsin a$.

Арксінус a ёсць вугал, які знаходзіцца ў інтэрвале ад $-\frac{\pi}{2}$ *да* $+\frac{\pi}{2}$ *(або ад* $-90°$ *да* $90°$*), сінус якога роўны a.*

Прыклады.

1) $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, або $\arcsin\frac{1}{2} = 30°$. Сапраўды, вугал у $\frac{\pi}{6}$ радыянаў пападае ў інтэрвал $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, і сінус яго роўны $\frac{1}{2}$.

2) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$, або $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -60°$. Сапраўды, вугал у $-60°$ пападае ў інтэрвал $[-90°, 90°]$, і сінус яго роўны $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3) $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, або $\arcsin 1 = 90°$. Сапраўды, вугал у $\frac{\pi}{2}$ радыянаў пападае ў інтэрвал $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, і сінус яго роўны 1.

Аналагічна,

$$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2};$$

$$\arcsin 0 = 0$$

і г. д.

Заўважым, што з роўнасці

$$\sin \pi = 0$$

нельга зрабіць вывад, што $\arcsin 0 = \pi$. Вугал жа ў π радыянаў не пападае ў інтэрвал $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ і таму не можа раўняцца арксінусу ліку 0.

Практыкаванні

780. Якія значэнні могуць прымаць велічыні a і b, калі $b = \arcsin a$?

781. Вылічыць:

а) $\arcsin 0 + \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} + \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arcsin 1$;

б) $\arcsin 0 + \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin(-1)$;

в) $6 \arcsin(-1) - 12 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + 5 \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

782. а) Ці можна з роўнасці $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ зрабіць вывад, што $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$?

б) Ці можна з роўнасці $\sin 270° = -1$ зрабіць вывад, што $\arcsin(-1) = 270°$?

783. (Вусна.) У якіх чвэрцях заканчваюцца вуглы:

а) $\arcsin 0{,}6$;
в) $\arcsin(-0{,}8)$;
б) $\arcsin 0{,}9$;
г) $\arcsin(-0{,}1)$?

784. Вылічыць:

а) $\sin(\arcsin 0{,}6)$;

б) $\sin[\arcsin(-0{,}8)]$;

в) $\cos[\arcsin(\sqrt{3}-\sqrt{2})]$;

г) $\cos\left(\arcsin\frac{\pi}{2}\right)$.

785. Знайсці сінусы, косінусы, тангенсы і катангенсы вуглоў:

а) $\arcsin 0{,}4$; б) $\arcsin(-0{,}8)$.

786. Даказаць тоеснасці:

а) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\pi}{12}$;

б) $\arcsin(\sin 6)=6-2\pi$;

в) $\arcsin(-x)=-\arcsin x$.

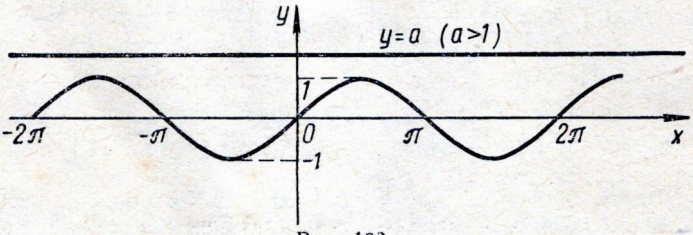
§ 118. Ураўненне $\sin x = a$

Кожны корань ураўнення

$$\sin x=a \qquad (1)$$

можна разглядаць як абсцысу некаторага пункта перасячэння сінусоіды $y=\sin x$ з прамой $y=a$, і, наадварот, абсцыса кожнага такога пункта перасячэння з'яўляецца адным з кораняў ураўнення (1).

Пры $|a|>1$ сінусоіда $y=\sin x$ не перасякаецца з прамой $y=a$ (рыс. 183). У гэтым выпадку ўраўненне (1) кораняў не мае.



Рыс. 183.

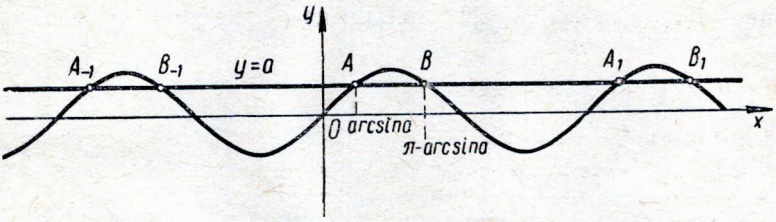
Калі ж $|a|\leqslant 1$, то сінусоіда $y=\sin x$ і прамая $y=a$ маюць бясконца многа агульных пунктаў. У гэтым выпадку ўраўненне (1) мае бясконцае мноства кораняў.

Няхай $0<a<1$. Тады ў інтэрвале $0\leqslant x\leqslant\pi$ маем два пункты перасячэння: A і B (рыс. 184). Пункт A пападае ў інтэрвал $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$. Таму яго абсцыса роўна $\arcsin a$. Што ж даты-

чыцца пункта B, то яго абсцыса, як лёгка зразумець з рысунка 184, роўна $\pi-\arcsin a$. Усе астатнія пункты перасячэння сінусоіды $y=\sin x$ з прамой $y=a$ мы разаб'ём на дзве групы:

$$\ldots, A_{-2}, A_{-1}, A_1, A_2, \ldots;$$
$$\ldots, B_{-2}, B_{-1}, B_1, B_2, \ldots.$$

Пункты першай групы аддалены ад A на адлегласці, кратныя 2π, і таму маюць абсцысы $\arcsin a+2n\pi$, дзе n прабягае ўсе цэлыя



Рыс. 184.

лікі ($n=0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$). Пункты другой групы аддалены ад B на адлегласці, кратныя 2π, і таму маюць абсцысы

$$\pi-\arcsin a+2k\pi=-\arcsin a+(2k+1)\pi,$$

дзе k прабягае ўсе цэлыя лікі ($k=0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$). Такім чынам, ураўненне (1) мае дзве групы кораняў:

$$x=\arcsin a+2k\pi \qquad (2)$$

і

$$x=-\arcsin a+(2k+1)\pi. \qquad (3)$$

Лёгка зразумець, што абедзве гэтыя групы кораняў можна запісаць адной формулай

$$x=(-1)^m \arcsin a+m\pi, \qquad (4)$$

дзе m прабягае ўсе цэлыя лікі ($m=0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$). Сапраўды, пры m цотным ($m=2n$) (4) ператвараецца ў (2), а пры m няцотным ($m=2k+1$) — у (3).

Такім чынам, пры $0<a<1$ усе корані ўраўнення (1) задаюцца формулай (4).

Да такога ж рэзультату можна прыйсці і ў выпадку

$$-1<a<0.$$

Мы не будзем падрабязна разбіраць гэты выпадак. Прапануем вучням зрабіць гэта самастойна, выкарыстаўшы рысунак 185.

Нам засталося разгледзець выпадкі, калі $a=0$ і $a=\pm1$.

Пры $a=0$ ураўненне

$$\sin x=a$$

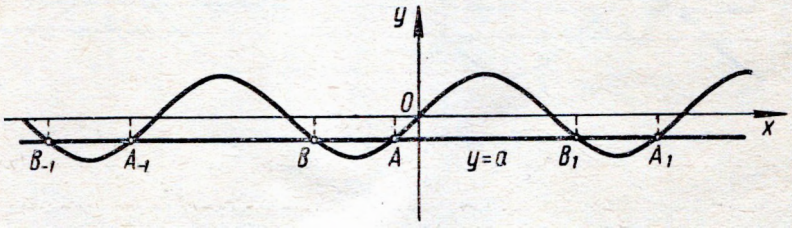
мае корані

$$x=m\pi, \tag{5}$$

дзе m прабягае ўсе цэлыя лікі ($m=0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$). Такі ж рэзультат дае і формула (4) пры $a=0$. Сапраўды, $\arcsin 0=0$ і таму

$$(-1)^m \arcsin 0+m\pi=m\pi.$$

Значыць, формула (4) фармальна дае ўсе корані ўраўнення (1) і ў выпадку, калі $a=0$.



Рыс. 185.

Калі $a=1$, то коранямі ўраўнення $\sin x=a$ будуць лікі (гл. рыс. 186)

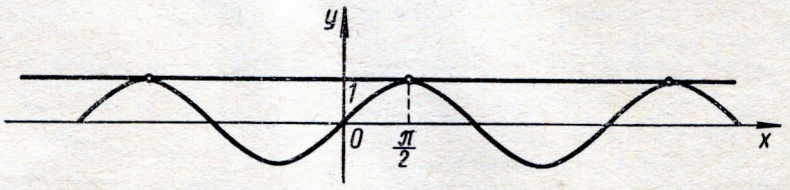
$$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, \tag{6}$$

дзе k прабягае ўсе цэлыя лікі ($k=0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$). Формула (4) ахоплівае і гэты выпадак. Сапраўды, прымаючы ў ёй $a=1$ і ўлічваючы, што $\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$, атрымліваем

$$(-1)^m \arcsin 1+m\pi=(-1)^m\frac{\pi}{2}+m\pi.$$

Калі m цотна ($m=2k$), то

$$(-1)^m \arcsin 1+m\pi=\frac{\pi}{2}+2k\pi.$$



Рыс. 186.

Калі ж m няцотна ($m=2k+1$), то

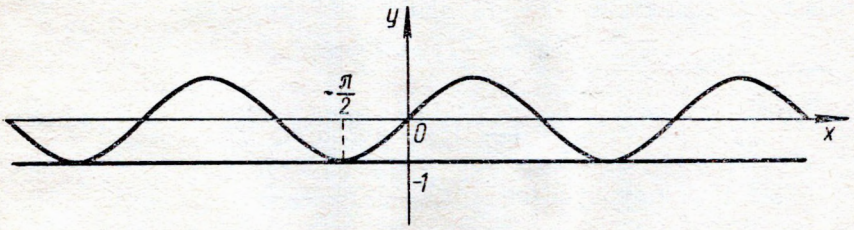
$$(-1)^m \arcsin 1 + m\pi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi + \pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

І адзін і другі выпадкі ўлічваюцца формулай (6).

Нарэшце, калі $a=-1$, то коранямі ўраўнення $\sin x=a$ будуць лікі (гл. рыс. 187)

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \qquad (7)$$

дзе k прабягае ўсе цэлыя лікі ($k=0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$). Прапануем вучням даказаць, што пры $a=-1$ формула (7) дае той жа



Рыс. 187.

рэзультат, што і агульная формула (4). Такім чынам, формула (4) задае ўсе корані ўраўнення (1) пры любых значэннях a, калі толькі $|a|\leqslant 1$. Аднак пры $a=0$, $a=+1$, $a=-1$ мэтазгодна адразу ж выкарыстаць формулы (5), (6) і (7), не звяртаючыся да агульнай формулы (4).

У заключэнне адзначым, што формулы (4), (5), (6) і (7) можна выкарыстаць толькі тады, калі шукаемы вугал x выражаны ў радыянах. Калі ж x выражаны ў градусах, то гэтыя формулы трэба натуральным чынам змяніць. Напрыклад, замест формулы (4) трэба выкарыстаць формулу

$$x=(-1)^m \arcsin a + 180°m,$$

замест формулы (5) — формулу

$$x=180°m$$

і г. д.

Прыклады.

1) Рашыць ураўненне $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Прывядзём два магчымыя варыянты запісу рашэння.

1-ы варыянт

$$x=(-1)^m \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+180^\circ m=$$
$$=(-1)^m 60^\circ+180^\circ m.$$

Адказ. $x=(-1)^m 60^\circ+180^\circ m$, дзе m — любы цэлы лік.

2-і варыянт

$$x=(-1)^m \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+m\pi=$$
$$=(-1)^m\frac{\pi}{3}+m\pi.$$

Адказ. $x=(-1)^m\frac{\pi}{3}+m\pi$, дзе m — любы цэлы лік.

Недапушчальна ў адным і тым жа рашэнні часткова выкарыстаць 1-ы і часткова 2-і варыянты. Напрыклад, адказ да дадзенага практыкавання нельга запісаць у выглядзе

$$x=(-1)^m 60^\circ+m\pi,$$

або

$$x=(-1)^m\frac{\pi}{3}+180^\circ m,$$

2) Рашыць ураўненне $\sin(1-2x)=-\frac{1}{2}$.

У адрозненне ад прыкладу 1 тут шукаемыя значэнні x нельга выражаць у градусах. Ва ўмове задачы пад знакам сінуса стаіць выраз $1-2x$. Паяўнасць адзінкі паказвае, што x — або вугал, выражаны ў радыянах, або проста лік. Таму рашэнне дадзенага ўраўнення трэба запісаць наступным чынам:

$$1-2x=(-1)^m \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+m\pi=$$
$$=(-1)^m\left(-\frac{\pi}{6}\right)+m\pi=(-1)^{m+1}\frac{\pi}{6}+m\pi.$$

Адсюль

$$x=\frac{1}{2}+(-1)^m\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{2}m.$$

Напрыклад, пры $m=0$ $x=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{12}$;

пры $m=1$ $x=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}-\frac{7\pi}{12}$ і г. д.

3) Рашыць ураўненне $\sin(30^\circ-x)=0$.

Тут, як лёгка зразумець, пад x падразумяваецца вугал, выражаны ў градусах. Таму рашэнне дадзенага ўраўнення можна запісаць наступным чынам:

$$30^\circ-x=180^\circ m,\quad x=30^\circ-180^\circ m.$$

Паколькі пад m мы падразумяваем любы цэлы лік (у тым ліку і адмоўны!), то атрыманы рэзультат можна, вядома, запісаць і ў іншай форме, а іменна:

$$x = 30° + 180°n,$$

дзе n — любы цэлы лік.

Практыкаванні

Рашыць ураўненні (№ 787—796):

787. $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

788. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

789. $\sin 2x = 0$.

790. $\sin \frac{x}{3} = 1$.

791. $\sin (2x + 30°) = -1$.

792. $\sin \left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

793. $\sin (60° - x) = \frac{\pi}{3}$.

794. $\sin (2x + 1) = \frac{\pi}{4}$.

795. $\sin \pi x = 0$.

796*. $\sin x + \sin 2x = 2$.

§ 119. Арккосінус ліку a

У § 117 мы адзначалі, што роўнасць

$$\sin \varphi = a$$

пры $|a| \leqslant 1$ адназначна вызначае вугал φ, калі дадаткова патрэбаваць, каб ён знаходзіўся ў межах

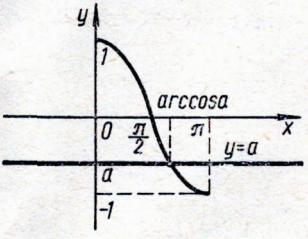
$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \text{ або } -90° \leqslant \varphi \leqslant 90°.$$

Аналагічныя ўласцівасці мае роўнасць

$$\cos \varphi = a, \qquad (1)$$

толькі ў якасці дадатковага абмежавання, накладваемага на вугал φ, трэба выбраць наступную ўмову:

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \text{ або } 0° \leqslant \varphi \leqslant 180°.$$



Рыс. 188.

Сапраўды, у інтэрвале $0 \leqslant x \leqslant \pi$ функцыя $y = \cos x$ неперарыўна ўбывае ад 1 да -1 (рыс. 188). Значыць, у гэтым інтэрвале пры $|a| \leqslant 1$ касінусоіда $y = \cos x$ абавязкова перасячэцца з прамой $y = a$ і прытым толькі ў адным пункце. Таму роўнасць (1) пры дадат-

ковай умове $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ вызначае вугал φ адназначна. Гэты вугал прынята называць *арккосінусам* і абазначаць $\arccos a$.

Арккосінус а ёсць вугал, што знаходзіцца ў інтэрвале ад 0 да π *(або ад 0° да 180°), косінус якога роўны а.*

Прыклады.

1) $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, або $\arccos \frac{1}{2} = 60°$. Сапраўды, вугал у $\frac{\pi}{3}$ радыянаў пападае ў інтэрвал $[0, \pi]$ і косінус яго роўны $\frac{1}{2}$.

2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5}{6}\pi$, або $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 150°$.

Сапраўды, вугал у 150° пападае ў інтэрвал $[0°, 180°]$ і сінус яго роўны $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3) $\arccos(-1) = \pi$, або $\arccos(-1) = 180°$. Сапраўды, вугал у 180° пападае ў інтэрвал $[0°, 180°]$ і косінус яго роўны -1.

Аналагічна,

$$\arccos 1 = 0, \quad \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

і г. д. Заўважым, што з роўнасці

$$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

нельга зрабіць вывад, што $\arccos 0 = -\frac{\pi}{2}$. Вугал жа ў $-\frac{\pi}{2}$ радыянаў не пападае ў інтэрвал $[0, \pi]$ і таму не можа раўняцца арккосінусу ліку 0.

Практыкаванні

797. Якія значэнні могуць прымаць велічыні a і b, калі $b = \arccos a$?

Вылічыць (№ 798—801):

798. $\arccos 0 + \arccos(-1) + \arccos 1$.

799. $\arccos 0 + \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} + \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$.

800. $\arccos(-1) - \arccos 1 - \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

801. $5 \arccos(-1) - 12 \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} - 6 \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

802. Ці можна з роўнасці $\cos 3\pi = -1$ зрабіць вывад, што $\arccos(-1) = 3\pi$?

803. Вылічыць:

а) $\cos(\arccos 0{,}5)$; в) $\sin[\arccos(\sqrt{2}-2)]$.

б) $\cos(\arccos 0{,}2)$; г) $\sin[\arccos(3-\sqrt{2})]$.

804. Знайсці сінусы, косінусы, тангенсы і катангенсы вуглоў:

а) $\arcsin 0{,}5$; б) $\arccos 1$.

805. (В у с н а.) У якіх чвэрцях заканчваюцца вуглы:

а) $\arccos(0{,}7)$; в) $\arccos(-0{,}3)$;

б) $\arccos(0{,}9)$; г) $\arccos(1{,}3)$?

Даказаць тоеснасці (№ 806—808):

806. $\arccos\left(\cos\frac{\pi}{7}\right) = \frac{\pi}{7}$.

807. $\arccos\left(-\cos\frac{\pi}{7}\right) = \frac{6}{7}\pi$.

808. $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

Вылічыць (№ 809, 810):

809. $\arccos(\cos 6)$.

810. $\arccos(\cos 1)$.

811. Ці могуць выразы $\arcsin a$ і $\arccos a$ прымаць значэнні:

а) аднаго знака;

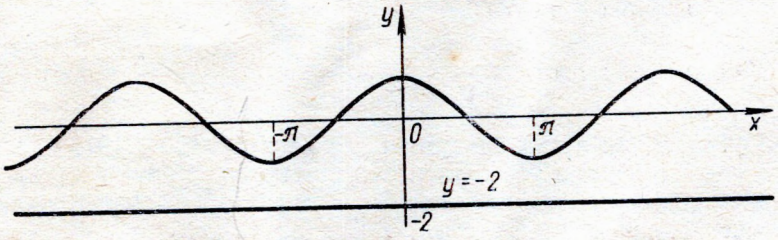
б) розных знакаў?

§ 120. Ураўненне $\cos x = a$

Кожны корань ураўнення

$$\cos x = a \qquad (1)$$

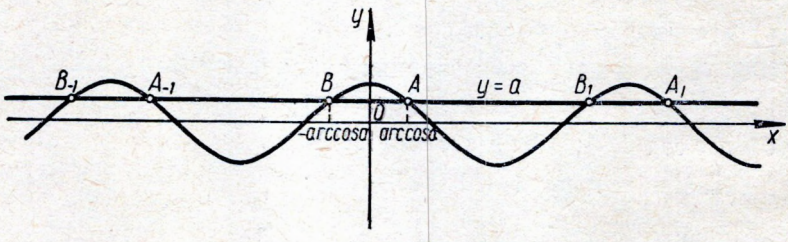
можна разглядаць як абсцысу некаторага пункта перасячэння касінусоіды $y = \cos x$ з прамой $y = a$ і, наадварот, абсцысу кож-



Рыс. 189.

нага пункта перасячэння можна тлумачыць як адзін з кораняў ураўнення (1). Такім чынам, мноства ўсіх кораняў ураўнення (1) супадае з мноствам абсцыс усіх пунктаў перасячэння касінусоіды $y=\cos x$ з прамой $y=a$.

Калі $|a|>1$, то касінусоіда $y=\cos x$ не перасякаецца з прамой $y=a$ (рыс. 189). У гэтым выпадку ўраўненне (1) не мае кораняў.



Рыс. 190.

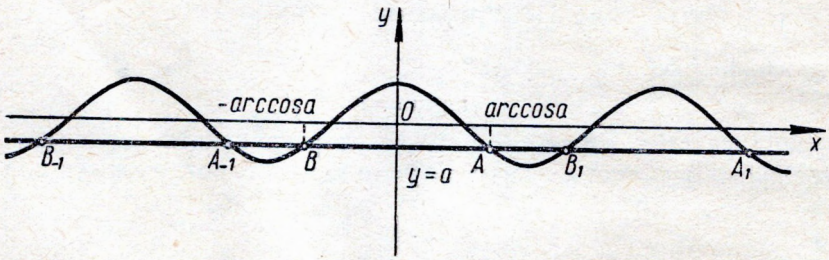
Пры $|a|\leqslant 1$ атрымліваецца бясконца многа пунктаў перасячэння (гл. рыс. 190 для $a>0$ і рыс. 191 для $a<0$).

Усе гэтыя пункты перасячэння мы разаб'ём на дзве групы:

$$\ldots, A_{-2}, A_{-1}, A, A_1, A_2, \ldots;$$
$$\ldots, B_{-2}, B_{-1}, B, B_1, B_2, \ldots.$$

Пункт A мае абсцысу $\arccos a$, а ўсе астатнія пункты першай групы знаходзяцца ад яго на адлегласцях, кратных 2π. Таму іх абсцысы выражаюцца як

$$\arccos a+2k\pi. \qquad (2)$$



Рыс. 191.

Пункт B, як лёгка зразумець з рысункаў 190 і 191, мае абсцысу $-\arccos a$, а ўсе астатнія пункты другой групы аддалены ад яго на адлегласці, кратныя 2π. Таму іх абсцысы выражаюцца як

$$-\arccos a+2n\pi. \qquad (3)$$

Такім чынам, ураўненне (1) мае дзве групы кораняў, якія вызначаюцца формуламі (2) і (3). Але гэтыя дзве формулы можна, відавочна, запісаць у выглядзе адной формулы:

$$x=\pm\arccos a+2m\pi, \tag{4}$$

дзе m прабягае ўсе цэлыя лікі ($m=0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$).

Тыя разважанні, якія мы праводзілі пры вывадзе гэтай формулы, правільныя толькі пры $|a|\neq1$. Аднак фармальна суадносіна (4) вызначае ўсе корані ўраўнення $\cos x=a$ і пры $|a|=1$. (Дакажыце гэта!) Таму можна сказаць, што формула (4) дае ўсе корані ўраўнення (1) пры любых значэннях a, калі толькі $|a|\leqslant1$.

Але ўсё ж у трох прыватных выпадках ($a=0$, $a=-1$, $a=+1$) мы рэкамендуем не звяртацца да формулы (4), а карыстацца іншымі суадносінамі. Карысна запомніць, што корані ўраўнення $\cos x=0$ задаюцца формулай

$$x=\frac{\pi}{2}+2n\pi; \tag{5}$$

корані ўраўнення $\cos x=-1$ задаюцца формулай

$$x=\pi+2m\pi \tag{6}$$

і, нарэшце, корані ўраўнення $\cos x=1$ задаюцца формулай

$$x=2m\pi. \tag{7}$$

У заключэнне адзначым, што формулы (4), (5), (6) і (7) правільныя толькі ў дапушчэнні, што шукаемы вугал x выражаны ў радыянах. Калі ж ён выражаны ў градусах, то гэтыя формулы трэба натуральным чынам змяніць. Так, формулу (4) трэба замяніць формулай

$$x=\pm\arccos a+360^\circ n,$$

формулу (5) — формулай

$$x=90^\circ+360^\circ n$$

і г. д.

Прыклады.

1) Рашыць ураўненне $\cos3x=\frac{1}{2}$.

Па формуле (4) знаходзім

$$3x=\pm\arccos\frac{1}{2}+2m\pi=\pm\frac{\pi}{3}+2m\pi.$$

Адсюль

$$x=\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}m\pi.$$

Адказ да задачы можна было б выразіць і ў градусах:

$$x = \pm 20° + 120° m.$$

Аднак не трэба запісваць адказ у форме, у якой градусы перамешваюцца з радыянамі (напрыклад, $x = \pm 20° + \frac{2}{3} m\pi$ або $x = \pm \frac{\pi}{9} + 120° m$).

2) Рашыць ураўненне $\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = -1$.

Відавочна, што тут шукаемы вугал x выражаны ў радыянах. Таму, выкарыстоўваючы формулу (6), рашэнне можна запісаць такім чынам:

$$\frac{\pi}{4} - 2x = \pi + 2m\pi,$$

адкуль

$$2x = -\frac{3}{4}\pi - 2m\pi,$$

або

$$x = -\frac{3}{8}\pi - m\pi.$$

Паколькі пад m тут падразумяваецца любы цэлы лік (у тым ліку і адмоўны), то адказ можна запісаць у выглядзе

$$x = -\frac{3}{8}\pi + m\pi.$$

Практыкаванні

Рашыць ураўненні:

812. $\cos x = -\frac{1}{2}$.

813. $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

814. $\cos 4x = -1$.

815. $\cos(30° - x) = 1$.

816. $\cos 5x = \frac{\pi}{2}$.

817. $\cos \pi x = 1$.

818. $\cos(2x - 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

819. $\cos\left(20° - \frac{x}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

820. $\sin x + \cos x = -2$.

821. $\cos x + \cos 2x = -2$.

822. $\sin x \cos x = 1$.

§ 121. Арктангенс і арккатангенс ліку a

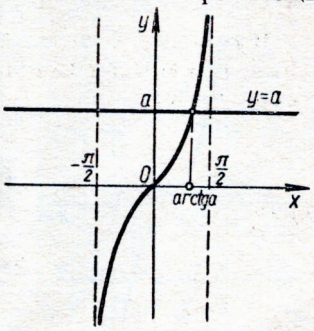
Роўнасць

$$\operatorname{tg}\varphi = a \qquad (1)$$

вызначае вугал φ неадназначна. На самай справе, калі φ_0 ёсць вугал, што задавальняе роўнасці (1), то з прычыны перыядычнасці тангенса гэтай роўнасці будуць задавальняць і вуглы

$$\varphi_0 + n\pi,$$

дзе n прабягае ўсе цэлыя лікі ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$). Такой неадназначнасці можна пазбегнуць, калі дадаткова патрэбаваць, каб вугал φ знаходзіўся ў межах $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Сапраўды, у інтэрвале $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ функцыя $y = \operatorname{tg} x$ манатонна ўзрастае ад $-\infty$ да $+\infty$ (рыс. 192). Значыць, у гэтым інтэрвале тангенсоіда абавязкова перасячэцца з прамой $y = a$ і прытым толькі ў адным пункце. Абсцысу гэтага пункта прынята называць *арктангенсам* ліку a і абазначаць $\operatorname{arc\,tg} a$.



Рыс. 192.

Арктангенс a ёсць вугал, што знаходзіцца ў інтэрвале ад $-\frac{\pi}{2}$ да $+\frac{\pi}{2}$ (або ад $-90°$ да $90°$), тангенс якога роўны a.

Прыклады.

1) $\operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}$, або $\operatorname{arc\,tg} 1 = 45°$.

Сапраўды, вугал у $\frac{\pi}{4}$ радыянаў пападае ў інтэрвал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, і тангенс яго роўны 1.

2) $\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$, або $\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -30°$.

Сапраўды, вугал у $-30°$ пападае ў інтэрвал $(-90°, 90°)$, і тангенс яго роўны $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Заўважым, што з роўнасці

$$\operatorname{tg}\pi = 0$$

нельга зрабіць вывад, што $\operatorname{arc\,tg} 0 = \pi$. Вугал жа ў π радыянаў не падпадае ў інтэрвал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ і таму не можа быць арктангенсам нуля. Чытач, відаць, ужо здагадаўся, што

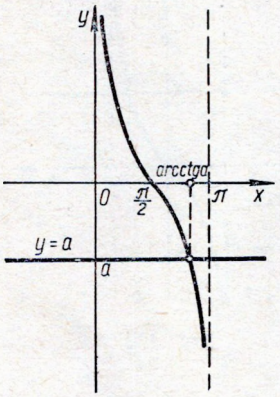
$$\operatorname{arc\,tg} 0 = 0.$$

Роўнасць

$$\operatorname{ctg} \varphi = a, \tag{2}$$

гэтак жа як і роўнасць (1), вызначае вугал φ неадназначна. Каб пазбавіцца гэтай неадназначнасці, трэба на шукаемы вугал φ накласці дапаўняльныя абмежаванні. У якасці такіх абмежаванняў мы выберам умову

$$0 < \varphi < \pi.$$



Рыс. 193.

Калі аргумент x неперарыўна ўзрастае ў інтэрвале $(0, \pi)$, то функцыя $y = \operatorname{ctg} x$ будзе манатонна ўбываць ад $+\infty$ да $-\infty$. Таму ў разглядаемым інтэрвале катангенсоіда (рыс. 193) абавязкова перасячэ прамую $y = a$ і прытым толькі ў адным пункце. Абсцысу гэтага пункта прынята называць *арккатангенсам* ліку a і абазначаць $\operatorname{arc\,ctg} a$.

Арккатангенс a ёсць вугал, што знаходзіцца ў інтэрвале ад 0 да π (або ад 0° да 180°), катангенс якога роўны a.

Прыклады.

1) $\operatorname{arc\,ctg} 0 = \frac{\pi}{2}$, або $\operatorname{arc\,ctg} 0 = 90°$.

Сапраўды, вугал у $\frac{\pi}{2}$ радыянаў падпадае ў інтэрвал $(0, \pi)$, і катангенс яго роўны 0.

2) $\operatorname{arc\,ctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3}\pi$, або $\operatorname{arc\,ctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 120°$.

Сапраўды, вугал у 120° падпадае ў інтэрвал (0°, 180°), і катангенс яго роўны $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Заўважым, што з роўнасці $\operatorname{ctg}(-45°) = -1$ нельга зрабіць вывад, што $\operatorname{arc\,ctg}(-1) = -45°$. Вугал жа ў $-45°$ не падпадае ў інтэрвал (0°, 180°), і таму ён не можа быць арккатангенсам ліку -1. Відавочна, што $\operatorname{arc\,ctg}(-1) = 135°$.

Практыкаванні

Вылічыць (№ 823—826):

823. $\operatorname{arc\,tg} 0 + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arc\,tg} \sqrt{3} + \operatorname{arc\,tg} 1.$

824. $\operatorname{arc\,ctg} 0 + \operatorname{arc\,ctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arc\,ctg} \sqrt{3} + \operatorname{arc\,ctg} 1.$

825. $\operatorname{arc\,ctg} 0 + \operatorname{arc\,ctg}(-1) - \operatorname{arc\,ctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \operatorname{arc\,ctg}\left(-\sqrt{3}\right).$

826. $\operatorname{arc\,tg}(-1) + \operatorname{arc\,tg}\left(-\sqrt{3}\right) - \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \operatorname{arc\,tg} 0.$

827. Якія значэнні могуць прымаць велічыні a і b, калі

$$b = \operatorname{arc\,tg} a?$$

828. Якія значэнні могуць прымаць велічыні a і b, калі

$$b = \operatorname{arc\,ctg} a?$$

829. У якіх чвэрцях заканчваюцца вуглы:

а) $\operatorname{arc\,tg} 5$;

б) $\operatorname{arc\,tg}(-7)$;

в) $\operatorname{arc\,ctg} 3$;

г) $\operatorname{arc\,ctg}(-2)$;

д) $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,ctg}(-4)$;

е) $\frac{3}{2}\pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2}$?

830. Ці могуць выразы $\operatorname{arc\,tg} a$ і $\operatorname{arc\,ctg} a$ прымаць значэнні:

а) аднаго знака;

б) розных знакаў?

831. Знайсці сінусы, косінусы, тангенсы і катангенсы наступных вуглоў:

а) $\operatorname{arc\,tg} \frac{5}{12}$;

б) $\operatorname{arc\,tg}(-0{,}75)$;

в) $\operatorname{arc\,ctg}\left(-\frac{5}{12}\right)$;

г) $\operatorname{arc\,ctg} 0{,}75$.

Даказаць тоеснасці (№ 832, 833):

832. $\operatorname{arc\,tg}(-x) = -\operatorname{arc\,tg} x.$

833. $\operatorname{arc\,ctg}(-x) = \pi - \operatorname{arc\,ctg} x.$

Вылічыць:

834. $\operatorname{arc\,ctg}(\operatorname{ctg} 2)$.

835. $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} 3)$.

§ 122. Ураўненні $\operatorname{tg} x = a$ і $\operatorname{ctg} x = a$

Усе корані ўраўнення

$$\operatorname{tg} x = a$$

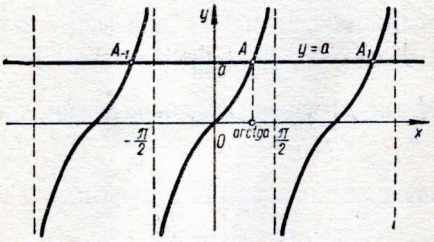
задаюцца формулай

$$x = \operatorname{arc}\operatorname{tg} a + m\pi, \tag{1}$$

або

$$x = \operatorname{arc}\operatorname{tg} a + 180^\circ m, \tag{2}$$

дзе m прабягае ўсе цэлыя лікі ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$). Прапануем вучням даказаць гэта самастойна. Пры гэтым трэба скарыстаць рысунак 194.



Рыс. 194.

Аналагічна, усе корані ўраўнення

$$\operatorname{ctg} x = a$$

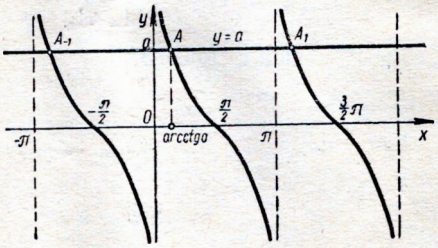
вызначаюцца суадносінай

$$x = \operatorname{arc}\operatorname{ctg} a + m\pi, \tag{3}$$

або

$$x = \operatorname{arc}\operatorname{ctg} a + 180^\circ m. \tag{4}$$

Гэта добра ілюструецца рысункам 195.



Рыс. 195.

Разгледзім два прыклады.

1) Рашыць ураўненне $\operatorname{tg}(30^\circ - x) = \sqrt{3}$.

Скарыстоўваючы формулу (2), атрымліваем

$$30^\circ - x = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{3} + 180^\circ m = 60^\circ + 180^\circ m.$$

Адсюль

$$x = -30^\circ - 180^\circ m,$$

што можна запісаць, вядома, і ў такім выглядзе:

$$x = -30^\circ + 180^\circ k.$$

2) Рашыць ураўненне $\operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$.

Скарыстаўшы формулу (3), атрымліваем

$$2x - \frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,ctg}(-1) + m\pi = \frac{3}{4}\pi + m\pi.$$

Адсюль

$$2x = \pi + m\pi = (1 + m)\pi,$$

$$x = \frac{\pi}{2}(m + 1).$$

Паколькі m можа быць любым цэлым лікам, то атрыманы рэзультат можна запісаць і ў больш простай форме:

$$x = \frac{\pi}{2} \cdot k.$$

Практыкаванні

Рашыць ураўненні:

836. $\operatorname{tg} 3x = 0$.

837. $\operatorname{tg}(2x + 60^\circ) = -1$.

838. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - 5x\right) = \sqrt{3}$.

839. $\operatorname{tg}\pi x = 1$.

840. $\operatorname{ctg}(30^\circ + 2x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

841. $\operatorname{ctg}(3x - 45^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

842. $\operatorname{ctg}\pi x = 0$.

843. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = -1$.

844. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 0{,}5$.

845. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$.

§ 123. Больш складаныя трыганаметрычныя ўраўненні

Ураўненні

$$\sin x = a,$$
$$\cos x = a,$$
$$\operatorname{tg} x = a,$$
$$\operatorname{ctg} x = a$$

з'яўляюцца найпрасцейшымі трыганаметрычнымі ўраўненнямі. У гэтым параграфе на канкрэтных прыкладах мы разгледзім больш складаныя трыганаметрычныя ўраўненні. Іх рашэнне, як правіла, зводзіцца да рашэння найпрасцейшых трыганаметрычных ураўненняў.

Прыклад 1. Рашыць ураўненне

$$\sin 2x = \cos x \cdot \sin 2x.$$

Пераносячы ўсе члены гэтага ўраўнення ў левую частку і раскладаючы атрыманы выраз на множнікі, атрымліваем

$$\sin 2x\,(1 - \cos x) = 0.$$

Здабытак двух выразаў тады і толькі тады роўны нулю, калі хоць бы адзін з сумножнікаў роўны нулю, а другі прымае любыя лікавыя значэнні, толькі б ён быў вызначаны. Калі $\sin 2x = 0$, то $2x = n\pi$, $x = \frac{\pi}{2} n$. Калі ж $1 - \cos x = 0$, то $\cos x = 1$; $x = 2k\pi$.

Такім чынам, мы атрымалі дзве групы кораняў: $x = \frac{\pi}{2} n$; $x = 2k\pi$. Другая група кораняў, відавочна, змяшчаецца ў першай, паколькі пры $n = 4k$ выраз $x = \frac{\pi}{2} n$ ператвараецца ў $x = 2k\pi$. Таму адказ можна запісаць адной формулай:

$$x = \frac{\pi}{2} n,$$

дзе n — любы цэлы лік.

Заўважым, што дадзенае ўраўненне нельга было рашаць шляхам скарачэння на $\sin 2x$. Сапраўды, пасля скарачэння мы атрымалі б $1 - \cos x = 0$, адкуль $x = 2k\pi$. Такім чынам, мы страцілі б некаторыя корані, напрыклад $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3}{2}\pi$.

Прыклад 2. Рашыць ураўненне

$$\frac{\sin 2x}{\sin x} = 0.$$

Дроб роўны нулю толькі ў тым выпадку, калі яго лічнік роўны нулю. Таму $\sin 2x = 0$, адкуль $2x = n\pi$, $x = \frac{\pi}{2} n$. З гэтых значэнняў x трэба выкінуць, як пабочныя, тыя значэнні, пры якіх $\sin x$ ператвараецца ў нуль (дробы з нулявымі назоўнікамі не маюць сэнсу: дзяленне на нуль не вызначана). Такімі значэннямі з'яўляюцца лікі, кратныя π. У формуле $x = \frac{\pi}{2} n$ яны атрымліваюцца пры цотных n. Значыць, коранямі дадзенага ўраўнення будуць лікі

$$x = \frac{\pi}{2}(2k + 1),$$

дзе k — любы цэлы лік.

Прыклад 3. Рашыць ураўненне

$$2\sin^2 x + 7\cos x - 5 = 0.$$

Выразім $\sin^2 x$ праз $\cos x$:

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x.$$

Тады дадзенае ўраўненне можна перапісаць у выглядзе

$$2(1 - \cos^2 x) + 7\cos x - 5 = 0,$$

або

$$2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0.$$

Абазначаючы $\cos x$ праз y, мы прыходзім да квадратнага ўраўнення

$$2y^2 - 7y + 3 = 0,$$

коранямі якога з'яўляюцца лікі $\frac{1}{2}$ і 3. Значыць, або $\cos x = \frac{1}{2}$, або $\cos x = 3$. Аднак апошняе немагчыма, таму што косінус любога вугла па абсалютнай велічыні не перавышае 1. Застаецца прызнаць, што $\cos x = \frac{1}{2}$, адкуль $x = \pm 60^\circ + 360^\circ n$.

Прыклад 4. Рашыць ураўненне

$$2\sin x + 3\cos x = 6.$$

Паколькі $\sin x$ і $\cos x$ па абсалютнай велічыні не перавышаюць 1, то выраз $2\sin x + 3\cos x$ не можа прымаць значэнняў, большых чым 5. Таму дадзенае ўраўненне не мае кораняў.

Прыклад 5. Рашыць ураўненне

$$\sin x + \cos x = 1.$$

Узвёўшы абедзве часткі дадзенага ўраўнення ў квадрат, мы атрымаем $\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 1$, але $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, таму

$2\sin x\cos x = 0$. Калі $\sin x = 0$, то $x = n\pi$; калі ж $\cos x = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Гэтыя дзве групы рашэнняў можна запісаць адной формулай: $x = \frac{\pi}{2} n$.

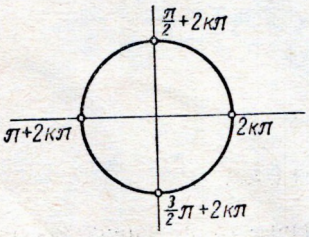
Паколькі абедзве часткі дадзенага ўраўнення мы ўзводзілі ў квадрат, то не выключана магчымасць, што сярод атрыманых намі кораняў ёсць пабочныя. Вось чаму ў гэтым прыкладзе, у адрозненне ад усіх папярэдніх, неабходна зрабіць праверку. Усе значэнні $x = \frac{\pi}{2} n$ можна разбіць на 4 групы (гл. рыс. 196):

1) $x = 2k\pi$ $\quad (n = 4k)$;

2) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $\quad (n = 4k + 1)$;

3) $x = \pi + 2k\pi$ $\quad (n = 4k + 2)$;

4) $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$ $\quad (n = 4k + 3)$.



Рыс. 196

Пры $x = 2k\pi$ $\sin x + \cos x = 0 + 1 = 1$. Значыць, $x = 2k\pi$ — корані дадзенага ўраўнення. Пры $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $\sin x + \cos x = 1 + 0 = 1$. Значыць, $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ — таксама корані дадзенага ўраўнення. Пры $x = \pi + 2k\pi$ $\sin x + \cos x = 0 - 1 = -1$. Таму значэнні $x = \pi + 2k\pi$ не з'яўляюцца коранямі дадзенага ўраўнення. Аналагічна паказваецца, што $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$ не з'яўляюцца коранямі.

Такім чынам, дадзенае ўраўненне мае наступныя корані:

$$x = 2k\pi \text{ і } x = \frac{\pi}{2} + 2m\pi,$$

дзе k і m — любыя цэлыя лікі.

Практыкаванні

Рашыць ураўненні:

846. $\cos x = \sin 2x \cdot \cos x$.

847. $\operatorname{tg} x + \sin x \cdot \operatorname{tg} x = 0$.

848. $\cos x \cdot \operatorname{cosec}^2 x = 0$.

849. $\dfrac{\sin x}{1-\cos x}=0.$

850. $\dfrac{\cos x}{1+\sin x}=0.$

851. $\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x}=0.$

852. $\cos x \cdot \operatorname{tg} x = 0.$

853. $\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 3 = 0.$

854. $2\cos^2 x + 5\cos x - 3 = 0.$

855. $2\cos^2 x = 3\sin x.$

856. $\cos^2 x - 1 = \cos(90^\circ - x).$

857. $2\sin^2 x = 2 + 5\cos x.$

858. $\sqrt{3}\operatorname{tg}^2(x + 40^\circ) = \operatorname{ctg}(50^\circ - x).$

859. $\sin x + \cos x = 3.$

860. $2\sin x - 3\cos x = 6.$

861. $\sin x + \cos 2x = 2.$

862. $\sin x \cdot \cos 2x = -1.$

863. $\cos 2x - 2\sin^2 x = -3.$

864. $\sin x - \cos x = 1.$

865. $\sin x = \cos x.$

§ 124. Аднародныя ўраўненні

Прыкладамі *аднародных* трыганаметрычных ураўненняў могуць быць ураўненні

$$\sin x - \cos x = 0,$$
$$\sin^2 x - 5\sin x \cdot \cos x + 6\cos^2 x = 0,$$
$$\cos^2 x - \sin x \cdot \cos x = 0.$$

Гэта такія ўраўненні, усе члены якіх маюць адну і тую ж агульную ступень адносна $\sin x$ і $\cos x$. Напрыклад, усе члены першага ўраўнення маюць агульную ступень 1, а ўсе члены другіх двух ураўненняў — агульную ступень 2.

Рэшым ураўненне $\sin x - \cos x = 0$. Для гэтага заўважым, што ў дадзеным выпадку $\cos x$ не можа быць роўны 0. Калі б было $\cos x = 0$, то павінна было б быць і $\sin x = 0$. Але тады не выконвалася б тоеснасць $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Такім чынам, у дадзеным выпадку $\cos x \neq 0$. Але тады абедзве часткі гэтага ўраўнення можна падзяліць на $\cos x$. У рэзультаце атрымаем $\operatorname{tg} x - 1 = 0$, адкуль $\operatorname{tg} x = 1$, $x = \dfrac{\pi}{4} + n\pi$.

Аналагічна рашаецца і ўраўненне

$$\sin^2 x - 5 \sin x \cos x + 6 \cos^2 x = 0.$$

Падзяліўшы абедзве часткі гэтага ўраўнення на $\cos^2 x$, атрымаем

$$\operatorname{tg}^2 x - 5 \operatorname{tg} x + 6 = 0; \quad (\operatorname{tg} x)_1 = 2; \quad (\operatorname{tg} x)_2 = 3.$$

Таму

$$x = \operatorname{arc\,tg} 2 + n\pi; \quad x = \operatorname{arc\,tg} 3 + k\pi.$$

Цяпер рэшым ураўненне

$$\cos^2 x - \sin x \cdot \cos x = 0.$$

Тут ужо роўнасць $\cos x = 0$ магчыма, таму дзяліць абедзве часткі ўраўнення на $\cos^2 x$ нельга. Затое можна сцвярджаць, што $\sin x \neq 0$. У адваротным выпадку з ураўнення вынікала б, што $\cos x = 0$. Але тады не выконвалася б тоеснасць $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Такім чынам, $\sin x \neq 0$. Таму абедзве часткі дадзенага ўраўнення можна падзяліць на $\sin^2 x$. У рэзультаце атрымаем $\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{ctg} x = 0$, адкуль $(\operatorname{ctg} x)_1 = 0$, $(\operatorname{ctg} x)_2 = 1$. Адпаведна гэтаму атрымліваюцца дзве групы кораняў:

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad \text{і} \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Некаторыя трыганаметрычныя ўраўненні, не з'яўляючыся аднароднымі, лёгка зводзяцца да аднародных.

Напрыклад, калі ва ўраўненні

$$\sin x \cdot \cos x = 0{,}5$$

запісаць 0,5 у выглядзе $0{,}5(\sin^2 x + \cos^2 x)$, то атрымаецца аднароднае ўраўненне $\sin x \cos x = 0{,}5 \sin^2 x + 0{,}5 \cos^2 x$.

Гэта ўраўненне прапануем вучням рашыць самастойна.

Практыкаванні

Рашыць ураўненні:

866. $3 \sin x - \sqrt{3} \cos x = 0.$

867. $2 \cos x - \sqrt{2} \sin x = 0.$

868. $3 \sin x + 5 \cos x = 0.$

869. $\sin^2 x - (1 + \sqrt{3}) \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = 0.$

870. $\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = 0.$

871. $\sqrt{3} \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = 0.$

872. $2 \sin x - \cos x \sin x = 0.$

873. $\sqrt{3} \cos x + \cos x \sin x = 0.$

874. $\sin x \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos^2 x$.

875. $\cos^2 x - 3 \sin x \cos x + 1 = 0$.

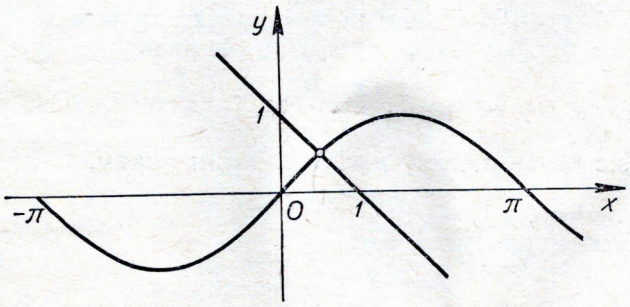
876. $\sin^2 x + 3 \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = \frac{5 - \sqrt{3}}{2}$.

877. $\sin x \cos x = -0{,}25$.

878. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$.

§ 125. Графічны спосаб рашэння трыганаметрычных ураўненняў

Ураўненні, з якімі даводзіцца сустракацца пры рашэнні практычных задач, як правіла, значна адрозніваюцца ад тых, якія мы разглядалі ў гэтым раздзеле. Для такіх ураўненняў часам наогул нельга назваць ніякага спосабу, які дазволіў бы знайсці корані абсалютна дакладна. У такім выпадку даводзіцца абмяжоўвацца знаходжаннем толькі *набліжаных* значэнняў кораняў. Сучасная матэматыка мае даволі многа эфектыўных метадаў набліжанага рашэння ўраўненняў. Гэтыя метады выкладаюцца ў падручніках па вылічальнай матэматыцы і патрабуюць пэўных ведаў, якіх у нас пакуль яшчэ няма. Таму мы спынімся толькі на адным з даступных нам спосабаў — *графічным спосабе*.



Рыс. 197.

Няхай, напрыклад, трэба рашыць ураўненне

$$\sin x = 1 - x.$$

На адным і тым жа рысунку начэрцім два графікі: графік функцыі $y = \sin x$ і графік функцыі $y = 1 - x$ (рыс. 197). Гэтыя графікі перасякаюцца ў адным пункце. Абсцыса гэтага пункта і дае нам адзіны корань нашага ўраўнення:

$$x \approx 0{,}5.$$

Для ўдакладнення атрыманага рэзультату можна выкарыстаць трыганаметрычныя табліцы. Пры $x=0{,}5$

$$\sin x \approx 0{,}4794,$$
$$1-x=0{,}5;$$

значыць, $\sin x<1-x$. Але тады, як лёгка зразумець з рысунка 197, корань ўраўнення $\sin x=1-x$ будзе большы, чым 0,5. Праверым значэнне $x=0{,}6$. Маем (пры $x=0{,}6$):

$$\sin x \approx 0{,}5446,$$
$$1-x=0{,}4;$$

значыць, $\sin x>1-x$. Але тады, як лёгка зразумець з таго ж рысунка 197, шукаемы корань x_0 павінен быць меншы, чым 0,6. Цяпер ужо мы ведаем, што x_0 знаходзіцца ў інтэрвале [0,5; 0,6]. Таму з дакладнасцю да 0,1

$$x_0 \approx 0{,}5 \text{ (з недахопам)},$$
$$x_0 \approx 0{,}6 \text{ (з лішкам)}.$$

З дапамогай табліц можна знайсці набліжанае значэнне x_0 і з дакладнасцю да 0,01. Падзелім інтэрвал [0,5; 0,6] папалам. У сярэднім пункце ($x=0{,}55$) гэтага інтэрвалу

$$\sin x \approx 0{,}5227,$$
$$1-x=0{,}45.$$

Зноў атрымліваем, што $\sin x>1-x$. Значыць, $x_0<0{,}55$. Праверым пункт $x=0{,}52$ (ён блізкі да сярэдняга пункта $x=0{,}525$ адрэзка [0,50; 0,55], у якім знаходзіцца корань x_0). Пры $x=0{,}52$

$$\sin x \approx 0{,}4969,$$
$$1-x=0{,}48.$$

Зноў $\sin x>1-x$, таму $x_0<0{,}52$. Такім чынам,

$$0{,}50<x_0<0{,}52.$$

Таму з дакладнасцю да 0,01

$$x_0 \approx 0{,}51.$$

Практыкаванні

879. Вышэй мы паказалі, што з дакладнасцю да 0,01 корань ураўнення $\sin x=1-x$ роўны 0,51. Вызначце, якое гэта значэнне кораня: з недахопам ці з лішкам.

880. Знайсці корані дадзеных ураўненняў з дакладнасцю да 0,01:

а) $\cos x=x-1$; б) $\sin x+0{,}5=x$.

881. Колькі кораняў мае ўраўненне $10 \sin x=x$?

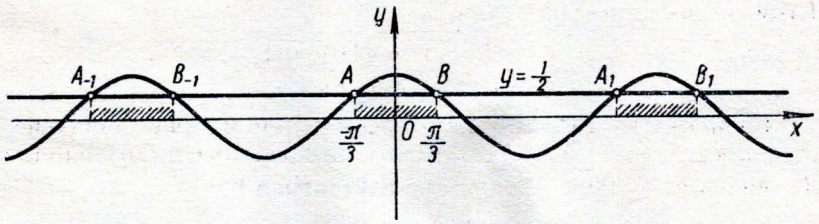
882. Знайсці найменшы дадатны корань ураўнення $\operatorname{tg} x=1-x$ з дакладнасцю да 0,01.

§ 126. Трыганаметрычныя няроўнасці

Пры рашэнні трыганаметрычных няроўнасцей карысна звяртацца да графікаў. Няхай, напрыклад, трэба рашыць няроўнасць

$$\cos x > \frac{1}{2}.$$

На адным і тым жа чарцяжы пабудуем графікі функцый $y = \cos x$ і $y = \frac{1}{2}$ (рыс. 198). Як відаць з рысунка, адзін з інтэрвалаў, у якім выконваецца дадзеная няроўнасць, знаходзіцца паміж найменшымі па абсалютнай велічыні коранямі ўраўнення $\cos x = \frac{1}{2}$,



Рыс 198

гэта значыць паміж пунктамі $x = -\frac{\pi}{3}$ і $x = \frac{\pi}{3}$. Усе астатнія інтэрвалы, у якіх выконваецца дадзеная няроўнасць, атрымліваюцца шляхам зрушэння інтэрвалу $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ улева або ўправа на адлегласці, кратныя 2π. Таму няроўнасць $\cos x > \frac{1}{2}$ выконваецца пры ўмове, што

$$-\frac{\pi}{3} + 2n\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2n\pi,$$

дзе n — любы цэлы лік.

Разгледзім яшчэ адзін прыклад. Рашыць няроўнасць

$$2\cos^2 x + 3\cos x - 2 > 0.$$

Абазначыўшы $\cos x$ праз y, прыйдзем да наступнай квадратнай няроўнасці:

$$2y^2 + 3y - 2 > 0.$$

Гэта няроўнасць выконваецца пры $y < -2$ і $y > \frac{1}{2}$. Таму ўсе рашэнні дадзенай няроўнасці павінны задавальняць або няроўнасці

$\cos x < -2$, або няроўнасці $\cos x > \frac{1}{2}$. Першая з гэтых няроўнасцей не выконваецца ні пры якіх значэннях x; другая ж няроўнасць, як мы паказалі вышэй, выконваецца пры

$$-\frac{\pi}{3} + 2n\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2n\pi.$$

Практыкаванні

Рашыць няроўнасці:

883. $\operatorname{tg} x > 1$.

884. $\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

885. $2\sin^2 x - 5\sin x + 3 > 0$.

886. $\sin^2 x > \cos x$.

887. $|\sin x| > \frac{1}{2}$.

Задачы на паўтарэнне

Даказаць тоеснасці (№ 888—891):

888. $(r\cos\alpha)^2 + (r\sin\alpha \cdot \sin\beta)^2 + (r\sin\alpha \cdot \cos\beta)^2 = r^2$.

889. $\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} + \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} = 2|\sec\alpha|$.

890. $1 + \frac{\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\alpha}{1+\cos\alpha} = \sec\alpha$.

891. $\frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha$.

Рашыць дадзеныя няроўнасці (№ 892—894) адносна вострага вугла α:

892*. $\cos(\alpha - 120°) > \sin(64° + \alpha)$.

893*. $\operatorname{tg}(65° - 2\alpha) > \operatorname{ctg}(40° - \alpha)$.

894*. $\sin(\alpha + 30°) \geqslant \cos(72° - 2\alpha)$.

895. Знайсці косінус, тангенс і катангенс вугла φ, калі вядома, што $\sin\varphi = 0{,}28$.

896. Знайсці сінус, тангенс і катангенс вугла φ, калі вядома, што $\cos\varphi = -0{,}96$ і вугал φ заканчваецца не ў 3-й чвэрці.

897. Знайсці сінус, косінус і катангенс вугла φ, калі вядома, што гэты вугал заканчваецца ў 3-й чвэрці і

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{3}.$$

Знайсці сінусы, косінусы, тангенсы і катангенсы наступных вуглоў (№ 898—901):

898. $\arcsin 0{,}28$ і $\arcsin(-0{,}28)$.

899. $\arccos 0{,}96$ і $\arccos(-0{,}96)$.

900. $\operatorname{arctg}\frac{5}{12}$ і $\operatorname{arctg}\left(-\frac{5}{12}\right)$.

901. $\operatorname{arcctg} 1\frac{1}{3}$ і $\operatorname{arcctg}\left(-1\frac{1}{3}\right)$.

Спрасціць дадзеныя выразы (№ 902—905):

902. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos 0{,}6\right)$.

903. $\cos\left[\frac{\pi}{2} + \arccos(-0{,}8)\right]$.

904. $\operatorname{tg}\left[\frac{3}{2}\pi - \arcsin\left(-\frac{5}{13}\right)\right]$.

905. $\sin\left[\operatorname{arctg} 0{,}75 - \frac{3}{2}\pi\right]$.

906. а) $\sin\alpha = \sin\beta$. Ці можна сказаць, што $\alpha = \beta$?

б) $\sin\alpha = \sin\beta$, прычым вуглы α і β заканчваюцца ў адной і той жа чвэрці. Ці можна сказаць, што $\alpha = \beta$?

в) $\sin\alpha = \sin\beta$, прычым $0 < \alpha < \pi$ і $0 < \beta < \pi$. Ці можна сказаць, што $\alpha = \beta$?

г) $\sin\alpha = \sin\beta$, прычым $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ і $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$. Ці можна сказаць, што $\alpha = \beta$?

907. Чым адрозніваюцца адна ад другой функцыі

$$y = x \text{ і } y = \sin(\arcsin x)?$$

Параўнайце графікі гэтых функцый.

908*. Пабудаваць графік функцыі $y = \arccos(\cos x)$.

909*. На плоскасці xOy знайсці мноства ўсіх пунктаў, каардынаты (x, y) якіх задавальняюць умове

$$\sin(x + y) = 0.$$

910. Пры якіх значэннях α вызначаны выразы:

а) $\frac{1}{\sin\alpha + 1}$;

б) $\frac{1}{\cos\alpha - 0{,}5}$;

в) $\sqrt{\cos\alpha - 1}$;

г) $\frac{3}{\sin\alpha - \cos\alpha}$;

д) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$;

е) $\operatorname{tg} 2\alpha$?

911. Пры якіх значэннях a дадзеныя ўраўненні маюць корані:

а) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + a = 0$;

б) $\sin^2 x + \sin x + a = 0$?

Праверыць дадзеныя роўнасці (№ 912—915):

912. $\arcsin(\sin 1) = 1$.

913. $\arcsin(\sin 2) = \pi - 2$.

914. $\arccos(\cos 1{,}5) = 1{,}5$.

915. $\arccos(\cos 2{,}5) = 2{,}5$.

916. Даказаць тоеснасці:

а) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$;

б) $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x = \frac{\pi}{2}$.

Вылічыць (№ 917—919):

917. $\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{ctg}\frac{2}{3}\pi\right)$.

918. $\operatorname{arc\,ctg}(\operatorname{tg} 0{,}6\pi)$.

919. $\arccos(\sin 2)$.

920. Што больш:

а) $\arccos\frac{2}{3}$ або $\arcsin\frac{3}{4}$;

б) $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$ або $\arccos\left(-\frac{5}{6}\right)$;

в) $\operatorname{arc\,tg} 3$ або $\operatorname{arc\,tg} 4$?

Рашыць дадзеныя ўраўненні (№ 921—930)

921. $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x = 3$.

922. $3\sin^2 x + 2\sin x \cos x = 2$.

923. $\sin x - \cos 2x + \sin 4x = 3$.

924. $\cos x = \sqrt{2}\sin^2 x$.

925. $\sin x + \cos x = 1 + 2\sin x \cos x$.

926. $\sin(\pi \cos x) = 0$.

927. $\cos 2x \sin x = \cos 2x$.

928. $\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x} = 0.$

929. $\sqrt{1 - \sin^2 x} = \cos x.$

930. $\sqrt{1 - \cos^2 x} = -\sin x.$

931. Даказаць, што ўраўненне $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin 100x = 100$ не мае кораняў.



Раздзел VI

ЛІКАВЫЯ ПАСЛЯДОЎНАСЦІ

§ 127. Лікавыя паслядоўнасці і спосабы іх задавання. Канечныя і бесканечныя паслядоўнасці

Разгледзім наступныя тры сукупнасці лікаў:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ n,\ \ldots, \tag{1}$$

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{(-1)^{n-1}}{n},\ \ldots\ . \tag{2}$$

$$\sin 1,\ \sin 2,\ \sin 3,\ \sin 4,\ \ldots,\ \sin n,\ \ldots\ . \tag{3}$$

Натуральна лічыць, што кожны лік у любой з гэтых сукупнасцей забяспечаны нумарам у адпаведнасці з тым месцам, якое ён займае ў гэтай сукупнасці. Напрыклад, у другой сукупнасці лік 1 мае нумар 1, лік $-\frac{1}{2}$ — нумар 2, лік $\frac{1}{3}$ — нумар 3 і г. д.

Наадварот, які б нумар мы ні ўказалі, у кожнай з гэтых сукупнасцей знойдзецца лік, забяспечаны гэтым нумарам. Напрыклад, нумар 2 у першай паслядоўнасці мае лік 2, у другой — лік $-\frac{1}{2}$, у трэцяй — лік $\sin 2$. Аналагічна, нумар 10 маюць: у першай паслядоўнасці — лік 10, у другой — лік $-\frac{1}{10}$, у трэцяй — лік $\sin 10$ і г. д. Такім чынам, у дадзеных вышэй сукупнасцях кожны лік не толькі мае пэўны нумар, але і поўнасцю вызначаецца гэтым нумарам.

Сукупнасць лікаў, кожны з якіх забяспечаны сваім нумарам, называецца лікавай паслядоўнасцю.

Асобныя лікі паслядоўнасці называюцца яе членамі і абазначаюцца звычайна так: першы член a_1, другі a_2, ..., n-ы член a_n і г. д. Уся лікавая паслядоўнасць абазначаецца

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots, \text{ або } \{a_n\}.$$

Задаць лікавую паслядоўнасць — гэта значыць указаць, як адшукваецца той ці іншы яе член, калі вядомы нумар займаемага ім месца. Існуе многа розных спосабаў задавання лікавых паслядоўнасцей. Ніжэй мы спынімся на некаторых з іх.

1. Звычайна лікавая паслядоўнасць задаецца пры дапамозе формулы, якая дазваляе па нумару члена паслядоўнасці вызначыць гэты член. Напрыклад, калі вядома, што пры любым n

$$a_n = n^2,$$

то

$$a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_3 = 9 \text{ і г. д.}$$

Пры $a_n = \sin\frac{\pi}{2}n$ мы атрымаем: $a_1 = \sin\frac{\pi}{2} = 1$, $a_2 = \sin\pi = 0$,

$a_3 = \sin\frac{3}{2}\pi = -1$, $a_4 = \sin 2\pi = 0$ і г. д.

Формула, якая дазваляе знайсці любы член лікавай паслядоўнасці па нумару гэтага члена, называецца формулай агульнага члена лікавай паслядоўнасці.

2. Бываюць выпадкі, калі паслядоўнасць задаецца пры дапамозе апісання яе членаў. Напрыклад, гавораць, што паслядоўнасць

$$1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ \ldots$$

састаўлена з набліжаных значэнняў $\sqrt{2}$ з недахопам з дакладнасцю да 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001 і г. д. У падобных выпадках часам наогул нельга ўстанавіць формулу агульнага члена; тым не менш паслядоўнасць аказваецца поўнасцю вызначанай.

3. Часам указваецца некалькі першых членаў паслядоўнасці, а ўсе астатнія члены вызначаюцца гэтымі зададзенымі членамі па таму ці іншаму правілу. Няхай, напрыклад,

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,$$

а кожны наступны член вызначаецца як сума двух папярэдніх. Іншымі словамі, дапусцім, што пры любым $n \geqslant 3$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Так вызначаецца лікавая паслядоўнасць

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ \ldots,$$

члены якой носяць назву «лікаў Фібаначы» (па імю італьянскага матэматыка Леанарда Пізанскага (каля 1170—1250), якога называюць таксама Фібаначы, гэта значыць «сын Банача»). Яны маюць многія цікавыя ўласцівасці, разгледжанне якіх, аднак, выходзіць за межы нашай праграмы.

Паслядоўнасць можа састаяць як з канечнай, так і з бесканечнай колькасці членаў.

$a_5 = 5 - 1 + 5 - 2 = 7$

Паслядоўнасць, якая састаіць з канечнага ліку членаў, называецца канечнай, а паслядоўнасць, якая састаіць з бесканечнага ліку членаў, — бесканечнай паслядоўнасцю.

Напрыклад, паслядоўнасць усіх цотных дадатных лікаў 2, 4, 6, 8, 10, 12, ... бесканечная, а паслядоўнасць адназначных цотных дадатных лікаў 2, 4, 6, 8 канечная.

Практыкаванні

932. Напісаць чатыры першыя лікі паслядоўнасці з агульным членам:

а) $a_n = 2^{-n}$; г) $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)$;

б) $a_n = 2 + 3n$; д) $a_n = (-1)^n$;

в) $a_n = \frac{2n-1}{3+n}$; е) $a_n = \operatorname{tg}\frac{\pi}{n+2}$.

933. Знайсці формулу агульнага члена для кожнай з дадзеных паслядоўнасцей:

а) 1, 3, 5, 7, 9, ...; д) $\operatorname{tg} 45°$, $\operatorname{tg} 22°30'$, $\operatorname{tg} 11°15'$, ...;

б) 2, 4, 6, 8, 10, ...; е) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$;

в) 3, −3, 3, −3, 3, ...; ж) 1, 9, 25, 49, 81, ...

г) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$;

934. Ці з'яўляецца канечнай паслядоўнасць усіх дадатных кораняў ураўнення:

а) $\sin x = x - 1$; б) $\operatorname{tg} x = x$; в) $\sin x = ax + b$?

§ 128. Манатонныя паслядоўнасці

Калі кожны член паслядоўнасці, пачынаючы з другога, большы за папярэдні, то паслядоўнасць называецца манатонна ўзрастаючай.

Іншымі словамі, *лікавая паслядоўнасць* $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *называецца манатонна ўзрастаючай, калі для любога* n

$$a_{n+1} > a_n.$$

Прыкладам манатонна ўзрастаючай* лікавай паслядоўнасці з'яўляецца натуральны рад лікаў 1, 2, 3, 4, ... Другім прыкладам

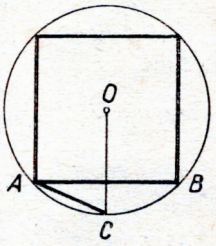
* Калі пры любым n $a_{n+1} \geqslant a_n$, то паслядоўнасць $\{a_n\}$ называецца *манатонна неўбываючай*. Напрыклад, паслядоўнасць 1, 1, 2, 2, 3, 3, ... не з'яўляецца манатонна ўзрастаючай, але з'яўляецца манатонна неўбываючай.

манатонна ўзрастаючай лікавай паслядоўнасці можа служыць паслядоўнасць

$$p_4,\ p_8,\ p_{16},\ p_{32},\ \ldots$$

перыметраў правільных 4-х, 8-мі, 16-вугольнікаў і г. д., упісаных у адну і тую ж акружнасць. Сапраўды, няхай AB — старана квадрата, упісанага ў акружнасць O (рыс. 199). Апусцім на AB перпендыкуляр з цэнтра акружнасці O і прадоўжым яго да перасячэння з акружнасцю ў пункце C. AC і BC будуць, відавочна, старанамі правільнага васьмівугольніка. У трохвугольніку ABC

$$AC + BC > AB.$$



Рыс. 199.

Паколькі $p_4 = 4AB$, $p_8 = 4(AC + BC)$, то $p_8 > p_4$. Аналагічна паказваецца, што $p_{16} > p_8$, $p_{32} > p_{16}$ і г. д.

Калі кожны член лікавай паслядоўнасці, пачынаючы з другога, меншы за папярэдні, то паслядоўнасць называецца манатонна ўбываючай.

Іншымі словамі, *лікавая паслядоўнасць* $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$ *называецца манатонна ўбываючай, калі для любога* n

$$a_{n+1} < a_n.$$

Прыкладам манатонна ўбываючай* лікавай паслядоўнасці можа служыць паслядоўнасць

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots .$$

Другім прыкладам манатонна ўбываючай паслядоўнасці з'яўляецца паслядоўнасць

$$P_4,\ P_8,\ P_{16},\ P_{32},\ \ldots$$

перыметраў правільных 4-х, 8-мі, 16-вугольнікаў і г. д., апісаных каля адной і той жа акружнасці. Доказ гэтага факта мы прапануем вучням правесці самастойна.

Манатонна ўзрастаючыя і манатонна ўбываючыя паслядоўнасці часам называюцца проста манатоннымі паслядоўнасцямі.

Не трэба думаць, што ўсякая лікавая паслядоўнасць з'яўляецца манатоннай. Так, напрыклад, паслядоўнасць

$$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \ldots$$

---

* Калі пры любым n $a_{n+1} \leqslant a_n$, то паслядоўнасць $\{a_n\}$ называецца *манатонна неўзрастаючай*. Напрыклад, паслядоўнасць $1,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \ldots$ не з'яўляецца манатонна ўбываючай, але з'яўляецца манатонна неўзрастаючай.

з агульным членам $a_n = (-1)^n$ не належыць ні да манатонна ўзрастаючых, ні да манатонна ўбываючых паслядоўнасцей. Тое ж самае можна было б сказаць і адносна паслядоўнасці

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$

з агульным членам $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Падобныя паслядоўнасці атрымалі назву *вагаючыхся* паслядоўнасцей.

Практыкаванні

935. Якія з дадзеных паслядоўнасцей з'яўляюцца ўзрастаючымі, якія ўбываючымі і якія вагаючыміся:

а) $1, 3, 5, \ldots, 2n-1, \ldots$;

б) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$;

в) $\sin 1, \sin 2, \sin 3, \ldots, \sin n, \ldots$;

г) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}, \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}, \operatorname{tg}\frac{\pi}{9}, \ldots, \operatorname{tg}\frac{\pi}{3n}, \ldots$;

д) $1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots$;

е) $1; -0{,}1; 0{,}01; -0{,}001; \ldots; (-0{,}1)^{n-1}; \ldots$?

936. Даказаць, што паслядоўнасць з агульным членам

$$a_n = \frac{2n}{2n+1}$$

з'яўляецца ўзрастаючай.

937. Даказаць, што паслядоўнасць з агульным членам

$$a_n = \frac{2n+3}{6n-5}$$

з'яўляецца ўбываючай.

938. Якой умове павінны задавальняць дадатныя лікі a, b, c і d, каб паслядоўнасць з агульным членам

$$a_n = \frac{an+b}{cn+d}$$

была манатонна ўзрастаючай?

939. Даказаць, што паслядоўнасць з агульным членам $a_n = \left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^n$, дзе a — некаторы дадатны лік, з'яўляецца манатонна ўзрастаючай.

§ 129. Абмежаваныя і неабмежаваныя лікавыя паслядоўнасці

Лікавая паслядоўнасць $\{a_n\}$ *называецца абмежаванай зверху, калі ўсе яе члены мени некаторага ліку* A*:*

$$a_n < A \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Прыкладам такой паслядоўнасці можа служыць паслядоўнасць

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \ldots,\ \frac{n}{n+1},\ \ldots,$$

усе члены якой менш 1:

$$a_n < 1.$$

Тут у ролі A выступае лік 1. Замест яго можна было б выбраць 2, 3, $\frac{5}{2}$ і г. д., паколькі любы лік разглядаемай паслядоўнасці менш кожнага з гэтых лікаў. Важна не тое, які лік выбраны ў якасці A, а тое, што хаця б адзін такі лік *існуе*.

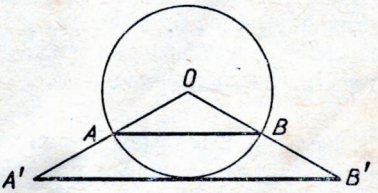
Важным прыкладам паслядоўнасці, абмежаванай зверху, служыць паслядоўнасць

$$p_4,\ p_8,\ p_{16},\ p_{32},\ \ldots \qquad (1)$$

перыметраў правільных 4-х, 8-мі, 16-вугольнікаў і г. д., упісаных у адну і тую ж акружнасць. Для доказу абмежаванасці гэтай паслядоўнасці мы зробім наступнае. Разам з дадзенай паслядоўнасцю разгледзім паслядоўнасць

$$P_4,\ P_8,\ P_{16},\ P_{32},\ \ldots \qquad (2)$$

перыметраў правільных 4-х, 8-мі, 16-вугольнікаў і г. д., апісаных каля той жа самай акружнасці. Відавочна, што старана AB правільнага 2^n-вугольніка, упісанага ў акружнасць, менш стараны $A'B'$ правільнага 2^n-вугольніка, апісанага каля гэтай акружнасці (рыс. 200). Таму



Рыс. 200.

$$p_{2^n} < P_{2^n}. \qquad (3)$$

Як было адзначана ў папярэднім параграфе, паслядоўнасць (2) з'яўляецца манатонна ўбываючай. Таму кожны член гэтай паслядоўнасці, пачынаючы з другога, менш першага члена P_4. Значыць, для любога $n > 2$

$$P_{2^n} < P_4. \qquad (4)$$

З (3) і (4) вынікае, што

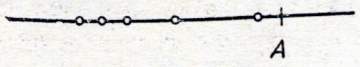
$$p_{2^n} < P_4.$$

Але $P_4 = 8r$, дзе r — радыус акружнасці. Такім чынам, для ўсіх $n > 2$

$$p_{2^n} < 8r.$$

Гэта няроўнасць і гаворыць аб тым, што паслядоўнасць (1) абмежавана зверху. Ролю A ў дадзеным выпадку адыгрывае лік $8r$.

Калі члены абмежаванай зверху лікавай паслядоўнасці абазначыць пунктамі лікавай прамой, то ўсе пункты размесцяцца лявей пункта з абсцысай A (рыс. 201).



Рыс. 201.

Лікавая паслядоўнасць $\{a_n\}$ *называецца абмежаванай знізу, калі ўсе яе члены больш некаторага ліку* B:

$$a_n > B \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Прыкладам такой паслядоўнасці можа служыць натуральны рад лікаў

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots .$$

Ён абмежаваны знізу, паколькі ўсе яго члены больш нуля ($B = 0$). У якасці B можна было б знайсці і любы адмоўны лік або $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ і г. д. Як і ў выпадку паслядоўнасці, абмежаванай зверху, тут важна не тое, які лік выбраць у якасці B, а тое, што хаця б адзін такі лік *існуе*.

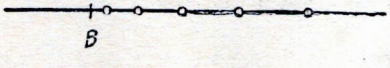
Важным прыкладам паслядоўнасці, абмежаванай знізу, з'яўляецца паслядоўнасць

$$P_4, P_8, P_{16}, P_{32}, \ldots$$

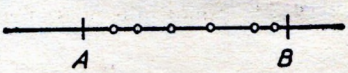
перыметраў правільных 4-х, 8-мі, 16-вугольнікаў і г. д., апісаных каля акружнасці. У гэтым лёгка пераканацца пры дапамозе разважанняў, аналагічных тым, якія мы праводзілі вышэй пры даследаванні паслядоўнасці

$$p_4, p_8, p_{16}, p_{32}, \ldots .$$

Калі члены абмежаванай знізу лікавай паслядоўнасці абазначыць пунктамі лікавай прамой, то ўсе пункты размесцяцца правей пункта з абсцысай B (рыс 202).



Рыс. 202.



Рыс. 203.

Лікавая паслядоўнасць, абмежаваная адначасова і знізу, і зверху, называецца абмежаванай.

Іншымі словамі, *лікавая паслядоўнасць* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *называецца абмежаванай, калі існуюць лікі* A *і* B *такія, што пры любым* n

$$A < a_n < B \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Відавочна, усе пункты лікавай восі, адпавядаючыя членам такой лікавай паслядоўнасці, размешчаны ў адрэзку, канцы якога маюць абсцысы A і B (рыс. 203).

Прыклады.

1) $\sin 1,\ \sin 2,\ \sin 3,\ \ldots,\ \sin n,\ \ldots$.

Для гэтай паслядоўнасці $a_n = \sin n$. Пры любым n $-2 < \sin n < 2$. Таму дадзеная лікавая паслядоўнасць абмежаваная.

2) 1,4; 1,42; 1,414; 1,4142; ... .

Члены гэтай паслядоўнасці з'яўляюцца дзесятковымі набліжэннямі ліку $\sqrt{2}$. Відавочна, што $1 < a_n < 2$, так што гэта паслядоўнасць таксама абмежаваная.

3) Абмежаванымі будуць, відавочна, і разгледжаныя вышэй паслядоўнасці:

$$p_4,\ p_8,\ p_{16},\ p_{32},\ \ldots;$$
$$P_4,\ P_8,\ P_{16},\ P_{32},\ \ldots,$$

састаўленыя з перыметраў правільных 2^n-вугольнікаў, упісаных і апісаных каля некаторай акружнасці.

Практыкаванні

940. Высветліць, якія з дадзеных паслядоўнасцей абмежаваныя і якія не абмежаваныя:

а) $\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots$;

б) $\frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{6},\ \ldots,\ \frac{2n-1}{2n},\ \ldots$;

в) $2,\ -3,\ 4,\ -5,\ \ldots,\ (-1)^{n+1}\ (n+1),\ \ldots$;

г) $\frac{\sin 1}{1},\ -\frac{\sin 2}{2},\ \frac{\sin 3}{3},\ \ldots,\ \frac{(-1)^{n-1}\sin n}{n},\ \ldots$.

941. Прывядзіце прыклад паслядоўнасці, якая была б:

а) абмежаванай зверху, але не абмежаванай знізу;

б) абмежаванай знізу, але не абмежаванай зверху;

в) не абмежаванай ні зверху, ні знізу.

942*. Даказаць, што паслядоўнасць з агульным членам

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

з'яўляецца неабмежаванай.

§ 130. Прэдзел бесканечнай лікавай паслядоўнасці

Разгледзім бесканечную лікавую паслядоўнасць

$$1 + \frac{1}{1},\ 1 - \frac{1}{2},\ 1 + \frac{1}{3},\ 1 - \frac{1}{4},\ \ldots$$

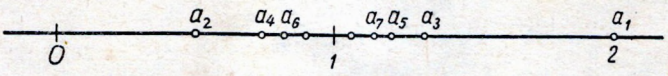
з агульным членам

$$a_n = 1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Будзем абазначаць члены гэтай паслядоўнасці пунктамі на лікавай прамой (рыс. 204). Зразумела, што ўсе паслядоўныя пункты з ростам n то злева, то справа ўсё бліжэй і бліжэй падыходзяць да пункта з абсцысай 1. Алгебраічна гэта азначае, што абсалютная велічыня рознасці $a_n - 1$ з ростам n становіцца ўсё менш і менш, неабмежавана набліжаючыся да нуля.

Сапраўды,

$$|a_n - 1| = \left|1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n} - 1\right| = \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \frac{1}{n}.$$



Рыс. 204.

Таму для ўсіх членаў, пачынаючы з 101-га, гэта абсалютная велічыня менш 0,01; для ўсіх членаў, пачынаючы з 1001-га, яна менш 0,001 і г. д. Наогул, які б малы дадатны лік ε мы ні выбіралі (напрыклад, $\varepsilon = 0{,}01$; 0,001), заўсёды можна знайсці нумар N такі, што для ўсіх $n > N$ будзе выконвацца няроўнасць

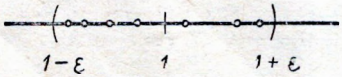
$$|a_n - 1| < \varepsilon.$$

Гэта няроўнасць эквівалентна двайной няроўнасці

$$-\varepsilon < a_n - 1 < \varepsilon,$$

з якой вынікае што

$$1 - \varepsilon < a_n < 1 + \varepsilon.$$



Рыс. 205.

Такім чынам, пры любым $\varepsilon > 0$ існуе такі нумар N, пачынаючы з якога ўсе члены нашай паслядоўнасці ляжаць у інтэрвале ад $1 - \varepsilon$ да $1 + \varepsilon$ (рыс. 205). У такіх выпадках гавораць, што лік 1 з'яўляецца *прэдзелам* лікавай паслядоўнасці.

Лік a называецца прэдзелам бесканечнай лікавай паслядоўнасці $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, калі для любога дадатнага ліку ε існуе нумар N такі, што ўсе члены паслядоўнасці, пачынаючы з a_{N+1}, пападаюць у інтэрвал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Іншымі словамі, *лік a называецца прэдзелам бесканечнай лікавай паслядоўнасці $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, калі для любога дадатнага ліку ε існуе нумар N такі, што для ўсіх $n > N$*

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Той факт, што a ёсць прэдзел лікавай паслядоўнасці $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, запісваецца наступным чынам:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a$$

(чытаецца: прэдзел* a_n пры n, імкнучымся да бесканечнасці, роўны a).

Рэзультат, атрыманы ў пачатку гэтага параграфа, мы можам запісаць цяпер у выглядзе

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right]=1.$$

§ 131. Прыклады

Разгледзім некалькі прыкладаў на вылічэнне прэдзелаў бесканечных паслядоўнасцей.

Прыклад 1. Даказаць, што прэдзел лікавай паслядоўнасці

$$1,\ \frac{4}{3},\ \frac{6}{4},\ \frac{8}{5},\ \ldots,\ \frac{2n}{n+1},\ \ldots$$

роўны 2:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2.$$

Маем:

$$|a_n-2|=\left|\frac{2n}{n+1}-2\right|=\left|\frac{2n-2n-2}{n+1}\right|=\left|\frac{-2}{n+1}\right|=\frac{2}{n+1}.$$

Адсюль відаць, што з ростам n абсалютная велічыня $|a_n-2|$ становіцца і застаецца як заўгодна малой.

Напрыклад, пры $n>20$ гэта абсалютная велічыня менш 0,1, пры $n>200$ яна менш 0,01 і г. д. Наогул, які б малы ні быў дадатны лік ε, заўсёды можна знайсці нумар N такі, што для ўсіх $n>N$ будзе выконвацца няроўнасць

$$|a_n-2|<\varepsilon.$$

На самай справе, $|a_n-2|=\frac{2}{n+1}$. Таму напісаную вышэй няроўнасць можна перапісаць у выглядзе

$$\frac{2}{n+1}<\varepsilon,$$

адкуль

$$n+1>\frac{2}{\varepsilon},\qquad n>-1+\frac{2}{\varepsilon}.$$

Калі, напрыклад, мы жадаем, каб $|a_n-2|$ было менш, чым $\varepsilon=0{,}1$, то n трэба выбіраць з умовы

$$n>-1+\frac{2}{0{,}1},$$

---

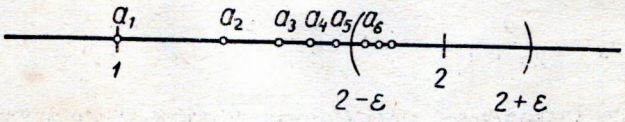
* lim — першыя тры літары лацінскага слова *limes*, што па-беларуску азначае: прэдзел, мяжа.

гэта значыць пачынаючы з $n = 20$. Пры $\varepsilon = 0{,}001$ мы атрымалі б

$$n > -1 + \frac{2}{0{,}001}.$$

Значыць, умова $|a_n - 2| < 0{,}001$ выконваецца для ўсіх n, пачынаючы з $n = 2000$ і г. д.

Калі б мы пачалі абазначаць члены разглядаемай лікавай паслядоўнасці пунктамі на лікавай прамой (рыс. 206), то заўважылі б, што з ростам n яны ўсё бліжэй і бліжэй злева падыходзяць да пункта з абсцысай 2. Для любога $\varepsilon > 0$ можна знайсці такі нумар N, пачынаючы з якога ўсе пункты будуць знаходзіцца ў інтэрвале $(2 - \varepsilon, 2)$. Але ў такім выпадку можна сказаць, што ўсе яны будуць знаходзіцца і ў інтэрвале $(2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon)$. Гэта служыць геаметрычнай ілюстрацыяй таго, што прэдзел дадзенай лікавай паслядоўнасці роўны 2.



Рыс. 206.

Прыклад 2. Даказаць, што

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

Доказ.

$$\left|\frac{\sin n}{n} - 0\right| = \frac{|\sin n|}{n} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Выраз $\frac{1}{n}$, а разам з ім і $\left|\frac{\sin n}{n} - 0\right|$, з ростам n прымае ўсё меншыя і меншыя значэнні. Таму, які б малы ні быў дадатны лік ε, можна знайсці такі нумар N, што для ўсіх $n > N$ будзе выконвацца няроўнасць

$$\left|\frac{\sin n}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

У прыватнасці, можна дабіцца, каб было

$$\left|\frac{\sin n}{n} - 0\right| < 0{,}01 \quad (\varepsilon = 0{,}01),$$

$$\left|\frac{\sin n}{n} - 0\right| < 0{,}001 \quad (\varepsilon = 0{,}001)$$

і г. д. Але ў такім выпадку

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

Практыкаванні

Зыходзячы з азначэння прэдзелу, даказаць наступныя суадносіны:

943. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n}{n+1}=3.$ **945.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos n}{n}=0.$

944. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-n^2}{1+n^2}=-1.$ **946.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n+\cos n}{n}=0.$

У практыкаваннях № 947 — 950 дадзены агульныя члены лікавых паслядоўнасцей. Для кожнай з гэтых паслядоўнасцей знайсці прэдзел і вызначыць нумар N такі, каб для ўсіх $n>N$ выконвалася няроўнасць $|a_n-a|<0{,}01$.

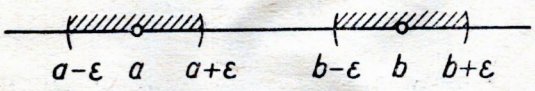
947. $a_n=\dfrac{1-n}{n+1}.$ **949.** $a_n=\dfrac{\cos n}{n}.$

948. $a_n=\dfrac{a}{2n+1}.$ **950.** $a_n=\dfrac{\sin n-\cos n}{n}.$

§ 132. Сыходныя і разыходныя лікавыя паслядоўнасці

Тэарэма. ***Лікавая паслядоўнасць не можа мець больш аднаго прэдзелу.***

Для доказу дапусцім адваротнае. Няхай некаторая лікавая паслядоўнасць a_1, a_2, a_3, ... мае некалькі прэдзелаў. Дапусцім, што a і b — два такія прэдзелы. Для пэўнасці будзем лічыць, што



Рыс. 207.

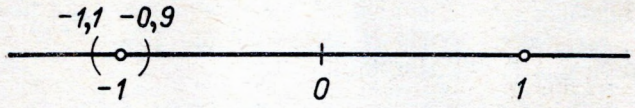
$a<b$. Выберам дадатны лік ε так, каб адрэзкі $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ і $(b-\varepsilon,\ b+\varepsilon)$, не перакрываліся адзін з другім* (рыс. 207). Тады ўсе лікі нашай паслядоўнасці, пачынаючы з некаторага, павінны знаходзіцца, з аднаго боку, у адрэзку $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$, а з другога — у адрэзку $(b-\varepsilon,\ b+\varepsilon)$. Але гэта немагчыма, паколькі гэтыя адрэзкі не перакрываюцца. Атрымана супярэчнасць; значыць, дапушчэнне аб існаванні двух розных прэдзелаў няправільнае.

Такім чынам, любая лікавая паслядоўнасць можа мець не больш аднаго прэдзелу. А ці кожная лікавая паслядоўнасць мае прэдзел? Каб высветліць гэта пытанне, разгледзім паслядоўнасць $-1,\ 1,-1,\ 1,-1,\ 1,\ldots$ з агульным членам

$$a_n=(-1)^n.$$

* У якасці такога ε можна, напрыклад, узяць $\varepsilon=\dfrac{b-a}{4}$.

Кожны яе член, які стаіць на няцотным месцы, абазначыцца на лікавай прамой пунктам з абсцысай — 1, а кожны член, які стаіць на цотным месцы, — пунктам з абсцысай 1. Ужо адсюль ясна, што калі толькі гэта паслядоўнасць мае прэдзел, то ён роўны або — 1, або 1. Няхай, напрыклад, прэдзел існуе і роўны — 1. Тады ўсе члены паслядоўнасці, пачынаючы з некаторага, павінны ўкладвацца, напрыклад, у інтэрвале $(-1 - 0{,}1;\ -1 + 0{,}1)$, або $(-1{,}1;\ -0{,}9)$, што адпавядае ліку $\varepsilon = 0{,}1$ (рыс. 208). Але гэта не так, паколькі члены, роўныя 1, не падаюць у гэты ін-



Рыс. 208.

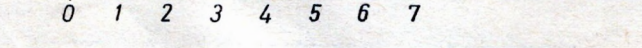
тэрвал. Аналагічна даказваецца, што і 1 не з'яўляецца прэдзелам разглядаемай паслядоўнасці.

Такім чынам, паслядоўнасць —1, 1, —1, 1, ... не мае прэдзелу.

Разгледзім яшчэ адзін прыклад — натуральны рад лікаў

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots .$$

Пункты лікавай прамой, адпавядаючыя членам паслядоўнасці (рыс. 209), не накопліваюцца ні ля якога пункта. Які б пункт на лікавай прамой мы ні ўзялі, пункты, адпавядаючыя натуральнаму



Рыс. 209.

раду лікаў, рана ці позна «перакрочаць» цераз яго і пойдуць як заўгодна далёка ўправа. Значыць, натуральны рад лікаў таксама не мае прэдзелу.

Лікавая паслядоўнасць, маючая прэдзел, называецца сыходнай, а не маючая прэдзелу — разыходнай.

Напрыклад, паслядоўнасці

$$1,\ \frac{4}{3},\ \frac{6}{4},\ \frac{8}{5},\ \ldots,\ \frac{2n}{n+1},\ \ldots$$

і

$$\frac{\sin 1}{1},\ \frac{\sin 2}{2},\ \frac{\sin 3}{3},\ \ldots,\ \frac{\sin n}{n},\ \ldots$$

(гл. прыклады 1 і 2, § 131) з'яўляюцца сыходнымі, а паслядоўнасці

$$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \ldots,$$

і

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$$

— разыходнымі.

Практыкаванне

951. Якія з дадзеных паслядоўнасцей з'яўляюцца сыходным і якія разыходнымі:

а) $2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots$;

б) $1, 3, 5, \ldots, 2n-1, \ldots$;

в) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{(-1)^n}{2n}, \ldots$;

г) $0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, \ldots$;

д) $\frac{1}{6}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{9}, \ldots, \frac{(-1)^{n-1}}{5+n}, \ldots$?

§ 133. Манатонныя і абмежаваныя паслядоўнасці

У папярэднім параграфе мы пераканаліся, што не ўсякая лікавая паслядоўнасць мае прэдзел. Цяпер узнікае пытанне: як жа вырашыць, ці з'яўляецца тая або іншая паслядоўнасць сыходнай? Поўнае рашэнне гэтай задачы выходзіць далёка за межы школьнай праграмы. Аднак з адным даволі шырокім класам сыходных лікавых паслядоўнасцей мы пазнаёмімся ў гэтым параграфе. Справядлівы наступныя тэарэмы, якія мы даём без доказу.

Тэарэма 1. ***Усякая манатонна ўзрастаючая (неўбываючая) і абмежаваная зверху лікавая паслядоўнасць сыходзіцца.***

Тэарэма 2. ***Усякая манатонна ўбываючая (неўзрастаючая) і абмежаваная знізу лікавая паслядоўнасць сыходзіцца.***

Растлумачым гэтыя тэарэмы на двух прыватных прыкладах.

Прыклад 1. Паслядоўнасць

$$1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ \ldots$$

састаўлена з дзесятковых набліжэнняў ліку $\sqrt{2}$ з недахопам. Гэта паслядоўнасць з'яўляецца манатонна ўзрастаючай (дакладней, манатонна неўбываючай), паколькі кожны яе член, пачынаючы з другога, атрымліваецца з папярэдняга шляхам прыпісвання адпаведнага дзесятковага знака. Разам з тым гэта паслядоўнасць абмежавана зверху, паколькі любы яе член менш двух. Значыць, па тэарэме 1 дадзеная паслядоўнасць мае прэдзел. (Гэтым прэдзелам з'яўляецца лік $\sqrt{2}$.)

Прыклад 2. Паслядоўнасць

$$p_4,\ p_8,\ p_{16},\ \ldots$$

перыметраў правільных 4-х, 8-мі, 16-вугольнікаў і г. д., упісаных у некаторую акружнасць, з'яўляецца манатонна ўзрастаючай

(гл. § 128) і абмежаванай зверху (гл. § 129). Значыць, па тэарэме 1 існуе прэдзел гэтай паслядоўнасці. (Да гэтага прэдзелу мы яшчэ вернемся ў наступных параграфах.)

Да аналагічнага рэзультату можна прыйсці, разглядаючы паслядоўнасць

$$P_4,\ P_8,\ P_{16},\ \ldots$$

перыметраў правільных 4-х, 8-мі, 16-вугольнікаў і г. д., апісаных каля некаторай акружнасці. Для гэтага прыйдзецца выкарыстаць тэарэму 2.

У заключэнне адзначым, што часам дадзеныя дзве тэарэмы аб'ядноўваюць у адну:

Любая манатонная і абмежаваная лікавая паслядоўнасць мае прэдзел.

Практыкаванні

952. Даказаць, што паслядоўнасць

$$2,\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{3},\ \ldots,\ \frac{n+1}{n},\ \ldots$$

манатонна ўбывае і абмежавана знізу. Паказаць, што прэдзелам гэтай паслядоўнасці з'яўляецца лік 1.

953. Даказаць, што паслядоўнасць

$$s_4,\ s_8,\ s_{16},\ s_{32},\ \ldots$$

плошчаў правільных 4-х, 8-мі, 16-ці, 32-вугольнікаў і г. д., упісаных у адну і тую ж акружнасць, з'яўляецца манатонна ўзрастаючай і абмежаванай.

§ 134. Лік *e*

Разгледзім бесканечную лікавую паслядоўнасць

$$\left(1+\frac{1}{1}\right),\ \left(1+\frac{1}{2}\right)^2,\ \left(1+\frac{1}{3}\right)^3,\ \ldots \qquad (1)$$

з агульным членам

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Пакажам, што гэта паслядоўнасць з'яўляецца манатонна ўзрастаючай і абмежаванай.

1) Прыменім тэарэму аб сярэднім арыфметычным і сярэднім геаметрычным да $n+1$ ліку:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right),\ \left(1+\frac{1}{n}\right),\ \ldots,\left(1+\frac{1}{n}\right),\ 1,$$

атрымаем

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)n+1}{n+1}>\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1},$$

або

$$\frac{n+2}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Узводзячы абедзве часткі няроўнасці ў $(n+1)$-ю ступень, атрымліваем

$$\left(1+\frac{1}{1+n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

або

$$a_{n+1} > a_n.$$

Тым самым даказана, што разглядаемая паслядоўнасць з'яўляецца манатонна ўзрастаючай.

2) Цяпер дакажам, што наша паслядоўнасць з'яўляецца абмежаванай. Для гэтага разгледзім яшчэ адну паслядоўнасць:

$$\left(1-\frac{1}{1}\right),\ \left(1-\frac{1}{2}\right)^2,\ \left(1-\frac{1}{3}\right)^3,\ \ldots \qquad (2)$$

з агульным членам

$$b_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n.$$

Аналагічна таму, як мы даказалі манатоннасць паслядоўнасці (1), можа быць даказана і манатоннасць паслядоўнасці (2):

$$b_{n+1} > b_n.$$

Далей,

$$a_n b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n < 1.$$

Таму для ўсіх $n > 1$

$$a_n < \frac{1}{b_n}.$$

Паколькі паслядоўнасць (2) манатонна ўзрастае, усе яе члены, пачынаючы з трэцяга, больш другога члена. Таму для ўсіх $n \geqslant 3$

$$b_n > b_2 = \left(1-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Значыць, для ўсіх $n \geqslant 3$

$$a_n < \frac{1}{b_2} < 4.$$

Гэта няроўнасць правільная і для $n = 1$, і для $n = 2$, так што для ўсіх натуральных n

$$0 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4.$$

Тым самым даказана абмежаванасць паслядоўнасці (1).

Цяпер на падставе тэарэмы аб прэдзеле манатоннай і абмежаванай паслядоўнасці можна зрабіць вывад, што прэдзел паслядоўнасці (1) існуе. Гэты прэдзел прынята абазначаць літарай e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \qquad (3)$$

Падлічана, што $e = 2{,}7182818284\ \ldots$.

Часам для запамінання таго ці іншага ліку лічбы гэтага ліку звязваюць з якой-небудзь знамянальнай датай. Лёгка, напрыклад, запомніць першыя дзевяць

знакаў ліку e пасля коскі, калі звярнуць увагу на тое, што 1828 — гэта год нараджэння Льва Талстога.

Лік e з'яўляецца ірацыянальным. Больш таго, як паказаў французскі матэматык Эрміт (1822 — 1901), гэты лік не можа быць коранем ніякага алгебраічнага ўраўнення з цэлымі каэфіцыентамі. Такія ірацыянальныя лікі называюцца *трансцэндэнтнымі* (гл. раздзел II).

Прэдзел (3) з'яўляецца адным з тых выдатных прэдзелаў, якія ляжаць у аснове многіх матэматычных даследаванняў. Лік e адыгрывае асобую ролю ў матэматыцы. Аднак, калі б мы захацелі пераканацца ў гэтым, нам давялося б заняцца ўжо вышэйшай матэматыкай.

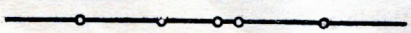
§ 135. Пераменныя велічыні і іх прэдзелы

Агульны член любой паслядоўнасці можна разглядаць як пераменную велічыню. Напрыклад, паслядоўнасць

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

мае агульны член $a_n = \frac{1}{n}$. Пры розных значэннях n велічыня a_n прымае розныя лікавыя значэнні і таму з'яўляецца *пераменнай велічынёй*.

Такім чынам, з кожнай лікавай паслядоўнасцю можна звязаць некаторую пераменную велічыню. Адваротнае сцверджанне, наогул кажучы, няправільнае. Напрыклад, з пераменнай велічынёй t, якая ўяўляе сабой час, нельга звязаць ніякую лікавую паслядоўнасць. Члены лікавай паслядоўнасці змяняюцца скачкамі. Калі мы будзем абазначаць члены паслядоўнасці пунктамі лікавай прамой, то ўсю лікавую прамую пры гэтым мы не запоўнім (рыс. 210). А вось з часам справа абстаіць інакш, час цячэ бесперапынна. Таму ўсе моманты часу нельга занумараваць як члены некаторай лікавай паслядоўнасці.



Рыс. 210.

У гэтым раздзеле мы будзем вывучаць толькі такія пераменныя велічыні, якія можна разглядаць як агульныя члены некаторых лікавых паслядоўнасцей. Такія пераменныя велічыні мы будзем абазначаць сімваламі a_n, b_n, c_n і г. д.

Прэдзелам пераменнай велічыні a_n называецца прэдзел лікавай паслядоўнасці, для якой a_n ёсць агульны член.

Напрыклад, прэдзел пераменнай велічыні

$$a_n = \frac{1}{n}$$

ёсць, па азначэнню, прэдзел паслядоўнасці

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots .$$

Відавочна, што прэдзел пераменнай велічыні можна вызначыць і такім чынам:

Лік a называецца прэдзелам пераменнай велічыні a_n, калі для любога дадатнага ліку ε можна знайсці такі нумар, пачынаючы з якога будзе выконвацца няроўнасць:

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Таксама як і лікавыя паслядоўнасці, пераменныя велічыні могуць мець, а могуць і не мець прэдзелу. Напрыклад, пераменная велічыня $a_n = \frac{\sin n}{n}$ (гл. § 131, прыклад 2) мае прэдзел, а пераменная велічыня $a_n = (-1)^n$ (гл. § 132) не мае прэдзелу.

З пераменнымі велічынямі можна рабіць тыя ж самыя дзеянні, што і з пастаяннымі велічынямі (гэта значыць лікамі). Напрыклад, памножыўшы пераменную велічыню $a_n = \frac{1}{n}$ на 3, атрымаем пераменную велічыню $b_n = \frac{3}{n}$. Гэтай пераменнай велічыні адпавядае паслядоўнасць

$$3, \frac{3}{2}, \frac{3}{3}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \ldots, \frac{3}{n}, \ldots.$$

Пры складанні пераменных велічынь $a_n = -\frac{1}{n+1}$ і $b_n = \frac{1}{n}$ атрымліваецца пераменная велічыня

$$c_n = a_n + b_n = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Ёй адпавядае лікавая паслядоўнасць

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \ldots, \frac{1}{n(n+1)}, \ldots.$$

§ 136. Асноўныя тэарэмы аб прэдзелах

Як было адзначана ў папярэднім параграфе, не ўсякая пераменная велічыня a_n мае прэдзел пры $n \to \infty$. У гэтым параграфе мы будзем разглядаць толькі такія пераменныя велічыні, прэдзелы якіх існуюць. Для такіх велічынь мы без доказу назавём некалькі важных тэарэм.

Тэарэма 1. ***Прэдзел пастаяннай велічыні роўны самой гэтай велічыні:***

$$\lim_{n \to \infty} c = c.$$

Пад «пастаяннай» велічынёй тут падразумяваецца «пераменная» велічыня a_n, якая пры ўсіх n прымае адно і тое ж значэнне, роўнае c. Такой «пераменнай» велічыні адпавядае паслядоўнасць

$$c, c, c, \ldots, c, \ldots.$$

Тэарэма 2. ***Пастаянны множнік можна выносіць за знак прэдзелу:***

$$\lim_{n\to\infty}(ka_n) = k\cdot\lim_{n\to\infty}a_n.$$

Прыклад. У § 130 было даказана, што

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right]=1.$$

Таму

$$\lim_{n\to\infty}\left\{5\left[1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right]\right\}=5\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right]=5\cdot 1=5.$$

Тэарэма 3. ***Прэдзел сумы дзвюх пераменных велічынь роўны суме прэдзелаў гэтых велічынь:***

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n.$$

Прыклад. У § 130 і 131 было даказана, што

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right]=1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0.$$

Таму

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\frac{\sin n}{n}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right]+$$

$$+\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=1+0=1.$$

Дадзеная тэарэма правільная не толькі для двух, але і для адвольнага фіксаванага ліку складаемых. Напрыклад,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n+c_n+d_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n+\lim_{n\to\infty}c_n+\lim_{n\to\infty}d_n.$$

Тэарэма 4. ***Прэдзел здабытку дзвюх пераменных велічынь роўны здабытку прэдзелаў гэтых велічынь:***

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n.$$

Прыклад.

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\sin n}{n}\left[1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right]\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right]=0\cdot 1=0.$$

І гэта тэарэма правільная не толькі для двух, але і для адвольнага фіксаванага ліку сумножнікаў. Напрыклад,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n\cdot c_n\cdot d_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n\cdot\lim_{n\to\infty}c_n\cdot\lim_{n\to\infty}d_n.$$

Тэарэма 5. ***Прэдзел дробу роўны дзелі ад дзялення прэдзелу лічніка на прэдзел назоўніка, калі толькі прэдзел назоўніка адрозны ад нуля:***

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}\qquad(\lim_{n\to\infty}b_n\neq 0).$$

Прыклад. Няхай

$$a_n=\frac{\sin n}{n},\quad b_n=1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Тады

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\frac{0}{1}=0.$$

Заўважым, што пісаць

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}$$

у дадзеным выпадку нельга, паколькі $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

Трэба адзначыць, што хаця доказ дадзеных тэарэм выходзіць за межы школьнай праграмы, некаторыя вучні змогуць даказаць іх. Таму тым вучням, якія праяўляюць да матэматыкі асаблівы інтарэс, мы прапануем паспрабаваць даказаць гэтыя тэарэмы. А тэарэму 1 павінны даказаць усе.

Заўвага. Неабходна напомніць пагадненне, якое мы прынялі ў пачатку дадзенага параграфа. Мы ўмовіліся лічыць, што ўсе разглядаемыя намі пераменныя велічыні маюць прэдзелы. Калі ж гэта не так, то дадзеныя вышэй тэарэмы трацяць сэнс. Напрыклад, нельга пісаць (гл. тэарэму 2), што

$$\lim_{n\to\infty}5n^2=5\lim_{n\to\infty}n^2,$$

паколькі прэдзел $\lim\limits_{n\to\infty}n^2$, відавочна, не існуе.

У заключэнне мы разгледзім прыклад на вылічэнне прэдзелу пераменнай велічыні з выкарыстаннем дадзеных вышэй тэарэм. Няхай патрабуецца знайсці

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n-1}{3n^2-n+5}.$$

Падзелім лічнік і назоўнік дадзенага дробу на n^2. У рэзультаце атрымаем

$$\frac{n^2+2n-1}{3n^2-n+5}=\frac{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{3-\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}.$$

Цяпер, выкарыстоўваючы прыведзеныя вышэй тэарэмы, атрымаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n-1}{3n^2-n+5}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}\right)}=$$

$$=\frac{1+2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{3-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+5\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=\frac{1+2\cdot 0-0}{3-0+5\cdot 0}=\frac{1}{3}.$$

Тут мы выкарысталі відавочныя роўнасці

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0.$$

Практыкаванні

Знайсці прэдзелы.

954. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-n^2+3}{2n^2-6n+5}$.

955. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-n}{n^2-5}$.

956. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-7}{n^2+7n-9}$.

957. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(1-n)}{(n+1)(n-2)}$.

958. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1\,000\,000}{n^2+1}$.

959. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1n^2+b_1n+c_1}{a_2n^2+b_2n+c_2}$.

§ 137. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ пры $|q|<1$

У гэтым параграфе мы дакажам, што калі $|q|<1$, то прэдзел $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ існуе і роўны нулю. Нам давядзецца разгледзець асобна два выпадкі: $q>0$ і $q<0$.

Выпадак 1. $q>0$. Перш за ўсё заўважым, што $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ адпавядае лікавай паслядоўнасці

$$q,\ q^2,\ q^3,\ \ldots,\ q^n,\ \ldots. \qquad (1)$$

Гэта паслядоўнасць пры $0<q<1$ будзе манатонна ўбываючай ($q^{n+1}<q^n$) і абмежаванай ($0<q^n<1$). Таму яна мае прэдзел. Абазначым гэты прэдзел літарай c і дакажам, што $c=0$.

Калі з паслядоўнасці (1) выкінуць першы член, то атрымаецца паслядоўнасць

$$q^2,\ q^3,\ q^4,\ \ldots,\ q^{n+1},\ \ldots, \qquad (2)$$

якая, відавочна, мае той жа самы прэдзел c, што і паслядоўнасць (1). Агульны член паслядоўнасці (1) ёсць $a_n = q^n$, а паслядоўнасці (2) $b_n = q^{n+1}$.

Маем:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = c,$$

$$\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = c.$$

Але $q^{n+1} = q \cdot q^n$. Таму

$$c = \lim_{n\to\infty} q^{n+1} = \lim_{n\to\infty} (q \cdot q^n) = q \lim_{n\to\infty} q^n = q\,c.$$

Такім чынам, $c = qc$, адкуль $c = 0$, паколькі $q \neq 1$. Значыць, пры $0 < q < 1$ прэдзел $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ існуе і роўны нулю.

Выпадак 2. $-1 < q < 0$. Дакажам, што і ў гэтым выпадку

$$\lim_{n\to\infty} q^n$$

існуе і роўны 0. Маем:

$$|q^n - 0| = |q^n| = |q|^n.$$

Паколькі $|q| < 1$, то $|q|^n$ пры ўзрастанні n імкнецца да нуля (выпадак 1).

Значыць, з ростам n выраз $|q^n|$ становіцца і застаецца менш любога наперад зададзенага дадатнага ліку. Таму, які б ні быў дадатны лік ε, можна знайсці такі нумар, пачынаючы з якога будзе выконвацца няроўнасць

$$|q^n - 0| < \varepsilon.$$

Але гэта і азначае, што

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

Практыкаванні

960. Што вы можаце сказаць аб прэдзеле $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$, калі:

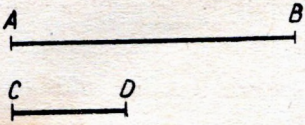
а) $|q| = 1$; б) $|q| > 1$?

961. Ці існуе $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ пры:

а) $q = \frac{\pi}{3}$; б) $q = -\frac{\pi}{4}$; в) $q = -2$; г) $q = \frac{a+1}{a-1}$?

§ 138. Што такое даўжыня акружнасці

У раздзеле II мы гаварылі аб тым, што такое даўжыня прамалінейнага адрэзка. Каб вымераць прамалінейны адрэзак AB (рыс. 211), трэба выбраць адзінку вымярэння (напрыклад, адрэзак CD) і параўнаць AB з гэтай адзінкай вымярэння. *Даўжыня*



Рыс. 211.

адрэзка AB ёсць лік, які паказвае, колькі разоў адзінка вымярэння ўкладваецца ў гэтым адрэзку. А што разумець пад даўжынёй акружнасці? Акружнасць жакрывая лінія, і адкладваць на ёй адрэзак *CD* нельга. Такім чынам, мы сустракаемся з неабходнасцю вызначыць, што такое даўжыня акружнасці.

Няхай

$$p_4,\ p_8,\ p_{16},\ \ldots,\ p_{2^{n+1}},\ \ldots \qquad (1)$$

— паслядоўнасць перыметраў правільных 4-х, 8-мі, 16-вугольнікаў і г. д., упісаных у акружнасць радыуса r. Як мы ўжо гаварылі раней (§ 133), гэта паслядоўнасць манатонна ўзрастае і абмежавана. Таму існуе прэдзел

$$p = \lim_{n\to\infty} p_{2^{n+1}}.$$

Гэты прэдзел мы і назавём *даўжынёй акружнасці* радыуса r.

Упішам цяпер у акружнасць радыуса r не 4-х, 8-мі, 16-вугольнікі і г. д., а, напрыклад, правільныя 3-х, 6-ці, 12-вугольнікі і г. д., перыметры якіх утвараюць паслядоўнасць

$$p_3,\ p_6,\ p_{12},\ \ldots,\ p_{3\cdot 2^{n-1}},\ \ldots\ . \qquad (2)$$

Гэта паслядоўнасць таксама манатонна ўзрастае, абмежавана і, значыць, мае прэдзел

$$p' = \lim_{n\to\infty} p_{3\cdot 2^{n-1}}.$$

Гэты прэдзел p', як і прэдзел p, таксама натуральна назваць даўжынёй акружнасці. Але ўзнікае пытанне: ці роўныя паміж сабой лікі p і p'? Калі б гэтыя лікі аказаліся рознымі, то прынятае намі азначэнне даўжыні акружнасці было б няўдачным.

Можна даказаць, што лікі p і p' роўныя паміж сабой. Наогул, як бы мы ні ўпісвалі ў акружнасць правільныя многавугольнікі, атрымліваючы кожны наступны шляхам падваення ліку старон папярэдняга, паслядоўнасць перыметраў гэтых многавугольнікаў заўсёды будзе сыходзіцца да аднаго і таго ж ліку, які прымаецца за даўжыню акружнасці. Больш таго, калі кожны наступны многавугольнік мы будзем атрымліваць не абавязкова шляхам падваення ліку старон папярэдняга, а якім-небудзь іншым спосабам (напрыклад, упісваць правільныя 3-х, 4-х, 5-ці, 6-вугольнікі і г. д.), то ўсё роўна паслядоўнасць перыметраў гэтых многавугольнікаў будзе сыходзіцца і прытым да таго ж самага ліку p, што і паслядоўнасць (1).

Доказ гэтых сцверджанняў выходзіць далёка за межы школьнай праграмы і таму тут не даецца.

Такім чынам, мы прымаем наступнае азначэнне даўжыні акружнасці:

даўжыня p акружнасці радыуса r ёсць прэдзел паслядоўнасці

$$p_3,\ p_4,\ p_5,\ p_6,\ \ldots,\ p_n,\ \ldots$$

перыметраў правільных 4-х, 8-мі, 16-вугольнікаў і г. д., упісаных у гэту акружнасць:

$$p = \lim_{n\to\infty} p_n.$$

Практыкаванне

962. Цяпер мы ведаем, як вызначаюцца даўжыні прамавугольных адрэзкаў і акружнасцей. А як бы вы вызначылі даўжыню адвольнай крывой (гл., напрыклад, рыс. 212)?



Рыс. 212.

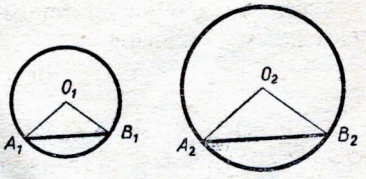
§ 139. Формула для знаходжання даўжыні акружнасці

Лема. ***Адносіна даўжыні акружнасці да яе дыяметра пастаянная для ўсіх акружнасцей.***

Дапусцім, што A_1B_1 і A_2B_2 — стораны правільных n-вугольнікаў, упісаных у акружнасці O_1 і O_2 адпаведна (рыс. 213). Тады трохвугольнікі $O_1A_1B_1$ і $O_2A_2B_2$, як трохвугольнікі з адпаведна роўнымі вугламі, будуць падобныя, таму

$$\frac{A_1B_1}{O_1A_1} = \frac{A_2B_2}{O_2A_2}.$$

Памнажаючы абедзве часткі гэтай роўнасці на $\frac{n}{2}$, атрымаем



Рыс. 213.

$$\frac{n\cdot A_1B_1}{2\cdot O_1A_1} = \frac{n\cdot A_2B_2}{2\cdot O_2A_2}.$$

Але $n\cdot A_1B_1 = p_n'$, $n\,A_2B_2 = p_n''$, дзе p_n' і p_n'' — перыметры правільных n-вугольнікаў, упісаных у акружнасці O_1 і O_2 адпаведна. Значыць,

$$\frac{p_n'}{2r_1} = \frac{p_n''}{2r_2}, \qquad (1)$$

дзе r_1 і r_2 — радыусы акружнасцей O_1 і O_2 адпаведна. Паколькі існуюць прэдзелы $p' = \lim\limits_{n\to\infty} p_n'$ і $p'' = \lim\limits_{n\to\infty} p_n''$, то павінны існаваць і прэдзелы

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_n'}{2r_1} = \frac{1}{2r_1}\cdot\lim_{n\to\infty} p_n' = \frac{p'}{2r_1};\quad \lim_{n\to\infty}\frac{p_n''}{2r_2} = \frac{1}{2r_2}\cdot\lim_{n\to\infty} p_n'' = \frac{p''}{2r_2}.$$

З прычыны (1) гэтыя прэдзелы павінны быць роўнымі. Таму

$$\frac{p'}{2r_1} = \frac{p''}{2r_2}.$$

Гэта роўнасць якраз і азначае, што адносіна даўжыні акружнасці да яе дыяметра адна і тая ж для ўсіх акружнасцей.

Адносіну даўжыні акружнасці да яе дыяметра прынята абазначаць грэчаскай літарай π («пі»). Падлічана, што $\pi = 3{,}141592\ldots$. Для практычных патрэб дастаткова запомніць толькі тры-чатыры лічбы пасля коскі.

Такім чынам, для акружнасці радыуса r

$$\frac{p}{2r} = \pi,$$

адкуль

$$p = 2\pi r.$$

Даўжыня акружнасці роўна здабытку яе дыяметра на лік π.

У розныя часы людзі карысталіся рознымі набліжэннямі ліку π. У старажытным Егіпце, напрыклад, π лічылі роўным 3. Адзін з выдатнейшых матэматыкаў старажытнай Грэцыі Архімед (III ст. да н. э.) знайшоў даволі дакладнае набліжэнне для π: $3\frac{1}{7}$. У XVI стагоддзі было атрымана набліжанае значэнне π з 35 дзесятковымі знакамі, у XIX — з 527 дзесятковымі знакамі і г. д. Найбольшы лік правільных дзесятковых знакаў ліку π (10 000) быў атрыманы пры дапамозе лічыльнай машыны ў 1958 годзе.

Швейцарскі матэматык Ламберт (1728 — 1777) даказаў, што лік π з'яўляецца ірацыянальным. Нямецкі вучоны Ліндэман (1852 — 1939) узмацніў гэты рэзультат, даказаўшы, што лік π не можа быць коранем ніякага алгебраічнага ўраўнення з цэлымі каэфіцыентамі. Такія ірацыянальныя лікі, як вядома, называюцца *трансцэндэнтнымі*.

§ 140. Знаходжанне набліжаных значэнняў ліку π

Для знаходжання набліжаных значэнняў ліку π запішам гэты лік у выглядзе адносіны $\frac{p}{2 \cdot 1}$ даўжыні акружнасці радыуса 1 да дыяметра, гэта значыць як палавіну даўжыні акружнасці радыуса 1. Калі замест палавіны даўжыні такой акружнасці ўзяць палавіну перыметра правільнага n-вугольніка, упісанага ў яе, то замест дакладнага значэння π атрымаецца яго набліжанае значэнне. З ростам n гэта набліжанае значэнне павінна імкнуцца да дакладнага значэння. Значыць,

$$\pi \approx \frac{p_n}{2},$$

дзе p_n — перыметр правільнага n-вугольніка, упісанага ў акружнасць радыуса 1. Але $p_n = n \cdot a_n$, дзе a_n — старана правільнага n-вугольніка. Таму

$$\pi \approx \frac{n \cdot a_n}{2}. \qquad (1)$$

Цяпер скарыстаем вядомую з геаметрыі формулу падваення. Згодна з гэтай формулай стораны a_n і a_{2n} правільных n- і $2n$-вугольнікаў, упісаных у акружнасць радыуса r, звязаны суадносінай

$$a_{2n}^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}}.$$

Пры $r = 1$ гэта суадносіна прымае выгляд

$$a_{2n}^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{a_n^2}{4}}. \qquad (2)$$

Успомнім яшчэ, што старана a_6 правільнага шасцівугольніка, упісанага ў акружнасць, роўна радыусу гэтай акружнасці. Таму па формуле (2) знойдзем

$$a_{12}^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = 2 - \sqrt{3},$$

адкуль

$$a_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} \approx 0{,}51764.$$

Затым па формуле (2) знойдзем a_{24}:

$$a_{24}^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{a_{12}^2}{4}} = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = 2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

Адсюль $a_{24} \approx 0{,}26104$. Затым па формуле (2) можна знайсці a_{48}, a_{96} і г. д. Пасля гэтага складзём табліцу набліжаных значэнняў a_n і π:

n	a_n	$\pi \approx \frac{n \cdot a_n}{2}$
6	1,00000	3,000
12	0,51764	3,106
24	0,26104	3,132
48	0,13080	3,139
96	0,06542	3,140

З гэтай табліцы відаць, што ўжо пры $n = 96$ атрымліваюцца два правільныя дзесятковыя знакі ліку π.

§ 141. Плошча круга

Няхай s_4, s_8, s_{16}, ..., $s_{2^{n+1}}$, ... — паслядоўнасць плошчаў правільных 4-х, 8-мі, 16-вугольнікаў і г. д., упісаных у акружнасць радыуса r.

Лёгка паказаць, што паслядоўнасць гэта манатонна ўзрастае, абмежавана і, значыць, мае прэдзел

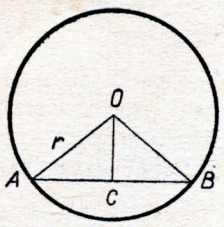
$$s = \lim_{n \to \infty} s_{2^{n+1}}.$$

Можна даказаць, што такі ж прэдзел мае паслядоўнасць

$$s_3, s_4, s_5, \ldots, s_n, \ldots$$

плошчаў правільных 3-х, 4-х, 5-вугольнікаў і г. д., упісаных у тую ж самую акружнасць. Гэты прэдзел, па азначэнню і прымаецца за плошчу круга радыуса r.

Цяпер прывядзём формулу для знаходжання плошчы круга па яго радыусу r. Няхай AB — старана правільнага n-вугольніка (рыс. 214), упісанага ў акружнасць радыуса r, p_n — перыметр гэтага многавугольніка, s_n — яго плошча. Маем:



Рыс. 214.

$$s_n = n \cdot s_{\triangle AOB} = n \cdot \frac{1}{2} AB \cdot OC,$$

але $n \cdot AB = p_n$. Таму

$$s_n = \frac{1}{2} p_n \cdot OC. \qquad (1)$$

Пакажам, што пры $n \to \infty$ OC неабмежавана набліжаецца да r.

Сапраўды (гл. рыс. 214),

$$r - OC = OA - OC.$$

З трохвугольніка AOC атрымліваем

$$0 < OA - OC < AC = \frac{1}{2} AB$$

(рознасць дзвюх старон трохвугольніка менш трэцяй стараны). Таму $r - OC < \frac{1}{2} AB$. Але $AB = \frac{p_n}{n}$, $p_n < 2\pi r$. Значыць, $0 < r - OC < \frac{1}{2} \cdot 2\pi \frac{r}{n} = \frac{\pi r}{n}$. Пры ўзрастанні n дроб $\frac{\pi r}{n}$ становіцца як заўгодна малым. Таму $|OC - r|$ пры $n \to \infty$ становіцца і застаецца менш любога наперад зададзенага дадатнага ліку ε:

$$|OC - r| < \varepsilon.$$

А гэта і азначае, што прэдзел OC пры $n \to \infty$ роўны r. Цяпер з роўнасці (1) атрымліваем

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2} p_n \cdot OC \right) = \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} (p_n \cdot OC) =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} p_n \cdot \lim_{n \to \infty} OC = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r = \pi r^2.$$

Такім чынам,

$$s = \pi r^2.$$

Плошча круга радыуса r роўна здабытку ліку π на квадрат радыуса гэтага круга.

Практыкаванне

963. Якое азначэнне вы прапанавалі б для плошчы, абмежаванай адвольнай замкнёнай лініяй (гл., напрыклад, рыс. 215)?

§ 142. Арыфметычная прагрэсія

Лікавая паслядоўнасць, кожны член якой, пачынаючы з другога, роўны папярэдняму, складзенаму з адным і тым жа для дадзенай паслядоўнасці лікам, называецца арыфметычнай прагрэсіяй.

Прыкладам арыфметычнай прагрэсіі з'яўляецца натуральны рад лікаў

$$1, 2, 3, \ldots .$$

Кожны яго лік, пачынаючы з другога, роўны папярэдняму, складзенаму з адзінкай. Другім прыкладам арыфметычнай прагрэсіі можа служыць паслядоўнасць

$$3;\ 1{,}5;\ 0;\ -1{,}5;\ -3;\ \ldots .$$



Рыс. 215.

Кожны член гэтай паслядоўнасці, пачынаючы з другога, роўны папярэдняму, складзенаму з лікам $-1{,}5$.

Дадзенае вышэй азначэнне арыфметычнай прагрэсіі эквівалентна, відавочна, такому азначэнню: *лікавая паслядоўнасць* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *называецца арыфметычнай прагрэсіяй, калі для любога* n $a_{n+1} = a_n + d$, *дзе* d — *некаторы пастаянны для дадзенай паслядоўнасці лік.*

Гэты лік d называецца *рознасцю* прагрэсіі.

Напрыклад, для натуральнага рада лікаў d роўна 1; для арыфметычнай прагрэсіі $3;\ 1{,}5;\ 0;\ -1{,}5;\ -3;\ \ldots$ рознасць d роўна $-1{,}5$.

Няхай a_1 — першы член арыфметычнай прагрэсіі, а d — яе рознасць.

Тады, па азначэнню арыфметычнай прагрэсіі,

$$a_2 = a_1 + d,$$
$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,$$
$$a_4 = a_3 + d = (a + 2d) + d = a_1 + 3d \text{ і г. д.}$$

Відавочна, пры любым $n > 1$

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)\,d.} \qquad (1)$$

Да формулы (1) можна прыйсці другім шляхам, які, дарэчы, з'яўляецца і больш строгім. Па азначэнню арыфметычнай прагрэсіі

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d,\\ a_3 &= a_2 + d,\\ a_4 &= a_3 + d,\\ &\ldots\ldots\\ a_{n-1} &= a_{n-2} + d,\\ a_n &= a_{n-1} + d. \end{aligned}$$

Складваючы пачленна ўсе гэтыя суадносіны, атрымліваем

$$(a_2+a_3+a_4+\ldots+a_{n-1})+a_n=a_1+(a_2+a_3+\ldots+a_{n-2}+a_{n-1})+$$
$$+(n-1)\,d,$$

адкуль і вынікае формула (1).

Формула (1) дазваляе знайсці любы член арыфметычнай прагрэсіі, калі вядомы яе першы член і рознасць. Таму яна называецца *формулай агульнага члена арыфметычнай прагрэсіі*. Напрыклад, для арыфметычнай прагрэсіі

$$-10;\ -9{,}5;\ -9;\ \ldots$$
$$a_1=-10;\ d=0{,}5.$$

Таму

$$a_{21}=a_1+20d=-10+10=0;$$
$$a_{100}=a_1+99d=-10+49{,}5=39{,}5\ \text{і г. д.}$$

Практыкаванні

964. Знайсці формулу агульнага члена арыфметычнай прагрэсіі, для якой:

а) $a_1=5,\quad a_2=-5;$

б) $a_1=-3,\quad a_2=0;$

в) $a_1=6,\quad a_{10}=33;$

г) $a_4=-4,\quad a_{17}=-17;$

д) $a_{10}=0,\quad a_{40}=-30.$

965. Калі да членаў адной арыфметычнай прагрэсіі дадаць адпаведныя (па нумару займаемага месца) члены другой арыфметычнай прагрэсіі, то ці будзе атрыманая паслядоўнасць арыфметычнай прагрэсіяй?

966. Даказаць, што калі лікі $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{b+a}$ састаўляюць арыфметычную прагрэсію, то лікі a^2, b^2, c^2 таксама састаўляюць арыфметычную прагрэсію.

967. Ці ўтвараюць арыфметычную прагрэсію дадатныя корані ўраўнення, размешчаныя ў парадку ўзрастання:

а) $\sin x=0$; б) $\sin x=\frac{1}{2}$; в) $\operatorname{tg} x=\frac{1}{2}$?

968. Пры якіх значэннях a корані дадзенага ўраўнення

$$\cos x=a,$$

размешчаныя ў парадку ўзрастання, утвараюць арыфметычную прагрэсію?

Саставіць арыфметычныя прагрэсіі па наступных даных:

969. $\begin{cases} a_2+a_4=16, \\ a_1\cdot a_5=28. \end{cases}$ **970.** $\begin{cases} a_1\cdot a_{11}=44, \\ a_2+a_{10}=24. \end{cases}$

§ 143. Характарыстычная ўласцівасць арыфметычнай прагрэсіі

Тэарэма. ***Кожны член арыфметычнай прагрэсіі***

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n,\ a_{n+1},\ \ldots,$$

пачынаючы з другога, роўны сярэдняму арыфметычнаму суседніх з ім членаў.

Іншымі словамі, пры любым $n \geqslant 2$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}. \qquad (1)$$

Сапраўды, пры любым $n \geqslant 2$

$$a_n = a_{n-1} + d,$$
$$a_n = a_{n+1} - d.$$

Пачленнае складанне гэтых роўнасцей дае

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1},$$

адкуль і вынікае суадносіна (1).

Правільная і тэарэма, адваротная да толькі што даказанай.

Калі кожны член лікавай паслядоўнасці, пачынаючы з другога, роўны сярэдняму арыфметычнаму суседніх з ім членаў, то такая лікавая паслядоўнасць з'яўляецца арыфметычнай прагрэсіяй.

Паспрабуйце даказаць гэта самастойна!

Адзначаная ў гэтым параграфе ўласцівасць вызначае, у прыватнасці, прычыну назвы «арыфметычная прагрэсія».

§ 144. Сума членаў арыфметычнай прагрэсіі

Кажуць, што аднойчы настаўнік пачатковай школы, жадаючы заняць клас на працяглы час самастойнай работай, даў дзецям «цяжкае» заданне — вылічыць суму ўсіх натуральных лікаў ад 1 да 100:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 100.$$

Адзін з вучняў у момант прапанаваў рашэнне. Вось яно:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100 = (1 + 100) + (2 + 99) +$$
$$+ (3 + 98) + \ldots + (49 + 52) + (50 + 51) =$$
$$= \underbrace{101 + 101 + \ldots + 101 + 101}_{50} = 101 \cdot 50 = 5050.$$

Гэта быў Карл Гаус, які стаў потым адным з самых вядомых матэматыкаў свету*.

* Падобны выпадак з Гаусам сапраўды меў месца. Аднак тут ён значна спрошчаны. Прапанаваныя настаўнікам лікі былі пяцізначнымі і складалі арыфметычную прагрэсію з трохзначнай рознасцю.

Ідэю такога рашэння можна скарыстаць для знаходжання сумы членаў любой арыфметычнай прагрэсіі.

Лема. ***Сума двух членаў канечнай арыфметычнай прагрэсіі, роўнааддаленых ад канцоў, роўна суме крайніх членаў.***

Напрыклад, у канечнай арыфметычнай прагрэсіі

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 98,\ 99,\ 100$$

члены 2 і 99, 3 і 98, 4 і 97 і г. д. з'яўляюцца роўнааддаленымі ад канцоў гэтай прагрэсіі. Таму іх сумы $2 + 99$, $3 + 98$, $4 + 97$ роўны суме крайніх членаў $1 + 100$.

Доказ лемы. Няхай у канечнай арыфметычнай прагрэсіі

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n$$

два якія-небудзь члены аднолькава аддалены ад канцоў. Дапусцім, што адзін з іх ёсць k-ы член злева, гэта значыць a_k, а другі k-ы член справа, гэта значыць a_{n-k+1}. Тады

$$a_k + a_{n-k+1} = [a_1 + (k-1)\,d] + [a_1 + (n-k)\,d] = 2a_1 + (n-1)\,d.$$

Сума крайніх членаў дадзенай прагрэсіі роўна

$$a_1 + a_n = a_1 + [a_1 + (n-1)\,d] = 2a_1 + (n-1)\,d.$$

Такім чынам,

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n,$$

што і трэба было даказаць.

Выкарыстоўваючы даказаную лему, лёгка атрымаць агульную формулу для сумы n членаў любой арыфметычнай прагрэсіі. Маем:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n,$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1.$$

Складваючы гэтыя дзве роўнасці пачленна, атрымліваем

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1),$$

але

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \ldots,$$

таму

$$2S_n = n\,(a_1 + a_n),$$

адкуль

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Сума членаў канечнай арыфметычнай прагрэсіі роўна здабытку паўсумы крайніх членаў на лік усіх членаў.

У прыватнасці,

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 100 = \frac{(1 + 100) \cdot 100}{2} = 5050.$$

Практыкаванні

971. Знайсці суму ўсіх няцотных трохзначных лікаў.

972. Колькі ўдараў робіць гадзіннік на працягу сутак, калі ён адбівае толькі лік цэлых гадзін?

973. Чаму роўна сума першых n лікаў натуральнага рада?

974. Вывесці формулу даўжыні шляху, пройдзенага целам пры раўнамерна паскораным руху:

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2},$$

дзе v_0 — пачатковая скорасць у $\frac{м}{сек}$, a — паскарэнне ў $\frac{м}{сек^2}$, t — час руху ў *сек*.

975. Знайсці суму ўсіх нескарачальных дробаў з назоўнікам 3, якія знаходзяцца паміж цэлымі дадатнымі лікамі m і n ($m < n$).

976. Рабочы абслугоўвае 16 ткацкіх станкоў, якія працуюць аўтаматычна. Прадукцыйнасць кожнага станка $a\frac{м}{гадз}$. Рабочы ўключыў першы станок у 7 *гадз*, а кожны наступны на 5 *мін* пазней. Даведацца аб выпрацоўцы ў метрах за першыя 2 *гадз* работы.

977. Рашыць ураўненні:

а) $1 + 7 + 13 + \ldots + x = 280$;

б) $(x + 1) + (x + 4) + (x + 7) + \ldots + (x + 28) = 155$.

978. З 1 па 12 ліпеня ўключна тэмпература паветра штодзённа падымалася ў сярэднім на $\frac{1}{2}$ градуса. Ведаючы, што сярэдняя тэмпература за гэты час аказалася роўнай $18\frac{3}{4}$ градуса, вызначыць, якой была тэмпература паветра 1 ліпеня.

979. Знайсці арыфметычную прагрэсію, у якой сярэдняе арыфметычнае n першых членаў пры любым n роўна іх ліку.

980. Знайсці суму першых дваццаці членаў арыфметычнай прагрэсіі, у якой

$$a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20.$$

§ 145. Геаметрычная прагрэсія. Формула агульнага члена геаметрычнай прагрэсіі

Геаметрычнай прагрэсіяй называецца такая лікавая паслядоўнасць, кожны член якой, пачынаючы з другога, роўны папярэдняму, памножанаму на некаторы пастаянны для дадзенай паслядоўнасці лік, адрозны ад нуля.

Прыклады геаметрычнай прагрэсіі:

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots; \qquad 2, 8, 32, 128, \ldots;$$

$$12, -6, 3, -\frac{3}{2}, \ldots; \qquad \frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{8}{5}, \ldots.$$

У кожнай з гэтых паслядоўнасцей любы член, пачынаючы з другога, атрымліваецца з папярэдняга шляхам памнажэння ў першым выпадку на $\frac{1}{3}$, у другім на 4, у трэцім на $-\frac{1}{2}$, у чацвёртым на -2.

Геаметрычную прагрэсію, відавочна, можна вызначыць і такім чынам:

Лікавая паслядоўнасць $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ *называецца геаметрычнай прагрэсіяй, калі для любога* n

$$a_{n+1} = a_n \cdot q,$$

дзе q *— некаторы пастаянны адрозны ад нуля лік.*

Гэты лік q называецца *назоўнікам* геаметрычнай прагрэсіі.

Для дадзеных вышэй прыкладаў q роўна ў першым выпадку $\frac{1}{3}$, у другім 4, у трэцім $-\frac{1}{2}$, у чацвёртым -2.

Геаметрычная прагрэсія называецца *ўзрастаючай*, калі $|q| > 1$, і *ўбываючай*, калі $|q| < 1$. Так, з дадзеных вышэй геаметрычных прагрэсій першая $\left(q = \frac{1}{3}\right)$ і трэцяя $\left(q = -\frac{1}{2}\right)$ — убываючыя, а другая $(q = 4)$ і чацвёртая $(q = -2)$ — узрастаючыя.

Няхай назоўнік геаметрычнай прагрэсіі $a_1, a_2, a_3, \ldots$ роўны q. Тады па азначэнню

$$a_2 = a_1 \cdot q,$$
$$a_3 = a_2 \cdot q = (a_1 \cdot q) \cdot q = a_1 \cdot q^2,$$
$$a_4 = a_3 \cdot q = (a_1 \cdot q^2) \cdot q = a_1 \cdot q^3$$

і г. д. Відавочна, што пры любым $n > 1$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \qquad (1)$$

гэта значыць, ***любы член геаметрычнай прагрэсіі роўны здабытку яе першага члена на назоўнік прагрэсіі ў ступені, на адзінку меншай за нумар члена прагрэсіі.***

Формула (1) называецца *формулай агульнага члена геаметрычнай прагрэсіі*.

Напрыклад, для геаметрычнай прагрэсіі

$$12, -6, 3, -\frac{3}{2}, \ldots \qquad a_1 = 12, \; q = -\frac{1}{2}.$$

Таму

$$a_{10} = a_1 \cdot q^9 = 12 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{3}{(-2)^7} = -\frac{3}{128};$$

$$a_{101} = a_1 \cdot q^{100} = 12 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{100} = \frac{3}{2^{98}}$$

і г. д.

Практыкаванні

981. Напісаць формулу агульнага члена геаметрычнай прагрэсіі, у якой:

а) $a_1 = 2, \quad a_2 = \frac{1}{2}$;

б) $a_1 = 3, \quad a_4 = -\frac{1}{3}$;

в) $a_3 = a_5 = -1$;

г) $a_4 = -54, \quad a_5 = 162$;

д) $a_1 = \sin\varphi, \quad a_2 = 2\sin\varphi$;

е) $a_1 = \operatorname{tg}\varphi, \quad a_2 = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi$;

ж) $a_1 = \operatorname{tg}\varphi, \quad a_2 = 1$;

з) $a_1 = 1, \quad a_4 = 8$.

982. Атрымаць формулу агульнага члена геаметрычнай прагрэсіі шляхам пачленнага множання роўнасцей

$$a_2 = a_1 \cdot q,$$
$$a_3 = a_2 \cdot q,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$a_n = a_{n-1} \cdot q.$$

(Параўнайце з арыфметычнай прагрэсіяй, § 142.)

Саставіць геаметрычныя прагрэсіі па наступных даных (№ 983, 984):

983. $\begin{cases} a_2 - a_1 = -4, \\ a_3 - a_1 = 8. \end{cases}$

984. $\begin{cases} a_4 + a_1 = \frac{7}{16}, \\ a_3 - a_2 + a_1 = \frac{7}{8}. \end{cases}$

985. Знайсці формулу, якая выражае здабытак n першых членаў геаметрычнай прагрэсіі праз яе першы член і назоўнік.

986. Калі ўсе члены геаметрычнай прагрэсіі памножыць на адпаведныя (па нумару займаемага месца) члены другой геаметрычнай прагрэсіі, то ці будзе атрыманая паслядоўнасць геаметрычнай прагрэсіяй?

987. Дзве геаметрычныя прагрэсіі пачленна склалі. У якім выпадку атрыманая паслядоўнасць будзе геаметрычнай прагрэсіяй?

988. Даказаць, што ў канечнай геаметрычнай прагрэсіі здабытак членаў, роўнааддаленых ад канцоў, роўны здабытку крайніх членаў.

§ 146. Характарыстычная ўласцівасць геаметрычнай прагрэсіі з дадатнымі членамі

Для любой геаметрычнай прагрэсіі з дадатнымі членамі правільная наступная тэарэма, якая, у прыватнасці, тлумачыць назву «геаметрычная прагрэсія».

Тэарэма. ***Любы член геаметрычнай прагрэсіі з дадатнымі членамі***

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n,\ a_{n+1},\ \ldots,$$

пачынаючы з другога, роўны сярэдняму геаметрычнаму суседніх з ім членаў.

Іншымі словамі, пры $n \geqslant 2$

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}.$$

Сапраўды, пры $n \geqslant 2$

$$a_n = a_{n-1} \cdot q,$$

$$a_n = \frac{a_{n+1}}{q}.$$

Таму

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1},$$

адкуль і вынікае роўнасць (1).

На геаметрычныя прагрэсіі, якія змяшчаюць адмоўныя члены, гэта тэарэма не распаўсюджваецца: сярэдняе ж геаметрычнае вызначана толькі для дадатных лікаў.

Правільная і тэарэма, адваротная да толькі што даказанай.

Калі кожны член лікавай паслядоўнасці з дадатнымі членамі, пачынаючы з другога, роўны сярэдняму геаметрычнаму суседніх з ім членаў, то такая паслядоўнасць з'яўляецца геаметрычнай прагрэсіяй.

Паспрабуйце даказаць гэта самастойна!

§ 147. Сума членаў геаметрычнай прагрэсіі

Няхай S_n ёсць сума n членаў геаметрычнай прагрэсіі a_1, a_1q, a_1q^2, ...

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1}. \qquad (1)$$

Калі назоўнік прагрэсіі q роўны 1, то $S_n = n \cdot a_1$. Калі ж ён адрозны ад 1, то зробім наступнае. Памножым роўнасць (1) пачленна на q; у рэзультаце атрымаем

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots + a_1q^n. \qquad (2)$$

Затым адымем пачленна ад роўнасці (1) роўнасць (2):

$$S_n - qS_n = a_1 + (a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1}) -$$
$$- (a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots + a_1q^{n-1}) - a_1q^n = a_1 - a_1q^n = a_1(1 - q^n).$$

Такім чынам,

$$(1-q)S_n = a_1(1-q^n),$$

адкуль

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Такім чынам, ***калі назоўнік геаметрычнай прагрэсіі не роўны адзінцы, то сума n першых членаў гэтай прагрэсіі роўна дробу, у лічніку якога стаяць здабытак першага члена на адзінку мінус n-я ступень назоўніка прагрэсіі, а ў назоўніку дробу — адзінка мінус назоўнік прагрэсіі.***

Прыклады.

1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{10}}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{10}}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2^{10}-1}{2^{10}}=\frac{1023}{1024}.$

2) $1-3+3^2-3^3+\ldots+3^8=\frac{1\cdot[1-(-3)^9]}{1-(-3)}=\frac{1+3^9}{4}=4921.$

Існуе паданне, па якому індыйскі прынц Сірам (VI стагоддзе) прапанаваў вынаходцу шахмат любую ўзнагароду, якую той толькі захоча. Вынаходца папрасіў, каб за 1-ы квадрат шахматнай дошкі яму далі адно пшанічнае зерне, за другі — два, за трэці — чатыры і г. д.— за кожны наступны квадрат у два разы больш, чым за папярэдні. Такое «сціплае» жаданне здзівіла прынца, але ён згадзіўся. Калі ж падлічылі колькасць зярнят пшаніцы, якую трэба было выдаць за ўсе 64 квадраты шахматнай дошкі, то аказалася, што ўзнагарода ў гэтым размеры не можа быць выдадзена. Сапраўды, неабходная колькасць зярнят роўна:

$$1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{63}=\frac{1\cdot(1-2^{64})}{1-2}=2^{64}-1=18446744073709551615.$$

Калі б такі лік зярнят раўнамерна рассыпаць па ўсёй зямной сушы, то ўтварыўся б слой пшаніцы таўшчынёй каля 9 *мм*.

Практыкаванні

989. Знайсці сумы:

а) $1+2+2^2+\ldots+2^{10}$;

б) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\ldots-\frac{1}{2^{10}}$;

в) $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{3^{10}}$;

г) $1-2+2^2-2^3+\ldots+2^{12}$;

д) $1+x+x^2+\ldots+x^{100}$;

е) $x-x^3+x^5-\ldots+x^{13}$.

990. За адно пампаванне паветраная помпа адпампоўвае $\frac{1}{10}$ частку паветра. Колькі працэнтаў паветра застанецца пасля 10^{10} пампаванняў?

991. Бактэрыя, папаўшы ў жывы арганізм, к канцу 20-й мінуты дзеліцца на дзве; кожная з іх к канцу другіх дваццаці мінут дзеліцца зноў на дзве і г. д. Знайсці лік бактэрый, якія ўтварыліся з адной бактэрыі к канцу сутак.

992. Даказаць, што ў геаметрычнай прагрэсіі, якая мае цотны лік членаў, адносіна сумы членаў, што стаяць на цотных месцах, да сумы членаў, што стаяць на няцотных месцах, роўна назоўніку прагрэсіі.

993. Рашыць ураўненні:

а) $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{99} = 0$;

б) $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{100} = 0$.

994. Сума трох лікаў, якія складаюць арыфметычную прагрэсію, роўна 30. Калі ад першага ліку адняць 5, ад другога 4, а трэці лік пакінуць без змянення, то атрыманыя лікі складуць геаметрычную прагрэсію. Знайсці гэтыя лікі.

§ 148. Сума членаў бесканечна ўбываючай геаметрычнай прагрэсіі

Да гэтага часу, гаворачы аб якіх-небудзь сумах, мы заўсёды меркавалі, што лік складаемых у гэтых сумах канечны (напрыклад, 2, 15, 1000 і г. д.). Але пры рашэнні некаторых задач (асабліва вышэйшай матэматыкі) прыходзіцца сутыкацца і з сумамі бесканечнага ліку складаемых.

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \quad (1)$$

Што ж гэта за такія сумы? Па азначэнню, *сумай бесканечнага ліку складаемых* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *называецца прэдзел сумы* S_n *першых* n *лікаў, калі* $n \to \infty$.

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n). \quad (2)$$

Прэдзел (2), безумоўна, можа існаваць, а можа і не існаваць. Адпаведна гэтаму гавораць, што сума (1) існуе або не існуе.

Як жа высветліць, ці існуе сума (1) у кожным канкрэтным выпадку? Агульнае рашэнне гэтага пытання выходзіць за межы нашай праграмы. Аднак існуе адзін важны прыватны выпадак, які нам трэба зараз разгледзець. Гутарка будзе ісці аб сумяванні членаў бесканечна ўбываючай геаметрычнай прагрэсіі.

Няхай $a_1, a_1q, a_1q^2, \ldots$ — бесканечна ўбываючая геаметрычная

прагрэсія. Гэта азначае, што $|q| < 1$. Сума першых n членаў гэтай прагрэсіі роўна

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

З асноўных тэарэм аб прэдзелах пераменных велічынь (гл. § 135) атрымліваем

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} \cdot \lim_{n\to\infty}(1-q^n) =$$

$$= \frac{a_1}{1-q}[\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} q^n].$$

Але $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$, а $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, таму

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}.$$

Такім чынам, ***сума бесканечна ўбываючай геаметрычнай прагрэсіі роўна першаму члену гэтай прагрэсіі, падзеленаму на адзінку мінус назоўнік гэтай прагрэсіі.***

Напрыклад, сума геаметрычнай прагрэсіі $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$ роўна

$$S = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2},$$

а сума геаметрычнай прагрэсіі $12, -6, 3, -\frac{3}{2}, \ldots$ роўна

$$S = \frac{12}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{12}{\frac{3}{2}} = 8.$$

Практыкаванні

995. Што называецца сумай бесканечна ўбываючай геаметрычнай прагрэсіі?

996. Знайсці сумы бесканечна ўбываючых геаметрычных прагрэсій:

а) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$;

б) $3, -1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \ldots$;

в) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$, 1, $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$, ...;

г) 1, x, x^2, x^3, ... ($|x|<1$).

997. Пры якіх значэннях x прагрэсія

$$\frac{a+x}{a-x}, \frac{a-x}{a+x}, \left(\frac{a-x}{a+x}\right)^3, \ldots$$

з'яўляецца бесканечна ўбываючай? Знайсці суму членаў такой прагрэсіі.

998. У роўнастаронні трохвугольнік са стараной a ўпісаны пры дапамозе злучэння сярэдзін яго старон новы трохвугольнік; у гэты трохвугольнік тым жа спосабам упісаны новы трохвугольнік і гэтак далей да бесканечнасці.

Знайсці:

а) суму перыметраў усіх гэтых трохвугольнікаў;

б) суму іх плошчаў.

999. У квадрат са стараной a ўпісаны шляхам злучэння сярэдзін яго старон новы квадрат; у гэты квадрат такім жа спосабам упісаны квадрат і гэтак далей да бесканечнасці. Знайсці суму перыметраў усіх гэтых квадратаў і суму іх плошчаў.

1000. Саставіць бесканечна ўбываючую геаметрычную прагрэсію такую, каб сума яе раўнялася $\frac{25}{4}$, а сума квадратаў яе членаў раўнялася $\frac{625}{24}$.

Задачы на паўтарэнне

1001. Ці будзе паслядоўнасць

$$1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \ldots:$$

а) абмежаванай знізу;

б) абмежаванай зверху?

1002. Даказаць, што ўсякая паслядоўнасць, якая мае прэдзел, абмежаваная. Ці правільнае адваротнае сцверджанне? Адказ растлумачыць на прыкладах.

1003. Ці з'яўляецца паслядоўнасць усіх дадатных кораняў ураўнення $\sin\frac{1}{x}=0$:

а) канечнай;

б) абмежаванай?

1004. а) Паслядоўнасць a_1, a_2, a_3, ... утварае арыфметычную прагрэсію. Ці будзе арыфметычнай прагрэсіяй паслядоўнасць $|a_1|$, $|a_2|$, $|a_3|$, ...?

б) Паслядоўнасць $a_1, a_2, a_3, \ldots$ утварае геаметрычную прагрэсію. Ці будзе геаметрычнай прагрэсіяй паслядоўнасць $|a_1|, |a_2|, |a_3|, \ldots$?

1005. Дакажыце, што ўсякая арыфметычная прагрэсія ўяўляе сабой манатонную паслядоўнасць. Ці правільна гэта для геаметрычнай прагрэсіі?

1006. Пры якім значэнні x лікі

$$\sqrt{x}, \sqrt[3]{x}, \sqrt[4]{x}:$$

а) утвараюць арыфметычную прагрэсію;
б) утвараюць геаметрычную прагрэсію;
в) утвараюць адначасова і арыфметычную і геаметрычную прагрэсіі?

1007. Знайсці суму

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2+\ldots+\left(a^n+\frac{1}{a^n}\right)^2.$$

1008. У геаметрычнай прагрэсіі $a_{m+n}=A$, $a_{m-n}=B$. Знайсці a_m і a_n.

1009. Ці існуюць такія тры лікі, якія адначасова з'яўляюцца першымі членамі некаторай арыфметычнай і некаторай геаметрычнай прагрэсіі?

1010. У якой арыфметычнай прагрэсіі сума двух любых яе членаў з'яўляецца лікам той жа прагрэсіі?

1011. Ці могуць стораны прамавугольнага трохвугольніка ўтвараць:
а) арыфметычную прагрэсію,
б) геаметрычную прагрэсію?

1012. У арыфметычнай прагрэсіі $a_{m+n}=A$, $a_{m-n}=B$. Знайсці a_m і a_n.

1013. Ці могуць сума і рознасць двух членаў арыфметычнай прагрэсіі быць паслядоўнымі членамі той жа прагрэсіі? Калі могуць, то ў якім выпадку?

1014. Знайсці арыфметычную прагрэсію, калі сума 7-га і 9-га яе членаў роўна 30, а здабытак 6-га і 10-га членаў роўны 209.

1015. Дакажаць, што калі ў арыфметычнай прагрэсіі для некаторых p і q $(p \neq q)$ $S_p = S_q$, то $S_{p+q}=0$.

1016. Знайсці 3-і і 10-ы члены геаметрычнай прагрэсіі, калі іх сума роўна -2 і вядома, што здабытак 2-га і 11-га членаў гэтай прагрэсіі роўны -3.

1017*. Ці могуць лікі 10, 11, 12 быць членамі (не абавязкова суседнімі) адной і той жа геаметрычнай прагрэсіі?

1018. У круг, радыус якога роўны R, упісаны квадрат, у квадрат упісаны круг, у гэты круг упісаны другі квадрат і гэтак далей да бесканечнасці. Вызначыць суму плошчаў усіх гэтых кругоў і суму плошчаў усіх квадратаў.

1019. Пабудаваць графік функцыі

$$y = x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \dots .$$

1020. Тры лікі, якія складаюць арыфметычную прагрэсію, даюць у суме 3. Знайсці гэтыя лікі, калі пры дадаванні да іх адпаведна 1, 7 і 17 атрымліваецца геаметрычная прагрэсія.

1021. Сума трох лікаў, якія складаюць узрастаючую геаметрычную прагрэсію, роўна 65. Калі ад меншага з гэтых лікаў адняць 1, а ад большага 19, то атрыманыя тры лікі складуць арыфметычную прагрэсію. Знайсці гэтыя лікі.

1022. Знайсці чатыры цэлыя лікі, з якіх першыя тры складаюць арыфметычную, а апошнія тры геаметрычную прагрэсію, калі вядома, што сума двух крайніх лікаў роўна 37, а сума двух сярэдніх 36.

1023*. Ці можна з лікаў $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$ выбраць бесканечную геаметрычную прагрэсію, сума якой роўна: а) $\frac{1}{5}$; б) $\frac{1}{7}$?

КАНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

(на 2 гадзіны)

за ўвесь курс 9-га класа

Варыянт 1-ы

1. За колькі гадзін можа ўзараць участак поля кожны з трох трактарыстаў, калі вядома, што першаму з іх трэба для гэтага на 2 гадзіны менш, чым другому, але на 1 гадзіну больш, чым трэцяму? Працуючы разам, другі і трэці трактарысты ўзорваюць участак за $4\frac{2}{17}$ гадзіны.

2. Рашыць ураўненне

$$\frac{1}{x^2-5x+6}+\frac{5-2x}{x-2}=1+\frac{2}{x-3}.$$

3. Пры якіх значэннях аргумента x вызначана функцыя

$$y=\sqrt{\frac{1}{2-x}-1}?$$

4. Рашыць ураўненне

$$\sin x+\cos x=\operatorname{cosec} x.$$

5. Спрасціць выраз

$$\left[\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}+3\sqrt{ab}\right]:\left[\sqrt{ab}\left(a^{-\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}\right)\right]$$

і знайсці яго значэнне пры ўмове, што

$$a^{\frac{3}{2}}=27,\ b^{-\frac{5}{2}}=\frac{1}{32}.$$

Варыянт 2-і

1. Першая труба напаўняе басейн на 3 гадзіны хутчэй, чым другая, а другая — на 2 гадзіны даўжэй, чым трэцяя. Пры адначасовай рабоце першай і другой труб басейн напаўняецца за 2 гадзіны. За які час будзе напоўнены басейн, калі адкрыць адразу тры трубы?

2. Пры якіх значэннях a адзін корань ураўнення

$$4ax^2 - 4(1-a)x + (1+a) = 0$$

з'яўляецца дадатным, а другі адмоўным?

3. Рашыць ураўненне

$$\sqrt{2x-3} + 9 = 2x.$$

4. Рашыць ураўненне

$$3\sin x = 2\cos^2 x.$$

5. Спрасціць выраз

$$\left(\frac{a+b}{a^{-\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}}} - \frac{a-b}{a^{-\frac{1}{2}} - b^{-\frac{1}{2}}}\right) : \frac{2}{\left(b\sqrt{a}\right)^{-1}}$$

і знайсці яго значэнне пры ўмове, што

$$a^{\frac{2}{3}} = 9, \quad b = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}.$$

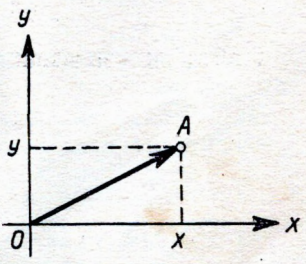
Раздзел VII

ТРЫГАНАМЕТРЫЧНЫЯ ТЭАРЭМЫ СКЛАДАННЯ

§ 149. Адлегласць паміж двума пунктамі плоскасці. Сістэма каардынат

Кожны пункт A плоскасці характарызуецца сваімі каардынатамі (x, y). Яны супадаюць з каардынатамі вектара $\overrightarrow{OA}$, які выходзіць з пункта O — пачатку каардынат (рыс. 216).

Няхай A і B — адвольныя пункты плоскасці з каардынатамі (x_1, y_1) і (x_2, y_2) адпаведна (рыс. 217). Тады вектар $\overrightarrow{AB}$ мае, відавочна, каардынаты $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Вядома, што квадрат даўжыні вектара роўны суме квадратаў яго каардынат. Таму адлегласць d паміж пунктамі A і B, або, што тое ж самае, даўжыня вектара $\overrightarrow{AB}$, вызначаецца з умовы



Рыс. 216.

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

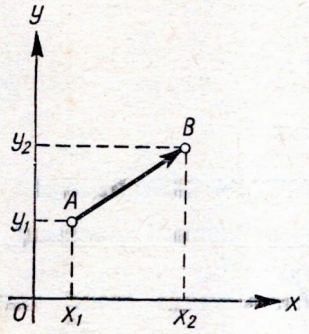
Адсюль

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

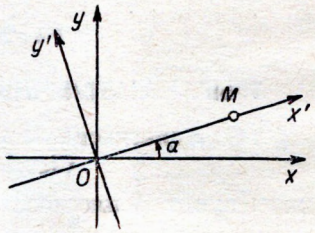
Атрыманая формула дазваляе знаходзіць адлегласць паміж любымі двума пунктамі плоскасці, калі толькі вядомы каардынаты гэтых пунктаў.

Кожны раз, гаворачы аб каардынатах таго або іншага пункта плоскасці, мы маем на ўвазе зусім пэўную сістэму каардынат xOy. А наогул жа сістэму каардынат на плоскасці можна выбіраць па-рознаму. Так, замест сістэмы каардынат xOy можна разгледзець сістэму каардынат $x'Oy'$ (рыс. 218), якая атрымліваецца ў рэзультаце павароту старых восей каардынат вакол пачатковага пункта O супраць гадзіннікавай стрэлкі на вугал α. Калі некаторы пункт плоскасці ў сістэме каардынат xOy меў каардынаты (x, y), то ў новай сістэме каардынат $x'Oy'$ ён будзе мець ужо іншыя каардынаты (x', y').

У якасці прыкладу разгледзім пункт M, які размешчаны на восі Ox' і знаходзіцца ад пункта O на адлегласці, роўнай 1 (рыс. 218). Відавочна, што ў сістэме каардынат xOy гэты пункт мае каардынаты $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, а ў сістэме каардынат $x'Oy'$ каардынаты $(1,0)$.



Рыс. 217.



Рыс. 218.

Каардынаты любых двух пунктаў A і B плоскасці залежаць ад таго, як у гэтай плоскасці зададзена сістэма каардынат. А вось адлегласць паміж гэтымі пунктамі не залежыць ад спосабу задавання сістэмы каардынат. Гэта важная акалічнасць будзе істотна выкарыстана намі ў наступным параграфе.

Практыкаванні

1024. Знайсці адлегласці паміж пунктамі плоскасці з каардынатамі:

1) $(3,5)$ і $(3,4)$; 2) $(2,1)$ і $(-5,1)$; 3) $(0,5)$ і $(5,0)$;
4) $(0,7)$ і $(3,3)$; 5) $(-3,4)$ і $(9,-17)$; 6) $(8,21)$ і $(1,-3)$.

1025. Знайсці перыметр трохвугольніка, стораны якога зададзены ўраўненнямі:

$$x+y-1=0,\ 2x-y-2=0 \text{ і } y=1.$$

1026. У сістэме каардынат xOy пункты M і N маюць каардынаты $(1,0)$ і $(0,1)$ адпаведна. Знайсці каардынаты гэтых пунктаў у новай сістэме каардынат, якая атрымліваецца ў рэзультаце павароту старых восей вакол пачатковага пункта на вугал у $30°$ супраць гадзіннікавай стрэлкі.

1027. У сістэме каардынат xOy пункты M і N маюць каардынаты $(2,0)$ і $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ адпаведна. Знайсці каардынаты гэтых пунктаў у новай сістэме каардынат, якая атрымліваецца ў рэзультаце павароту старых восей вакол пачатковага пункта на вугал у $60°$ па гадзіннікавай стрэлцы.

§ 150. Косінус сумы і рознасці двух вуглоў

У гэтым параграфе будуць даказаны наступныя дзве формулы:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \quad (1)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \quad (2)$$

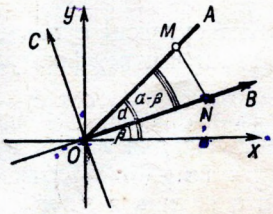
Косінус сумы (рознасці) двух вуглоў роўны здабытку косінусаў гэтых вуглоў мінус (плюс) здабытак сінусаў гэтых вуглоў.

Нам зручней будзе пачаць з доказу формулы (2). Для прастаты выкладання дапусцім спачатку, што вуглы α і β задавальняюць наступным умовам:

1) кожны з гэтых вуглоў дадатны і па абсалютнай велічыні не пераўзыходзіць 2π;

2) $\alpha \geqslant \beta$.

Няхай дадатная частка восі Ox з'яўляецца агульнай пачатковай стараной вуглоў α і β (рыс. 219). Канечныя стораны гэтых вуглоў абазначым адпаведна праз OA і OB. Відавочна, што вугал $\alpha - \beta$ можна разглядаць як такі вугал, на які трэба павярнуць прамень OB вакол пункта O супраць гадзіннікавай стрэлкі, каб яго напрамак супаў з напрамкам праменя OA.



Рыс. 219.

На праменях OA і OB адзначым пункты M і N, якія знаходзяцца ад пачатку каардынат O на адлегласці 1, так што $OM = ON = 1$. У сістэме каардынат xOy пункт M мае каардынаты $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, а пункт N — каардынаты $(\cos\beta, \sin\beta)$. Таму квадрат адлегласці паміж імі роўны:

$$d_1^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta = 2(1 - \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta).$$

Пры вылічэннях мы карысталіся тоеснасцю

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1.$$

Цяпер разгледзім другую сістэму каардынат BOC, якая атрымліваецца шляхам павароту восей Ox і Oy вакол пункта O супраць гадзіннікавай стрэлкі на вугал β. У гэтай сістэме каардынат пункт M мае каардынаты $(\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta))$, а пункт N — каардынаты (1,0). Таму квадрат адлегласці паміж гэтымі пунктамі роўны:

$$d_2^2 = [\cos(\alpha - \beta) - 1]^2 + [\sin(\alpha - \beta) - 0]^2 = \cos^2(\alpha - \beta) - 2\cos(\alpha - \beta) + 1 + \sin^2(\alpha - \beta) = 2[1 - \cos(\alpha - \beta)].$$

Але адлегласць паміж пунктамі M і N не залежыць ад таго, адносна якой сістэмы каардынат мы разглядаем гэтыя пункты. Таму

$$d_1^2 = d_2^2,$$

або

$$2(1 - \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) = 2[1 - \cos(\alpha - \beta)].$$

Адсюль і вынікае формула (2).

Цяпер трэба ўспомніць аб тых двух абмежаваннях, якія мы наклалі для прастаты выкладання на вуглы α і β.

Патрабаванне, каб кожны з вуглоў α і β быў дадатным, на самай справе не істотнае. Да любога ж з гэтых вуглоў можна дадаць вугал, кратны 2π, што ніяк не адаб'ецца на справядлівасці формулы (2). Зусім гэтак жа ад кожнага з дадзеных вуглоў можна адняць вугал, кратны 2π. Таму можна лічыць, што $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \beta \leqslant 2\pi$.

Не істотным аказваецца і ўмова $\alpha \geqslant \beta$. Сапраўды, калі $\alpha < \beta$, то $\beta > \alpha$, таму, улічваючы цотнасць функцыі $\cos x$, атрымліваем

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\beta - \alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha,$$

што па сутнасці супадае з формулай (2).

Такім чынам, формула

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

правільная для любых вуглоў α і β. У прыватнасці, замяняючы ў ёй β на $-\beta$ і ўлічваючы, што функцыя $\cos x$ з'яўляецца цотнай, а функцыя $\sin x$ няцотнай, атрымліваем

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos[\alpha - (-\beta)] = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta) = \\ = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

што і даказвае формулу (1).

Такім чынам, формулы (1) і (2) даказаны.

Прыклады.

1) $\cos 75° = \cos(30° + 45°) = \cos 30° \cdot \cos 45° - \sin 30° \cdot \sin 45° =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

2) $\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cdot \cos 30° + \sin 45° \cdot \sin 30° =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Практыкаванні

1028. Вылічыць, не карыстаючыся трыганаметрычнымі табліцамі:

а) $\cos 17° \cdot \cos 43° - \sin 17° \cdot \sin 43°$;

б) $\sin 3° \cdot \sin 42° - \cos 3° \cdot \cos 42°$;

в) $\cos 29° \cdot \cos 74° + \sin 29° \cdot \sin 74°$;

г) $\sin 97° \cdot \sin 37° + \cos 37° \cdot \cos 97°$;

д) $\cos \frac{3}{8}\pi \cdot \cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{3}{8}\pi \cdot \sin \frac{\pi}{8}$;

е) $\sin \frac{3}{5}\pi \cdot \sin \frac{7}{5}\pi - \cos \frac{7}{5}\pi \cdot \cos \frac{3}{5}\pi$.

Спрасціць выразы (№ 1029—1034):

1029. $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$.

1030. $\cos(36° + \alpha) \cdot \cos(24° - \alpha) + \sin(36° + \alpha) \cdot \sin(\alpha - 24°)$.

1031. $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

1032. $\cos 2\alpha + \operatorname{tg}\alpha \cdot \sin 2\alpha$.

1033. $\frac{\cos(\alpha + \beta) + \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos(\alpha - \beta) - \sin\alpha \cdot \sin\beta}$.

1034. $\frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos\alpha \cdot \cos\beta}{\cos(\alpha + \beta) + \sin\alpha \cdot \sin\beta}$.

1035. Вылічыць: а) $\cos(\alpha - \beta)$, калі $\cos\alpha = -\frac{2}{5}$; $\sin\beta = -\frac{5}{13}$; $90° < \alpha < 180°$, $180° < \beta < 270°$;

б) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$, калі $\cos\alpha = 0{,}6$; $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$.

1036. Знайсці $\cos(\alpha + \beta)$ і $\cos(\alpha - \beta)$, калі вядома, што $\sin\alpha = \frac{7}{25}$; $\cos\beta = -\frac{5}{13}$ і абодва вуглы (α і β) заканчваюцца ў адной і той жа чвэрці.

Вылічыць:

1037. $\cos\left[\operatorname{arc}\sin\frac{1}{3} + \operatorname{arc}\cos\frac{2}{3}\right]$.

1038. $\cos\left[\operatorname{arc}\sin\frac{1}{3} - \operatorname{arc}\cos\left(-\frac{2}{3}\right)\right]$.

1039. $\cos\left[\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc}\operatorname{tg}(-2)\right]$.

§ 151. Сінус сумы і рознасці двух вуглоў

Атрыманыя ў папярэднім параграфе формулы для $\cos(\alpha \pm \beta)$ мы выкарыстаем цяпер пры вывадзе адпаведных формул для $\sin(\alpha \pm \beta)$. Для гэтага нам давядзецца выкарыстаць формулы прывядзення.

Запішам $\sin(\alpha + \beta)$ у выглядзе

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right].$$

Пасля гэтага заўважым, што

$$\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta.$$

Значыць,

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta +$$

$$+ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha.$$

Такім чынам,

$$\boldsymbol{\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha.} \qquad (1)$$

Сінус сумы двух вуглоў роўны здабытку сінуса першага вугла на косінус другога плюс здабытак сінуса другога вугла на косінус першага.

Напрыклад,

$$\sin 105° = \sin(60° + 45°) = \sin 60° \cdot \cos 45° + \sin 45° \cdot \cos 60° =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Формула (1) з'яўляецца тоеснасцю, гэта значыць роўнасцю, справядлівай пры любых значэннях α і β. У прыватнасці, яна павінна быць правільнай, калі β замяніць на $-\beta$. У выніку такой замены мы атрымаем

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos(-\beta) + \sin(-\beta) \cdot \cos\alpha = \sin\alpha \cdot \cos\beta -$$

$$- \sin\beta \cdot \cos\alpha.$$

Такім чынам,

$$\boldsymbol{\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \sin\beta \cdot \cos\alpha.}$$

Сінус рознасці двух вуглоў роўны здабытку сінуса першага вугла на косінус другога мінус здабытак сінуса другога вугла на косінус першага.

Напрыклад,

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Практыкаванні

1040. Вылічыць:

а) $\sin 19^\circ \cdot \cos 26^\circ + \sin 26^\circ \cdot \cos 19^\circ$;

б) $\sin 46^\circ \cdot \cos 44^\circ + \cos 46^\circ \cdot \sin 44^\circ$;

в) $\sin 61^\circ \cdot \cos 31^\circ - \cos 61^\circ \cdot \sin 31^\circ$;

г) $\sin 53^\circ \cdot \cos 7^\circ - \cos 53^\circ \cdot \sin(-7^\circ)$;

д) $\sin(-15^\circ) \cdot \cos 75^\circ + \cos 15^\circ \cdot \sin 75^\circ$.

Спрасціць выразы (№ 1041—1047):

1041. $\cos(25^\circ + \alpha) \cdot \sin(15^\circ - \alpha) + \sin(25^\circ + \alpha) \cdot \cos(15^\circ - \alpha)$.

1042. $\sin(96^\circ - \alpha) \cdot \cos(36^\circ + \alpha) - \cos(96^\circ - \alpha) \cdot \sin(36^\circ + \alpha)$.

1043. $\sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) - \sin(\alpha - \beta) \cdot \cos(\alpha + \beta)$.

1044. $\operatorname{ctg}\alpha + \sin 2\alpha - \cos 2\alpha$.

1045. $\dfrac{\sin(\alpha + \beta) - \cos\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta) + \cos\alpha \cdot \sin\beta}$.

1046. $\dfrac{\sin(\alpha - \beta) + \cos\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta) - \sin\alpha \cdot \cos\beta}$.

1047. $\dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}$.

1048. Знайсці $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$, калі $\sin\alpha = -0{,}8$.

1049. Знайсці $\sin(\alpha + \beta)$ і $\sin(\alpha - \beta)$, калі $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$; $\cos\beta = -\frac{\sqrt{13}}{4}$, прычым $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

1050. Знайсці $\sin(\alpha + \beta)$ і $\sin(\alpha - \beta)$, калі вядома, што $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; $\sin\beta = -\frac{5}{13}$, прычым вуглы α і β заканчваюцца ў розных чвэрцях.

Вылічыць:

1051. $\sin\left[\arcsin\frac{1}{3} + \arccos\frac{2}{3}\right]$.

1052. $\sin\left[\arcsin\frac{1}{2}+\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right]$.

1053. $\sin(\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}2)$.

1054. $\sin\left[\arcsin\left(-\frac{1}{7}\right)+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$.

§ 152. Тангенс сумы і рознасці двух вуглоў

Формулы для выразу сінуса і косінуса сумы (рознасці) двух вуглоў праз сінусы і косінусы гэтых вуглоў дазваляюць атрымаць адпаведныя формулы для тангенса і катангенса.

Сапраўды,

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}.$$

Дапусцім, што $\cos\alpha$ і $\cos\beta$ адрозныя ад нуля (гэта раўназначна таму, што $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{tg}\beta$ вызначаны). Тады, падзяліўшы лічнік і назоўнік апошняга дробу на $\cos\alpha\cdot\cos\beta$, атрымаем

$$\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}.$$

Такім чынам, калі толькі тангенсы вуглоў α і β вызначаны, то

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}. \qquad (1)$$

Тангенс сумы двух вуглоў роўны суме тангенсаў гэтых вуглоў, падзеленай на адзінку мінус здабытак тангенсаў гэтых вуглоў.

Прыклад.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}.$$

Замяняючы ў формуле (1) β на $|-\beta|$ і ўлічваючы, што функцыя $y=\operatorname{tg}x$ з'яўляецца няцотнай, атрымліваем

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(-\beta)}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}(-\beta)}=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}.$$

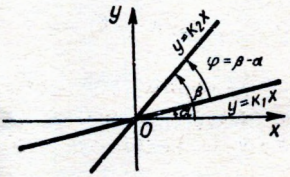
Тангенс рознасці двух вуглоў роўны рознасці тангенсаў гэтых вуглоў, падзеленай на адзінку плюс здабытак тангенсаў гэтых вуглоў.

Разгледзім некалькі прыкладаў.

Прыклад 1.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}.$$

Прыклад 2. Няхай прамая $y=k_1x$ утварае з воссю абсцыс вугал α, а прамая $y=k_2x$ — вугал β (рыс. 220). Тады вугал φ паміж гэтымі прамымі будзе роўны $\varphi=\beta-\alpha$.



Рыс. 220.

Дапусцім, што разглядаемыя прамыя не перпендыкулярныя адна другой. Тады тангенс вугла φ існуе і роўны

$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}(\beta-\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\alpha}.$$

Але $\operatorname{tg}\alpha=k_1$; $\operatorname{tg}\beta=k_2$. Значыць,

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}.$$

Так, вугал паміж прамымі $y=\frac{x}{2}\left(k_1=\frac{1}{2}\right)$ і $y=3x$ $(k_2=3)$ вызначаецца з умовы

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{3-\frac{1}{2}}{1+3\cdot\frac{1}{2}}=1.$$

Таму $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

Формулы для катангенса сумы і рознасці двух вуглоў можна атрымаць аналагічна. Аднак на практыцы гэтыя формулы выкарыстоўваюцца вельмі рэдка і таму прыводзіць іх мы не будзем.

Практыкаванні

1055. Знайсці $\operatorname{tg}105°$, запісаўшы $105°$ у выглядзе сумы $60°+45°$.

1056. Вылічыць:

а) $\dfrac{\operatorname{tg} 13^\circ + \operatorname{tg} 47^\circ}{1 - \operatorname{tg} 13^\circ \cdot \operatorname{tg} 47^\circ}$; в) $\dfrac{\operatorname{tg} 1^\circ - \operatorname{tg} 46^\circ}{1 + \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 46^\circ}$;

б) $\dfrac{1 - \operatorname{tg} 27^\circ \cdot \operatorname{tg} 33^\circ}{\operatorname{tg} 27^\circ + \operatorname{tg} 33^\circ}$; г) $\dfrac{1 + \operatorname{tg} 4^\circ \cdot \operatorname{tg} 49^\circ}{\operatorname{tg} 49^\circ - \operatorname{tg} 4^\circ}$.

1057. Знайсці $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ і $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, калі $\sin\alpha = 0{,}6$; $\cos\beta = -\dfrac{12}{13}$ $\left(\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi;\ \pi < \beta < \dfrac{3}{2}\pi\right)$.

1058. Знайсці $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ і $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, калі $\sin\alpha = -\dfrac{4}{5}$; $\cos\beta = \dfrac{5}{13}$, прычым абодва вуглы ($\alpha$ і β) заканчваюцца ў адной і той жа чвэрці.

Вылічыць (№ 1059—1061):

1059. $\operatorname{tg}(\operatorname{arc tg} 2 + \operatorname{arc tg} 3)$.

1060. $\operatorname{tg}\left(\arcsin\dfrac{1}{3} + \arccos\dfrac{2}{3}\right)$.

1061. $\operatorname{tg}\left[\arcsin\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) + \arccos\left(-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)\right]$.

Знайсці вугал паміж дадзенымі прамымі (№ 1062—1063):

1062. $y = x$ і $y = \dfrac{2}{3}x + 6$.

1063. $3x - 2y = 6$ і $2x + 3y - 7 = 0$.

1064. Даказаць, што прамыя $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ перпендыкулярныя тады і толькі тады, калі $k_1k_2 = -1$.

§ 153. Трыганаметрычныя функцыі двайнога вугла

Прыняўшы ў формуле

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha$$

$\beta = \alpha$, мы атрымаем

$$\sin 2\alpha = \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha.$$

Такім чынам,

$$\boldsymbol{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha.} \qquad (1)$$

Сінус двайнога вугла роўны падвоенаму здабытку сінуса дадзенага вугла на яго косінус.

Аналагічна, прыняўшы ў формуле

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$\beta = \alpha$, атрымаем

$$\cos 2\alpha = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Такім чынам,

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha. \qquad (2)$$

Косінус двайнога вугла роўны квадрату косінуса дадзенага вугла мінус квадрат сінуса таго ж вугла.

Зусім гэтак жа, дапусціўшы ў формуле

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

$\beta = \alpha$, атрымаем

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}. \qquad (3)$$

Тангенс двайнога вугла роўны падвоенаму тангенсу дадзенага вугла, падзеленаму на адзінку мінус квадрат тангенса таго ж вугла.

Прыклады. 1) Няхай $\sin\alpha = 0{,}6$, прычым вугал α заканчваецца ў 2-й чвэрці. Тады

$$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\sqrt{1 - 0{,}36} = -0{,}8.$$

Таму

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 2 \cdot 0{,}6\,(-0{,}8) = -0{,}96;$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0{,}64 - 0{,}36 = 0{,}28.$$

2) Няхай $\operatorname{tg}\alpha = 3$. Тады

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{6}{1 - 9} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}.$$

Заўвага. Не трэба думаць, што двайны вугал абавязкова змяшчае цотны лік градусаў або радыянаў: 20°, 60°, 4, 6 і г. д. Пад двайным вуглом можна разумець любы вугал. Напрыклад,

$$45^\circ = 2\left(\frac{45^\circ}{2}\right);\ 75^\circ = 2\left(\frac{75^\circ}{2}\right);\ 3 = 2\left(\frac{3}{2}\right)$$

і г. д., наогул $\alpha = 2\dfrac{\alpha}{2}$. Таму часам даказаныя вышэй формулы карысна запісаць у выглядзе

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2};$$

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Гэтыя формулы выражаюць трыганаметрычныя функцыі вугла праз трыганаметрычныя функцыі палавіннага вугла.

Практыкаванні

1065. Вядома, што $\sin\alpha = 0{,}8$, прычым вугал α заканчваецца ў 2-й чвэрці. Знайсці сінус, косінус, тангенс і катангенс вугла 2α.

1066. Знайсці $\operatorname{tg} 2\alpha$ і $\cos 2\alpha$, калі вядома, што вугал α заканчваецца не ў 1-й чвэрці і $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$.

1067. Знайсці $\cos\alpha$, калі $\sin\frac{\alpha}{2} = -0{,}1$ і вугал α заканчваецца ў 4-й чвэрці.

1068. У якой чвэрці заканчваецца вугал α, калі

а) $\sin\alpha > 0$, $\sin 2\alpha > 0$;

б) $\sin\alpha > 0$, $\sin 2\alpha < 0$;

в) $\sin\alpha < 0$, $\sin 2\alpha > 0$;

г) $\sin\alpha < 0$, $\sin 2\alpha < 0$?

1069. Вылічыць:

а) $\sin 22°30' \cdot \cos 22°30'$;

б) $\cos^2 22°30' - \sin^2 22°30'$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg} 22°30'}{1 - \operatorname{tg}^2 22°30'}$; г) $\dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}$.

1070. Даказаць тоеснасці:

а) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$;

б) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$;

в) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{ctg} 2\alpha$.

1071. Даказаць, што для любога вострага вугла α

$$\sin 2\alpha < 2\sin\alpha.$$

1072. У якіх межах можа змяняцца выраз $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$?

Спрасціць выразы (№ 1073—1078):

1073. $\sin^2(\beta - 45°) - \cos^2(\beta - 45°)$.

1074. $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

1075. $\frac{1}{1 - \operatorname{tg}\alpha} - \frac{1}{1 + \operatorname{tg}\alpha}$.

1076. $\left(\sin\frac{\alpha}{4} + \cos\frac{\alpha}{4}\right)\left(\sin\frac{\alpha}{4} - \cos\frac{\alpha}{4}\right)$.

1077. $\frac{\operatorname{tg}(45° + \alpha)}{1 - \operatorname{tg}^2(45° + \alpha)}$.

1078. $\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha$.

Даказаць роўнасці (№ 1079, 1080):

1079. $\sin 10° \cdot \cos 20° \cdot \cos 40° = \frac{1}{8}$.

1080. $\sin\frac{\pi}{5} \cdot \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$.

1081. Выразіць $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$:

а) праз $\sin\frac{\alpha}{2}$ і $\cos\frac{\alpha}{2}$;

б) праз $\sin\frac{\alpha}{2}$;

в) праз $\cos\frac{\alpha}{2}$.

Спрасціць выразы (№ 1082—1087):

1082. $\frac{\sin^2\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha}{\sin 2\alpha}$.

1083. $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)\sin 2\alpha$.

1084. $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha$.

1085. $\sec\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\sec\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

1086. $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$.

1087. $\dfrac{1-\sin 2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$.

Вылічыць (№ 1088—1091):

1088. $\operatorname{tg}(2\operatorname{arc\,tg}3)$.

1089. $\operatorname{tg}\left[2\operatorname{arc}\cos\left(-\dfrac{3}{5}\right)\right]$.

1090. $\cos\left(2\operatorname{arc}\sin\dfrac{1}{2}\right)$.

1091. $\sin[2\operatorname{arc\,tg}(-2)]$.

1092. Знайсці формулу агульнага члена арыфметычнай прагрэсіі, для якой: $a_1=\cos 2\varphi$; $a_2=\cos^2\varphi$.

1093. Даказаць, што бесканечная геаметрычная прагрэсія, у якой $a_1=4\sin\varphi$, $a_2=\sin 2\varphi$, з'яўляецца бесканечна ўбываючай, і знайсці яе суму.

§ 154. Выражэнне $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ праз тангенс палавіннага вугла

Пры рашэнні некаторых задач з'яўляюцца карыснымі наступныя формулы:

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \tag{1}$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \tag{2}$$

Дакажам іх.

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+1}.$$

Тым самым даказана формула (1). Аналагічна даказваецца і формула (2):

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Формулы (1) і (2) правільныя толькі ў тым выпадку, калі $\cos\frac{\alpha}{2} \neq 0$, або, іншымі словамі, калі выраз $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ вызначаны.

Прыклад. Знайсці $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$, калі $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2$.

Па формулах (1) і (2) атрымліваем

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{4}{1+4} = 0{,}8;$$

$$\cos\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-4}{1+4} = -0{,}6.$$

Практыкаванні

1094. Знайсці $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$, калі $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 5$.

1095. Знайсці $\sin 2\alpha$ і $\cos 2\alpha$, калі:

а) $\operatorname{tg}\alpha = -3$; б) $\operatorname{ctg}\alpha = 3$.

1096. Даць трыганаметрычны доказ няроўнасці

$$\left|\frac{2a}{1+a^2}\right| \leqslant 1.$$

1097. Даказаць, што пры любым α $\sin 2\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$ маюць адзін і той жа знак (абодва адмоўныя ці абодва дадатныя).

1098. Вядома, што $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$. Знайсці:

а) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$;

б) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha$.

§ 155. Суадносіны паміж трыганаметрычнымі функцыямі палавіннага вугла і косінусам цэлага вугла

Складваючы і адымаючы пачленна тоеснасці

$$1=\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

і

$$\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

атрымліваем

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}; \tag{1}$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}. \tag{2}$$

Гэтыя дзве формулы вельмі часта выкарыстоўваюцца для пераўтварэння розных трыганаметрычных выразаў. Акрамя таго, яны дазваляюць выразіць сінус і косінус палавіннага вугла праз косінус цэлага вугла:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}; \tag{3}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}. \tag{4}$$

З апошніх дзвюх формул, у сваю чаргу, вынікае тоеснасць

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}. \tag{5}$$

Знакі (+ або —) перад радыкаламі ў формулах (3), (4) і (5) выбіраюцца ў залежнасці ад таго, у якой чвэрці заканчваецца вугал $\frac{\alpha}{2}$. Калі, напрыклад, $\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<\pi$, то ў формуле (4) трэба ўзяць знак плюс, а ў формулах (3) і (5) — мінус (сінусы вуглоў, якія заканчваюцца ў 2-й чвэрці, дадатныя, а косінусы і тангенсы адмоўныя).

Прыклады. 1) Знайсці сінус і косінус вугла $22°30'$.

Па формуле (4) атрымліваем $\left(\frac{\alpha}{2} = 22°30',\ \alpha = 45°\right)$

$$\sin 22°30' = \sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \approx 0{,}3827.$$

Знак $+$ перад радыкалам мы выбралі таму, што сінус вугла $22°30'$ дадатны.

Аналагічна, зыходзячы з формулы (3), атрымаем

$$\cos 22°30' = \sqrt{\frac{1+\cos 45°}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \approx 0{,}9239.$$

2) Знайсці $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$.

Па формуле (5) атрымліваем $\left(\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{8},\ \alpha = \frac{\pi}{4}\right)$:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} =$$

$$= \sqrt{2} - 1 \approx 0{,}4142.$$

Практыкаванні

Даказаць тоеснасці (№ 1099—1102):

1099. $1 + 2\cos 2\alpha + \cos 4\alpha = 4\cos^2\alpha \cdot \cos 2\alpha.$

1100. $1 - 2\cos 3\alpha + \cos 6\alpha = -4\cos^2\alpha \cdot \frac{3\alpha}{2} \cdot \cos 3\alpha.$

1101. $1 + \sin\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right).$

1102. $1 - \sin\alpha = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right).$

1103. Спрасціць выраз $\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$.

1104. Знайсці $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$, калі вядома, што $\cos 2\alpha = -0{,}6$.

1105. Знайсці $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ і $\cos\frac{\alpha}{2}$, калі вядома, што $\cos\alpha = -0{,}6$.

1106. Знайсці $\operatorname{tg}\alpha$, калі $\sin 2\alpha = \frac{1}{3}$.

Вылічыць:

1107. $\sin\left[\frac{1}{2}\arccos 0{,}8\right]$.

1108. $\cos\left[\frac{1}{2}\arcsin 0{,}6\right]$.

1109. $\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}\arcsin(-0{,}8)\right]$.

1110. $\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(-0{,}75)\right]$.

§ 156. Выражэнне тангенса палавіннага вугла праз сінус і косінус цэлага вугла

Тангенс палавіннага вугла можна выразіць праз сінус і косінус цэлага вугла з дапамогай формул

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}; \qquad (1)$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (2)$$

Сапраўды,

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Тым самым даказана формула (1). Аналагічна даказваецца і формула (2).

Формулы (1) і (2) больш зручныя, чым даказаная ў § 155 формула

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}, \qquad (3)$$

паколькі яны не маюць радыкала і, значыць, не трэба рашаць, які знак павінен стаяць перад радыкалам. Аднак пры разліках па

формуле (3) дастаткова ведаць толькі косінус вугла α, а пры разліках па формулах (1) і (2), акрамя косінуса, трэба ведаць і сінус гэтага вугла.

Прыклад.

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{1+\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2-\sqrt{3} \approx 0{,}2679.$$

Практыкаванні

1111. Знайсці $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, калі вядома, што $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ і вугал α заканчваецца не ў 1-й чвэрці.

1112. Знайсці $\operatorname{tg}\alpha$, калі вядома, што $\sin 2\alpha = -0{,}8$ і вугал 2α заканчваецца не ў 4-й чвэрці.

1113. Даказаць, што калі сінус і косінус вугла 2α рацыянальныя, то тангенс вугла α таксама рацыянальны.

Ці правільнае адваротнае сцверджанне?

§ 157. Пераўтварэнне здабытку трыганаметрычных функцый у суму

Склаўшы пачленна тоеснасці

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cdot\cos\alpha$$

і

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \sin\beta\cdot\cos\alpha,$$

атрымаем

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cdot\cos\beta,$$

адкуль

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]. \qquad (1)$$

Здабытак сінуса аднаго вугла на косінус другога роўны паўсуме сінуса сумы і сінуса рознасці гэтых вуглоў.

Напрыклад, $\sin 15^\circ\cdot\cos 75^\circ = \frac{1}{2}[\sin(15^\circ+75^\circ) +$

$+\sin(15^\circ-75^\circ)] = \frac{1}{2}[\sin 90^\circ + \sin(-60^\circ)] = \frac{1}{2}\left[1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right] =$

$= \frac{2-\sqrt{3}}{4}.$

Склаўшы пачленна тоеснасці

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

і

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta,$$

атрымаем

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha \cdot \cos\beta,$$

адкуль

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]. \quad (2)$$

Здабытак косінусаў двух вуглоў роўны паўсуме косінуса сумы і косінуса рознасці гэтых вуглоў.

Напрыклад, $\cos\frac{7}{12}\pi \cdot \cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{7}{12}\pi + \frac{\pi}{12}\right) + \right.$

$\left. + \cos\left(\frac{7}{12}\pi - \frac{\pi}{12}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{2}{3}\pi + \cos\frac{\pi}{2}\right] = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + 0\right) =$

$= -\frac{1}{4}$.

Аналагічна, калі ад тоеснасці

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

адняць пачленна тоеснасць

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta,$$

то ў рэзультаце атрымаем

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2\sin\alpha \cdot \sin\beta,$$

адкуль

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]. \quad (3)$$

Здабытак сінусаў двух вуглоў роўны паўрознасці косінуса рознасці і косінуса сумы гэтых вуглоў.

Практыкаванні

Вылічыць, не карыстаючыся табліцамі (№ 1114—1119):

1114. $2\sin 37°30' \cdot \cos 7°30'$.

1115. $\sin 52°30' \cdot \cos 7°30'$.

1116. $\cos 37°30' \cdot \cos 7°30'$.

1117. $\sin 52°30' \cdot \sin 7°30'$.

1118. $\cos 75° \cdot \cos 105°$.

1119. $\sin 45° \cdot \sin 15°$.

Дадзеныя здабыткі запісаць у выглядзе сум (№ 1120—1127):

1120. $\sin 3° \cdot \sin 5°$.

1121. $\sin 7° \cdot \cos 9°$.

1122. $\cos 17° \cdot \cos 3°$.

1123. $\sin(x+\alpha) \cdot \sin(x-\alpha)$.

1124. $\sin(x+\alpha) \cdot \cos(x-\alpha)$.

1125. $\cos(x+\alpha) \cdot \cos(x-\alpha)$.

1126. $4\sin 20° \cdot \cos 50° \cdot \cos 80°$.

1127. $4\cos 15° \cdot \sin 20° \cdot \sin 40°$.

Даказаць тоеснасці:

1128. $2\sin 2\alpha \cdot \sin\alpha + \cos 3\alpha = \cos\alpha$.

1129. $\sin\alpha - 2\sin\left(\frac{\alpha}{2} - 15°\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2} + 15°\right) = \frac{1}{2}$.

§ 158. Пераўтварэнне сумы (рознасці) сінусаў двух вуглоў у здабытак

У папярэднім параграфе мы атрымалі формулу

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]. \qquad (1)$$

Гэта формула правільная для любых значэнняў α і β. Няхай α і β такія, што $\alpha+\beta=x$, $\alpha-\beta=y$. Тады α і β знойдуцца як рашэнне сістэмы ўраўненняў

$$\begin{cases} \alpha+\beta=x, \\ \alpha-\beta=y. \end{cases}$$

Складваючы гэтыя ўраўненні пачленна, атрымліваем $2\alpha = x+y$. Адымаючы гэтыя ўраўненні пачленна, атрымліваем $2\beta = x-y$. Таму

$$\alpha = \frac{x+y}{2};\ \beta = \frac{x-y}{2}.$$

У гэтым выпадку тоеснасць (1) можна перапісаць у выглядзе

$$\sin\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}(\sin x + \sin y),$$

адкуль

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2}. \qquad (2)$$

Сума сінусаў двух вуглоў роўна падвоенаму здабытку сінуса паўсумы на косінус паўрознасці гэтых вуглоў.

Замяняючы ў формуле (2) y на $-y$ і ўлічваючы, што $\sin(-y) = -\sin y$, атрымліваем

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}. \qquad (3)$$

Рознасць сінусаў двух вуглоў роўна падвоенаму здабытку сінуса паўрознасці на косінус паўсумы гэтых вуглоў.

Прыклады. 1) Суму $\sin 75° + \sin 15°$ лёгка вылічыць без табліц, калі скарыстаць формулу (2):

$$\sin 75° + \sin 15° = 2\sin\frac{75° + 15°}{2} \cdot \cos\frac{75° - 15°}{2} =$$

$$= 2\sin 45° \cdot \cos 30° = 2\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{6}.$$

2) Рознасць $\sin\frac{5}{12}\pi - \sin\frac{\pi}{12}$ лёгка вылічыць без табліц, калі скарыстаць формулу (3):

$$\sin\frac{5}{12}\pi - \sin\frac{\pi}{12} = 2\sin\frac{\frac{5}{12}\pi - \frac{\pi}{12}}{2} \cdot \cos\frac{\frac{5}{12}\pi + \frac{\pi}{12}}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\pi}{6} \cdot \cos\frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Практыкаванні

Вылічыць (№ 1130—1135) без табліц, скарыстаўшы формулу для сумы і рознасці сінусаў двух вуглоў:

1130. $\sin 105° + \sin 75°$.

1131. $\sin 105° - \sin 75°$.

1132. $\sin\frac{11}{12}\pi + \sin\frac{5}{12}\pi$.

1133. $\sin\frac{11}{12}\pi - \sin\frac{5}{12}\pi$.

1134. $\cos\frac{\pi}{12} + \sin\frac{7}{12}\pi$.

1135. $\cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{7}{12}\pi$.

Спрасціць дадзеныя выразы (№ 1136, 1137):

1136. $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$.

1137. $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$.

1138. Даказаць тоеснасці:

$$1 + \sin\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right);$$

$$1 - \sin\alpha = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right),$$

скарыстоўваючы формулы для сумы і рознасці сінусаў двух вуглоў.

Дадзеныя выразы (№ 1139, 1140) запісаць у выглядзе здабыткаў:

1139. $\frac{1}{2} + \sin\alpha$. **1140.** $\sqrt{3} - 2\sin\alpha$.

1141. Даказаць, што сінусы вуглоў α і β роўныя тады і толькі тады, калі

$$\alpha = (-1)^n\beta + n\pi,$$

дзе n — некаторы цэлы лік.

§ 159. Пераўтварэнне сумы (рознасці) косінусаў двух вуглоў у здабытак

Для сумы і рознасці косінусаў двух вуглоў правільныя наступныя формулы:

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}; \qquad (1)$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}. \qquad (2)$$

Сума косінусаў двух вуглоў роўна падвоенаму здабытку косінуса паўсумы на косінус паўрознасці гэтых вуглоў.

Рознасць косінусаў двух вуглоў роўна мінус падвоенаму здабытку сінуса паўсумы на сінус паўрознасці гэтых вуглоў.

Прыклады. 1) $\cos 75° + \cos 15° = 2\cos\frac{75°+15°}{2} \times$

$$\times \cos\frac{75°-15°}{2} = 2\cos 45°\cdot\cos 30° = 2\,\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

2) $\cos\frac{5}{12}\pi - \cos\frac{\pi}{12} = -2\sin\frac{\frac{5}{12}\pi + \frac{\pi}{12}}{2}\cdot\sin\frac{\frac{5}{12}\pi - \frac{\pi}{12}}{2} =$

$$= -2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{6} = -2\,\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Формулы (1) і (2) могуць быць атрыманы шмат якімі спосабамі. Дакажам, напрыклад, формулу (1).

1-ы спосаб. У § 157 была даказана формула

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)].$$

Прымаючы ў ёй $\alpha+\beta=x$, $\alpha-\beta=y$, мы і прыходзім да формулы (1). Гэты спосаб аналагічны таму, з дапамогай якога ў папярэднім параграфе была атрымана формула для сумы сінусаў двух вуглоў.

2-і спосаб. У папярэднім параграфе была даказана формула

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Прымаючы ў ёй

$$\alpha = x + \frac{\pi}{2}, \quad \beta = y + \frac{\pi}{2},$$

атрымліваем

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}+\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\frac{x-y}{2}.$$

Але па формулах прывядзення

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x; \quad \sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right) = \cos y;$$

$$\sin\left(\frac{x+y}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{x+y}{2}.$$

Значыць, $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2}$,

што і трэба было даказаць.

Формулу (2) мы прапануем вучням даказаць самастойна. Паспрабуйце знайсці не менш двух розных спосабаў доказу!

Практыкаванні

Вылічыць № 1142—1147 без табліц, скарыстоўваючы формулы для сумы і рознасці косінусаў двух вуглоў:

1142. $\cos 105° + \cos 75°$.

1143. $\cos 105° - \cos 75°$.

1144. $\cos\frac{11}{12}\pi + \cos\frac{5}{12}\pi$.

1145. $\cos\frac{11}{12}\pi - \cos\frac{5}{12}\pi$.

1146. $\cos 15° - \sin 15°$.

1147. $\sin\frac{\pi}{12} + \cos\frac{11}{12}\pi$.

Спрасціць дадзеныя выразы (№ 1148, 1149):

1148. $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$.

1149. $\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$.

1150. Кожную з тоеснасцей

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$$

даказаць не менш чым двума рознымі спосабамі.

Дадзеныя выразы (№ 1151—1154) запісаць у выглядзе здабыткаў:

1151. $\sqrt{2}+2\cos\alpha$.

1152. $\sqrt{3}-2\cos\alpha$.

1153. $\sin x+\cos y$.

1154. $\sin x-\sin y$.

1155. Спрасціць выраз:

$$\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{8}\right)-\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{8}\right).$$

Раскласці на множнікі дадзеныя выразы (№ 1156—1159):

1156. $1+\sin\alpha-\cos\alpha$.

1157. $\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin\beta$.

1158. $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha$.

1159. $1+\sin\alpha+\cos\alpha$.

Даказаць дадзеныя тоеснасці (№ 1160—1163):

1160. $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha$.

1161. $\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}=\operatorname{tg}\alpha$.

1162. $\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}=-\operatorname{ctg}\alpha$.

1163. $\frac{\sin\alpha-2\sin 2\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha-2\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha$.

1164. Даказаць, што косінусы вуглоў α і β роўны тады і толькі тады, калі

$$\alpha = \pm\beta + 2n\pi,$$

дзе n — некаторы цэлы лік

§ 160. Пераўтварэнне сумы (рознасці) тангенсаў двух вуглоў

Пры рашэнні некаторых задач бываюць карысны наступныя формулы:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y}; \tag{1}$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cdot \cos y}. \tag{2}$$

Сума тангенсаў двух вуглоў роўна адносіне сінуса сумы гэтых вуглоў да здабытку косінусаў тых жа вуглоў.

Рознасць тангенсаў двух вуглоў роўна адносіне сінуса рознасці гэтых вуглоў да здабытку косінусаў тых жа вуглоў.

Дакажам, напрыклад, формулу (1). Маем:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y},$$

але

$$\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y = \sin(x+y),$$

таму

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y}.$$

Тым самым формула (1) даказана. Аналагічна даказваецца і формула (2).

Прыклад. Даказаць, што тангенсы вуглоў $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ і $\beta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ роўныя тады і толькі тады, калі гэтыя вуглы розняцца на вугал, кратны π.

Няхай α і β розняцца на вугал, кратны π, тады $\alpha = \beta + n\pi$, дзе n — некаторы цэлы лік. Але ў такім выпадку

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\beta + n\pi) = \operatorname{tg}\beta.$$

Наадварот, няхай $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$. Тады $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = 0$, і па формуле (2)

$$\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} = 0.$$

Але гэта магчыма толькі пры ўмове, што $\sin(\alpha - \beta) = 0$. Як вядома, сінус ператвараецца ў нуль толькі для вуглоў, кратных π. Таму

$$\alpha - \beta = n\pi,$$

$$\alpha = \beta + n\pi,$$

што і трэба было даказаць.

Практыкаванні

Вылічыць № 1165—1168, не карыстаючыся трыганаметрычнымі табліцамі:

1165. $\operatorname{tg} 22°30' + \operatorname{tg} 67°30'$.

1166. $\operatorname{tg} 22°30' - \operatorname{tg} 67°30'$.

1167. $\operatorname{tg}\frac{11}{12}\pi + \operatorname{tg}\frac{5}{12}\pi$.

1168. $\operatorname{tg}\frac{11}{12}\pi - \operatorname{tg}\frac{5}{12}\pi$.

1169. Спрасціць выраз $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}$.

1170. Дадзеныя выразы даць у выглядзе здабыткаў:

а) $\sqrt{3} - \operatorname{tg}\alpha$; б) $1 + \operatorname{tg}\alpha$.

1171. Знайсці ўмову, пры якой катангенсы вуглоў α і β роўныя адзін другому.

Даказаць тоеснасці:

1172. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = 2\operatorname{tg}\alpha$.

1173. $\dfrac{1 + \operatorname{ctg} 2\alpha}{1 - \operatorname{ctg} 2\alpha} = \dfrac{\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}$.

§ 161. Графікі трыганаметрычных функцый кратных вуглоў

У раздзеле V мы паказалі, як будуюцца графікі трыганаметрычных функцый $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \operatorname{tg} x$; $y = \operatorname{ctg} x$. Цяпер мы разгледзім пытанне аб тым, як будаваць графікі трыганаметрычных функцый кратных вуглоў ωx, дзе ω — некаторы дадатны лік *.

Для пабудавання графіка функцыі $y = \sin \omega x$ параўнаем гэту функцыю з ужо вывучанай намі функцыяй $y = \sin x$. Дапусцім, што пры $x = x_0$ функцыя $y = \sin x$ прымае значэнне, роўнае y_0. Тады

$$y_0 = \sin x_0.$$

Пераўтворым гэту суадносіну так:

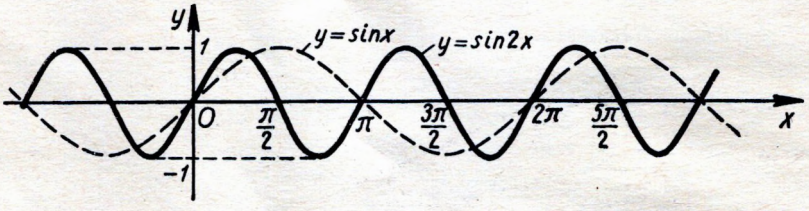
$$y_0 = \sin\left(\frac{\omega}{\omega} x_0\right) = \sin\left[\omega \cdot \left(\frac{x_0}{\omega}\right)\right].$$

Такім чынам,

$$y_0 = \sin\left[\omega\left(\frac{x_0}{\omega}\right)\right].$$

Значыць, функцыя $y = \sin \omega x$ пры $x = \frac{x_0}{\omega}$ прымае тое ж самае значэнне y_0, што і функцыя $y = \sin x$ пры $x = x_0$. А гэта азначае, што функцыя $y = \sin \omega x$ паўтарае свае значэнні ў ω разоў часцей, чым функцыя $y = \sin x$. Таму графік функцыі $y = \sin \omega x$ атрымліваецца шляхам «сціскання» графіка функцыі $y = \sin x$ у ω разоў уздоўж восі x.

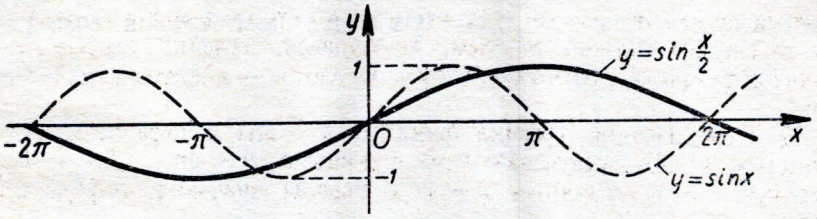
Напрыклад, графік функцыі $y = \sin 2x$ атрымліваецца шляхам «сціскання» сінусоіды $y = \sin x$ у два разы ўздоўж восі абсцыс (рыс. 221). Графік функцыі $y = \sin\frac{x}{2}$ атрымліваецца шляхам «расцяжэння» сінусоіды $y = \sin x$ у два разы (або «сціскання» ў $\frac{1}{2}$ раза) уздоўж восі x (рыс. 222).



Рыс. 221.

* ω — грэчаская літара; чытаецца: амега.

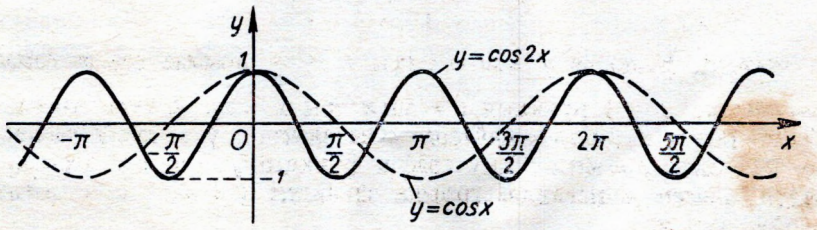
Паколькі функцыя $y = \sin \omega x$ змяняе свае значэнні ў ω разоў хутчэй, чым функцыя $y = \sin x$, то перыяд яе ў ω разоў меншы за перыяд функцыі $y = \sin x$. Напрыклад, перыяд функцыі $y = \sin 2x$ роўны



Рыс. 222.

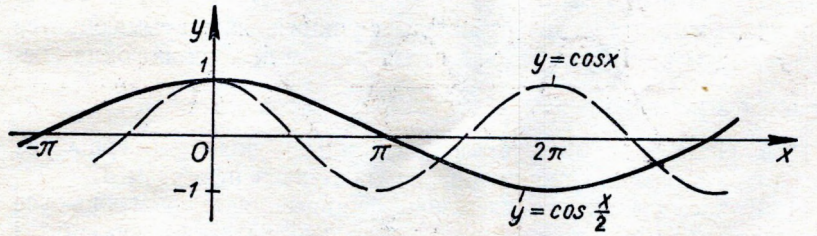
$\frac{2\pi}{2} = \pi$, а перыяд функцыі $y = \sin \frac{x}{2}$ роўны $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

Аналагічна будуюцца графікі і іншых трыганаметрычных функцый кратных вуглоў. На рысунку 223 дадзен графік функцыі



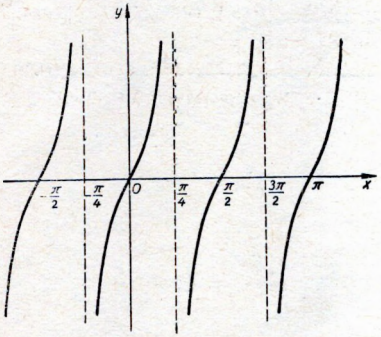
Рыс. 223.

$y = \cos 2x$, які атрымліваецца шляхам «сціскання» касінусоіды $y = \cos x$ у два разы ўздоўж восі абсцыс. Графік функцыі $y = \cos \frac{x}{2}$ (рыс. 224) атрымліваецца шляхам «расцяжэння» касінусоіды $y = \cos x$ у два разы ўздоўж восі x.

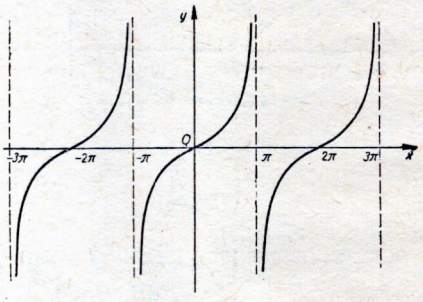


Рыс. 224.

На рысунку 225 вы бачыце графік функцыі $y = \operatorname{tg} 2x$, атрыманы «сціскáннем» тангенсоіды $y = \operatorname{tg} x$ у два разы ўздоўж восі абсцыс, а на рысунку 226 — графік функцыі $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, атрыманы «расцяжэннем» тангенсоіды $y = \operatorname{tg} x$ у два разы ўздоўж восі x.



Рыс. 225.



Рыс. 226.

Практыкаванні

Пабудаваць графікі дадзеных функцый (№ 1174—1181) і знайсці каардынаты пунктаў перасячэння гэтых графікаў з восямі каардынат. Вызначыць перыяды дадзеных функцый:

1174. $y = \sin \frac{4}{3} x$.

1175. $y = \cos \frac{5}{3} x$.

1176. $y = \operatorname{tg} \frac{4}{3} x$

1177. $y = \operatorname{tg} \frac{5}{6} x$.

1178. $y = \operatorname{ctg} \frac{5}{3} x$.

1179. $y = \sin \frac{2}{3} x$.

1180. $y = \cos \frac{2}{3} x$.

1181. $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{3}$.

1182. Вызначыць перыяды функцый $y = \sin \pi x$ і $y = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x$.

1183. Прывядзіце два прыклады функцый, якія прымаюць усе значэнні ад -1 да $+1$ (уключаючы гэтыя два лікі) і змяняюцца перыядычна з перыядам 10.

1184*. Прывядзіце два прыклады функцый, якія прымаюць усе значэнні ад 0 да 1 (уключаючы гэтыя два лікі) і змяняюцца перыядычна з перыядам $\frac{\pi}{2}$.

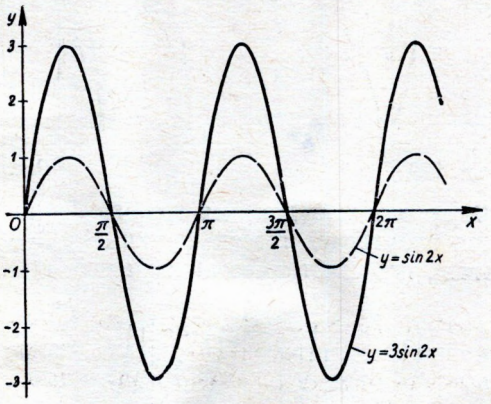
1185. Прывядзіце два прыклады функцый, якія прымаюць усе сапраўдныя значэнні і змяняюцца перыядычна з перыядам 1.

1186*. Прывядзіце два прыклады функцый, якія прымаюць усе адмоўныя значэнні і нуль, але не прымаюць дадатныя значэнні і змяняюцца перыядычна з перыядам 5.

§ 162. Графікі функцый $y = A\sin\omega x$, $y = A\cos\omega x$, $y = A\operatorname{tg}\omega x$, $y = A\operatorname{ctg}\omega x$

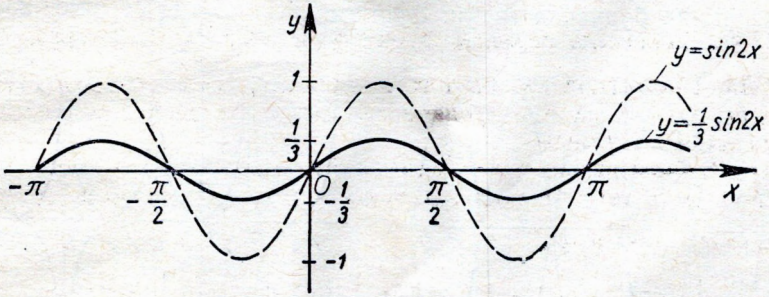
Няхай $A > 0$, тады ўсе значэнні функцыі $y = A\sin\omega x$ у A разоў большыя, чым адпаведныя значэнні функцыі $y = \sin\omega x$. Таму крывая $y = A\sin\omega x$ атрымліваецца шляхам «расцяжэння» крывой $y = \sin\omega x$ у A разоў у вертыкальным напрамку.

Напрыклад, крывая $y = 3\sin 2x$ (рыс. 227) атрымліваецца шляхам «расцяжэння» крывой $y = \sin 2x$ у вертыкальным напрамку ў



Рыс. 227.

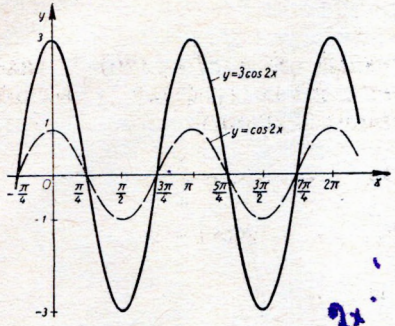
тры разы. Аналагічна крывая $y = \frac{1}{3}\sin 2x$ (рыс. 228) атрымліваецца шляхам «сціскання» крывой $y = \sin 2x$ у вертыкальным напрамку ў тры разы (або шляхам «расцяжэння» ў $\frac{1}{3}$ раза).



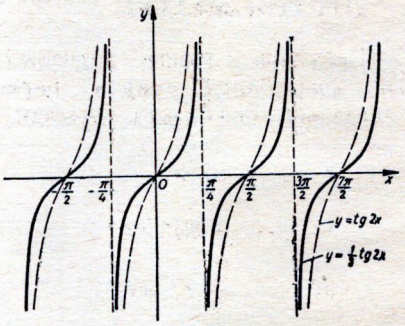
Рыс. 228.

Аналагічна будуюцца і графікі функцый $y = A\cos\omega x$, $y = A\operatorname{ctg}\omega x$, $y = A\operatorname{tg}\omega x$. На рысунку 229 вы бачыце графік функ-

цыі $y = 3\cos 2x$, а на рысунку 230 — графік функцыі $y = \frac{1}{3}\operatorname{tg} 2x$, на рысунку 231 — графік функцыі $y = 3\operatorname{ctg} x$.

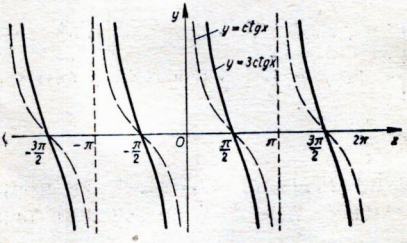


Рыс. 229.



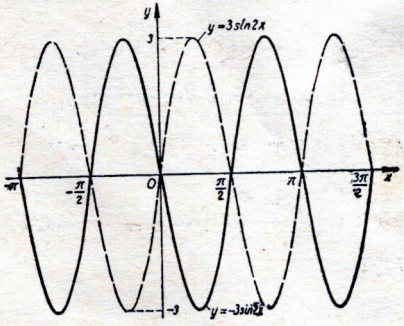
Рыс. 230.

Калі $A < 0$, то для пабудавання графіка функцыі $y = A\sin\omega x$ папярэдне трэба пабудаваць графік функцыі $y = |A|\sin\omega x$, а затым адлюстраваць яго сіметрычна адносна восі x. На рысунку 232,

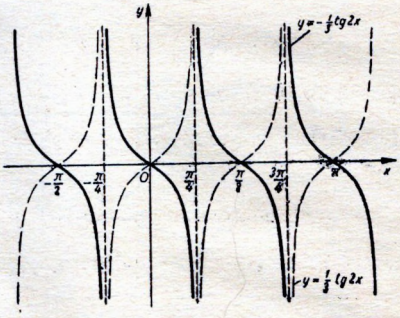


Рыс. 231.

напрыклад, паказана пабудаванне графіка функцыі $y = -3\sin 2x$. Аналагічна будуецца графік функцыі $y = -\frac{1}{3}\operatorname{tg} 2x$ (рыс. 233).



Рыс. 232.



Рыс. 233.

Адзначым, што перыяды функцый $y = A\sin\omega x$, $y = A\cos\omega x$, $y = A\operatorname{tg}\omega x$, $y = A\operatorname{ctg}\omega x$, $(A \neq 0)$ не залежаць ад A.

Практыкаванні

Пабудаваць графікі дадзеных функцый (№ 1187—1196) і ўказаць каардынаты пунктаў перасячэння гэтых графікаў з восямі каардынат. Вызначыць перыяды дадзеных функцый:

1187. $y = \sin 3x$.

1188. $y = -3\sin 2x$.

1189. $y = \frac{1}{2}\sin 3x$.

1190. $y = \frac{1}{2}\sin\left(-\frac{x}{3}\right)$.

1191. $y = -\frac{1}{3}\cos 2x$.

1192. $y = -2\cos\frac{x}{2}$.

1193. $y = -2\cos(-3x)$.

1194. $y = 2\operatorname{tg}\frac{x}{3}$.

1195. $y = -\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x$.

1196. $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(-\frac{x}{3}\right)$.

1197. Прывядзіце два прыклады функцый, якія б прымалі ўсе значэнні ад $-\frac{1}{2}$ да $+\frac{1}{2}$, уключаючы гэтыя два лікі, перыядычна з перыядам $\frac{\pi}{2}$.

1198*. Прывядзіце прыклад функцыі, якая прымае ўсе значэнні, па модулю большыя чым 5, і змяняецца перыядычна з перыядам $\frac{1}{5}$.

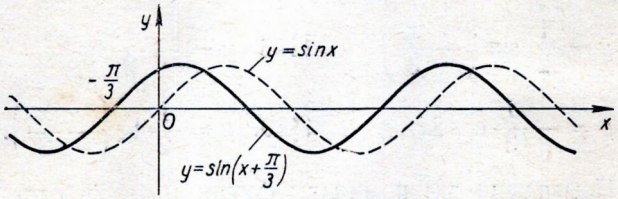
§ 163. Графікі трыганаметрычных функцый $y = A\sin[\omega(x+\alpha)]$, $y = A\cos[\omega(x+\alpha)]$ і г. д.

Пачнём з простага прыкладу. Няхай нам трэба пабудаваць графік функцыі $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. Для гэтага параўнаем дадзеную функцыю з функцыяй $y = \sin x$, графік якой мы ўжо ўмеем будаваць.

Няхай дадзеная функцыя $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ пры $x = x_0$ прымае некаторыя значэнні, роўныя y_0. Тады

$$y_0 = \sin\left(x_0 + \frac{\pi}{3}\right).$$

Але ў такім выпадку функцыя $y = \sin x$ павінна прыняць тое ж самае значэнне y_0 пры $x = x_0 + \frac{\pi}{3}$. Такім чынам, усе значэнні, якія прымае функцыя $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, прымае і функцыя $y = \sin x$. Калі x тлумачыць як час, то можна сказаць, што кожнае значэнне функцыяй $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ прымаецца на $\frac{\pi}{3}$ адзінкі часу раней, чым функцыяй $y = \sin x$. Адсюль вынікае, што графік функцыі $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ атрымліваецца пры дапамозе зрушэння сінусоіды $y = \sin x$ па восі абсцыс улева на $\frac{\pi}{3}$ (рыс. 234).



Рыс. 234

Аналагічна можна было б пабудаваць і графікі такіх функцый, як $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ і г. д.

Заўважым, што з падобнымі задачамі мы ўжо сустракаліся ў § 120, ч. I, пры пабудаванні графіка функцыі

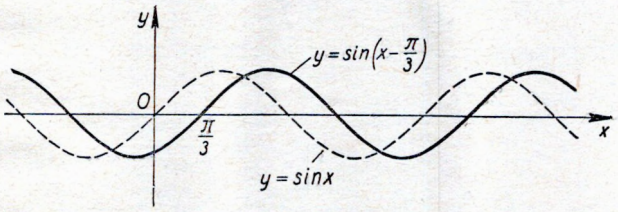
$$y = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Калі б нам трэба было пабудаваць графік функцыі $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, то разважанні, аналагічна прыведзеным вышэй, далі б такі ж рэзультат. Функцыя $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ прымае тыя ж значэнні, што і функцыя $y = \sin x$, толькі са спазненнем у часе (калі аргумент x інтэрпрэтаваць як час) на $\frac{\pi}{3}$. Таму графік функцыі $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ атрымліваецца пры дапамозе зрушэння сінусоіды $y = \sin x$ па восі абсцыс *управа* на $\frac{\pi}{3}$ (рыс. 235).

Аналагічна можна было б пабудаваць і графікі такіх функцый, як $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ і г. д.

Цяпер разгледзім больш складаныя прыклады. Няхай нам трэба пабудаваць графік функцыі

$$y = A \sin [\omega (x + \alpha)].$$

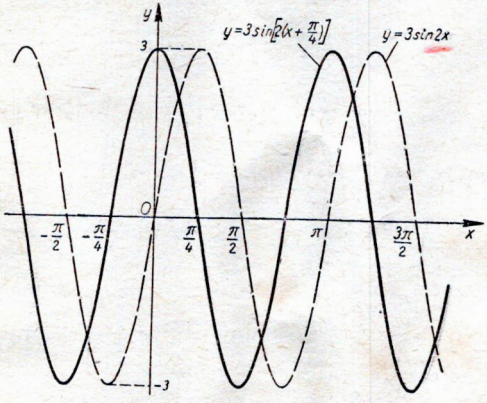


Рыс. 235.

Для гэтага параўнаем дадзеную функцыю з функцыяй $y = A \sin \omega x$, графік якой мы ўжо ўмеем будаваць (гл. § 162). Дапусцім, што функцыя $y = A \sin [\omega (x + \alpha)]$ пры $x = x_0$ прымае некаторае значэнне, роўнае y_0. Тады

$$y_0 = A \sin [\omega (x_0 + \alpha)].$$

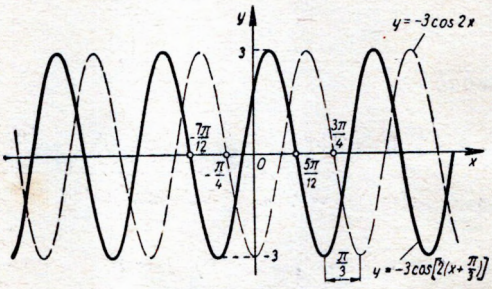
Гэта суадносіна паказвае, што функцыя $y = A \sin \omega x$ пры $x = x_0 + \alpha$ прымае тое ж самае значэнне y_0. Таму ўсе тыя значэнні, якія прымае функцыя $y = A \sin [\omega (x + \alpha)]$, прымае і функцыя $y = A \sin \omega x$. Пры гэтым кожнае значэнне прымаецца першай функцыяй на α адзінак часу (калі x тлумачыць як час) раней, чым другой функцыяй. Але гэта азначае, што графік $y = A \sin [\omega (x + \alpha)]$ атрымліваецца пры дапамозе зрушэння графіка функцыі $y = A \sin \omega x$ па восі абсцыс *улева* на α.



Рыс. 236

Напрыклад, крывая $y = 3\sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]$ атрымліваецца пры дапамозе зрушэння крывой $y = 3\sin 2x$ улева па восі абсцыс на $\frac{\pi}{4}$ (рыс. 236).

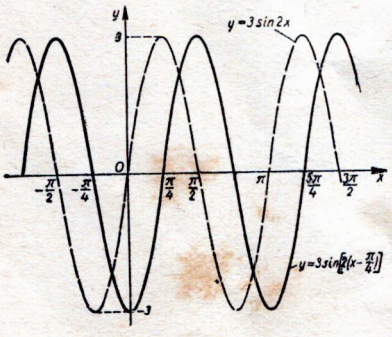
Крывая $y = -3\cos\left[2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right]$ атрымліваецца пры дапамозе зрушэння крывой $y = -3\cos 2x$ улева па восі абсцыс на адлегласць $\frac{\pi}{3}$ (рыс. 237).



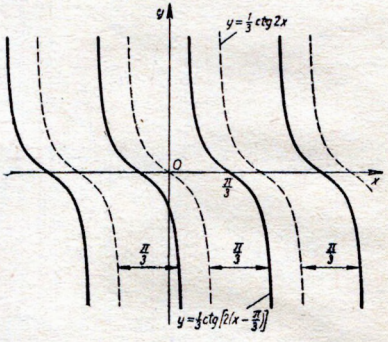
Рыс. 237.

Аналагічна могуць быць пабудаваны графікі такіх функцый, як $y = A\sin[\omega(x - \alpha)]$, $y = A\cos[\omega(x - \alpha)]$ і г. д. Яны атрымліваюцца адпаведна пры дапамозе зрушэння графікаў функцый $y = A\sin\omega x$, $y = A\cos\omega x$ і г. д. *управа* па восі абсцыс на адлегласць α.

На рысунку 238 вы бачыце графік функцыі $y = 3\sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]$, атрыманы пры дапамозе зрушэння графіка функцыі $y = 3\sin 2x$



Рыс. 238.



Рыс. 239.

управа па восі абсцыс на адлегласць $\frac{\pi}{4}$. На рысунку 239 дадзены графік функцыі $y = \frac{1}{3}\operatorname{ctg}\left[2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right]$, атрыманы пры дапамозе зрушэння графіка функцыі $y = \frac{1}{3}\operatorname{ctg} 2x$ управа па восі абсцыс на адлегласць $\frac{\pi}{3}$.

Заўважым, што перыяд функцыі $y = A\sin[\omega(x + \alpha)]$, як і перыяды іншых аналагічных трыганаметрычных функцый, не залежыць ад α.

Практыкаванні

Пабудаваць графікі дадзеных функцый (№ 1199—1205) і ўказаць каардынаты пунктаў перасячэння гэтых графікаў з восямі каардынат. Вызначыць перыяды дадзеных функцый:

1199. а) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; б) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

в) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; г) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$;

д) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; е) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

1200. $y = 2\sin\left[\frac{3}{2}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right]$.

1201. $y = \frac{1}{2}\cos\left[\frac{3}{2}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]$.

1202. $y = -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left[2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right]$

1203. $y = \frac{1}{2}\sin\left[\frac{1}{3}(x - \pi)\right]$.

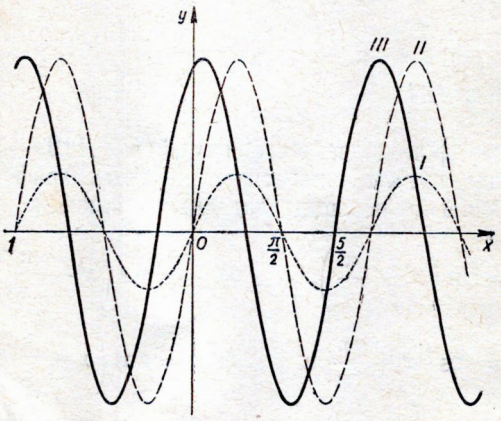
1204. $y = -2\cos\left[\frac{2}{3}(x - \pi)\right]$.

1205. $y = 2\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]$.

§ 164. Графікі функцый $y = A\sin(\omega x + \alpha)$, $y = A\cos(\omega x + \alpha)$ і г. д.

Няхай трэба пабудаваць графік функцыі $y = 3\sin(2x - 5)$. Запішам гэту функцыю ў выглядзе $y = 3\sin\left[2\left(x - \frac{5}{2}\right)\right]$. Пасля гэтага няцяжка зразумець, у якой паслядоўнасці трэба выконваць пабудаванне.

1. «Сціскаючы» сінусоіду $y = \sin x$ па восі x у 2 разы, атрымліваем крывую $y = \sin 2x$ (рыс. 240, крывая I).



Рыс. 240.

2. Шляхам «расцяжэння» крывой $y = \sin 2x$ у вертыкальным напрамку ў 3 разы атрымліваем крывую $y = 3\sin 2x$ (рыс. 240, крывая II).

3. Зрушваючы крывую $y = 3\sin 2x$ управа на адлегласць у $\frac{5}{2}$ адзінкі маштабу, атрымліваем графік функцыі $y = 3\sin(2x - 5)$ (рыс. 240, крывая III).

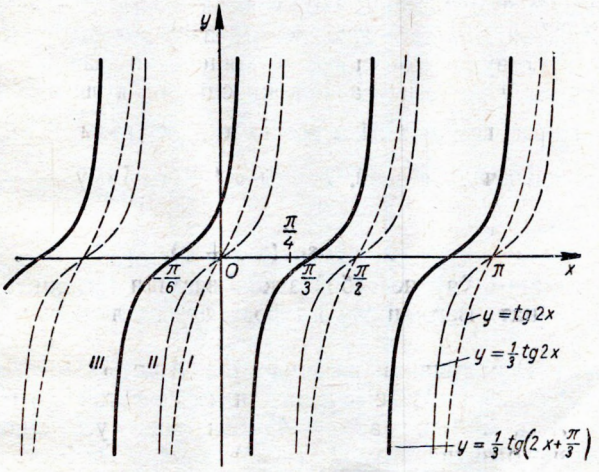
Аналагічна будуецца графік функцыі $y = A\sin(\omega x + \alpha)$ і пры любых іншых значэннях A, ω, α.

На тым жа прынцыпе заснавана пабудаванне графікаў функцый $y = A\cos(\omega x + \alpha)$, $y = A\operatorname{tg}(\omega x + \alpha)$, $y = A\operatorname{ctg}(\omega x + \alpha)$. Напрыклад, для пабудавання графіка функцыі $y = \frac{1}{3}\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ спачатку запішам яе ў выглядзе $y = \frac{1}{3}\operatorname{tg}\left[2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right]$, пасля гэтага:

1) «сціскаючы» тангенсоіду $y = \operatorname{tg} x$ па восі x у два разы, атрымліваем графік функцыі $y = \operatorname{tg} 2x$ (рыс. 241, крывая I);

2) «сціскаючы» крывую $y = \operatorname{tg} 2x$ у вертыкальным напрамку ў тры разы, атрымліваем крывую $y = \frac{1}{3} \operatorname{tg} 2x$ (рыс. 241, крывая II);

3) пераносячы крывую $y = \frac{1}{3} \operatorname{tg} 2x$ улева на адлегласць $\frac{\pi}{6}$, атрымліваем графік функцыі $y = \frac{1}{3} \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ (рыс. 241, крывая III).



Рыс. 241.

Практыкаванні

Пабудаваць графікі дадзеных функцый (№ 1206—1213) і знайсці каардынаты пунктаў перасячэння гэтых графікаў з восямі каардынат. Вызначыць перыяды дадзеных функцый. Якія экстрэмальныя (гэта значыць мінімальныя і максімальныя) значэнні гэтых функцый?

1206. $y = 2\sin(3x - 2)$.

1207. $y = \frac{1}{2} \sin(3x - 3)$.

1208. $y = 2\sin\left(\frac{1}{3}x + \frac{2\pi}{3}\right)$.

1209. $y = 2\cos\left(1 - \frac{x}{2}\right)$.

1210. $y = -\frac{3}{2} \cos(3x + 2)$.

1211. $y = -\frac{1}{2} \cos\left(\frac{1}{3}x - \frac{2\pi}{3}\right)$.

1212. $y = \frac{1}{3} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$.

1213. $y = 3\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$.

§ 165. Гарманічнае ваганне

Няхай пункт M (рыс. 242) рухаецца па акружнасці радыуса A супраць гадзіннікавай стрэлкі раўнамерна з пастаяннай вуглавой скорасцю ω радыянаў у секунду. Калі ў пачатковы момант часу ($t = 0$) гэты пункт займаў становішча M_0, якое вызначаецца вуглом φ, то праз t секунд ён зойме некаторае становішча M, якое вызначаецца вуглом $\omega t + \varphi$.

У той час як пункт M рухаецца па акружнасці, яго праекцыя P на вось ардынат вагаецца ўздоўж дыяметра CD, дасягаючы то найвышэйшага становішча C, то найніжэйшага становішча D. Каб матэматычна апісаць гэта ваганне, выразім ардынату пункта P праз вугал φ, вуглавую скорасць ω і цяперашні час t. Адносіна гэтай ардынаты y да радыуса акружнасці A з'яўляецца сінусам вугла, які ўтварае вектар $\overrightarrow{OM}$ з воссю x. Але гэты вугал у момант часу t, як адзначана вышэй, роўны $\omega t + \varphi$. Таму $\frac{y}{A} = \sin(\omega t + \varphi)$, адкуль

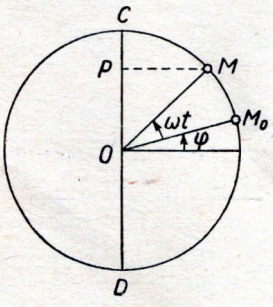
$$y = A \sin(\omega t + \varphi). \qquad (1)$$

Формула (1) і ўяўляе сабой закон вагання праекцыі пункта M на вось ардынат. Ваганні такога роду атрымалі назву *гарманічных ваганняў*.

Формула гарманічнага вагання $y = A \sin(\omega t + \varphi)$ вызначае y як функцыю часу t. Максімальнае значэнне гэтай функцыі роўна, відавочна, A, а мінімальнае $(-A)$. Значыць, усе значэнні гэтай функцыі знаходзяцца паміж $(-A)$ і A. Таму A называецца *амплітудай* вагання.

Пераменны вугал $\omega t + \varphi$ называецца *фазай* вагання. *Пачатковая фаза* вагання φ заўсёды дадатная і меншая 2π.

Час T, на працягу якога пункт M зробіць адзін поўны абарот па акружнасці, называецца *перыядам* гарманічнага вагання. На працягу гэтага перыяду праекцыя P пункта M пройдзе двойчы ўсе свае магчымыя становішчы і вернецца ў першапачатковае становішча. Выключэнне складаюць толькі граничныя становішчы C і D (гл. рыс. 242), кожнае з якіх пункт M пройдзе адзін раз.



Рыс. 242.

Выразім перыяд гарманічнага вагання T праз амплітуду A, вуглавую скорасць ω і пачатковую фазу φ.

За час T пункт M пройдзе шлях ωT радыянаў. Але гэты шлях разам з тым роўны даўжыні акружнасці, гэта значыць 2π радыянаў. Таму $\omega T = 2\pi$, адкуль

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \qquad (2)$$

Такім чынам, ***перыяд гарманічнага вагання адваротна прапарцыянальны вуглавой скорасці. Ён не залежыць ні ад амплітуды, ні ад пачатковай фазы ваганняў.***

Перыяд гарманічнага вагання (1) з'яўляецца перыядам функцыі $y = A\sin(\omega t + \varphi)$. Сапраўды,

$$A\sin[\omega(t+T)+\varphi] = A\sin\left[\omega\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi\right] =$$
$$= A\sin[\omega t + \varphi + 2\pi] = A\sin(\omega t + \varphi).$$

Гэта можна было б зразумець, вядома, і без выкананых пераўтварэнняў. У момант жа часу $t+T$ пункт P вяртаецца ў тое ж самае становішча, якое ён займаў у момант часу t. А значэнні функцыі $A\sin(\omega t + \varphi)$ з'яўляюцца ардынатамі пункта P.

Велічыню, адваротную перыяду вагання, прынята называць *частатой* вагання і абазначаць літарай ν*. Частата гарманічнага вагання (1) роўна

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \qquad (3)$$

Гэта велічыня паказвае, колькі ваганняў зробіць пункт на працягу адной секунды.

Вуглавая скорасць ω выражаецца праз частату ν і перыяд вагання T наступным чынам, гл. (3):

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}.$$

Таму ўраўненне гарманічнага вагання (1) часта запісваюць у выглядзе

$$y = A\sin(2\pi\nu t + \varphi),$$

або

$$y = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right).$$

Практыкаванні

1214. Для кожнага з дадзеных гарманічных ваганняў вызначыць амплітуду A, перыяд T, частату ν і пачатковую фазу φ:

а) $y = \frac{1}{2}\sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$; в) $y = 3\cos 3t$;

б) $y = 7\sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$; г) $y = 2\sin(3\pi t + 1)$.

---

* ν — грэчаская літара; чытаецца: ню.

1215. Якія лікавыя значэнні могуць прымаць амплітуда, частата і пачатковая фаза гарманічнага вагання?

Пабудаваць графікі дадзеных гарманічных ваганняў (№ 1216, 1217):

1216. $y = 3\sin\left(2t + \frac{4\pi}{3}\right)$.

1217. $y = \frac{1}{2}\sin\left(3t + \frac{6\pi}{5}\right)$.

1218. Які ўплыў на графік гарманічнага вагання робіць амплітуда і частата гэтага вагання?

§ 166. Гарманічнае ваганне ў электратэхніцы

Электрычны ток, якім жывяцца гарадскія асвятляльныя сеткі, з'яўляецца пераменным токам. Яго велічыня I пастаянна змяняецца, робячы гарманічнае ваганне.

$$I = I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right), \qquad (1)$$

дзе I_0 — максімальнае значэнне току, T — перыяд вагання, φ — пачатковая фаза.

Высветлім, у якія моманты часу ток дасягае экстрэмальнай (гэта значыць мінімальнай або максімальнай) велічыні і калі яго велічыня ператвараецца ў нуль.

Як вынікае з формулы (1), сваёй мінімальнай велічыні сіла току дасягае пры ўмове, што $\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) = -1$. Гэта ўраўненне дае $\frac{2\pi}{T}t + \varphi = \frac{3}{2}\pi + 2n\pi$, адкуль

$$t = T\left(n + \frac{3}{4} - \frac{\varphi}{2\pi}\right). \qquad (2)$$

Калі $\frac{3}{4} > \frac{\varphi}{2\pi}$, або $\varphi < \frac{3}{2}\pi$, то першы момант мінімуму можна атрымаць з формулы (2) пры $n = 0$:

$$t_1 = T\left(\frac{3}{4} - \frac{\varphi}{2\pi}\right).$$

Калі ж $\frac{3}{4} \leqslant \frac{\varphi}{2\pi}$, або $\varphi \geqslant \frac{3}{2}\pi$, то першы момант мінімуму атрымліваецца з (2) пры $n = 1$:

$$t_1 = T\left(\frac{7}{4} - \frac{\varphi}{2\pi}\right).$$

Кожны наступны момант мінімуму наступае праз T секунд пасля папярэдняга моманту мінімуму (дакажыце гэта!).

Сваёй максімальнай велічыні ток I дасягае пры ўмове, што $\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) = 1$. Гэта ўраўненне дае $\frac{2\pi}{T}t + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, адкуль

$$t = T\left(n + \frac{1}{4} - \frac{\varphi}{2\pi}\right). \tag{3}$$

Калі $\frac{1}{4} > \frac{\varphi}{2\pi}$, або $\varphi < \frac{\pi}{2}$, то першы момант максімуму можна атрымаць з формулы (3) пры $n = 0$:

$$t_1 = T\left(\frac{1}{4} - \frac{\varphi}{2\pi}\right).$$

Калі ж $\frac{1}{4} \leqslant \frac{\varphi}{2\pi}$, або $\varphi \geqslant \frac{\pi}{2}$, то першы момант максімуму атрымліваецца з (3) пры $n = 1$:

$$t_1 = T\left(\frac{5}{4} - \frac{\varphi}{2\pi}\right).$$

Кожны наступны момант максімуму наступае праз T секунд пасля папярэдняга моманту максімуму (дакажыце гэта!).

Цяпер высветлім, у якія моманты часу велічыня току I ператвараецца ў нуль. Для гэтага трэба рашыць ураўненне

$$\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) = 0,$$

якое дае

$$\frac{2\pi}{T}t + \varphi = n\pi,$$

адкуль

$$t = \frac{T}{2}\left(n - \frac{\varphi}{\pi}\right). \tag{4}$$

Так, упершыню велічыня току стане нулявой у момант часу

$$t = \frac{T}{2}\left(1 - \frac{\varphi}{\pi}\right),$$

калі $\varphi < \pi$, і ў момант часу

$$t = \frac{T}{2}\left(2 - \frac{\varphi}{2\pi}\right),$$

калі $\varphi \geqslant \pi$. Кожны наступны такі момант наступае праз $\frac{T}{2}$ секунд пасля папярэдняга (дакажыце гэта!).

Практыкаванні

1219. Ці ведаеце вы, якая частата вагання току ў вашых асвятляльных сетках?

1220. У якія моманты часу велічыня y, што змяняецца па закону

$$y = \sin\left(\frac{\pi t}{2} + \frac{2\pi}{3}\right),$$

прымае экстрэмальныя (гэта значыць мінімальныя або максімальныя) значэнні і калі яна ператвараецца ў нуль?

1221. Тое ж, што і ў задачы 1220 для законаў ваганняў:

а) $y = 2\sin\left(3t + \frac{\pi}{5}\right)$;

б) $y = 7\sin\left(2t + \frac{5}{6}\pi\right)$.

§ 167. Пераўтварэнне выразу $a\sin x + b\cos x$ шляхам увядзення дапаможнага вугла

Лема. ***Калі сума квадратаў двух сапраўдных лікаў роўна адзінцы, то адзін з гэтых лікаў можна разглядаць як косінус, а другі як сінус некатарага вугла.***

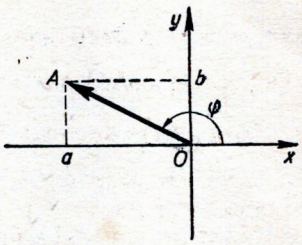
Іншымі словамі, калі $a^2 + b^2 = 1$, то існуе вугал φ такі, што $a = \cos\varphi$; $b = \sin\varphi$.

Перш чым даказваць гэту лему, растлумачым яе на наступным прыкладзе:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

Таму існуе вугал φ такі, што $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\varphi$; $\frac{1}{2} = \sin\varphi$. У якасці φ у дадзеным выпадку можна выбраць любы з вуглоў $30°$, $30° \pm 360°$; $30° \pm 2 \cdot 360°$ і г. д.

Доказ. Разгледзім вектар $\overrightarrow{OA}$ (рыс. 243) з каардынатамі (a, b). Паколькі $a^2 + b^2 = 1$, то даўжыня гэтага вектара роўна 1. Але ў такім выпадку яго каардынаты павінны быць роўны $\cos\varphi$ і $\sin\varphi$, дзе φ — вугал, які ўтварае дадзены вектар з воссю абсцыс. Такім чынам, $a = \cos\varphi$, $b = \sin\varphi$, што і трэба было даказаць.



Рыс. 243.

Даказаная лема дазваляе пераўтварыць выраз $a\sin x + b\cos x$ да больш простага для вывучэння выгляду.

Перш за ўсё вынесем за дужкі выраз $\sqrt{a^2 + b^2}$.

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \times$$
$$\times \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos x\right).$$

Паколькі $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$, першы з лікаў $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ і $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ можна разглядаць як косінус некаторага вугла φ, а другі як сінус таго ж вугла φ:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos\varphi, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin\varphi.$$

Але ў такім выпадку

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}(\cos\varphi\sin x + \sin\varphi\cos x) =$$
$$= \sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + \varphi).$$

Такім чынам,

$$\boldsymbol{a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + \varphi),}$$

дзе вугал φ вызначаецца з умоў:

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Прыклады.

1) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{3 + 1}\sin(x + \varphi) = 2\sin(x + \varphi)$, дзе вугал φ вызначаецца з умоў: $\sin\varphi = \frac{1}{2}$; $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

У дадзеным выпадку ў якасці φ можна выбраць вугал у $30°$. (Вядома, у якасці φ можна было б узяць і любы з вуглоў $30° + 360°$, $30° + 2 \cdot 360°$ і г. д.)

Такім чынам, $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2\sin(x + 30°)$.

2) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) =$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin x + \sin\frac{\pi}{4}\cos x\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Атрыманую формулу

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

карысна запомніць: з ёй нам давядзецца яшчэ неаднаразова сустракацца.

Практыкаванні

Пераўтварыць дадзеныя выразы (№ 1222—1229) шляхам увядзення дапаможнага вугла:

1222. $\sin x + \sqrt{3}\cos x$.

1223. $\sin x - \cos x$.

1224. $3\sin x + 4\cos x$.

1225. $4\sin x - 3\cos x$.

1226. $5\sin x - 13\cos x$.

1227. $-7\sin 2x - 24\cos 2x$.

1228. $3\sin 3x + 2\sqrt{2}\cos 3x$.

1229. $\sin 5x + \cos 5x$.

1230. Якое найбольшае і якое найменшае значэнне можа прымаць кожны з дадзеных выразаў:

а) $3\sin x + 4\cos x$;

б) $|3\sin x - 4\cos x|$;

в) $-5\sin x + 12\cos x$;

г) $5 - 7\sin x - 24\cos x$;

д) $\sqrt{\sin x - \cos x}$;

е) $\frac{1}{|\sin x + \cos x|}$?

1231. Даказаць, што ўраўненне

$$\sqrt{99}\sin x - 49\cos x = 51$$

не мае кораняў.

Пабудаваць графікі дадзеных функцый (№ 1232, 1233):

1232. $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x$.

1233. $y = \sin 2x - \cos 2x$.

§ 168. Складанне гарманічных ваганняў аднолькавай частаты

На практыцы (напрыклад, у электратэхніцы) часта даводзіцца мець справу з ваганнямі аднолькавай частаты. Любыя два такія ваганні можна запісаць у выглядзе

$$y_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1); \quad y_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Асабліва цікавым з'яўляецца выпадак, калі пачатковая фаза першага вагання роўна 0, а пачатковая фаза другога вагання роўна $\frac{\pi}{2}$. Тады $y_1 = A_1 \sin \omega t$; $y_2 = A_2 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = A_2 \cos \omega t$.

Сума такіх гарманічных ваганняў роўна

$$A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \cdot \sin(\omega t + \varphi), \qquad (1)$$

дзе вугал φ вызначаецца з умоў:

$$\sin \varphi = \frac{A_2}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}; \quad \cos \varphi = \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}. \qquad (2)$$

Формула (1) паказвае, што ***калі два гарманічныя ваганні маюць аднолькавую частату і фазы 0 і $\frac{\pi}{2}$, то іх сума ёсць гарманічнае ваганне той жа частаты.***

Амплітуда A сумарнага вагання выражаецца праз амплітуды A_1 і A_2 складваемых ваганняў па формуле

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2},$$

а пачатковая фаза φ вызначаецца з умоў (2).

Прыклад. Знайсці амплітуду, частату і пачатковую фазу вагання

$$y = \sin 5t - \sqrt{3} \cos 5t.$$

Маем: $\sin 5t - \sqrt{3} \cos 5t = \sqrt{1+3} \cdot \sin(5t + \varphi) = 2\sin(5t + \varphi)$, прычым $\sin \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos \varphi = \frac{1}{2}$. Таму $\varphi = \frac{5\pi}{3}$ і, значыць,

$$\sin 5t - \sqrt{3} \cos 5t = 2\sin\left(5t + \frac{5\pi}{3}\right).$$

Амплітуда дадзенага вагання роўна 2, частата $\frac{5}{2\pi}$, а пачатковая фаза $\frac{5\pi}{3}$.

Практыкаванні

Для кожнага з дадзеных гарманічных ваганняў (№ 1234—1237) знайсці амплітуду, частату і пачатковую фазу. Пабудаваць графікі гэтых ваганняў:

1234. $y = \sin 2t - \cos 2t$. **1236.** $y = 4\sin \pi t + 3\cos \pi t$.

1235. $y = \sqrt{3} \sin 3t + \cos 3t$. **1237.** $y = 7\sin x - 24\cos x$.

1238. Даказаць, што сума двух адвольных гарманічных ваганняў аднолькавай частаты ёсць гарманічнае ваганне той жа частаты. Як вызначаецца амплітуда, частата і пачатковая фаза сумарнага вагання праз адпаведныя характарыстыкі складаемых ваганняў?

1239. У майстэрні ўстаноўлены два рухавікі. Пры ўключэнні аднаго з іх кожны пункт падлогі прыходзіць у гарманічныя ваганні з амплітудай 0,1 *мм* і частатой 1400 *1/мін*. Пры ўключэнні другога кожны пункт падлогі пачынае гарманічна вагацца з той жа амплітудай і частатой 1450 *1/мін*. Як будзе вагацца падлога пры ўключэнні абодвух электрарухавікоў?

§ 169. Доказ трыганаметрычных тоеснасцей

Існуе шмат розных спосабаў доказу трыганаметрычных тоеснасцей. На канкрэтных прыкладах мы разгледзім некаторыя з гэтых спосабаў.

Прыклад 1. Даказаць тоеснасць

$$\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right). \qquad (1)$$

1-ы спосаб. Выраз, які стаіць у левай частцы гэтай тоеснасці, пераўтворым так, каб ён прывёўся да выгляду $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$. Для гэтага запішам $\cos\alpha$ як $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$. Тады, скарыстоўваючы формулы для сумы і рознасці сінусаў двух вуглоў, атрымаем

$$\cos\alpha + \sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin\alpha = 2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4} =$$

$$= \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right);$$

$$\cos\alpha - \sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \sin\alpha = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right).$$

Таму

$$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}=\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right).$$

2-і спосаб. Выраз $\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$, які стаіць у правай частцы дадзенай тоеснасці, пераўтворым да выгляду $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$. Для гэтага скарыстаем формулу для тангенса сумы двух вуглоў.

$$\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+1}{1-\operatorname{tg}\alpha}=$$

$$=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+1}{1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}.$$

Аднак тут неабходна зрабіць адну прынцыпова важную заўвагу. Калі мы пісалі, што $\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}$, то фактычна дапускалі, што выраз $\operatorname{tg}\alpha$ вызначаны, гэта значыць $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+n\pi$. На самай жа справе гэта дапушчэнне можа быць няправільным. Таму выпадак, калі $\alpha=\frac{\pi}{2}+n\pi$, трэба разгледзець асобна. У гэтым выпадку $\cos\alpha=0$, і таму левая частка дадзенай тоеснасці прымае выгляд:

$$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{-\sin\alpha}=-1.$$

Правая ж частка дадзенай тоеснасці пры $\alpha=\frac{\pi}{2}+n\pi$ пераўтвараецца ў $\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{3}{4}\pi+n\pi\right)$. Але π ёсць перыяд тангенса,

значыць,

$$\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}\frac{3}{4}\pi=-1.$$

Такім чынам, і пры $\alpha=\frac{\pi}{2}+n\pi$ роўнасць (1) справядлівая.

Цяпер можна лічыць, што дадзеная тоеснасць поўнасцю даказана.

3-і с п о с а б. Выразы, якія стаяць у левай і правай частках дадзенай тоеснасці, пераўтворым да аднаго і таго ж выгляду. Для гэтага лічнік і назоўнік дробу $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$ падзелім на $\cos\alpha$, дапускаючы спачатку, што $\cos\alpha\neq 0$.

У выніку атрымаем

$$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}. \qquad (2)$$

Правую частку дадзенай тоеснасці пераўтворым, скарыстоўваючы формулу для тангенса сумы двух вуглоў:

$$\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+1}{1-\operatorname{tg}\alpha}. \qquad (3)$$

Параўноўваючы (2) і (3), атрымліваем:

$$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right).$$

Выпадак, калі $\cos\alpha=0$, трэба разгледзець асобна, гэтак жа, як мы зрабілі пры разглядзе спосабу 2.

П р ы к л а д 2. Даказаць тоеснасць

$$\cos 3\alpha\cdot\sin 5\alpha-\sin 2\alpha=\sin 3\alpha\cdot\cos 5\alpha.$$

Пакажам, што рознасць паміж выразамі, якія стаяць у левай і правай частках дадзенай тоеснасці, роўна 0. Сапраўды,

$$\begin{aligned}&\cos 3\alpha\cdot\sin 5\alpha-\sin 2\alpha-\sin 3\alpha\cdot\cos 5\alpha=\\&=(\cos 3\alpha\cdot\sin 5\alpha-\sin 3\alpha\cdot\cos 5\alpha)-\sin 2\alpha=\\&=\sin(5\alpha-3\alpha)-\sin 2\alpha=\sin 2\alpha-\sin 2\alpha=0.\end{aligned}$$

Тым самым тоеснасць даказана.

Практыкаванні

Даказаць дадзеныя тоеснасці:

1240. $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}=\cos\alpha\cdot\cos\beta.$

1241. $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\sin 2\alpha.$

1242. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}.$

1243. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{2\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}.$

1244. $\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right).$

1245. $\dfrac{\sin(30^\circ+\alpha)-\cos(60^\circ+\alpha)}{\sin(30^\circ+\alpha)+\cos(60^\circ+\alpha)}=\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha.$

1246. $\cos 4\alpha\cdot\cos 6\alpha-\cos 10\alpha=\sin 4\alpha\cdot\sin 6\alpha.$

1247. $-4\operatorname{ctg}2\alpha=\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}.$

§ 170. Тоеснасці, якія змяшчаюць выразы $\arcsin a$, $\arccos a$ і г. д.

Няхай трэба даказаць тоеснасць

$$\operatorname{arc\,tg}2+\operatorname{arc\,tg}3=\frac{3}{4}\pi.$$

Перш за ўсё высветлім, у якіх межах знаходзіцца вугал $\operatorname{arc\,tg}2+\operatorname{arc\,tg}3$. Кожны з вуглоў $\operatorname{arc\,tg}2+\operatorname{arc\,tg}3$ больш 0 і менш $\frac{\pi}{2}$. Таму

$$0<\operatorname{arc\,tg}2+\operatorname{arc\,tg}3<\pi.$$

Аналагічнай няроўнасці задавальняе і вугал $\frac{3}{4}\pi$:

$$0<\frac{3}{4}\pi<\pi.$$

Такім чынам, вуглы $\operatorname{arc\,tg}2 + \operatorname{arc\,tg}3$ і $\frac{3}{4}\pi$ знаходзяцца ў інтэрвале ад 0 да π. Але ў такім выпадку для доказу іх роўнасці дастаткова паказаць, што роўны іх тангенсы.

Маем:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}2 + \operatorname{arc\,tg}3) = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}2) + \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}3)}{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}2) \cdot \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}3)} =$$

$$= \frac{2+3}{1-2\cdot 3} = -1; \quad \operatorname{tg}\frac{3}{4}\pi = -1.$$

Тым самым дадзеная тоеснасць даказана.

Заўважым, што знаходжанне тых межаў, у якіх заключана сума $\operatorname{arc\,tg}2 + \operatorname{arc\,tg}3$, з'яўляецца абавязковым. Нельга рабіць вывад, што $\operatorname{arc\,tg}2 + \operatorname{arc\,tg}3 = \frac{3}{4}\pi$ на аснове таго толькі, што $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}2 + \operatorname{arc\,tg}3) = \operatorname{tg}\frac{3}{4}\pi$. З роўнасці тангенсаў двух вуглоў яшчэ не вынікае, што роўны самыя гэтыя вуглы. Аднак, калі вуглы знаходзяцца ў межах ад 0 да π, то роўнасць іх тангенсаў забяспечвае роўнасць і саміх вуглоў.

Практыкаванні

Даказаць дадзеныя тоеснасці:

1248. $\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{4} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$.

1249. $\operatorname{arc\,tg}5 + \operatorname{arc\,tg}\frac{1-5\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$.

1250. $\operatorname{arc\sin}0{,}6 + \operatorname{arc\sin}0{,}8 = \frac{\pi}{2}$

1251. $\operatorname{arc\cos}\frac{5}{13} - \operatorname{arc\cos}\frac{12}{13} = \operatorname{arc\cos}\frac{120}{169}$.

1252. $\operatorname{arc\sin}0{,}8 + \operatorname{arc\cos}\frac{4}{5} = \frac{\pi}{2}$.

1253. $\operatorname{arc\sin}0{,}8 - \operatorname{arc\cos}0{,}6 = 0$.

§ 171. Трыганаметрычныя ўраўненні

У гэтым раздзеле быў атрыманы рад важных трыганаметрычных тоеснасцей. Цяпер на канкрэтных прыкладах мы пакажам, як гэтыя тоеснасці можна выкарыстаць для рашэння трыганаметрычных ураўненняў.

Прыклад 1. Рашыць ураўненне $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -2$.

Выкарыстоўваючы формулу для тангенсаў сумы двух вуглоў, атрымліваем

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} x} = \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}.$$

Таму дадзенае ўраўненне можна перапісаць у выглядзе:

$$\operatorname{tg} x + \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = -2.$$

Абазначыўшы $\operatorname{tg} x$ праз y, мы прыходзім да алгебраічнага ўраўнення:

$$y + \frac{1 + y}{1 - y} = -2,$$

або

$$y(1 - y) + 1 + y = -2(1 - y),$$

адкуль

$$y = \pm\sqrt{3}.$$

Такім чынам, або $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ і тады $x = \frac{\pi}{3} + n\pi$, або $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ і тады $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, дзе n і k — любыя цэлыя лікі. Абедзве гэтыя групы рашэнняў можна запісаць адной формулай $x = \pm\frac{\pi}{3} + n\pi$.

Адказ. $x = \pm\frac{\pi}{3} + n\pi$.

Прыклад 2. Рашыць ураўненне $3\cos 2x = 7\sin x$.

Запішам $\cos 2x$ у выглядзе $\cos^2 x - \sin^2 x$. Тады дадзенае ўраўненне можна запісаць у выглядзе:

$$3(\cos^2 x - \sin^2 x) = 7\sin x.$$

Замяняючы $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$, атрымліваем

$$3(1 - 2\sin^2 x) = 7\sin x.$$

Абазначыўшы $\sin x$ праз y, прыходзім да наступнага квадратнага ўраўнення: $-6y^2 - 7y + 3 = 0$, адкуль $y_1 = \frac{1}{3}$; $y_2 = -\frac{3}{2}$. Успомніўшы, што $y = \sin x$, атрымліваем: або $\sin x = \frac{1}{3}$, або $\sin x = -\frac{3}{2}$. Але другое немагчыма: сінус любога вугла па абсалютнай велічыні не перавышае адзінкі.

Таму $\sin x = \frac{1}{3}$, адкуль $x = (-1)^n \operatorname{arc}\sin\frac{1}{3} + n\pi$, дзе n — любы цэлы лік.

Прыклад 3. Рашыць ураўненне $2\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{3}{2}\sin 2x$.

Прадставіўшы $\sin 2x$ у выглядзе $2\sin x \cdot \cos x$, прыйдзем да аднароднага ўраўнення $2\sin^2 x + \cos^2 x = 3\sin x \cdot \cos x$.

Падзяліўшы абедзве часткі гэтага ўраўнення на $\cos^2 x$, атрымаем

$$2\operatorname{tg}^2 x + 1 = 3\operatorname{tg} x.$$

Адсюль

$$(\operatorname{tg} x)_1 = 1, \text{ або } x = \frac{\pi}{4} + n\pi;$$

$$(\operatorname{tg} x)_2 = \frac{1}{2}, \text{ або } x = \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{2} + k\pi.$$

Адказ. $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$, $x = \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{2} + k\pi$, дзе n і k — любыя цэлыя лікі.

Прыклад 4. Рашыць ураўненне $\cos 4x \cdot \cos 2x = \cos 5x \cdot \cos x$.

Запішам здабыткі $\cos 4x \cdot \cos 2x$ і $\cos 5x \cdot \cos x$ у выглядзе сум (гл. § 157):

$$\cos 4x \cdot \cos 2x = \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 2x),$$

$$\cos 5x \cdot \cos x = \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 4x).$$

Тады дадзенае ўраўненне можна перапісаць у выглядзе:

$$\frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 2x) = \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 4x).$$

Адсюль

$$\cos 2x = \cos 4x,$$

$$\cos 2x - \cos 4x = 0,$$

$$-2\sin 3x \cdot \sin(-x) = 0,$$

$$2\sin 3x \cdot \sin x = 0.$$

Таму або $\sin x = 0$ і тады $x = n\pi$, або $\sin 3x = 0$ і тады $3x = k\pi$; $x = \frac{k\pi}{3}$. Відавочна, што абедзве групы кораняў можна запісаць адной формулай $x = \frac{\pi}{3} m$.

Адказ. $x = \frac{\pi}{3} m$.

Прыклад 5. Рашыць ураўненне $1 + \cos x + \sin x = 0$.

Запішам $1 + \cos x$ як $2\cos^2 \frac{x}{2}$, а $\sin x$ як $2\sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$.

Тады дадзенае ўраўненне можна запісаць у выглядзе:

$$2\cos^2 \frac{x}{2} + 2\sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = 0.$$

Таму

$$2\cos \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right) = 0.$$

Калі $\cos \frac{x}{2} = 0$, то $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi$ і, значыць, $x = \pi + 2n\pi$.

Калі $\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} = 0$ (аднароднае ўраўненне), то $1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0$, адкуль $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -1$, $\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + k\pi$. Значыць, $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Адказ. $x = \pi + 2n\pi$; $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, дзе n і k — любыя цэлыя лікі.

Прыклад 6. Рашыць ураўненне $\cos 2x = \cos 6x$.

Перапішам дадзенае ўраўненне ў выглядзе $\cos 2x - \cos 6x = 0$ і скарыстаем формулу для рознасці косінусаў двух вуглоў. У рэзультаце атрымаем

$$-2\sin \frac{2x + 6x}{2} \cdot \sin \frac{2x - 6x}{2} = 0,$$

або

$$2\sin 4x \cdot \sin 2x = 0.$$

У такім выпадку або $\sin 2x = 0$ і тады $2x = m\pi$, $x = \frac{\pi}{2} m$, або $\sin 4x = 0$ і тады $4x = k\pi$; $x = \frac{\pi}{4} k$. Абедзве групы кораняў можна запісаць адной формулай $x = \frac{\pi}{4} k$.

Адказ. $x = \frac{\pi}{4} k$.

Прыклад 7. Рашыць ураўненне $\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x = 0$.

Скарыстоўваючы формулу для рознасці тангенсаў двух вуглоў, атрымліваем

$$\frac{\sin 2x}{\cos 3x \cdot \cos x} = 0,$$

адкуль $\sin 2x = 0$, $2x = m\pi$, $x = \frac{\pi}{2} m$. З гэтых значэнняў x трэба адкінуць як пабочныя тыя, пры якіх хоць бы адзін з выразаў $\cos 3x$ і $\cos x$ ператвараецца ў нуль. Выраз $\cos x$ ператвараецца ў нуль пры $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Таму з атрыманых раней значэнняў $x = \frac{\pi}{2} m$ застаюцца толькі значэнні $x = m\pi$. Выраз $\cos 3x$ ператвараецца ў нуль пры ўмове, што $3x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, або $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} k = \frac{\pi}{6}(2k + 1)$. Лік $(2k + 1)$ няцотны, а лік 6 цотны. Таму лік $\frac{2k + 1}{6}$ не можа быць цэлым і, такім чынам, значэнні $x = \frac{2k + 1}{6}\pi$ не змяшчаюцца сярод значэнняў $x = m\pi$. Такім чынам, усе лікі выгляду $x = m\pi$ з'яўляюцца коранямі дадзенага ўраўнення.

Адказ. $x = m\pi$.

Прыклад 8. Рашыць ураўненне $\sin^2 2x + \sin^2 x = 1$.

З тоеснасці $1 - \cos\alpha = 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}$ вынікае, што

$$\sin^2 2x = \frac{1 - \cos 4x}{2}; \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

Таму дадзенае ўраўненне можна перапісаць у выглядзе:

$$\frac{1 - \cos 4x}{2} + \frac{1 - \cos 2x}{2} = 1,$$

адкуль

$$\cos 4x + \cos 2x = 0.$$

Гэта ўраўненне лёгка рашаецца з дапамогай формулы для сумы косінусаў двух вуглоў, з якой атрымліваем

$$2\cos 3x \cdot \cos x = 0.$$

Калі $\cos x = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$; калі ж $\cos 3x = 0$, то $3x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, адкуль $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k$. Няцяжка зразумець, што другая група кораняў $\left(x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k\right)$ пры $k = 3n + 1$ змяшчае ў сабе ўсе карані першай групы $\left(x = \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$. Таму адказ да дадзенай задачы можна выразіць адной формулай: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k$.

Прыклад 9. Рашыць ураўненне $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$.

Пераўтворым выраз $\sin x - \sqrt{3}\cos x$, увёўшы дапаможны вугал (гл. § 167): $\sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} \times$

$$\times \left[\frac{1}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}}\cos x\right] =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\sin x - \sin\frac{\pi}{3}\cos x\right) =$$

$$= 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

Цяпер дадзенае ўраўненне можна запісаць у выглядзе:

$$2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1,$$

адкуль $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ і, значыць, $x - \frac{\pi}{3} = (-1)^n\frac{\pi}{6} + n\pi$,

$x = \frac{\pi}{3} + (-1)^n\frac{\pi}{6} + n\pi$.

Адказ. $x = \frac{\pi}{3} + (-1)^n\frac{\pi}{6} + n\pi$.

Прыклад 10. Рашыць ураўненне $5\sin x - \cos x = 5$.

Гэта ўраўненне ў прынцыпе можна рашаць тым жа спосабам, што і папярэдняе ўраўненне:

$$\sqrt{26}\left(\frac{5}{\sqrt{26}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{26}}\cos x\right)=5,\qquad \sqrt{26}\sin(x-\varphi)=5,$$

дзе

$$\cos\varphi=\frac{5}{\sqrt{26}},\quad \sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{26}},$$

або

$$\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}.$$

Таму

$$\sin\left(x-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}\right)=\frac{5}{\sqrt{26}},$$

адкуль

$$x-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}=(-1)^n\operatorname{arc\,sin}\frac{5}{\sqrt{26}}+n\pi,$$

$$x=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}+(-1)^n\operatorname{arc\,sin}\frac{5}{\sqrt{26}}+n\pi.$$

У дадзеным выпадку лепш скарыстаць іншы метад рашэння, які прыводзіць да больш простага адказу. Увядзём у разгляд новую пераменную $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2y}{1+y^2},$$

$$\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-y^2}{1+y^2}.$$

Тады дадзенае ўраўненне можна перапісаць у выглядзе:

$$\frac{10y}{1+y^2}-\frac{1-y^2}{1+y^2}=5,$$

адкуль

$$10y-1+y^2=5(1+y^2),$$

$$4y^2-10y+6=0,\ y_1=1,\ y_2=\frac{3}{2}.$$

Успамінаючы, што $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, атрымліваем

$$\left(\frac{x}{2}\right)_1 = \frac{\pi}{4} + n\pi; \quad \left(\frac{x}{2}\right)_2 = \operatorname{arc\,tg}\frac{3}{2} + k\pi.$$

Значыць, дадзенае ўраўненне мае дзве групы кораняў:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \text{ і } x = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{2} + 2k\pi,$$

дзе n і k — любыя цэлыя лікі.

Тыя, хто жадае, могуць праверыць, што адказы, атрыманыя двума рознымі спосабамі, выражаюць адзін і той жа рэзультат.

Практыкаванні

Рашыць ураўненні:

1254. $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1.$

1255. $\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \frac{1}{2}\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

1256. $\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - 0{,}5\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x.$

1257. $\cos 2x \cdot \cos x = \sin 2x \cdot \sin x.$

1258. $\sin\alpha \cdot \cos(\alpha + x) = \cos\alpha \cdot \sin(\alpha + x).$

1259. $\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0.$

1260. $\operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{tg} x = 1.$

1261. $\sin 2x = 2\sin x.$

1262. $\cos 2x = 2\sin^2 x.$

1263. $\sin x \cdot \cos x = 0{,}25.$

1264. $\sin x + \cos\frac{x}{2} = 0.$

1265. $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x.$

1266. $\sin^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} = 0{,}5.$

1267. $\sin^4\frac{x}{2} - \cos^4\frac{x}{2} = 0{,}25.$

1268. $5\cos 2x = \sqrt{56} \cdot \sin x.$

1269. $\cos 2x = 2\sin x - \frac{1}{2}$.

1270. $\operatorname{tg}\frac{x}{2} \cdot \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{tg} x$.

1271. $\operatorname{tg} 2x = 3\operatorname{tg} x$.

1272. $\frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x} + \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x} = 2$.

1273. $2\sin^2 x = \sqrt{6}\sin 2x - 3\cos^2 x$.

1274. $\cos^2 x + 4\sin^2 x = 2\sin 2x$.

1275. $\sin 2x + \sin x \cdot \cos x = 2\cos 2x$.

1276. $\cos 7x \cdot \cos 3x = \cos 4x$.

1277. $\cos 3x \cdot \cos x = \cos 7x \cdot \cos 5x$.

1278. $\cos 2x \cdot \cos 3x = \cos 5x \cdot \cos 6x$.

1279. $\sin x \cdot \sin 3x = \sin 2x \cdot \sin 4x$.

1280. $\sin 2x \cdot \cos 3x = \sin 3x \cdot \cos 2x$.

1281. $\cos(\alpha + x) \cdot \cos(\alpha - x) + \sin^2 x = 0{,}5$.

1282. $\cos\frac{x}{2} = 1 + \cos x$.

1283. $1 - \cos x = \sin x$.

1284. $1 + \cos x + \cos 2x = 0$.

1285. $\cos 2x = 1 + \sin x$.

1286. $\frac{4(1 + \cos x)}{\cos\frac{x}{2}} = 3\sin^2\frac{x}{2}$.

1287. $\sin x + \sin 3x = 0$.

1288. $\sin x - \sin 3x = 0$.

1289. $\sin(30° + x) - \sin(60° - x) = 1$.

1290. $\cos 2x + \cos 6x = 0$.

1291. $\cos 2x - \cos 6x = 0$.

1292. $\cos(x - \alpha) - \cos(x - \beta) = \sin(\beta - \alpha)$.

1293. $\sin 3x = \cos 2x$.

1294. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$.

1295. $\cos x - \cos 2x = \sin 3x$.

1296. $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$.

1297. $\operatorname{tg} 5x + \operatorname{tg} 3x = 0.$

1298. $\operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg} 3x.$

1299. $\operatorname{tg} 4x = \operatorname{tg} 2x.$

1300. $\operatorname{tg}(\alpha + x) + \operatorname{tg}(\alpha - x) = 0.$

1301. $\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\frac{3x}{2}.$

1302*. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 5x = 0.$

1303. $\cos^2 x + 3\cos^2\frac{x}{2} = 2.$

1304. $\sin^2 x + \sin^2 3x + \frac{1}{2}\cos 6x = 1.$

1305. $\cos^2 x + 2\sin^2 5x = \frac{3 - \cos 10x}{2}.$

1306. $\sin^2 4x + 7\cos^2 6x + \frac{1}{2}\cos 8x = 5.$

1307. $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1.$

1308. $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{2}.$

1309. $\sin 5x + \sqrt{3}\cos 5x = 2\sin 7x.$

1310*. $\sin x - \sqrt{7}\cos x = \sqrt{7}.$

1311. $\frac{\sin x + \cos x}{\cos 2x} = \sqrt{2}.$

1312. $\sin x - \cos x + \operatorname{tg} x = 1.$

1313. $2\sin x - 5\cos x + 2\operatorname{tg} x = 5.$

1314. $\sqrt{3}\sin x - \sqrt{5}\cos x = \sqrt{3}.$

1315. $\sin 2x \cdot \operatorname{tg} x = 1.$

1316. $\cos 4x + \operatorname{tg} 2x = 1.$

1317. $\cos x \cdot \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = -\frac{3}{2}.$

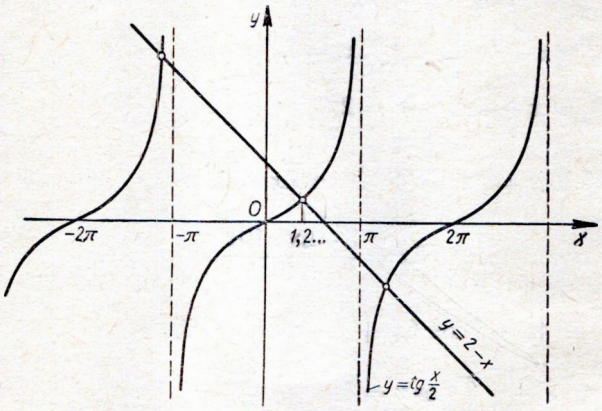
§ 172. Графічны спосаб рашэння трыганаметрычных ураўненняў

Аб графічным спосабе рашэння некаторых трыганаметрычных ураўненняў мы ўжо гаварылі ў § 125, ч. I. Цяпер, умеючы будаваць графікі трыганаметрычных функцый кратных вуглоў, мы можам рашыць гэтым спосабам значна больш ураўненняў, чым раней. Але асноўная ідэя рашэння, вядома, застаецца той жа самай.

Для прыкладу разгледзім ураўненне

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 2 - x.$$

Графікі функцый $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ і $y = 2 - x$ (рыс. 244) перасякаюцца ў бясконцай колькасці пунктаў. Значыць, дадзенае ўраўненне



Рыс. 244.

мае бясконцае мноства кораняў. Знойдзем, напрыклад, найменшы дадатны корань x_0. Гэты корань з'яўляецца абсцысай пункта перасячэння графікаў. Прыкладна ён роўны 1,2.

Каб знайсці гэты корань больш дакладна, выкарыстаем табліцы тангенса (гл. табліцы У. М. Брадзіса, стар. 62). Выпішам значэнні функцый $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ і $y = 2 - x$ у наваколлі пункта $x = 1{,}2$.

x	1,2	1,3
$y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$	0,6841	0,7602
$y = 2 - x$	0,8000	0,7000
$\operatorname{tg}\frac{x}{2} - (2 - x)$	—0,1159	0,0602

Як відаць з гэтай табліцы, пры пераходзе ад значэння $x = 1{,}2$ да значэння $x = 1{,}3$ рознасць $\operatorname{tg}\frac{x}{2} - (2 - x)$ мяняе свой знак на

процілеглы (з — на +). Значыць, у нуль гэта розпасць ператвараецца недзе паміж значэннямі 1,2 і 1,3. Такім чынам, з дакладнасцю да 0,1 $x_0 \approx 1{,}2$ (з недахопам) і $x_0 \approx 1{,}3$ (з лішкам).

Выкарыстоўваючы табліцу тангенсаў, можна знайсці і набліжанае значэнне гэтага кораня з дакладнасцю да 0,01. Для гэтага разгледзім значэнне $x = 1{,}25$, якое з'яўляецца сярэднім значэннем лікаў 1,2 і 1,3. Пры $x = 1{,}25$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} \approx 0{,}7215,$$

$$2 - x = 0{,}7500.$$

Паколькі $\operatorname{tg}\frac{x}{2} < 2 - x$, то $x_0 > 1{,}25$ (гл. рыс. 244). Такім чынам,

$$1{,}25 < x_0 < 1{,}30.$$

Цяпер выпрабуем значэнне $x = 1{,}28$, блізкае да сярэдняга значэння лікаў 1,25 і 1,30. Пры $x = 1{,}28$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} \approx 0{,}7445,$$

$$2 - x = 0{,}7200.$$

Цяпер ужо $\operatorname{tg}\frac{x}{2} > 2 - x$. Значыць (гл. рыс. 244), $x_0 < 1{,}28$.

Аналагічна, разглядаючы значэнне $x = 1{,}26$, мы атрымалі б $\operatorname{tg}\frac{x}{2} < 2 - x$ і таму $x_0 > 1{,}26$. Значыць, $1{,}26 < x_0 < 1{,}28$.

Таму з дакладнасцю да 0,01

$$x_0 \approx 1{,}27.$$

Калі б трэба было вызначыць, якое гэта набліжанае значэнне (з недахопам ці з лішкам), то нам прыйшлося б параўнаць значэнні $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ і $2 - x$ у пункце $x = 1{,}27$.

Прапануем вучням зрабіць гэта самастойна.

Практыкаванні

1318. Знайсці найменшы дадатны корань ураўнення

$$\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 2 - x^2$$

з дакладнасцю да 0,01.

1319. Знайсці корань ураўнення

$$\sin 2x = 1 - 4x$$

з дакладнасцю да 0,01.

Задачы на паўтарэнне

1320. Колькі сапраўдных кораняў мае кожнае з дадзеных ураўненняў:

а) $\sin x = 2x$; в) $\operatorname{tg} ax = bx + c$ $(b \neq 0)$;

б) $\sin x = \frac{x+1}{2}$; г) $\cos 2x = x$?

1321. Ці можа тангенс сумы двух вуглоў быць роўным суме тангенсаў гэтых вуглоў? Калі можа, то ў якім выпадку?

1322. Вылічыць $\sin(\alpha + \beta)$ і $\cos(\alpha - \beta)$, калі вядома, што $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, прычым вуглы α і β заканчваюцца ў адной і той жа чвэрці.

1323. Вылічыць $\sin 2\alpha$ і $\cos 2\alpha$, калі $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$ (вядома, што $a > b > 0$ і вугал α заканчваецца не ў 1-й чвэрці).

1324. Знайсці $\sin 4x$, калі вядома, што $\operatorname{tg} x = 3$.

Даказаць тоеснасці (№ 1325—1327):

1325. $\sin 200° \cdot \sin 310° + \cos 340° \cdot \cos 50° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1326. $16\sin 10° \cdot \cos 30° \cdot \sin 50° \cdot \sin 70° = 1$.

1327. $\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{3}{5}\pi = \frac{1}{2}$.

Спрасціць выразы (№ 1328, 1329):

1328. $\frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin\beta \cdot \cos\alpha - \cos\beta \cdot \sin\alpha}$.

1329. $\sqrt{1+\sin\varphi} - \sqrt{1-\sin\varphi}$ пры: а) $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$;

б) $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$.

1330. Раскласці на множнікі

$$\cos^2 4\alpha + \cos^2 3\alpha - \sin^2 2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Даказаць тоеснасці (№ 1331—1334):

1331. $\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha} = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$.

1332. $\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1} = 2\cos\alpha$.

1333. $\dfrac{1-\sin^6\alpha-\cos^6\alpha}{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}=\dfrac{3}{2}$.

1334. $\operatorname{tg}3\alpha=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)\operatorname{tg}\alpha$.

1335. Электрагенератар выпрацоўвае трохфазны ток:

$$I_1=I_0\sin(\omega t+\varphi),\ I_2=I_0\sin\left(\omega t+\varphi+\frac{2}{3}\pi\right),$$

$$I_3=I_0\sin\left(\omega t+\varphi+\frac{4}{3}\pi\right).$$

Даказаць, што ў любы момант часу t

$$I_1+I_2+I_3=0.$$

1336. Як звязаны паміж сабой вуглы α і β, калі $|\sin\alpha|=|\sin\beta|$?

1337. Спрасціць выраз $\sqrt{\sin^2\alpha+\cos 2\alpha}+1$ і праверыць справядлівасць атрыманых рэзультатаў пры $\alpha=0$ і $\alpha=\pi$.

Рашыць ураўненні (№ 1338—1351):

1338. $2\sin x\cdot\sin 2x+\cos 3x=0$.

1339. $|\cos^2 x-\sin^2 x|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

1340. $\sin x+\cos x=\dfrac{\cos 2x}{1-\sin 2x}$.

1341. $5(\sin x+\cos x)^2-13(\sin x+\cos x)+8=0$.

1342. $\cos 3x-\sin x=\cos x-\sin 3x$.

1343. $\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}2x-\operatorname{tg}3x+\operatorname{tg}4x=0$.

1344. $\dfrac{1}{2}(\sin^4 x+\cos^4 x)+\sin x\cdot\cos x+\sin^2 x\cdot\cos^2 x=0$.

1345. $\sin 2x+\cos 2x+\sin x\cdot\cos x+1=0$.

1346. $\sin(\cos x)=\cos(\sin x)$.

1347. $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cos^2 4x=2$.

1348. $\cos 2x+\operatorname{tg}x=1$.

1349. $\cos^3 x\cdot\sin 3x+\sin^3 x\cdot\cos 3x=\dfrac{3}{4}$.

1350. $\sin x\cdot\sin 3x=0{,}5$.

1351. $\sin x+\cos x+2\sin x\cdot\cos x=-1$.

Рашыць сістэмы ўраўненняў:

1352. $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1, \\ x + y = \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$

1353. $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{2}, \\ x + y = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

1354. $\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{4}, \\ \cos x \cos y = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{4}. \end{cases}$

1355. $\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{3}{4}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3. \end{cases}$

1356. $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \sqrt{3}\left(\sqrt{3} - 2\right), \\ x + y = \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

1357. $\begin{cases} \dfrac{\sin x}{\sin y} = \sqrt{3}, \\ \dfrac{\cos x}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}. \end{cases}$

§ 173. З гісторыі трыганаметрыі

Слова «трыганаметрыя» грэчаскага паходжання. У перакладзе на беларускую мову яно азначае «вымярэнне трохвугольнікаў». Як і ўсе іншыя раздзелы матэматыкі, якія зарадзіліся ў глыбокай старажытнасці, трыганаметрыя ўзнікла ў выніку спроб рашыць тыя задачы, з якімі чалавеку даводзілася сутыкацца на практыцы. Сярод такіх задач трэба перш за ўсё назваць задачы землямерання і астраноміі.

У тым, што трыганаметрыя адносіцца да старажытных навук, нас пераконвае хоць бы такі факт. Для прадказання моманту наступлення сонечнага або месячнага зацьмення неабходна зрабіць разлікі, якія патрабуюць прыцягнення трыганаметрыі. Вельмі дакладна прадказвалі зацьменні яшчэ старажытнававілонскія вучоныя. Відаць, яны ўжо валодалі элементарнымі трыганаметрычнымі паняццямі.

Першыя даставерна засведчаныя трыганаметрычныя табліцы былі складзены ў другім стагоддзі да н. э. Іх аўтарам быў грэчаскі астраном Гіпарх. Табліцы гэтыя да нас не дайшлі, але ва ўдасканаленым выглядзе яны былі ўключаны ў «Альмагест» («Вялікае пабудаванне») александрыйскага астранома Пталемея. Табліцы Пталемея надобныя да табліц сінусаў ад 0° да 90°, складзеных праз кожныя чвэрць градуса. У «Альмагесце», у прыватнасці, ёсць формулы для сінуса і косінуса сумы двух вуглоў, змяшчаюцца таксама элементы сферычнай трыганаметрыі *.

У сярэднія вякі найбольшыя поспехі ў развіцці трыганаметрыі былі дасягнуты вучонымі Сярэдняй Азіі і Закаўказзя. У гэты час да трыганаметрыі пачынаюць адносіцца як да самастойнай навукі, не звязваючы яе, як раней, з астраноміяй. Вялікая ўвага ўдзяляецца задачы рашэння трохвугольнікаў. Адным з самых прыкметных твораў па трыганаметрыі гэтага перыяду з'яўляецца «Трактат аб чатырохвугольніку» Насір Эдзіна (XIII стагоддзе). У гэтым трактаце ўведзен рад новых трыганаметрычных паняццяў, па-новаму даказаны некаторыя ўжо вядомыя рэзультаты. Асноўныя работы па трыганаметрыі ў Еўропе былі выкананы амаль на два стагоддзі пазней. Тут трэба перш за ўсё адзначыць нямецкага вучонага Рэгіямантана (XV стагоддзе). Яго галоўны твор «Пяць кніг аб рознага роду трохвугольніках» змяшчае дастаткова поўнае выкладанне

---

* Сферычная трыганаметрыя разглядае вуглы і іншыя фігуры не на плоскасці, а на сферы.

асноў трыганаметрыі. Ад нашых цяперашніх падручнікаў па трыганаметрыі гэты твор адрозніваецца ў асноўным толькі адсутнасцю зручных сучасных абазначэнняў. Усе тэарэмы сфармуляваны на словах. Пасля паяўлення «Пяці кніг» Рэгіямантана трыганаметрыя канчаткова вылучылася ў самастойную навуку, якая не залежыць ад астраноміі. Рэгіямантанам складзены таксама даволі падрабязныя трыганаметрычныя табліцы.

Развіццё алгебраічнай сімволікі і ўвядзенне ў матэматыку адмоўных лікаў дазволіла разглядаць адмоўныя вуглы; з'явілася магчымасць разглядаць трыганаметрычныя функцыі лікавага аргумента. Развіццё матэматыкі дазволіла вылічваць значэнні трыганаметрычных функцый любога ліку з любой наперад зададзенай дакладнасцю.

Істотны ўклад у развіццё трыганаметрыі ўнёс Эйлер. Ім дадзена сучаснае азначэнне трыганаметрычных функцый і ўказана на цесную сувязь гэтых функцый з паказальнымі функцыямі (гл. раздз. VIII).

У цяперашні час трыганаметрычныя функцыі ляжаць у аснове спецыяльнага матэматычнага апарата, так званага *гарманічнага аналізу*, пры дапамозе якога вывучаюцца рознага роду перыядычныя працэсы: вагальныя рухі, распаўсюджанне хваль, некаторыя атмасферныя з'явы і інш.

Раздзел VIII

ПАКАЗАЛЬНАЯ І ЛАГАРЫФМІЧНАЯ ФУНКЦЫІ

§ 174. Ступень дадатнага ліку з дадатным рацыянальным паказчыкам

У раздзеле IV было дадзена азначэнне ступені дадатнага ліку a з рацыянальным паказчыкам r. Напомнім гэта азначэнне.

Калі лік r натуральны, то a^r ёсць здабытак r лікаў, кожны з якіх роўны a:

$$\underbrace{a^r = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{r}. \tag{1}$$

Калі лік r дробавы і дадатны, гэта значыць $r = \frac{m}{n}$, дзе m і n — натуральныя лікі, то

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}. \tag{2}$$

Формулы (1) і (2) вызначаюць ступені любога дадатнага ліку a з любым дадатным рацыянальным паказчыкам r. Калі ж паказчык r з'яўляецца рацыянальным і адмоўным, то выраз a^r вызначаецца як велічыня, адваротная a^{-r}:

$$a^r = \frac{1}{a^{-r}}. \tag{3}$$

Тут ужо лік $-r$ дадатны.

Нарэшце, калі $r = 0$, то a^r роўна 1:

$$a^0 = 1. \tag{4}$$

Формулы (1), (2), (3) і (4) вызначаюць ступень дадатнага ліку a для любога рацыянальнага паказчыка r.

Для далейшага нам патрэбны будуць наступныя дзве тэарэмы.

Тэарэма 1. ***Калі лік a больш 1, то з дзвюх ступеней гэтага ліку з дадатнымі рацыянальнымі паказчыкамі большая тая, паказчык якой большы.***

Доказ. Няхай $a > 1$ і $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$, дзе m, n, p і q — натуральныя лікі. Пакажам, што

$$a^{\frac{m}{n}} > a^{\frac{p}{q}}.$$

Сапраўды,

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}; \qquad a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Прывядзём гэтыя карані да кораняў з аднолькавымі паказчыкамі:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nq]{a^{mq}}; \quad \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{pn}}.$$

Паколькі $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$, то $mq > np$. Паколькі $a > 1$, то адсюль вынікае, што $a^{mq} > a^{np}$, а таму і $\sqrt[nq]{a^{mq}} > \sqrt[nq]{a^{np}}$, або

$$a^{\frac{m}{n}} > a^{\frac{p}{q}}.$$

Аналагічна можа быць даказана і другая тэарэма.

Тэарэма 2. ***Калі лік a больш нуля, але менш 1, то з дзвюх ступеней гэтага ліку з дадатнымі рацыянальнымі паказчыкамі большая тая, паказчык якой меншы.***

Доказ гэтай тэарэмы прапануем вучням правесці самастойна.

Прыклады. 1) $1{,}4 < 1{,}5$. Таму $3^{1,4} < 3^{1,5}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{1,4} > \left(\frac{1}{3}\right)^{1,5}$.

2) $0{,}51 < 0{,}52$. Таму $\pi^{0,51} < \pi^{0,52}$; $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{0,51} > \left(\frac{\pi}{4}\right)^{0,52}$.

Практыкаванні

1358. Які лік большы:

а) $5^{\frac{1}{2}}$ або $5^{\frac{2}{3}}$;

б) $\sqrt[7]{4^6}$ або $\sqrt[10]{4^9}$;

в) $\left(\frac{1}{3}\right)^{6,5}$ або $\left(\frac{1}{3}\right)^{7}$;

г) $\left(\frac{10}{11}\right)^{5\frac{1}{3}}$ або $\sqrt[100]{\left(\frac{10}{11}\right)^{534}}$?

§ 175. Ступень дадатнага ліку з дадатным ірацыянальным паказчыкам

У папярэднім параграфе мы напомнілі, як вызначаецца ступень a^r любога дадатнага ліку a з любым рацыянальным паказчыкам r. Цяпер нам трэба вызначыць ступень a^x дадатнага ліку a з дадатным ірацыянальным паказчыкам x. Мы пачнём з раз-

гляду наступнага прыватнага прыкладу: як трэба разумець выраз $3^{\sqrt{2}}$?

Выпішам дзесятковыя набліжэнні ліку $\sqrt{2}$ з недахопам:

$$1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ \ldots; \tag{1}$$

з лішкам:

$$2;\ 1{,}5;\ 1{,}42;\ 1{,}415;\ \ldots. \tag{2}$$

Усе члены гэтых паслядоўнасцей уяўляюць сабой рацыянальныя лікі. А ступень дадатнага ліку з рацыянальным паказчыкам намі ўжо вызначана. Таму мы можам разгледзець паслядоўнасці:

$$3^1;\ 3^{1{,}4};\ 3^{1{,}41};\ 3^{1{,}414};\ \ldots; \tag{3}$$

$$3^2;\ 3^{1{,}5};\ 3^{1{,}42};\ 3^{1{,}415};\ \ldots. \tag{4}$$

Як вядома,

$$\begin{gathered} 1 < \sqrt{2} < 2 \\ 1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5 \\ 1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42 \\ 1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415 \\ \ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

Таму, маючы на ўвазе тэарэму 1 з папярэдняга параграфа, натуральна лічыць, што лік $x = 3^{\sqrt{2}}$, які нас цікавіць, задавальняе няроўнасцям:

$$\begin{gathered} 3^1 < x < 3^2 \\ 3^{1{,}4} < x < 3^{1{,}5} \\ 3^{1{,}41} < x < 3^{1{,}42} \\ 3^{1{,}414} < x < 3^{1{,}415} \\ \ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

Можна даказаць, што існуе і прытым толькі адзін лік α, які задавальняе кожнай з гэтых няроўнасцей*. Па азначэнню гэты лік α і прымаецца за $3^{\sqrt{2}}$.

Разгледзім яшчэ адзін прыклад: як трэба разумець выраз $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$?

---

* Доказ гэтага факта выходзіць за межы нашай праграмы і таму тут не прыводзіцца.

Па аналогіі з першым прыкладам разгледзім паслядоўнасці

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1};\ \left(\frac{1}{3}\right)^{1,4};\ \left(\frac{1}{3}\right)^{1,41};\ \left(\frac{1}{3}\right)^{1,414};\ \ldots \tag{5}$$

і

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2};\ \left(\frac{1}{3}\right)^{1,5};\ \left(\frac{1}{3}\right)^{1,42};\ \left(\frac{1}{3}\right)^{1,415};\ \ldots. \tag{6}$$

Натуральна лічыць, што лік $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$, які нас цікавіць, задавальняе няроўнасцям (гл. тэарэму 2 з папярэдняга параграфа):

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2}<y<\left(\frac{1}{3}\right)^{1}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1,5}<y<\left(\frac{1}{3}\right)^{1,4}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1,42}<y<\left(\frac{1}{3}\right)^{1,41}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1,415}<y<\left(\frac{1}{3}\right)^{1,414}$$

. . . . . .

Можна даказаць, што існуе і прытым толькі адзін лік β, які задавальняе кожнай з гэтых няроўнасцей. Па азначэнню гэты лік β і прымаецца за $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$.

Разгледжанне дадзеных двух прыкладаў прыводзіць нас да наступнага азначэння.

Азначэнне. *Калі $a>1$, то ступенню гэтага ліку з дадатным ірацыянальным паказчыкам x называецца лік, які больш усіх ступеней ліку a з паказчыкамі, роўнымі дзесятковым набліжэнням ліку x з недахопам, але менш усіх ступеней ліку a з паказчыкамі, роўнымі дзесятковым набліжэнням ліку x з лішкам.*

Калі $0<a<1$, то ступенню гэтага ліку з дадатным ірацыянальным паказчыкам x называецца лік, які больш усіх ступеней ліку a з паказчыкамі, роўнымі дзесятковым набліжэнням ліку x з лішкам, але менш усіх ступеней ліку a з паказчыкамі, роўнымі дзесятковым набліжэнням ліку x з недахопам.

Да гэтага застаецца дадаць, што *для любога ірацыянальнага ліку x*

$$1^{x}=1.$$

§ 176. Ступень дадатнага ліку з адмоўным ірацыянальным паказчыкам

Калі $a > 0$ і x — дадатны ірацыянальны лік, то, па азначэнню,

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}. \qquad (1)$$

Напрыклад,

$$3^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{3^{\sqrt{2}}}; \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}}.$$

Каб уведзенае азначэнне было карэктным, неабходна паказаць, што дроб $\frac{1}{a^x}$ у правай частцы роўнасці (1) мае сэнс пры любых дадатных a і x. Для гэтага трэба даказаць, што

$$a^x \neq 0.$$

Сапраўды, па азначэнню ступені з дадатным ірацыянальным паказчыкам

$$a^{x'} \leqslant a^x \leqslant a^{x''},$$

дзе адзін з лікаў x' і x'' ёсць дзесятковае набліжэнне ліку x з недахопам, а другі — адпаведнае дзесятковае набліжэнне гэтага ліку з лішкам. Лікі x' і x'' рацыянальныя і дадатныя. Таму $a^{x'} > 0$ і $a^{x''} > 0$. Але лік, заключаны паміж двума дадатнымі лікамі, сам павінен быць дадатным. Таму $a^x > 0$.

Такім чынам, мы вызначылі ступень дадатнага ліку з любым сапраўдным паказчыкам. Ступень *адмоўнага* ліку з сапраўдным паказчыкам, наогул кажучы, не вызначана.

§ 177. Асноўныя ўласцівасці ступеней дадатных лікаў з сапраўднымі паказчыкамі

Ступені дадатных лікаў маюць наступныя асноўныя ўласцівасці:

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; 2) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$; 3) $(ab)^x = a^x b^x$;

4) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$; 5) $(a^x)^y = a^{xy}$.

Гэтыя ўласцівасці былі часткова даказаны намі ў раздзеле IV для рацыянальных паказчыкаў. На самай жа справе яны правільныя і для ірацыянальных паказчыкаў. На доказе гэтага факта мы не будзем спыняцца.

Прыклады.

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{2}} = (3^{-1})^{-\sqrt{2}} = 3^{\sqrt{2}}$;

2) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}\right]^{-\sqrt{8}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{16}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = (3^{-1})^{-4} = 3^4 = 81$;

3) $\frac{5^{\sqrt{8}}}{5^{\sqrt{2}}} = 5^{\sqrt{8}-\sqrt{2}} = 5^{\sqrt{2}}$.

Практыкаванні

Даказаць тоеснасці (№ 1359, 1360):

1359. $\left(\frac{1}{2}\right)^{12} \cdot 4^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{\sqrt{27}} \cdot 16^3 = (4^{\sqrt{3}})^{-4}$.

1360. $\frac{12^{\sqrt{48}}}{4^{\sqrt{108}}} \cdot \frac{2^{27\sqrt{3}}}{6^{\sqrt{27}}} = (6 \cdot 2^{19})^{\sqrt{3}}$.

Спрасціць выразы:

1361. $[(\sqrt[3]{3})^{\sqrt{3}}]^{-2\sqrt{3}}$. **1362.** $[(\sqrt{8})^{-4\frac{1}{3}}]^{\frac{\sqrt{3}}{26}}$.

§ 178. Паказальная функцыя і яе графік

Паказальнай функцыяй называецца функцыя выгляду

$$y = a^x,$$

дзе a — некаторы фіксіраваны дадатны лік.

Прыкладам паказальных функцый могуць служыць функцыі

$$y = 2^x;\ y = \left(\frac{1}{3}\right)^x;\ y = (0{,}1)^x.$$

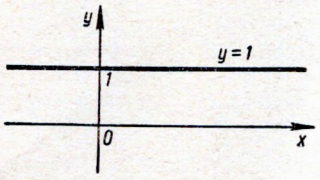
У прыродзе назіраецца цэлы рад з'яў, якія матэматычна можна апісаць пры дапамозе паказальных функцый. Напрыклад, распад радыю набліжана можна апісаць суадносінай

$$m(t) = m(0) \cdot (0{,}9996)^t,$$

дзе $m(0)$ — першапачатковая колькасць радыю ў грамах, а $m(t)$ — тая колькасць радыю, якая застанецца праз t год пасля пачатку распаду. Па паказальнаму закону змяняецца таксама атмасферны ціск са змяненнем вышыні.

У азначэнні паказальнай функцыі $y = a^x$ гаворыцца, што лік a дадатны. Тлумачыцца гэта тым, што ступень адмоўнага ліку з адвольным паказчыкам, наогул кажучы, не вызначана,

Сярод усіх дадатных значэнняў a трэба асобна вылучыць $a = 1$. Пры такім a функцыя $y = a^x$ мае выгляд $y = 1$ (рыс. 245). Такая функцыя не выклікае асобага інтарэсу. Таму ў далейшым, гаворачы аб паказальнай функцыі $y = a^x$, мы заўсёды будзем дапускаць, што $a > 0$ і $a \neq 1$.



Рыс. 245.

Пяройдзем да пабудавання графіка паказальнай функцыі. У якасці прыкладу на адным чарцяжы пабудуем графікі функцый $y = 2^x$ і $y = 10^x$, а на другім — графікі функцый $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ і $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$. Для гэтага папярэдне складзём табліцы значэнняў гэтых функцый. Для функцый $y = 2^x$ і $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ у якасці значэнняў x выберам

$$-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2 \text{ і } 3.$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$y = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	...
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	...

Для функцый $y = 10^x$ і $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$ мэтазгодна выбраць іншыя значэнні x, паколькі пры $x = \pm 2,\ \pm 3$ дадзеныя функцыі прымаюць або вельмі вялікія, або вельмі малыя значэнні. Напрыклад, $10^3 = 1000$, $\left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{1000}$. Такія значэнні y цяжка зафіксіраваць на графіку. Таму ў дадзеным выпадку ў якасці значэнняў x зручней выбраць, напрыклад, такія лікі:

$$-1,\ -\frac{3}{4},\ -\frac{2}{4},\ -\frac{1}{4},\ 0,\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4} \text{ і } 1.$$

Адпаведныя значэнні y можна вылічыць паслядоўна:

$$10^0 = 1;$$

$$10^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{10} = \sqrt{\sqrt{10}} \approx \sqrt{3{,}1622} \approx 1{,}8;$$

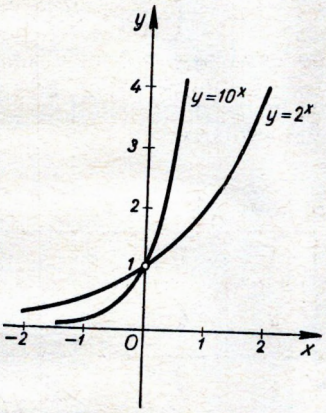
$$10^{\frac{2}{4}} = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} \approx 3{,}2;$$

$$10^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{10^3} = \sqrt{\sqrt{1000}} \approx \sqrt{31{,}6227} \approx 5{,}6;$$

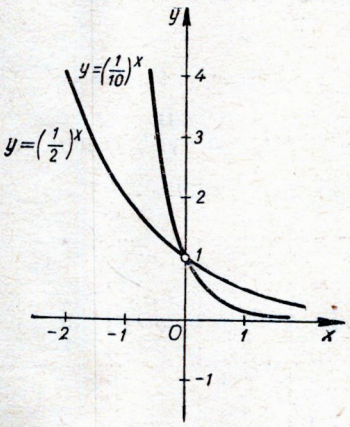
$$10^1 = 10;$$

$$10^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{10^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{1{,}8} \approx 0{,}6$$

і г. д.



Рыс. 246.



Рыс. 247.

У выніку атрымліваецца наступная табліца набліжаных значэнняў функцый $y = 10^x$ і $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$:

x	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{2}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	...
$y = 10^x$	0,1	0,2	0,3	0,6	1,0	1,8	3,2	5,6	10	...
$y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$	10	5,6	3,2	1,8	1,0	0,6	0,3	0,2	0,1	...

Выкарыстоўваючы складзеныя табліцы, можна ў агульных рысах уявіць сабе паводзіны разглядаемых функцый. Дакладныя графікі функцый $y = 2^x$ і $y = 10^x$ дадзены на рысунку 246, а функцый $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ і $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$ — на рысунку 247.

Практыкаванні

1363. Выкарыстоўваючы графік функцыі $y = 2^x$, знайсці

$$\sqrt{2},\ \sqrt[3]{4},\ \frac{1}{\sqrt[3]{2}},\ \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Пры якіх значэннях аргумента гэта функцыя прымае значэнні, роўныя 0,5; 0,9; 1,0; 1,8; 2,7?

1364. Выкарыстоўваючы графік функцыі $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$, знайсці

$$\sqrt[5]{\frac{1}{10}},\ 10^{-3},\ \sqrt[5]{0{,}001},\ \left(\frac{1}{10}\right)^{-0{,}7}.$$

Пры якіх значэннях x гэта функцыя прымае значэнні, роўныя 0,5; 0,9; 1,0; 3,0; 5,0?

1365. Пабудаваць графікі функцый:

а) $y = 2^{x-1}$; в) $y = 2^{|x|}$; д) $y = 2^x + 1$;

б) $y = 2^{x+1}$; г) $y = 2^x - 1$; е) $y = 2^{-|x|}$.

1366. Пабудаваць графікі функцый:

а) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$; в) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$; д) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$;

б) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$; г) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$; е) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-|x|}$.

1367. На адным і тым жа рысунку пабудаваць графікі функцый $y = 3^x$ і $y = 3^{-x}$.

§ 179. Асноўныя ўласцівасці паказальнай функцыі

У гэтым параграфе мы вывучым асноўныя ўласцівасці паказальнай функцыі

$$y = a^x. \qquad (1)$$

Напомнім, што пад a ў формуле (1) можна падразумяваць любы дадатны лік, адрозны ад 1.

Уласцівасць 1. ***Вобласцю вызначэння паказальнай функцыі з'яўляецца сукупнасць усіх сапраўдных лікаў.***

На самай справе, пры дадатным a выраз a^x вызначаны для любога сапраўднага ліку x.

Уласцівасць 2. ***Паказальная функцыя прымае толькі дадатныя значэнні.***

Сапраўды, калі $x > 0$, то, як было даказана ў § 176, $a^x > 0$.

Калі ж $x < 0$, то

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}},$$

дзе $-x$ ужо больш нуля. Таму $a^{-x} > 0$. Але тады і

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}} > 0.$$

Нарэшце, пры $x = 0$

$$a^x = 1.$$

2-я ўласцівасць паказальнай функцыі мае простае графічнае тлумачэнне. Яно заключаецца ў тым, што графік гэтай функцыі (гл. рыс. 246 і 247) размяшчаецца цалкам вышэй восі абсцыс.

Уласцівасць 3. ***Калі $a > 1$, то пры $x > 0$ $a^x > 1$, а пры $x < 0$ $a^x < 1$.***

Калі ж $a < 1$, то, наадварот, пры $x > 0$ $a^x < 1$, а пры $x < 0$ $a^x > 1$.

Гэта ўласцівасць паказальнай функцыі дапускае простую геаметрычную інтэрпрэтацыю. Пры $a > 1$ (рыс. 246) крывыя $y = a^x$ размяшчаюцца вышэй прамой $y = 1$ пры $x > 0$ і ніжэй прамой $y = 1$ пры $x < 0$. Калі ж $a < 1$ (рыс. 247), то, наадварот, крывыя $y = a^x$ размяшчаюцца ніжэй прамой $y = 1$ пры $x > 0$ і вышэй гэтай прамой пры $x < 0$.

Прывядзём строгі доказ 3-й уласцівасці. Няхай $a > 1$ і x — адвольны дадатны лік. Пакажам, што

$$a^x > 1.$$

Калі лік x рацыянальны $\left(x = \frac{m}{n}\right)$, то $a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Паколькі $a > 1$, то і $a^m > 1$. Але корань з ліку, большага адзінкі, відавочна, таксама большы 1.

Калі x ірацыянальны, то існуюць дадатныя рацыянальныя лікі x' і x'', якія служаць дзесятковымі набліжэннямі ліку x:

$$x' < x < x''.$$

Але тады па азначэнню ступені з ірацыянальным паказчыкам

$$a^{x'} < a^x < a^{x''}.$$

Як паказана вышэй, лік $a^{x'}$ больш адзінкі. Таму і лік a^x, большы чым $a^{x'}$, таксама павінен быць больш 1.

Такім чынам, мы паказалі, што пры $a > 1$ і адвольным дадатным x

$$a^x > 1.$$

Калі б лік x быў адмоўны, то мы мелі б

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}},$$

дзе лік — x быў бы ўжо дадатным. Таму $a^{-x} > 1$. Значыць,

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}} < 1.$$

Такім чынам, пры $a > 1$ і адвольным адмоўным x

$$a^x < 1.$$

Выпадак, калі $0 < a < 1$, лёгка зводзіцца да ўжо разгледжанага выпадку. Вучням прапануецца пераканацца ў гэтым самастойна.

Уласцівасць 4. ***Калі $x = 0$, то незалежна ад a $a^x = 1$.***

Гэта вынікае з азначэння нулявой ступені: нулявая ступень любога ліку, адрознага ад нуля, роўна 1. Графічна гэта ўласцівасць выражаецца ў тым, што пры любым a крывая $y = a^x$ (гл. рыс. 246 і 247) перасякае вось y у пункце з ардынатай 1.

Уласцівасць 5. ***Пры $a > 1$ паказальная функцыя $y = a^x$ з'яўляецца манатонна ўзрастаючай, а пры $a < 1$ — манатонна ўбываючай.***

Гэта ўласцівасць таксама дапускае простую геаметрычную інтэрпрэтацыю.

Пры $a > 1$ (рыс. 246) крывая $y = a^x$ з ростам x падымаецца ўсё вышэй і вышэй, а пры $a < 1$ (рыс. 247) апускаецца ўсё ніжэй і ніжэй.

Прывядзём строгі доказ 5-й уласцівасці.

Няхай $a > 1$ і $x_2 > x_1$. Пакажам, што

$$a^{x_2} > a^{x_1}.$$

Паколькі $x_2 > x_1$, то $x_2 = x_1 + d$, дзе d — некаторы дадатны лік. Таму

$$a^{x_2} - a^{x_1} = a^{x_1+d} - a^{x_1} = a^{x_1}(a^d - 1).$$

Па 2-й уласцівасці паказальнай функцыі $a^{x_1} > 0$. Паколькі $d > 0$, то па 3-й уласцівасці паказальнай функцыі $a^d > 1$. Абодва сумножнікі ў здабытку $a^{x_1}(a^d - 1)$ дадатныя, таму і сам гэты здабытак дадатны. Значыць, $a^{x_2} - a^{x_1} > 0$, або $a^{x_2} > a^{x_1}$, што і трэба было даказаць.

Такім чынам, пры $a > 1$ функцыя $y = a^x$ з'яўляецца манатонна ўзрастаючай. Аналагічна даказваецца, што пры $a < 1$ функцыя $y = a^x$ з'яўляецца манатонна ўбываючай.

Вынік. ***Калі дзве ступені аднаго і таго ж дадатнага ліку, адрознага ад 1, роўны, то роўны і іх паказчыкі.***

Іншымі словамі, калі

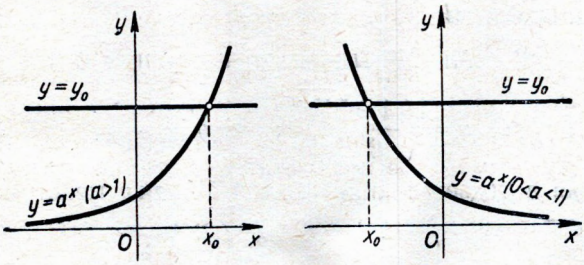
$$a^b = a^c \quad (a > 0 \text{ і } a \neq 1),$$

то

$$b = c.$$

Сапраўды, калі б лікі b і c былі не роўныя, то з прычыны манатоннасці функцыі $y = a^x$ большаму з іх адпавядала б пры $a > 1$ большае, а пры $a < 1$ меншае значэнне гэтай функцыі. Такім чынам, было б або $a^b > a^c$, або $a^b < a^c$. І адно і другое супярэчыць умове $a^b = a^c$. Застаецца прызнаць, што $b = c$.

У л а с ц і в а с ц ь 6. ***Калі $a > 1$, то пры неабмежаваным узрастанні аргумента x ($x \to \infty$) значэнні функцыі $y = a^x$ таксама неабмежавана растуць ($y \to \infty$). Пры неабмежаваным убыванні аргумента x ($x \to -\infty$) значэнні функцыі манатонна імкнуцца да нуля, застаючыся пры гэтым дадатнымі ($y \to 0$; $y > 0$).***



Рыс. 248.

Прымаючы пад увагу даказаную вышэй манатоннасць функцыі $y = a^x$, можна сказаць, што ў разглядаемым выпадку функцыя $y = a^x$ манатонна ўзрастае ад 0 да ∞.

Калі $0 < a < 1$, то пры неабмежаваным узрастанні аргумента x ($x \to \infty$) значэнні функцыі $y = a^x$ імкнуцца да нуля, застаючыся пры гэтым дадатнымі ($y \to 0$, $y > 0$). Пры неабмежаваным убыванні аргумента x ($x \to -\infty$) значэнні гэтай функцыі неабмежавана растуць ($y \to \infty$).

З прычыны манатоннасці функцыі $y = a^x$ можна сказаць, што ў гэтым выпадку функцыя $y = a^x$ манатонна ўбывае ад ∞ да 0.

6-я ўласцівасць паказальнай функцыі наглядна адлюстравана на рысунках 246 і 247. Строга даказваць яе мы не будзем.

Нам засталося толькі ўстанавіць вобласць змянення паказальнай функцыі $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$).

Вышэй мы даказалі, што функцыя $y = a^x$ прымае т о л ь к і дадатныя значэнні і або манатонна ўзрастае ад 0 да ∞ (пры $a > 1$), або манатонна ўбывае ад ∞ да 0 (пры $0 < a < 1$). Аднак засталося нявысветленым наступнае пытанне: ці не звядвае функцыя $y = a^x$ пры сваім змяненні якіх-небудзь скачкоў? Ці л ю б ы я дадатныя значэнні яна прымае? Пытанне гэта рашаецца станоўча. Калі $a > 0$ і $a \neq 1$, то, якім бы ні быў дадатны лік y_0, абавязкова знойдзецца x_0 такі, што

$$a^{x_0} = y_0.$$

(З прычыны манатоннасці функцыі $y = a^x$ дадзенае значэнне x_0 будзе, безумоўна, адзіным.)

Доказ гэтага факта выходзіць за межы нашай праграмы. Геаметрычная інтэрпрэтацыя яго заключаецца ў тым, што пры любым дадатным значэнні y_0 графік функцыі $y = a^x$ абавязкова перасячэцца з прамой $y = y_0$ і прытым толькі ў адным пункце (рыс. 248).

Адсюль можна зрабіць наступны вывад, які мы фармулюем у выглядзе ўласцівасці 7.

Уласцівасць 7. ***Вобласцю змянення паказальнай функцыі $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ служыць мноства ўсіх дадатных лікаў.***

Практыкаванні

1368. Знайсці вобласці вызначэння наступных функцый:

а) $y = 2^{\frac{1}{x}}$; б) $y = \left(\frac{1}{10}\right)^{\sqrt{x^2-1}}$; в) $y = \frac{1}{3^{x^2}}$.

1369. Якія з дадзеных лікаў больш 1 і якія менш 1:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}$; 2) $(\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}$; 3) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\pi}$;

4) $\pi^{-\frac{2}{5}}$; 5) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{5}}$; 6) $\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\sqrt{1{,}001}}$;

7) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-\sqrt{1{,}001}}$; 8) $\left(\frac{\pi+1}{4}\right)^{-\sqrt{2}}$; 9) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$?

1370. На аснове якой уласцівасці паказальнай функцыі можна сцвярджаць, што

а) $\left(\frac{5}{7}\right)^{2,6} < \left(\frac{5}{7}\right)^{2,5}$; б) $\left(\frac{4}{3}\right)^{1,3} > \left(\frac{4}{3}\right)^{1,2}$?

1371. Які лік большы:

а) $\pi^{-\sqrt{3}}$ або $\left(\frac{1}{\pi}\right)^{-\sqrt{3}}$;

б) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{1+\sqrt{3}}$ або $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2}$;

в) $\left(\frac{2}{3}\right)^{1+\sqrt{6}}$ або $\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$;

г) $(\sqrt{3})^{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ або $(\sqrt{3})^{\sqrt{3}-2}$?

1372. Ці раўназначныя няроўнасці:

а) $a^x > a^4$ і $x > 4$;

б) $5x^2 < 5^x$ і $x^2 < x$;

в) $\left(\frac{1}{16}\right)^x > \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$ і $2x < x - 1$?

1373. Што можна сказаць аб ліках x і y, калі $a^x = a^y$, дзе a — зададзены дадатны лік?

1374. 1) Ці можна сярод усіх значэнняў функцыі $y = 2^x$ вылучыць:

а) найбольшае значэнне; б) найменшае значэнне?

2) Ці можна сярод усіх значэнняў функцыі $y = 2^{|x|}$ вылучыць:
а) найбольшае значэнне; б) найменшае значэнне?

§ 180. Лагарыфм ліку па дадзенай аснове

Алгебру часам называюць «арыфметыкай сямі дзеянняў», жадаючы гэтым падкрэсліць, што, акрамя чатырох арыфметычных дзеянняў (складання, адымання, множання і дзялення), яна разглядвае таксама ўзвядзенне ў ступень і два адваротныя да яго дзеянні.

Абазначым аснову ступені праз a, паказчык праз x, ступень праз b. Тады можна напісаць:

$$b = a^x. \qquad (1)$$

«Пятае» алгебраічнае дзеянне — узвядзенне ў ступень — заключаецца ў знаходжанні ліку b па вядомых a і x. Гэта дзеянне мы падрабязна вывучылі ў раздзеле IV, аб ім гаварылася таксама ў пачатку гэтага раздзела.

«Шостае» алгебраічнае дзеянне заключаецца ў знаходжанні ліку a па вядомых значэннях b і x. Узвёўшы абедзве часткі роўнасці (1) у ступень $\frac{1}{x}$ (калі толькі $x \neq 0$), атрымліваем

$$a = b^{\frac{1}{x}}.$$

Таму «шостае» алгебраічнае дзеянне лёгка зводзіцца да «пятага».

Цяпер мы пераходзім да вывучэння «сёмага» алгебраічнага дзеяння — знаходжання паказчыка x па вядомых значэннях ступені b і яго асновы a. Гэта задача па сутнасці заключаецца ў тым, каб рашыць ураўненне

$$a^x = b, \qquad (2)$$

дзе a і b — некаторыя зададзеныя велічыні, а x — невядомая велічыня. Адразу ж заўважым, што дадзеная задача вырашальная не заўсёды. Калі, напрыклад, ва ўраўненні (2) лік a дадатны,

а лік b адмоўны, то гэта ўраўненне кораняў не мае. Але калі толькі a і b дадатныя і $a \neq 1$, то яно абавязкова мае і прытым толькі адзін корань. Напомнім, што графік паказальнай функцыі $y = a^x$ абавязкова перасякаецца з прамой $y = b$ і прытым толькі ў адным пункце (гл. рыс. 249). Абсцыса пункта перасячэння і ўяўляе сабой корань ураўнення (2).

Корань ураўнення (2) прынята абазначаць $\log_a b$ (чытаецца: лагарыфм ліку b па аснове a).

Лагарыфм ліку b па аснове a ёсць паказчык ступені, у якую трэба ўзвесці лік a, каб атрымаць лік b:

$$a^{\log_a b} = b.$$

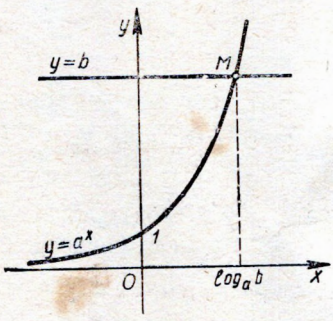
Прыклады.

1) $2^4 = 16$, таму $\log_2 16 = 4$;

2) $2^{-3} = \frac{1}{8}$, таму $\log_2 \frac{1}{8} = -3$;

3) $6^0 = 1$, таму $\log_6 1 = 0$.

З лагарыфмамі мы сутыкаемся пры рашэнні цэлага рада прыкладных задач. У якасці прыкладу разгледзім наступную задачу.



Рыс. 249.

Як мы ведаем, распад радыю набліжана апісваецца формулай (гл. § 178)

$$m(t) = m(0) \cdot (0{,}9996)^t,$$

дзе $m(0)$ — першапачатковая колькасць радыю ў грамах, а $m(t)$ — колькасць радыю (таксама ў грамах) праз t год. Высветлім, чаму роўны перыяд паўраспаду радыю, гэта значыць праз колькі год колькасць радыю змяншаецца ў два разы?

Шукаемы лік год t з'яўляецца коранем ураўнення

$$m(0) \cdot (0{,}9996)^t = 0{,}5m(0),$$

або

$$(0{,}9996)^t = 0{,}5.$$

Таму

$$t = \log_{0{,}9996} 0{,}5.$$

У далейшым мы навучымся знаходзіць таксама лагарыфмы пры дапамозе спецыяльных табліц, а пакуль нам прыйдзецца прыняць на веру, што

$$\log_{0{,}9996} 0{,}5 \approx 1600.$$

Такім чынам, колькасць радыю змяншаецца ў два разы прыкладна праз кожныя 1600 год.

Практыкаванні

1375. Дадзеныя роўнасці запісаць у выглядзе лагарыфмічных роўнасцей (напрыклад, $3^2 = 9 \to \log_3 9 = 2$):

а) $2^2 = 4$; ж) $7^0 = 1$;

б) $3^3 = 27$; з) $4^{\frac{1}{2}} = 2$;

в) $4^4 = 256$; і) $8^{\frac{2}{3}} = 4$;

г) $5^3 = 125$; к) $\sqrt[3]{27} = 3$;

д) $2^{-2} = \frac{1}{4}$; л) $8^0 = 1$;

е) $3^{-4} = \frac{1}{81}$; м) $\sqrt[3]{8} = 2$.

1376. Праверыць справядлівасць наступных роўнасцей:

а) $\log_4 16 = 2$; г) $\log_7 \frac{1}{49} = -2$;

б) $\log_3 243 = 5$; д) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$;

в) $\log_5 125 = 3$; е) $\log_{10} 1 = 0$.

1377. Знайсці лагарыфмы наступных лікаў па аснове 2:

$$4;\ 16;\ 32;\ 1;\ 0{,}5;\ 0{,}125;\ \sqrt{2};\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ 2\sqrt{2}.$$

1378. Знайсці лагарыфмы наступных лікаў па аснове $\frac{1}{2}$:

$$1;\ 2;\ 8;\ 32;\ 0{,}25;\ \frac{1}{16};\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ \sqrt{2};\ 4\sqrt{2}.$$

1379. Знайсці лагарыфмы наступных лікаў па аснове 3:

$$3;\ 1;\ 27;\ 81;\ \frac{1}{9};\ \frac{1}{243};\ \sqrt{3};\ \frac{1}{\sqrt{3}};\ 3\sqrt{3}.$$

1380. Знайсці лагарыфмы наступных лікаў па аснове $\frac{1}{8}$:

$$\frac{1}{3};\ \frac{1}{27};\ \frac{1}{81};\ 3;\ 27;\ \frac{1}{\sqrt{3}};\ \sqrt{3};\ \frac{1}{9\sqrt{3}}.$$

1381. Вылічыць:

а) $\log_2\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$; в) $\log_3\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)$;

б) $\log_2\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)$; г) $\log_3\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)$.

1382. Даказаць тоеснасць

$$\log_{a^n}(a^m)=\frac{m}{n}.$$

Выкарыстоўваючы гэту тоеснасць, вылічыць:

а) $\log_8 16$; г) $\log_{16} 64$; ж) $\log_{\frac{1}{5}} 125$;

б) $\log_2 2\sqrt{2}$; д) $\log_3 27$; з) $\log_4\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

в) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}$; е) $\log_{27} 243$; і) $\log_9\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right)$.

1383. Выкарыстоўваючы асноўную лагарыфмічную тоеснасць

$$a^{\log_a b}=b,$$

вылічыць:

а) $2^{\log_2 8}$; д) $5^{\frac{1}{2}\log_5 49}$; і) $9^{\log_3 10}$;

б) $3^{\log_3 9}$; е) $2^{-4\log_2 1}$; к) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 6}$;

в) $2^{5\log_2 3}$; ж) $3^{-\frac{1}{3}\log_3 8}$; л) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_2 5}$;

г) $3^{2\log_3 9}$; з) $4^{\log_2 7}$; м) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-2\log_3 12}$.

1384. Даказаць, што пры любым дадатным $a\neq 1$

$$\log_a(\sin 1^\circ)\cdot\log_a(\sin 2^\circ)\cdot\ldots\cdot\log_a(\sin 89^\circ)\cdot\log_a(\sin 90^\circ)=0.$$

§ 18. Лагарыфмічная функцыя і яе графік

Лагарыфмічнай функцыяй называецца функцыя выгляду

$$y=\log_a x,$$

дзе a — некаторы фіксіраваны дадатны лік, адрозны ад 1.

Формула $y=\log_a x$ выражае тое ж самае, што і формула

$$a^y=x. \qquad (1)$$

Адсюль лёгка ўстанавіць сувязь лагарыфмічнай функцыі з паказальнай функцыяй

$$y = a^x. \qquad (2)$$

Калі паказальная функцыя (2) апісвае змяненне ступені ў залежнасці ад змянення яе паказчыка, то ў сувязі з (1) лагарыфмічная функцыя, наадварот, апісвае змяненне паказчыка ступені ў залежнасці ад змянення ступені. Таму лагарыфмічная функцыя $y = \log_a x$ называецца *адваротнай* да паказальнай функцыі $y = a^x$.

Формула (1) атрымліваецца з формулы (2), калі ў апошняй пераменныя велічыні x і y памяняць месцамі. Адсюль вынікае, што значэнні лагарыфмічнай функцыі $y = \log_a x$ лёгка атрымаць з адпаведных значэнняў паказальнай функцыі $y = a^x$, калі тое, што для паказальнай функцыі было y-ам, для лагарыфмічнай функцыі разглядваць як x, а тое, што для паказальнай функцыі было x-ом, для лагарыфмічнай функцыі разглядваць як y.

Табліцы значэнняў паказальных функцый $y = 2^x$, $y = 10^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ і $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$ былі складзены намі ў § 178. Выкарыстоўваючы іх, мы атрымліваем табліцы набліжаных значэнняў функцый

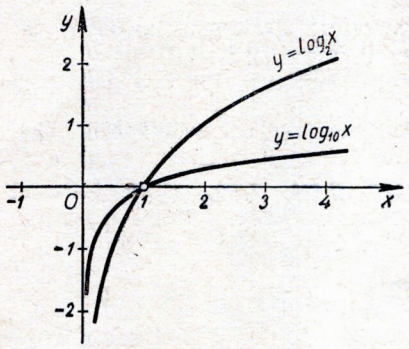
$$y = \log_2 x, \quad y = \log_{10} x, \quad y = \log_{\frac{1}{2}} x \text{ і } y = \log_{\frac{1}{10}} x:$$

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	...
$\log_2 x$	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$\log_{\frac{1}{2}} x$	3	2	1	0	-1	-2	-3	...

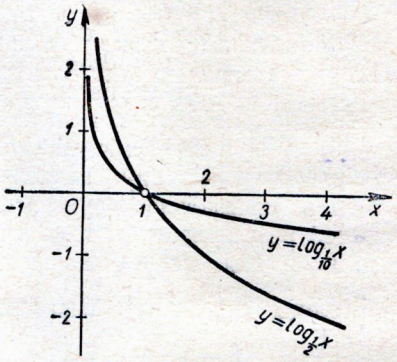
x	0,1	0,2	0,3	0,6	1,0	1,8	3,2	5,6	10,0	...
$\log_{10} x$	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	...
$\log_{\frac{1}{10}} x$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	-1	...

Гэтыя табліцы даюць (хоць і вельмі абмежаванае) уяўленне аб паводзінах разглядваемых функцый. У прыватнасці, яны яшчэ могуць быць выкарыстаны пры пабудаванні графікаў гэтых функцый.

На рысунку 250 вы бачыце графікі функцый $y = \log_2 x$ і $y = \log_{10} x$, а на рысунку 251 — графікі функцый $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ і $y = \log_{\frac{1}{10}} x$.



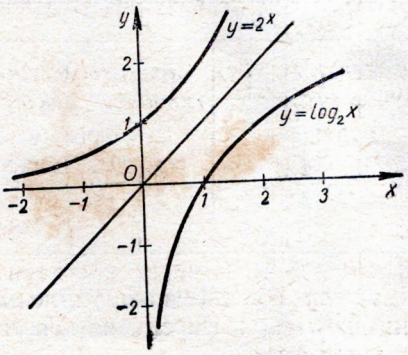
Рыс. 250.



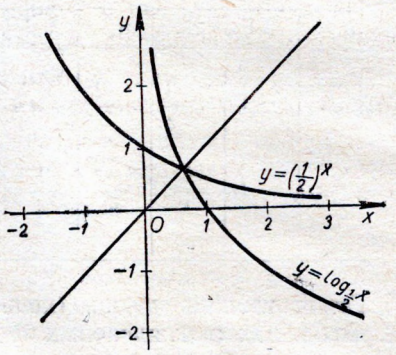
Рыс. 251.

Трэба звярнуць увагу на наступную важную акалічнасць. Калі $x \to 0$, то лагарыфмічная крывая $y = \log_a x$ неабмежавана набліжаецца да восі ардынат. Але восі гэтай яна ніколі не дасягае (гл. рыс. 250 і 251). Аб гэтым нельга забываць пры пабудаванні лагарыфмічных крывых.

Для параўнання графіка лагарыфмічнай функцыі $y = \log_a x$ з графікам адпаведнай ёй паказальнай функцыі $y = a^x$ звернемся да рысункаў 252 ($a = 2$) і 253 $\left(a = \frac{1}{2}\right)$. Як відаць з гэтых рысункаў, графікі лагарыфмічнай функцыі і адпаведнай ёй паказальнай функцыі сіметрычныя адзін другому адносна бісектрысы 1-га і



Рыс. 252.



Рыс. 253.

3-га каардынатных вуглоў. Калі, напрыклад, рысунак 252 перагнуць па гэтай бісектрысе, то графікі функцый $y = 2^x$ і $y = \log_2 x$ накладуцца адзін на другі.

Практыкаванні

1385. Ці перасякаецца лагарыфмічная крывая $y = \log_a x$:

а) з воссю x; б) з воссю y?

1386. Выкарыстоўваючы графік функцыі $y = \log_2 x$, знайсці лагарыфмы па аснове 2 лікаў: 0,5; 0,6; 0,7; 1,5; 2,3; 3,0.

Лагарыфмы якіх лікаў па аснове 2 роўны 0,7; 0,8; 0,9; 1,0; 1,5?

1387. Зыходзячы з графіка функцыі $y = \log_2 x$, пабудаваць графікі функцый:

а) $y = \log_2 (x - 1)$; в) $y = -\log_2 x$; д) $y = |\log_2 x|$;

б) $y = \log_2 (x + 2)$; г) $y = \log_2 |x|$; е) $y = \log_2 (-x)$.

1388. Пабудаваць графікі функцый:

а) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$; г) $y = |\log_{\frac{1}{3}} x|$;

б) $y = \log_{\frac{1}{3}} (x - 1)$; д) $y = \log_{\frac{1}{3}} |x|$;

в) $y = \log_{\frac{1}{3}} (x + 2)$; е) $y = \log_{\frac{1}{3}} (-x)$.

1389. На адным і тым жа рысунку пабудаваць графікі функцый:

$$y = \log_3 x \quad \text{і} \quad y = \log_{\frac{1}{3}} x.$$

§ 182. Асноўныя ўласцівасці лагарыфмічнай функцыі

У гэтым параграфе мы вывучым асноўныя ўласцівасці лагарыфмічнай функцыі

$$y = \log_a x. \tag{1}$$

Напомнім, што пад a ў формуле (1) можна падразумяваць любы фіксіраваны дадатны лік, адрозны ад 1.

Уласцівасць 1. ***Вобласцю вызначэння лагарыфмічнай функцыі служыць мноства ўсіх дадатных лікаў.***

Сапраўды, няхай b ёсць адвольны дадатны лік. Пакажам, што выраз $\log_a b$ вызначаны. Як мы ведаем, $\log_a b$ ёсць **не** што іншае, як корань ураўнення

$$a^z = b. \tag{2}$$

Калі a і b — дадатныя лікі, прычым $a \neq 1$, то такое ўраўненне па ўласцівасцях 2 і 5 паказальнай функцыі (гл. § 179) заўсёды мае і прытым толькі адзін корань. Гэтым коранем і з'яўляецца $\log_a b$. Значыць, $\log_a b$ у дадзеным выпадку вызначаны.

Пакажам цяпер, што калі $b \leqslant 0$, то выраз $\log_a b$ не вызначаны. Сапраўды, калі б гэты выраз меў сэнс, то ён даваў бы корань ураўнення (2); у такім выпадку павінна была б выконвацца роўнасць

$$a^{\log_a b} = b.$$

На самай жа справе гэта роўнасць не выконваецца, паколькі левая яе частка ўяўляе сабой дадатны, а правая — адмоўны лік або нуль.

Такім чынам, выраз $\log_a b$ ($a > 0$, $a \neq 1$) вызначаны для ўсіх дадатных значэнняў, але не вызначаны ні для якога адмоўнага значэння b, ні для $b = 0$. А гэта і азначае, што вобласцю вызначэння функцыі $y = \log_a x$ з'яўляецца мноства ўсіх дадатных лікаў.

1-я ўласцівасць лагарыфмічнай функцыі даказана. Геаметрычная інтэрпрэтацыя гэтай уласцівасці заключаецца ў тым, што графік функцыі $y = \log_a x$ цалкам размешчаны ў правай паўплоскасці, якая адпавядае толькі дадатным значэнням x (гл. рыс. 250 і 251).

Уласцівасць 2. ***Вобласцю змянення лагарыфмічнай функцыі служыць мноства ўсіх лікаў.***

Гэта азначае, што выраз $\log_a x$ пры розных значэннях x можа прымаць любыя лікавыя значэнні.

Няхай b — адвольны сапраўдны лік. Пакажам, што існуе лік x, які задавальняе ўмове

$$\log_a x = b. \tag{3}$$

Тым самым і будзе даказана ўласцівасць 2.

Суадносіна (3) азначае тое ж самае, што і суадносіна

$$a^b = x.$$

Лік a дадатны. А ступень любога дадатнага ліку з адвольным паказчыкам заўсёды вызначана. Таму, выбраўшы ў якасці шукаемага значэння x лік a^b, мы і задаволім умову (3).

Уласцівасць 3. ***Пры $a > 1$ лагарыфмічная функцыя $y = \log_a x$ з'яўляецца манатонна ўзрастаючай, а пры $0 < a < 1$ — манатонна ўбываючай.***

Няхай $a > 1$ і $x_2 > x_1$. Дакажам, што

$$\log_a x_2 > \log_a x_1.$$

Для доказу дапусцім адваротнае: $\log_a x_2 < \log_a x_1$ або $\log_a x_2 = \log_a x_1$. Пры $a > 1$ паказальная функцыя $y = a^x$ манатонна ўзрастае. Таму з умовы $\log_a x_2 < \log_a x_1$ вынікае, што $a^{\log_a x_2} < a^{\log_a x_1}$. Але $a^{\log_a x_2} = x_2$, $a^{\log_a x_1} = x_1$. Значыць, $x_2 < x_1$. А гэта супярэчыць умове, згодна з якой $x_2 > x_1$. Да супярэчнасці прыводзіць і другое дапушчэнне: $\log_a x_1 = \log_a x_2$. У гэтым выпадку павінна было б быць: $a^{\log_a x_1} = a^{\log_a x_2}$ або $x_1 = x_2$. Застаецца прызнаць, што

$$\log_a x_2 > \log_a x_1.$$

Тым самым мы даказалі, што пры $a > 1$ функцыя $y = \log_a x$ з'яўляецца манатонна ўзрастаючай.

Выпадак, калі $a < 1$, прапануем вучням разгледзець самастойна.

3-я ўласцівасць лагарыфмічнай функцыі дапускае простую геаметрычную інтэрпрэтацыю. Пры $a > 1$ графік функцыі $y = \log_a x$ з ростам x усё вышэй і вышэй падымаецца (гл. рыс. 250), а пры $a < 1$ ён з ростам x усё ніжэй і ніжэй апускаецца (гл. рыс. 251).

Вынік. ***Калі лагарыфмы двух лікаў па адной і той жа дадатнай аснове, адрознай ад 1, роўны, то роўны і самыя гэтыя лікі.***

Іншымі словамі, з умовы

$$\log_a x = \log_a y \ (a > 0, \ a \neq 1)$$

вынікае, што

$$x = y.$$

Сапраўды, калі б адзін з лікаў x і y быў бы больш другога, то з прычыны манатоннасці лагарыфмічнай функцыі адзін з лікаў $\log_a x$ і $\log_a y$ быў бы больш другога. Але гэта не так. Значыць, $x = y$.

Уласцівасць 4. ***Пры $x = 1$ лагарыфмічная функцыя $y = \log_a x$ прымае значэнне, роўнае нулю.***

Графічна гэта азначае, што незалежна ад a крывая $y = \log_a x$ перасякаецца з воссю x у пункце з абсцысай $x = 1$ (гл. рыс. 250 і 251).

Для доказу 4-й уласцівасці дастаткова заўважыць, што пры любым дадатным a

$$a^0 = 1.$$

Таму $\log_a 1 = 0$.

Уласцівасць 5. ***Няхай $a > 1$. Тады пры $x > 1$ функцыя $y = \log_a x$ прымае дадатныя, а пры $0 < x < 1$ адмоўныя значэнні.***

Калі ж $0 < a < 1$, то, наадварот, пры $x > 1$ функцыя $y = \log_a x$ прымае адмоўныя, а пры $0 < x < 1$ дадатныя значэнні.

Гэта ўласцівасць лагарыфмічнай функцыі таксама дапускае простую графічную інтэрпрэтацыю. Няхай, напрыклад, $a > 1$. Тады тая частка крывой $y = \log_a x$, якая адпавядае значэнням $x > 1$, размяшчаецца вышэй восі x, тая ж частка гэтай крывой, якая адпавядае значэнням $0 < x < 1$, знаходзіцца ніжэй восі x (гл. рыс. 250). Аналагічна можа быць інтэрпрэтаваны і выпадак, калі $a < 1$ (рыс. 251).

5-я ўласцівасць лагарыфмічнай функцыі з'яўляецца простым вынікам 3-й і 4-й уласцівасцей. Для вызначэння разгледзім выпадак, калі $a > 1$. Тады па 3-й уласцівасці функцыя $y = \log_a x$ будзе манатонна ўзрастаючай. Таму калі $x > 1$, то $\log_a x > \log_a 1$. Але па

4-й уласцівасці $\log_a 1 = 0$. Значыць, пры $x > 1$ $\log_a x > 0$. Пры $x < 1$ $\log_a x < \log_a 1$, гэта значыць $\log_a x < 0$.

Аналагічна можа быць разгледжаны і выпадак, калі $a < 1$. Вучням прапануецца разабраць яго самастойна.

Да разгледжаных пяці ўласцівасцей лагарыфмічнай функцыі мы без доказу дададзім яшчэ адну важную ўласцівасць, справядлівасць якой наглядна адлюстроўваецца на рысунках 250 і 251.

У л а с ц і в а с ц ь 6. ***Калі $a > 1$, то пры $x \to 0$ значэнні функцыі $y = \log_a x$ неабмежавана ўбываюць ($y \to -\infty$). Калі $0 < a < 1$, то пры $x \to 0$ значэнні функцыі $y = \log_a x$ неабмежавана ўзрастаюць ($y \to \infty$).***

Практыкаванні

1390. Знайсці вобласці вызначэння наступных функцый:

а) $y = \log_2(1 + x)$; д) $y = \log_7 |x|$;

б) $y = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 1)$; е) $y = \log_3(x^2 + x - 2)$;

в) $y = \log_{10}(4 + x^2)$; ж) $y = \log_{0,5}(5x - x^2 - 6)$;

г) $y = \log_5(-x)$; з) $y = \log_6(x^2 + x + 1)$.

1391. Пры якіх значэннях x у інтэрвале $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ вызначаны выразы:

а) $\log_2(\sin x)$; в) $\log_4(\operatorname{tg} x)$;

б) $\log_3(\cos x)$; г) $\log_5(\operatorname{ctg} x)$?

1392. Што вы можаце сказаць аб найбольшых і найменшых значэннях функцый:

а) $y = \log_2 x$; б) $y = |\log_2 x|$?

1393. На аснове якой уласцівасці лагарыфмічнай функцыі можна сцвярджаць, што:

а) $\log_{10} 5 > \log_{10} 4$; б) $\log_{0,1} 5 < \log_{0,1} 4$?

1394. Які лік большы:

а) $\log_2 5$ або $\log_2 6$;

б) $\log_5 \frac{1}{2}$ або $\log_5 \frac{1}{3}$;

в) $\log_{\frac{1}{3}} 2$ або $\log_{\frac{1}{3}} 4$;

г) $\log_{\frac{1}{7}} \frac{4}{5}$ або $\log_{\frac{1}{7}} \frac{5}{6}$?

1395. Рашыць адносна x няроўнасці:

а) $\log_2 x > \log_2 3$; г) $\log_{\frac{1}{2}}(3x) \leqslant \log_{\frac{1}{2}} 6$;

б) $\log_3 x^2 > \log_3 4$; д) $\log_{10}(x^2 - 1) \geqslant \log_{10}(4x + 4)$;

в) $\log_{\frac{1}{3}} x \geqslant \log_{\frac{1}{3}} 2$; е) $\log_{0,1}(1 - x^2) > \log_{0,1}(2x + 2)$.

1396. Што можна сказаць пра лік a, калі:

а) $\log_a 7 > \log_a 6$; в) $\log_a \frac{1}{3} < \log_a \frac{1}{2}$;

б) $\log_a 5 < \log_a 4$; г) $\log_a 5 > 0$?

1397. Што можна сказаць пра лік a, калі пры любых значэннях x

$$\log_a (x^2 + 1) > \log_a x?$$

1398. Паміж якімі паслядоўнымі цэлымі лікамі знаходзяцца лагарыфмы:

а) $\log_2 5$; б) $\log_3 8$; в) $\log_{\frac{1}{3}} 7$; г) $\log_{\frac{1}{2}} 9$?

1399. Якія з дадзеных лікаў з'яўляюцца дадатнымі і якія адмоўнымі:

а) $\log_2 5$; б) $\log_2 \frac{1}{3}$; в) $\log_{\frac{1}{2}} 5$; г) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$;

д) $\log_7 1$; е) $\log_\pi 3$; ж) $\log_{\frac{\pi}{3}} 4$; з) $\log_{\frac{\pi}{4}} 4$?

§ 183. Лагарыфмы здабытку і дзелі

Тэарэма 1. ***Лагарыфм здабытку двух дадатных лікаў роўны суме іх лагарыфмаў,*** дакладней, калі лікі a, x і y дадатныя і $a \neq 1$, то

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y. \qquad (1)$$

Для доказу гэтай тоеснасці дастаткова пераканацца ў тым, што

$$a^{\log_a (xy)} = a^{\log_a x + \log_a y}. \qquad (2)$$

(Калі ступені аднаго і таго ж дадатнага ліку, адрознага ад 1, роўныя, то роўныя і паказчыкі гэтых ступеней.) Справядлівасць формулы (2) устанавіць вельмі проста, калі выкарыстаць азначэнне лагарыфма. Маем:

$$a^{\log_a (xy)} = xy;$$

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = xy.$$

Адсюль вынікае формула (2), а значыць, і формула (1).

Прыклады.

1) $\log_3 15 = \log_3 (3 \cdot 5) = \log_3 3 + \log_3 5 = 1 + \log_3 5$;
2) $\log_{10} 2 + \log_{10} 5 = \log_{10} (2 \cdot 5) = \log_{10} 10 = 1$.

Калі лікі x і y адмоўныя, то формула (1) траціць сэнс. Напрыклад, нельга пісаць

$$\log_2[(-8)\cdot(-4)] = \log_2(-8) + \log_2(-4),$$

паколькі выразы $\log_2(-8)$ і $\log_2(-4)$ наогул не вызначаны (лагарыфмічная функцыя $y = \log_2 x$ вызначана толькі для дадатных значэнняў аргумента x).

Тэарэма 1 справядлівая не толькі для двух, але і для адвольнага ліку сумножнікаў, гэта значыць для любога натуральнага k і любых дадатных лікаў $x_1, x_2, \ldots, x_k$:

$$\log_a(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_k) = \log_a x_1 + \\ + \log_a x_2 + \log_a x_3 + \ldots + \log_a x_k.$$

Тэарэма 2. ***Лагарыфм дзелі двух дадатных лікаў роўны рознасці лагарыфмаў дзялімага і дзельніка.***

Іншымі словамі, калі лікі a, x і y дадатныя і $a \neq 1$, то

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y. \qquad (3)$$

Доказ. Формула (3), відавочна, раўназначна наступнай формуле:

$$\log_a \frac{x}{y} + \log_a y = \log_a x, \qquad (4)$$

якая атрымліваецца з (3), калі выраз $\log_a y$ перанесці з правай часткі ў левую. Таму для доказу формулы (3) дастаткова ўстанавіць формулу (4). А гэта формула лёгка выводзіцца з формулы (1):

$$\log_a \frac{x}{y} + \log_a y = \log_a\left(\frac{x}{y}\cdot y\right) = \log_a x.$$

Прыклады.

1) $\log_3 \frac{25}{16} = \log_3 25 - \log_3 16;$

2) $\log_2 1000 - \log_2 125 = \log_2 \frac{1000}{125} = \log_2 8 = 3.$

Вынік з тэарэмы 2. Паколькі $\log_a 1 = 0$, то

$$\log_a \frac{1}{b} = \log_a 1 - \log_a b = -\log_a b.$$

Такім чынам,

$$\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b.$$

Лагарыфмы двух узаемна адваротных лікаў па адной і той жа аснове адрозніваюцца адзін ад другога толькі знакам.

Прыклады.

$$\log_3 9 = -\log_3 \frac{1}{9}; \quad \log_5 \frac{1}{125} = -\log_5 125$$

і г. д.

Практыкаванні

1400. Вылічыць:

1) $\log_{10} 2 + \log_{10} 5$;
2) $\log_2 3 + \log_2 \frac{4}{3}$;
3) $\log_3 7 - \log_3 \frac{7}{27}$;
4) $\log_{10} 40 + \log_{10} 25$;
5) $\log_{10} 0{,}18 - \log_{10} 180$;
6) $\log_{12} 4 + \log_{12} 36$;
7) $\log_5 100 - \log_5 4$;
8) $\log_6 4 + \log_6 9$;
9) $\log_6 \frac{1}{18} + \log_6 \frac{1}{12}$;
10) $\log_{0,1} 50 - \log_{0,1} 0{,}5$.

1401. Ведаючы, што $\log_{10} 2 \approx 0{,}3010$; $\log_{10} 3 \approx 0{,}4771$; $\log_{10} 5 \approx 0{,}6990$, знайсці лагарыфмы наступных лікаў па аснове 10:

$$6,\ 15,\ \frac{5}{6},\ 20,\ \frac{1}{30}.$$

1402. Знайсці $\log_{10} 2$ і $\log_{10} 5$, калі вядома, што здабытак гэтых лагарыфмаў роўны 0,2104.

1403. Знайсці $\log_2 \operatorname{tg} \varphi$ і $\log_2 \operatorname{ctg} \varphi$, калі вядома, што

$$\log_2 \sin \varphi \approx 0{,}1919; \quad \log_2 \cos \varphi \approx 0{,}1157.$$

1404. Пры якіх значэннях x выконваецца роўнасць

$$\log_3 [(x+1)(x-1)] = \log_3 (x+1) + \log_3 (x-1)?$$

1405. Пры якіх значэннях x выконваецца роўнасць

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{x^2+1}{x^2-3x+2} = \log_{\frac{1}{3}} (x^2+1) - \log_{\frac{1}{3}} (x^2-3x+2)?$$

1406. На колькі $\log_2 100\ a$ большы за $\log_2 \frac{a}{100}$?

1407. Як трэба змяніць лік, каб яго лагарыфм змяніў знак на процілеглы?

§ 184. Лагарыфм ступені і кораня

Тэарэма 1. ***Лагарыфм ступені дадатнага ліку роўны здабытку паказчыка гэтай ступені на лагарыфм яе асновы.***

Іншымі словамі, калі лікі a і x дадатныя і $a \neq 1$, то для любога сапраўднага k

$$\log_a x^k = k \log_a x. \tag{1}$$

Для доказу гэтай формулы дастаткова паказаць, што

$$a^{\log_a x^k} = a^{k \log_a x}. \tag{2}$$

Маем:

$$a^{\log_a x^k} = x^k,$$

$$a^{k \log_a x} = \left(a^{\log_a x}\right)^k = x^k.$$

Адсюль вынікае справядлівасць формулы (2), а значыць, і (1).

Заўважым, што калі лік k з'яўляецца натуральным ($k = n$), то формула (1) з'яўляецца прыватным выпадкам формулы

$$\log_a (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \ldots + \log_a x_n,$$

даказанай яшчэ ў папярэднім параграфе. Сапраўды, дапускаючы ў гэтай формуле

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x,$$

атрымліваем

$$\log_a x^n = n \log_a x.$$

Прыклады.

1) $\log_3 25 = \log_3 5^2 = 2\log_3 5$;

2) $\log_3 2^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \log_3 2$.

Пры адмоўных значэннях x формула (1) траціць сэнс. Напрыклад, нельга пісаць $\log_2 (-4)^2 = 2\log_2 (-4)$, паколькі выраз $\log_2 (-4)$ не вызначаны. Заўважым, што выраз, які стаіць у левай частцы гэтай формулы, мае сэнс:

$$\log_2 (-4)^2 = \log_2 16 = 4.$$

Наогул, калі лік x адмоўны, то выраз $\log_a x^{2k}$ вызначаны, паколькі $x^{2k} > 0$. Выраз жа $\log_a x$ у гэтым выпадку не мае сэнсу. Таму пісаць

$$\log_a x^{2k} = 2k \log_a x$$

нельга. Аднак можна пісаць

$$\log_a x^{2k} = 2k \log_a |x|. \tag{3}$$

Гэта формула лёгка атрымліваецца з (1), калі ўлічыць, што

$$x^{2k} = |x|^{2k}.$$

Напрыклад,

$$\log_3 (-3)^4 = 4\log_3 |-3| = 4\log_3 3 = 4.$$

Тэарэма 2. ***Лагарыфм кораня з дадатнага ліку роўны лагарыфму падкарэннага выразу, падзеленаму на паказчык кораня.***

Іншымі словамі, калі лікі a і x дадатныя, а n — натуральны лік, то

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x.$$

Сапраўды, $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$. Таму па тэарэме 1

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a x.$$

Прыклады.

1) $\log_3 \sqrt{8} = \frac{1}{2} \log_3 8$; 2) $\log_2 \sqrt[5]{27} = \frac{1}{5} \log_2 27$.

Практыкаванні

1408. Як зменіцца лагарыфм ліку, калі, не змяняючы асновы:

а) узвесці лік у квадрат;

б) здабыць з ліку квадратны корань?

1409. Як зменіцца рознасць $\log_2 a - \log_2 b$, калі лікі a і b замяніць адпаведна на:

а) a^3 і b^3; б) $3a$ і $3b$?

1410. Ведаючы, што $\log_{10} 2 \approx 0{,}3010$; $\log_{10} 3 \approx 0{,}4771$, знайсці лагарыфмы па аснове 10 лікаў:

$$8;\ 9;\ \sqrt[3]{2};\ \sqrt[3]{6};\ 0{,}5;\ \frac{1}{9}.$$

1411. Даказаць, што лагарыфмы паслядоўных членаў геаметрычнай прагрэсіі ўтвараюць арыфметычную прагрэсію.

1412. Ці адрозніваюцца адна ад другой функцыі:

$$y = \log_3 x^2 \text{ і } y = 2\log_3 x?$$

Пабудаваць графікі гэтых функцый.

1413. Знайсці памылку ў наступных пераўтварэннях:

$$\log_2 \frac{1}{3} = \log_2 \frac{1}{3}; \qquad 2\log_2 \frac{1}{3} > \log_2 \frac{1}{3};$$

$$\log_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 > \log_2 \frac{1}{3}; \qquad \left(\frac{1}{3}\right)^2 > \frac{1}{3}; \qquad \frac{1}{9} > \frac{1}{3}.$$

§ 185. Пераход ад адной асновы лагарыфмаў да другой

Часам аказваецца карысным ад лагарыфмаў па адной аснове (напрыклад, a) перайсці да лагарыфмаў па другой аснове (напрыклад, c). У гэтым выпадку карыстаюцца наступнай формулай:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}. \qquad (1)$$

Пры гэтым дапускаецца, што a, b і c — дадатныя лікі, прычым a і c адрозныя ад адзінкі.

Няхай, напрыклад, нам вядома, што $\log_{10} 2 \approx 0{,}3010$; $\log_{10} 3 \approx \approx 0{,}4771$. Трэба знайсці $\log_2 3$. Па формуле (1)

$$\log_2 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \approx \frac{0{,}4771}{0{,}3010} \approx 1{,}58.$$

Для доказу формулы (1) выкарыстаем асноўную лагарыфмічную тоеснасць:

$$a^{\log_a b} = b.$$

Калі дадатныя лікі роўныя, то, відавочна, роўныя і іх лагарыфмы па адной і той жа аснове. Таму

$$\log_c \left(a^{\log_a b}\right) = \log_c b.$$

Але па тэарэме аб лагарыфме ступені

$$\log_c \left(a^{\log_a b}\right) = \log_a b \cdot \log_c a.$$

Значыць,

$$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b,$$

адкуль і вынікае формула (1).

Калі ў формуле (1) у якасці c узяць b, то атрымліваем

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}.$$

Такім чынам,

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

Прыклады.

$$\log_{32} 2 = \frac{1}{\log_2 32} = \frac{1}{5};$$

$$\log_{125} 5 = \frac{1}{\log_5 125} = \frac{1}{3}.$$

Практыкаванні

1414. Ведаючы, што $\log_{10} 2 \approx 0{,}3010$ і $\log_{10} 3 \approx 0{,}4771$, знайсці:

а) $\log_3 2$; в) $\log_3 12$;

б) $\log_3 8$; г) $\log_{12} 3$.

1415. Даказаць, што адносіны

$$\frac{\log_2 x}{\log_3 x} \text{ і } \frac{\log_x 2}{\log_x 3}$$

не залежаць ад x.

1416. Даказаць няроўнасці:

а) $\log_2 5 + \log_5 2 > 2$;

б) $\log_{\frac{1}{3}} 4 + \log_4 \frac{1}{3} < -2$.

1417. Ці зменіцца лагарыфм ліку, калі гэты лік і аснову лагарыфма ўзвесці ў адну і тую ж ступень?

§ 186. Лагарыфмаванне і патэнцыраванне

Калі некаторы выраз складзены з дадатных лікаў пры дапамозе множання, дзялення, узвядзення ў ступень і здабывання кораня, то лагарыфм усяго гэтага выразу лёгка выразіць праз лагарыфм уваходзячых у яго лікаў.

Няхай, напрыклад,

$$x = \frac{13^2 \sqrt[3]{140}}{\sqrt[5]{67 \cdot 98}}.$$

Тады па тэарэме аб лагарыфме дробу

$$\log_a x = \log_a \left(13^2 \sqrt[3]{140}\right) - \log_a \sqrt[5]{67 \cdot 98}.$$

Тэарэма аб лагарыфме здабытку дае:

$$\log_a \left(13^2 \sqrt[3]{140}\right) = \log_a 13^2 + \log_a \sqrt[3]{140},$$

$$\log_a \sqrt[5]{67 \cdot 98} = \log_a \sqrt[5]{67} + \log_a \sqrt[5]{98}.$$

Цяпер, выкарыстоўваючы тэарэмы аб лагарыфме ступені і кораня, атрымліваем

$$\log_a 13^2 = 2\log_a 13,$$

$$\log_a \sqrt[3]{140} = \frac{1}{3}\log_a 140,$$

$$\log_a \sqrt[5]{67} = \frac{1}{5}\log_a 67,$$

$$\log_a \sqrt[5]{98} = \frac{1}{5}\log_a 98.$$

Такім чынам,

$$\log_a x = 2\log_a 13 + \frac{1}{3}\log_a 140 - \frac{1}{5}\log_a 67 - \frac{1}{5}\log_a 98.$$

Пераход ад выразу да яго лагарыфма называецца *лагарыфмаваннем* гэтага выразу.

Аперацыя, адваротная лагарыфмаванню, называецца *патэнцыраваннем*. Яна заключаецца ў тым, што па лагарыфму некаторага выразу ўзнаўляецца сам выраз. Растлумачым гэта на наступным прыкладзе. Няхай

$$\log_a x = 2\log_a 10 - \frac{1}{2}\log_a 7 - 3\log_a 3 + \frac{1}{3}\log_a 19.$$

Перш за ўсё, выкарыстоўваючы тэарэмы аб лагарыфме ступені кораня, можна запісаць:

$$2\log_a 10 = \log_a 10^2 = \log_a 100,$$

$$\frac{1}{2}\log_a 7 = \log_a (7)^{\frac{1}{2}} = \log_a \sqrt{7},$$

$$3\log_a 3 = \log_a 3^3 = \log_a 27,$$

$$\frac{1}{3}\log_a 19 = \log_a (19)^{\frac{1}{3}} = \log_a \sqrt[3]{19}.$$

Пасля гэтага $\log_a x$ можна запісаць у выглядзе

$$\log_a x = \log_a 100 - \log_a \sqrt{7} - \log_a 27 + \log_a \sqrt[3]{19}.$$

Цяпер, выкарыстоўваючы тэарэмы аб лагарыфме здабытку і дзелі, атрымліваем

$$\log_a x = \left(\log_a 100 + \log_a \sqrt[3]{19}\right) - \left(\log_a \sqrt{7} + \log_a 27\right) =$$

$$= \log_a \left(100\sqrt[3]{19}\right) - \log_a \left(\sqrt{7} \cdot 27\right) = \log_a \frac{100\sqrt[3]{19}}{27\sqrt{7}}.$$

Такім чынам,

$$\log_a x = \log_a \frac{100\sqrt[3]{19}}{27\sqrt{7}}.$$

Але калі лагарыфмы двух дадатных лікаў па адной і той жа аснове роўныя, то роўныя і самі гэтыя лікі. Таму

$$x = \frac{100\sqrt[3]{19}}{27\sqrt{7}}.$$

Практыкаванні

Пралагарыфмаваць па аснове 10 наступныя выразы (№ 1418 — 1422):

1418. а) $x = 3a^7$; в) $x = a^2\sqrt[7]{ab^5}$;

б) $x = 15a^3b^3c^7$; г) $x = a\sqrt[3]{ab^2}$.

1419. а) $x = \frac{a+b}{a-b}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$; в) $x = \sqrt[4]{\frac{a^3}{b^2}}$;

б) $x = \frac{a\sin\varphi}{2b^2c}\sqrt[3]{b^2\operatorname{tg}\varphi}$; г) $x = \left(\sqrt[5]{\frac{a}{2b}}\right)^3$.

1420. а) $x = \left(\sqrt{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\cdot\operatorname{ctg}\varphi}\right)^3$;

б) $x = \left(\sqrt[4]{\frac{\sin 2\varphi}{\sin^3\varphi}\operatorname{ctg}\varphi}\right)^{\frac{2}{3}}$.

1421. а) $x = \left(\frac{\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt{3ab}}\right)^4$; б) $x = \sqrt[4]{\frac{3}{a^3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{4}{b^2}}$;

в) $x = \sqrt[6]{\frac{5m^3}{\sqrt[3]{\left(\frac{m}{n^2}\right)^2}}}$.

1422. а) $x = \frac{3}{4}\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$; б) $x = \frac{\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}{\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}}$;

в) $x = \frac{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b}}}}{b\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a}}}}$.

У задачах № 1423 — 1426 знайсці x з дадзеных ураўненняў:

1423. а) $\log_a x = \log_a 2 + \log_a 3$;

б) $\log_a x = \log_a 2 - \log_a 4$;

в) $\log_a x = 2\log_a 8 - 4\log_a 2$;

г) $\log_a x = 3\log_a 2 + 2\log_a 2$.

1424. а) $\log_3 x = \frac{1}{3}\log_8 8$;

б) $\log_3 x = \frac{2}{3}\log_3 8 + \frac{1}{2}\log_3 16$;

в) $\log_5 x = \frac{2\log_5 3}{5} - \frac{\log_5 7}{10}$.

1425. а) $\log_2 x = \log_2 a + n\log_2 (a+b) - \frac{1}{n}\log_2 (a-b)$;

б) $\log_3 x = -\frac{1}{2}\log_3 a + \frac{1}{4}\left[\log_3 b - \right.$

$\left. - \frac{2}{3}\log_3 a + \frac{2}{3}\log_3 (a-b) - \frac{1}{2}\log_3 (a+b)\right]$;

в) $\log_5 x = -\log_5 (a+b) + \frac{2}{5}\left[2\log_5 a + \right.$

$\left. + \frac{1}{2}\log_5 b - \frac{1}{3}(\log_5 a - \log_5 b) - \log_5 a\right]$.

1426. а) $\log_a x = \frac{2}{3}\log_a \sin\varphi + \frac{1}{3}\log_a \operatorname{tg}\varphi - \frac{2}{3}\log_a \cos\varphi$;

б) $\log_2 x = 1 + \frac{1}{2}\log_2 \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right) +$

$+ \frac{1}{2}\log_2 \cos\frac{\varphi}{2}$.

§ 187. Цэлая і дробавая часткі ліку

Цэлай часткай ліку a называецца найбольшы цэлы лік, які не пераўзыходзіць a.

Цэлая частка ліку a абазначаецца $[a]$. Напрыклад, $[2{,}3] = 2$, $[0{,}165] = 0$, $[5] = 5$. Цэлая частка ліку — 4,7 роўна — 5. Памылкова было б лічыць, што $[-4{,}7] = -4$. Па азначэнню цэлая частка ліку a не павінна пераўзыходзіць a, але $-4 > -4{,}7$.

Аналагічна

$$[-5{,}79] = -6,$$
$$[-0{,}142] = -1,$$
$$[-\pi] = [-3{,}14\ldots] = -4.$$

Рознасць паміж лікам a і яго цэлай часткай $[a]$ называецца дробавай часткай гэтага ліку і абазначаецца $\{a\}$.

$$\{a\} = a - [a].$$

Напрыклад,

$$\{2{,}3\} = 2{,}3 - 2 = 0{,}3;$$
$$\{0{,}165\} = 0{,}165 - 0 = 0{,}165;$$
$$\{-5{,}79\} = -5{,}79 - (-6) = 0{,}21;$$
$$\{0{,}142\} = -0{,}142 - (-1) = 0{,}858.$$

Відавочна, што цэлая частка ліку a можа быць любым цэлым лікам: дадатным, адмоўным або нулём. Дробавая ж частка ліку a заўсёды неадмоўная і менш 1.

Любы сапраўдны лік a можна запісаць у выглядзе сумы яго цэлай і дробавай частак:

$$a = [a] + \{a\}.$$

Напрыклад,

$$2{,}3 = 2 + 0{,}3;$$
$$0{,}165 = 0 + 0{,}165;$$
$$-5{,}79 = -6 + 0{,}21;$$
$$-0{,}142 = -1 + 0{,}858.$$

Практыкаванні

1427. Дадзеныя лікі запісаць у выглядзе сумы іх цэлых і дробавых частак:

$$2{,}01;\ \pi;\ 5;\ -2{,}37;\ -6{,}07;\ -7;\ -\pi.$$

1428. а) Ці зменіцца дробавая частка ліку, калі да яго дадаць цэлы лік?

б) Ці зменіцца цэлая частка ліку, калі да яго дадаць правільны дроб?

§ 188. Дзесятковыя лагарыфмы і іх уласцівасці

За аснову лагарыфмаў часта прымаюць лік 10. Лагарыфмы лікаў па аснове 10 называюцца *дзесятковымі*. Для абазначэння дзесятковых лагарыфмаў звычайна выкарыстоўваюць знак lg, а не

log; пры гэтым лік 10, які ўказвае аснову, не пішуць. Напрыклад, замест $\log_{10} 105$ пішуць проста $\lg 105$; замест $\log_{10} 2$ пішуць $\lg 2$ і г. д.

Дзесятковыя лагарыфмы маюць усе тыя ўласцівасці, якія маюць лагарыфмы пры аснове, большай 1. Напрыклад, дзесятковыя лагарыфмы вызначаны толькі для дадатных лікаў. Дзесятковыя лагарыфмы лікаў, большых 1, дадатныя, а лікаў, меншых 1, адмоўныя; з двух дадатных лікаў большаму адпавядае і большы дзесятковы лагарыфм і г. д. Але, акрамя таго, дзесятковыя лагарыфмы маюць і рад спецыфічных асаблівасцей, якімі і тлумачыцца, чаму ў якасці асновы лагарыфмаў зручна выбіраць іменна лік 10.

Перш чым разгледзець гэтыя ўласцівасці, увядзём наступнае азначэнне.

Цэлая частка дзесятковага лагарыфма ліку a называецца характарыстыкай, а дробавая — мантысай гэтага лагарыфма.

Характарыстыка дзесятковага лагарыфма $\lg a$ абазначаецца як $[\lg a]$, а мантыса — як $\{\lg a\}$.

Вядома, напрыклад, што $\lg 2 \approx 0{,}3010$. Таму

$$[\lg 2] = 0, \qquad \{\lg 2\} \approx 0{,}3010.$$

Вядома* таксама, што $\lg 543{,}1 \approx 2{,}7349$. Значыць,

$$[\lg 543{,}1] = 2, \qquad \{\lg 543{,}1\} \approx 0{,}7349.$$

Зусім гэтак жа з роўнасці $\lg 0{,}005 \approx -2{,}3010$ вынікае, што

$$[0{,}005] = -3, \qquad \{\lg 0{,}005\} = 0{,}6990.$$

Цяпер пяройдзем да разгляду ўласцівасцей дзесятковых лагарыфмаў.

Уласцівасць 1. ***Дзесятковы лагарыфм цэлага дадатнага ліку, запісанага адзінкай з наступнымі нулямі, ёсць цэлы дадатны лік, роўны колькасці нулёў у запісе гэтага ліку.***

Напрыклад,

$$\lg 1000 = 3,$$
$$\lg 1\,000\,000 = 6.$$

Наогул, калі

$$a = \underbrace{1000 \ldots 0}_{n},$$

то $a = 10^n$ і таму

$$\lg a = \lg 10^n = n \lg 10 = n.$$

Уласцівасць 2. ***Дзесятковы лагарыфм дадатнага дзесятковага дробу, запісанага адзінкай з папярэднімі***

---

* У далейшым мы навучымся знаходзіць дзесятковыя лагарыфмы дадатных лікаў па табліцах.

нулямі, роўны — n, дзе n — лік нулёў у запісе гэтага ліку, лічачы і нуль цэлых.

Напрыклад,

$$\lg 0{,}01 = -2,$$
$$\lg 0{,}00001 = -5.$$

Наогул, калі

$$a = \underbrace{0{,}000\ldots01}_{n}, \text{ то } a = 10^{-n}$$

і таму

$$\lg a = \lg 10^{-n} = -n \lg 10 = -n.$$

Уласцівасць 3. ***Характарыстыка дзесятковага лагарыфма дадатнага ліку, большага 1, роўна колькасці лічбаў у цэлай частцы гэтага ліку без адной.***

Прыклады. 1) Характарыстыка лагарыфма $\lg 75{,}631$ роўна 1. Сапраўды, $10 < 75$, $631 < 100$. Таму

$$\lg 10 < \lg 75{,}631 < \lg 100,$$

або

$$1 < \lg 75{,}631 < 2.$$

Значыць,

$$\lg 75{,}631 = 1 + \alpha,$$

дзе α — некаторы правільны дадатны дроб. Але тады

$$[\lg 75{,}631] = 1,$$

што і трэба было даказаць.

2) Характарыстыка лагарыфма $\lg 5673{,}1$ роўна 3.

Сапраўды,

$$1000 < 5673{,}1 < 10\,000.$$

Таму

$$\lg 1000 < \lg 5673{,}1 < \lg 10\,000,$$

або

$$3 < \lg 5673{,}1 < 4.$$

Значыць,

$$[\lg 5673{,}1] = 3.$$

Наогул, калі цэлая частка дадатнага ліку a, большага адзінкі, змяшчае n лічбаў, то

$$10^{n-1} \leqslant a \leqslant 10^{n}.$$

Таму

$$\lg 10^{n-1} \leqslant \lg a < \lg 10^n,$$

або

$$n - 1 \leqslant \lg a < n.$$

Значыць,

$$[\lg a] = n - 1.$$

Уласцівасць 4. ***Характарыстыка дзесятковага лагарыфма дадатнага дзесятковага дробу, меншага 1, роўна — n, дзе n — лік нулёў у дадзеным дзесятковым дробе перад першай значачай лічбай, лічачы і нуль цэлых.***

Прыклады. 1) Характарыстыка лагарыфма $\lg 0{,}0015$ роўна — 3. Сапраўды,

$$0{,}001 < 0{,}0015 < 0{,}01.$$

Таму

$$\lg 0{,}001 < \lg 0{,}0015 < \lg 0{,}01,$$

або

$$-3 < \lg 0{,}0015 < -2.$$

Значыць, $\lg 0{,}0015 = -3 + \alpha$, дзе α — некаторы правільны дадатны дроб. Але ў такім выпадку

$$[\lg 0{,}0015] = -3.$$

2) Характарыстыка лагарыфма $\lg 0{,}6$ роўна — 1. Сапраўды, $0{,}1 < 0{,}6 < 1$, таму

$$\lg 0{,}1 < \lg 0{,}6 < \lg 1,$$

або

$$-1 < \lg 0{,}6 < 0.$$

Значыць,

$$\lg 0.6 = -1 + \alpha,$$

дзе α — некаторы правільны дадатны дроб. Але ў такім выпадку

$$[\lg 0{,}6] = -1.$$

Наогул, калі першай значачай лічбе правільнага дзесятковага дробу a папярэднічае n нулёў (лічачы і нуль цэлых), то

$$\underbrace{0{,}000\ldots001}_{n} \leqslant a < \underbrace{0{,}00\ldots01}_{n-1}.$$

Таму

$$\lg \underbrace{0{,}000\ldots001}_{n} \leqslant \lg a < \lg \underbrace{0{,}00\ldots01}_{n-1},$$

або

$$-n \leqslant \lg a < -(n-1).$$

Значыць,

$$[\lg a] = -n.$$

Уласцівасць 5. ***Пры множанні ліку на 10^n дзесятковы лагарыфм павялічваецца на n.***

Сапраўды, па тэарэме аб лагарыфме здабытку

$$\lg (a \cdot 10^n) = \lg a + \lg 10^n = \lg a + n.$$

Напрыклад,

$$\lg (579{,}13 \cdot 100) = \lg 579{,}13 + 2,$$

$$\lg (16 \cdot 1000) = \lg 16 + 3.$$

Перанос коскі ў дадатным дзесятковым дробе на n знакаў управа раўназначны множанню гэтага дробу на 10^n. Таму ***пры пераносе коскі ў дадатным дзесятковым дробе на n знакаў управа дзесятковы лагарыфм павялічваецца на n.***

Уласцівасць 6. ***Пры дзяленні ліку на 10^n дзесятковы лагарыфм памяншаецца на n.***

Напрыклад,

$$\lg \frac{1{,}57}{1000} = \lg 1{,}57 - 3,$$

$$\lg \frac{0{,}63}{100} = \lg 0{,}63 - 2.$$

Пры пераносе коскі ў дадатным дзесятковым дробе на n знакаў улева дзесятковы лагарыфм памяншаецца на n.

Напрыклад,

$$\lg 0{,}3567 = \lg 35{,}67 - 2,$$

$$\lg 0{,}00054 = \lg 0{,}54 - 3.$$

Вучням прапануецца самастойна даказаць гэтыя сцверджанні.

Усе даказаныя да гэтага часу ўласцівасці дзесятковых лагарыфмаў адносіліся да іх характарыстыкі. Цяпер звернемся да мантысы дзесятковых лагарыфмаў.

Уласцівасць 7. ***Мантыса дзесятковага лагарыфма дадатнага ліку не змяняецца пры множанні гэтага ліку на 10^n з любым цэлым паказчыкам n.***

Сапраўды, пры любым цэлым n (як дадатным, так і адмоўным)

$$\lg (a \cdot 10^n) = \lg a + \lg 10^n = \lg a + n.$$

Але дробавая частка ліку не змяняецца пры дадаванні да яго цэлага ліку.

Перанос коскі ў дзесятковым дробе ўправа і ўлева раўназначны множанню гэтага дробу на ступень ліку 10 з цэлым паказчыкам n (дадатным або адмоўным). Таму ***пры пераносе коскі ў дадатным дзесятковым дробе ўлева або ўправа мантыса дзесятковага лагарыфма гэтага дробу не змяняецца.***

Напрыклад,

$$\{\lg 0{,}0067\} = \{0{,}67\} = \{\lg 0{,}0000067\}.$$

Практыкаванні

1429. (Вусна.) Знайсці дзесятковыя лагарыфмы лікаў:

1; 10; 100; 1000; 10000;
0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; 0,00001

1430. (Вусна.) Знайсці характарыстыкі дзесятковых лагарыфмаў лікаў:

2,00; 57,38; 632,70; 3402,99;
0,17; 0,99; 0,023; 0,0100; 0,0003.

1431. Вядома, што $\lg 2 \approx 0{,}3010$; $\lg 3 \approx 0{,}4771$. Знайсці характарыстыкі і мантысы наступных лагарыфмаў:

а) $\lg 6$; б) $\lg 15$; в) $\lg 32$; г) $\lg 30$; д) $\lg \frac{1}{12}$.

§ 189. Табліцы дзесятковых лагарыфмаў

Для знаходжання дзесятковых лагарыфмаў складзены спецыяльныя матэматычныя табліцы. Па іх, ведаючы лік x, можна з той ці іншай дакладнасцю вызначыць $\lg x$. Мы ў сваёй практыцы будзем карыстацца «Чатырохзначнымі матэматычнымі табліцамі» У. М. Брадзіса. Яны змяшчаюць значэнні дзесятковых лагарыфмаў з дакладнасцю да 0,0001.

У § 188 было паказана, што характарыстыкі дзесятковых лагарыфмаў лёгка знаходзяцца без табліц. Таму ў табліцах дадзены толькі мантысы лагарыфмаў. Разгледзім некалькі прыкладаў знаходжання лагарыфмаў лікаў па табліцах.

1. Лагарыфмы трохзначных цэлых лікаў.

Няхай, напрыклад, трэба знайсці $\lg 456$. Характарыстыка гэтага лагарыфма роўна 2. У табліцы XIII на старонках 65—67 знаходзім лік, які стаіць на перасячэнні радка з адзнакай 45 і слупка з адзнакай 6. Гэта лік 6590. Ён указвае на тое, што мантыса лагарыфма ліку 456 набліжана роўна 0,6590. Значыць, $\lg 456 \approx 2{,}6590$. Аналагічна знаходзім $\lg 238 \approx 2{,}3766$, $\lg 850 \approx 2{,}9294$ і г. д.

2. Лагарыфмы адна- і двухзначных цэлых лікаў.

Няхай, напрыклад, трэба знайсці $\lg 5$. Калі лік памножыць на 100, то мантыса яго дзесятковага лагарыфма не зменіцца. Таму мантыса лагарыфма адназначнага ліку 5 роўна мантысе трохзначнага ліку 500. Па табліцах гэта мантыса роўна 0,6990. Паколькі характарыстыка лагарыфма ліку 5 роўна 0, то $\lg 5 \approx 0{,}6990$. Аналагічна знойдзем $\lg 3 \approx 0{,}4771$ і г. д.

Калі трэба знайсці лагарыфм ліку 13, то для вызначэння яго мантысы дастаткова лік 13 памножыць на 10. Мантыса лагарыфма ліку 130 роўна 0,1139. Паколькі характарыстыка лагарыфма ліку 13 роўна 1, то $\lg 13 \approx 1{,}1139$. Аналагічна знойдзем $\lg 75 \approx 1{,}8751$, $\lg 64 \approx 1{,}8062$ і г. д.

3. Лагарыфмы чатырохзначных цэлых лікаў.

Вы, напэўна, ужо звярнулі ўвагу на тое, што ў правай частцы табліцы XIII размешчаны лікі, якія напамінаюць папраўкі да табліц трыганаметрычных функцый. Гэта частка табліцы змяшчае папраўкі на чацвёртую лічбу, што дае магчымасць вылічваць лагарыфмы чатырохзначных лікаў. Няхай, напрыклад, трэба знайсці $\lg 2587$. Па табліцы XIII знойдзем мантысу трохзначнага ліку 258 і дададзім да яе папраўку на лік 7. У рэзультаце мы атрымаем мантысу лагарыфма чатырохзначнага ліку 2587. Мантыса $\lg 258$ набліжана роўна 0,4116, а папраўка на 7 роўна 0,0012. (У табліцы замест 0,0012 пішуць проста 12.) Таму мантыса лагарыфма ліку 2587 роўна

$$\begin{array}{r} 0{,}4116 \\ +\ 0{,}0012 \\ \hline 0{,}4128 \end{array}$$

Улічваючы, што характарыстыка гэтага лагарыфма роўна 3, атрымліваем канчаткова $\lg 2587 \approx 3{,}4128$. Аналагічна

$$\begin{array}{r} \lg 9625 \approx 3{,}9832 \\ + \\ 0{,}0002 \\ \hline 3{,}9834 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \lg 7718 \approx 3{,}8871 \\ + \\ 0{,}0004 \\ \hline 3{,}8875 \end{array}$$

4. Лагарыфмы цэлых лікаў, якія змяшчаюць больш чатырох лічбаў.

Калі цэлы лік змяшчае больш чатырох лічбаў, то яго акругляюць так, каб усе лічбы, пачынаючы з пятай, былі нулямі. Калі пры гэтым пятая лічба менш 5, то першыя чатыры лічбы не змяняюцца. Калі ж пятая лічба больш або роўна 5, то чацвёртую лічбу павялічваюць на 1.

Напрыклад, $573\,528 \approx 573\,500$, $36\,289 \approx 36\,290$, $19\,998 \approx 20\,000$, $7\,425\,538 \approx 7\,426\,000$. Лагарыфмы зыходных лікаў набліжана роўны лагарыфмам лікаў, атрыманых у выніку акруглення. Мантысы ла-

гарыфмаў гэтых лікаў лёгка знайсці па табліцах. Напрыклад, мантыса лагарыфма ліку 573 500 роўна мантысе лагарыфма ліку 5 735 (пры дзяленні ліку на 100 мантыса яго дзесятковага лагарыфма не змяняецца). Па табліцах знаходзім гэту мантысу: 0,7586. Улічваючы, што lg 573 528 мае характарыстыку 5, атрымліваем lg 573 528 $\approx$ $\approx$ 5,7586.

Аналагічна атрымліваем: мантыса лагарыфма ліку 36 290 роўна мантысе лагарыфма ліку 3629, гэта значыць 0,5598. Таму lg 36289 $\approx$ $\approx$ 4,5598.

5. Лагарыфмы дробавых лікаў.

Няхай, напрыклад, трэба знайсці lg 803,24. Характарыстыка гэтага лагарыфма роўна 2 (цэлая частка ліку 803,24 змяшчае 3 лічбы). Мантыса гэтага лагарыфма роўна мантысе лагарыфма ліку 80 324 або набліжана мантысе лагарыфма ліку 80 320. З табліц знаходзім гэту мантысу: 0,9048. Значыць, lg 803,24 $\approx$ 2,9048. Аналагічна, характарыстыка лагарыфма 0,0053 роўна — 3 (дроб 0,0053 перад першай значачай лічбай мае тры нулі, уключаючы нуль цэлых). Мантыса гэтага лагарыфма роўна мантысе лагарыфма ліку 530. З табліц знаходзім гэту мантысу: 0,7243. Значыць, lg 0,0053 $\approx$ — 3 + + 0,7243 = 2,2757.

Практыкаванні

1432. Выкарыстоўваючы табліцы У. М. Брадзіса, знайсці дзесятковыя лагарыфмы наступных лікаў:

257; 301; 25; 99; 2; 3; 3796; 9999; 10325; 267 398;

37 990 653; 263,56; 35,074; 2,9345; 0,002863; 0,000056.

1433. Выкарыстоўваючы табліцы У. М. Брадзіса, вылічыць:

$\log_3 5$; $\log_9 17$; $\log_{0,05} 0,004$.

§ 190. Табліцы антылагарыфмаў

Па табліцы XIII можна знаходзіць не толькі лагарыфмы лікаў, але і лікі па іх лагарыфмах. Аднак яшчэ прасцей гэта задача рашаецца пры дапамозе табліцы XIV (гл. табліцы У. М. Брадзіса, стар. 68—70). Разгледзім некалькі прыкладаў.

1. Знайсці лік, лагарыфм якога роўны 2,345. Не звяртаючы ўвагі на характарыстыку гэтага лагарыфма 2, знойдзем лік, мантыса лагарыфма якога роўна 0,345. Для гэтага ў табліцы XIV адшукваем радок з адзнакай 34 і слупок з адзнакай 5. На іх перасячэнні стаіць лік 2213. Гэта і ёсць (набліжана) значачая частка шукаемага ліку. Паколькі характарыстыка лагарыфма роўна 2, то цэлая частка шукаемага ліку змяшчае тры лічбы. Значыць, шукаемы лік набліжана роўны 221,3.

2. Рашыць ураўненне $\lg x = 0{,}7823$. У табліцы XIV адшукваем лік, які стаіць на перасячэнні радка з пameткай 78 і слупка з пameткай 2. Ім аказваецца лік 6053. Да яго дадаём папраўку на 3, роўную 4. У рэзультаце атрымліваем 6057. Гэта і ёсць значачая частка ліку. Паколькі характарыстыка лагарыфма ліку x роўна 0, цэлая частка ліку x змяшчае адну лічбу. Таму $x \approx 6{,}057$.

3. Знайсці лік, лагарыфм якога роўны $-3{,}0576$. Перш за ўсё знойдзем характарыстыку і мантысу гэтага лагарыфма: $-3{,}0576 = -4 + 0{,}9424$. Значыць, характарыстыка роўна -4, а мантыса 0,9424. Такі лагарыфм прынята запісваць у выглядзе $\overline{4}{,}9424$. Рыска над лічбай 4 указвае, што характарыстыка лагарыфма роўна -4, а не 4. Цяпер, не звяртаючы ўвагі на характарыстыку $\overline{4}$, знойдзем лік, які адпавядае мантысе 0,9424. Гэта лік 8758. Паколькі характарыстыка лагарыфма шукаемага ліку роўна -4, то гэты шукаемы лік запісваецца ў выглядзе дзесятковага дробу з чатырма нулямі перад першай значачай лічбай: 0,0008758.

Практыкаванне

1434. Карыстаючыся табліцай антылагарыфмаў, рашыць наступныя ўраўненні:

а) $\lg x = 0{,}3625$; г) $\lg x = -2{,}5440$;

б) $\lg x = 4{,}0002$; д) $\lg x = -3{,}0257$;

в) $\lg x = -0{,}3928$; е) $\lg x = -1{,}9994$.

§ 191. Табліцы дзесятковых лагарыфмаў трыганаметрычных функцый

Лагарыфмы сінусаў малых вуглоў (ад 0° да 14°) прыведзены У. М. Брадзісам у табліцы XV на старонках 71 — 72. Напрыклад, каб знайсці

$$\lg \sin 8°47',$$

адшукваем у гэтай табліцы радок з левай адзнакай 8°40′ і слупок з верхняй адзнакай 7′. На іх перасячэнні стаіць лік $\overline{1}{,}1838$ (характарыстыка $\overline{1}$ дадзена вышэй на перасячэнні радка з пameткай 8°00′ і слупка з пameткай 0′). Значыць,

$$\lg 8°47' \approx \overline{1}{,}1838 \text{ (або } -1 + 0{,}1838 = -0{,}8162).$$

Па табліцы XV можна знаходзіць і лагарыфмы косінусаў вуглоў ад 76° да 90°. Няхай, напрыклад, трэба знайсці $\lg \cos 77°34'$. На перасячэнні радка з правай адзнакай 77°30′ і слупка з ніжняй адзнакай 4′ стаіць лік $\overline{1}{,}3331$. Значыць,

$$\lg \cos 77°34' \approx \overline{1}{,}3331 \text{ (або } -0{,}6669).$$

Для знаходжання лагарыфмаў сінусаў вуглоў ад 14° да 90°, а таксама косінусаў вуглоў ад 0° да 76°, трэба карыстацца табліцай XVI, прыведзенай У. М. Брадзісам на старонках 73—74. Тут вуглы чаргуюцца праз кожныя 6′. Таму часам прыходзіцца ўлічваць папраўкі. Правіла ўліку папраўак такое: ***калі дадзены вугал большы за вугал, прыведзены ў табліцы, то папраўка дадаецца для сінуса і адымаецца для косінуса; калі ж дадзены вугал меншы за вугал, прыведзены ў табліцы, то, наадварот, папраўка дадаецца для косінуса і адымаецца для сінуса.***

Прыклады. 1) Знайсці $\lg \sin 43°36′$. У табліцы XVI на перасячэнні радка з левай адзнакай 43° і верхняй адзнакай 36′ стаіць лік $\overline{1},8386$. Значыць, $\lg \sin 43°36′ \approx \overline{1},8386$ (або $-0,1614$).

2) Знайсці $\lg \sin 65°32′$. На перасячэнні радка з левай адзнакай 65° і верхняй адзнакай 30′ (стар. 74) стаіць лік $\overline{1},9590$. Да гэтага ліку трэба дадаць 1 — папраўку на 2′. У рэзультаце атрымаем $\lg \sin 65° 32′ \approx \overline{1},9591$ (або $-0,0409$).

3) Знайсці $\lg \cos 11°54′$. На перасячэнні радка з правай пометкай 11° і ніжняй пометкай 54′ стаіць лік $\overline{1},9906$. Таму $\lg \cos 11°54′ \approx \overline{1},9906$ (або $-0,0094$).

4) Знайсці $\lg \cos 51°20′$. Спачатку знаходзім $\lg \cos 51°18′$, а затым адымаем ад яго папраўку на 2′: $\lg \cos 51°18′ \approx \overline{1},7960$; папраўка на 2′ роўна 3. Таму $\lg \cos 51°20′ \approx \overline{1},7957$ (або $-0,2043$).

Лагарыфмы тангенсаў вуглоў ад 0° да 14° (а таксама катангенсаў вуглоў ад 76° да 90°) прыведзены ў табліцы XVII на старонках 75—76. Лагарыфмы тангенсаў і катангенсаў вуглоў ад 14° да 76° знаходзяцца па табліцы XVIII (стар. 77—78). Лагарыфмы тангенсаў вуглоў ад 76° да 90°, а таксама катангенсаў вуглоў ад 0° да 14° змяшчаюцца ў табліцы XIX (стар. 79—80). Будова гэтых трох табліц зусім аналагічная будове апісаных вышэй табліц XV і XVI. Таму падрабязна на іх мы спыняцца не будзем. Адзначым толькі, што папраўкі ўлічваюцца для лагарыфмаў тангенсаў вуглоў гэтак жа, як і для лагарыфмаў сінусаў вуглоў, а для лагарыфмаў катангенсаў вуглоў — гэтак жа, як і для лагарыфмаў косінусаў вуглоў.

Практыкаванні

1435. Карыстаючыся табліцамі лагарыфмаў трыганаметрычных функцый, знайсці дзесятковыя лагарыфмы наступных велічынь:

а) $\sin 12°17′$; $\sin 3°29′$; $\cos 77°47′$; $\cos 88°19′$;

б) $\sin 48°38′$; $\sin 60°46′$; $\sin 85°57′$; $\cos 4°34′$; $\cos 49°52′$; $\cos 74°33′$;

в) $\operatorname{tg} 3°49′$; $\operatorname{tg} 13°23′$; $\operatorname{ctg} 80°29′$; $\operatorname{ctg} 89°35′$;

г) $\operatorname{tg} 45°38′$; $\operatorname{tg} 67°10′$; $\operatorname{tg} 74°39′$; $\operatorname{ctg} 31°2′$; $\operatorname{ctg} 56°46′$; $\operatorname{ctg} 71°27′$;

д) $\operatorname{tg} 83°39′$; $\operatorname{tg} 89°29′$; $\operatorname{ctg} 0°17′$; $\operatorname{ctg} 9°36′$.

1436. Даць абгрунтаванне правіла ўліку папраўак пры знаходжанні па табліцах лагарыфмаў трыганаметрычных функцый.

§ 192. Дзеянні над лагарыфмамі

Складанне лагарыфмаў асобага растлумачэння не патрабуе. Таму мы абмяжуемся толькі прывядзеннем двух прыкладаў.

$$\begin{array}{r} 3{,}0607 \\ +\ \overline{1}{,}8701 \\ \overline{3}{,}0056 \\ \hline \overline{1}{,}9364 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \overline{4}{,}0380 \\ +\ \overline{5}{,}9927 \\ 2{,}0449 \\ \hline \overline{6}{,}0756 \end{array}$$

Адыманне лагарыфмаў мэтазгодна зводзіць да складання. Для гэтага лагарыфмы, перад якімі стаіць знак —, пераўтвараюць так, каб гэты знак змяніўся на знак +. Напрыклад,

$$-7{,}5604 = -8 + 0{,}4396 = \overline{8}{,}4396;$$
$$-\overline{5}{,}2967 = 5 - 0{,}2967 = 4{,}7033.$$

Так, выраз $\overline{2}{,}0073 - 7{,}5604 - \overline{5}{,}2967$ пераўтвараецца ў суму:

$$\begin{array}{r} \overline{2}{,}0073 \\ +\ \overline{8}{,}4396 \\ 4{,}7033 \\ \hline \overline{5}{,}1502 \end{array}$$

Множанне лагарыфма на лік. Спачатку памнажаем на лік характарыстыку, а затым мантысу лагарыфма, і атрыманыя рэзультаты складваем. Напрыклад:

$$\overline{5}{,}6315 \cdot 4 = -20 + 2{,}5260 = \overline{18}{,}5260;$$

$$\overline{2}{,}0501 \cdot \frac{3}{2} \approx -3 + 0{,}0751 = \overline{3}{,}0751;$$

$$\overline{3}{,}7500 \cdot (-0{,}5) = 1{,}5 - 0{,}3750 = 1{,}1250.$$

Дзяленне лагарыфма на лік. Калі характарыстыка лагарыфма неадмоўная, то дзяленне яго на лік робіцца звычайным спосабам. Напрыклад, $8{,}024 : 4 = 2{,}006$. Калі ж характарыстыка адмоўная, то магчымы два выпадкі.

1) Адмоўная характарыстыка дзеліцца на дзельнік без астатку. У гэтым выпадку характарыстыку і мантысу дзелім на дзельнік асобна. Напрыклад,

$$\overline{15}{,}6305 : 5 = \overline{3}{,}1261.$$

2) Адмоўная характарыстыка не дзеліцца на дзельнік без астатку. Тады дадаём да яе столькі адмоўных адзінак, каб атрыманы лік

дзяліўся на дзельнік без астатку; да мантысы дадаём столькі ж дадатных адзінак. Напрыклад,

$$\overline{2},5608 : 4 = (-4 + 2,5608) : 4 = \overline{1},6402.$$

Мы разгледзелі выпадкі, калі дзельнік ёсць цэлы лік. Калі гэта не так, то папярэдне лагарыфмы трэба запісаць у звычайным выглядзе. Напрыклад,

$$\overline{4},7102 : 2,3546 = -3,2898 : 2,3546 \approx -1,3971 = \overline{2},6029.$$

Дзяленне лагарыфма на адмоўны лік зводзіцца да дзялення на дадатны лік. Напрыклад,

$$\overline{3},6409 : (-4) = -(\overline{3},6409 : 4) \approx -(\overline{1},4102) = 1 - 0,4102 = 0,5898.$$

Практыкаванні

1437. Выканаць дадзеныя дзеянні над лагарыфмамі:

а) $\overline{1},4792 + \overline{1},5706 + 3,0056$;

б) $\overline{5},0032 + 2,7368 + \overline{3},9263$;

в) $0,9329 - \overline{1},2605 - \overline{5},0060$;

г) $\overline{2},4645 - \overline{4},3839 + \overline{6},0092 - \overline{5},3973$;

д) $\overline{1},2396 - 0,5974 - \overline{2},9328$.

Вылічыць з дакладнасцю да 0,0001 (№ 1438, 1439):

1438. а) $\overline{2},0296 \cdot 0,36$; б) $\overline{3},1728 \cdot 5$; в) $\overline{7},2894 \cdot 9,8$;

г) $\overline{1},0256 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$; д) $\overline{4},4437 \cdot (-0,2)$.

1439. а) $\overline{2},6302 : 7$; б) $\overline{3},0280 : \frac{2}{5}$; в) $\overline{5},2709 : \left(-\frac{4}{3}\right)$.

§ 193. Прыклады вылічэння пры дапамозе табліц лагарыфмаў

Прыклад 1. Няхай трэба вылічыць

$$x = \frac{0,475^2 \sqrt[3]{\sin^2 38°22'}}{\operatorname{tg} 85°13' \sqrt[5]{239,3}}.$$

Лагарыфмуючы гэты выраз, атрымліваем

$$\lg x = 2\lg 0,475 + \frac{2}{3}\lg \sin 38°22' - \lg \operatorname{tg} 85°13' - \frac{1}{5}\lg 239,3.$$

Па табліцах лагарыфмаў знаходзім:

$$\lg 0,475 \approx \overline{1},6767;$$

$$\lg 239{,}3 \approx 2{,}3790;$$
$$\lg \sin 38°22' \approx \overline{1}{,}7929;$$
$$\lg \operatorname{tg} 85°13' \approx 1{,}0774.$$

Таму

$$2\lg 0{,}475 \approx \overline{2} + 1{,}3534 = \overline{1}{,}3534;$$
$$-\frac{1}{5}\lg 239{,}3 \approx -0{,}4758 = \overline{1}{,}5242;$$
$$\frac{2}{3}\lg \sin 38°22' \approx \frac{2 \cdot \overline{1}{,}7929}{3} = \frac{\overline{1}{,}5858}{3} \approx \overline{1}{,}8619;$$
$$-\lg \operatorname{tg} 85°13' \approx -1{,}0774 = \overline{2}{,}9226.$$

Значыць,

$$\begin{array}{r} \overline{1}{,}3534 \\ \overline{1}{,}5242 \\ \overline{1}{,}8619 \\ \overline{2}{,}9226 \\ \hline \lg x \approx \overline{3}{,}6621 \end{array}$$

Такім чынам, $\lg x \approx \overline{3}{,}6621$. Адсюль, выкарыстоўваючы табліцу антылагарыфмаў, атрымліваем $x \approx 0{,}004593$.

Прыклад 2. Вылічыць

$$x = \sqrt[5]{\sqrt[4]{35} - \sqrt[6]{30}}.$$

Суцэльнае лагарыфмаванне тут немагчыма, паколькі пад знакам кораня 5-й ступені стаіць рознасць. У падобных выпадках вылічэнні вядуць па частках: спачатку знаходзяць $\sqrt[4]{35}$, потым $\sqrt[6]{30}$, затым іх рознасць і, нарэшце, корань 5-й ступені з гэтай рознасці.

$$\lg \sqrt[4]{35} = \frac{1}{4}\lg 35 \approx \frac{1}{4} \cdot 1{,}5441 \approx 0{,}3860,$$
$$\sqrt[4]{35} \approx 2{,}432,$$
$$\lg \sqrt[6]{30} = \frac{1}{6}\lg 30 \approx \frac{1}{6} \cdot 1{,}4771 \approx 0{,}2462,$$
$$\sqrt[6]{30} \approx 1{,}763,$$
$$\sqrt[4]{35} - \sqrt[6]{30} \approx 2{,}432 - 1{,}763 = 0{,}669,$$
$$\lg \sqrt[5]{\sqrt[4]{35} - \sqrt[6]{30}} \approx \lg \sqrt[5]{0{,}669} = \frac{1}{5}\lg 0{,}669 \approx \frac{1}{5} \cdot \overline{1}{,}8254 \approx \overline{1}{,}9651,$$
$$\sqrt[5]{\sqrt[4]{35} - \sqrt[6]{30}} \approx 0{,}9228.$$

Практыкаванні

Вылічыць пры дапамозе табліц лагарыфмаў (№ 1440—1446):

1440. $\dfrac{12{,}48^3 \cdot \sqrt[4]{5{,}76}}{\sqrt[3]{673{,}8} \cdot 1{,}842}$.

1441. $\sqrt{\dfrac{2{,}591^4 \cdot \sqrt[3]{0{,}0836}}{1{,}147^2}}$.

1442. $\dfrac{3{,}89^{-2} \cdot \sqrt[3]{-0{,}1536}}{0{,}924^2}$.

1443. $\dfrac{\sqrt[3]{\sin 32°14'} \cdot 26{,}73^2}{\sqrt{13{,}65} \cdot \operatorname{ctg} 29°18'}$.

1444. $\dfrac{\cos 75°28' \cdot \sqrt[5]{0{,}5}}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 70°16'} \cdot \sin \dfrac{\pi}{9}}$.

1445. $\sqrt[3]{5\sqrt[5]{2} + \sqrt[5]{3} - 2\sqrt[5]{5}}$.

1446. $\sqrt[7]{\sqrt[5]{\cos 16°32'} + \sqrt[3]{\operatorname{tg} \dfrac{2\pi}{13}}}$.

1447. Знайсці плошчу трохвугольніка са старанамі 67,28 *см*, 36,54 *см* і 59,02 *см*.

1448. Знайсці плошчу трохвугольніка са старанамі 238,4 *см* і 79,3 *см*, калі вугал паміж гэтымі старанамі роўны 37°23′.

§ 194. Натуральныя лагарыфмы

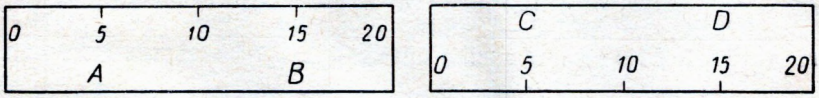
Дзесятковыя лагарыфмы для нашых патрэб з'яўляюцца вельмі зручнымі. Аднак пры вывучэнні вышэйшай матэматыкі больш зручнымі з'яўляюцца лагарыфмы па аснове $e = 2{,}718281828\ldots$ (гл. § 134). Ужыванне гэтых лагарыфмаў дазваляе значна спрасціць вялікую колькасць матэматычных формул. Лагарыфмы па аснове e атрымліваюцца пры рашэнні многіх фізічных задач і натуральным чынам уваходзяць у матэматычнае апісанне некаторых хімічных, біялагічных і іншых працэсаў. Гэтым і тлумачыцца іх назва — «натуральныя лагарыфмы».

Натуральны лагарыфм ліку a абазначаецца $\ln a$. Цяпер ёсць дастаткова поўныя табліцы натуральных лагарыфмаў.

§ 195. Абгрунтаванне дзеянняў на лагарыфмічнай лінейцы

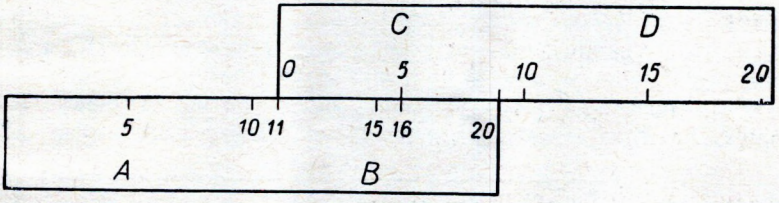
Вядомыя нам уласцівасці лагарыфмаў дазваляюць даволі проста абгрунтаваць правілы дзеянняў, якія выконваюцца пры дапамозе лагарыфмічнай лінейкі. У гэтым параграфе мы разгледзім два найпрасцейшыя дзеянні — множанне і дзяленне. Папярэдне пакажам, як пры дапамозе дзвюх простых лінеек можна рабіць складанне і адыманне лікаў.

Кожную з дзвюх аднолькавых па даўжыні лінеек AB і CD разаб'ём на 20 роўных частак і адзначым гэтыя часткі на лінейцы AB ля верхняга краю і на лінейцы CD ля ніжняга краю (рыс. 254).



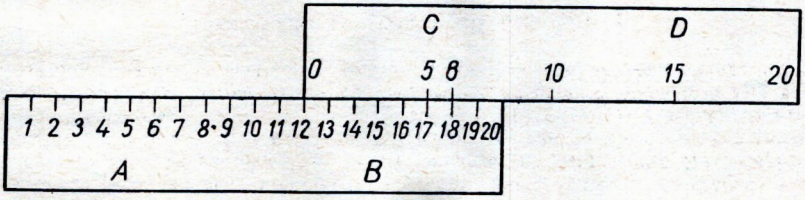
Рыс. 254.

Няхай да ліку 11 трэба дадаць лік 5. Адзнаку 0 на лінейцы CD установім над адзнакай 11 лінейкі AB (рыс. 255). Тады пад адзнакай 5 на шкале CD будзе знаходзіцца адзнака 16 на шкале AB. Гэта адзнака і паказвае суму лікаў 11 і 5.



Рыс. 255.

Цяпер дапусцім, што ад 18 трэба адняць 6. Над адзнакай 18 на шкале AB установім адзнаку 6 на шкале CD (рыс. 256). Тады пад адзнакай 0 на шкале CD будзе знаходзіцца адзнака 12 на шкале AB. Гэта адзнака і паказвае рознасць лікаў 18 і 6.



Рыс. 256.

На гэтым простым прынцыпе заснавана будова лагарыфмічнай лінейкі. Толькі тут адзнакі паказваюць не лікі, а іх лагарыфмы. Як вядома, сума лагарыфмаў двух дадатных лікаў роўна лагарыфму іх здабытку:

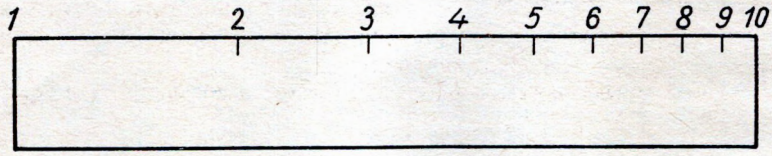
$$\lg a + \lg b = \lg (ab),$$

а рознасць лагарыфмаў двух дадатных лікаў — лагарыфму іх дзелі:

$$\lg a - \lg b = \lg \frac{a}{b}.$$

Таму калі на лінейках адзначаць не самыя лікі, а іх лагарыфмы, то пры дапамозе дзвюх такіх лінеек (або шкал) можна будзе лёгка выконваць множанне і дзяленне лікаў.

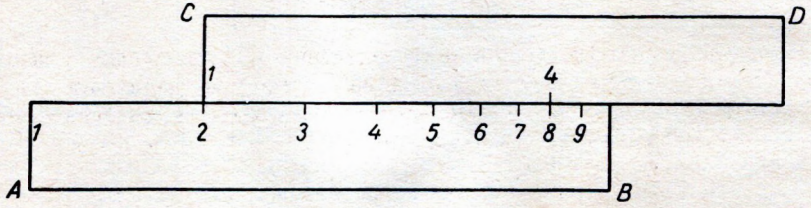
Прымем даўжыню лінейкі за адзінку. Лічбай 1 адзначым на ёй пункт, адпаведны ліку $\lg 1 = 0$; лічбай 2 — пункт, адпаведны ліку $\lg 2 \approx 0{,}3010$; лічбай 3 — пункт, адпаведны ліку $\lg 3 \approx 0{,}4771$, і г. д. (рыс. 257). Правы крайні пункт будзе пры гэтым адзначаны



Рыс. 257.

лікам 10, што адпавядае ліку $\lg 10 = 1$. У выніку мы атрымаем шкалу, якая называецца *лагарыфмічнай шкалой*. Пры дапамозе дзвюх такіх шкал можна выконваць множанне і дзяленне лікаў.

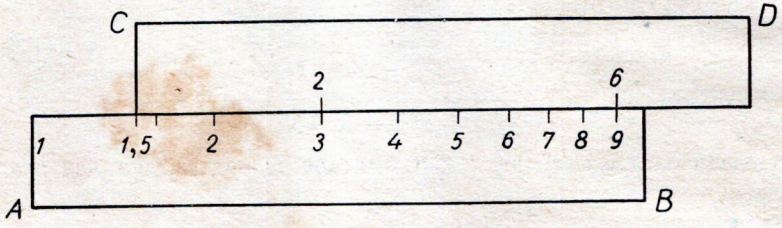
Няхай, напрыклад, трэба памножыць 2 на 4. Адзнаку 1 на шкале CD устанаўліваем над адзнакай 2 на шкале AB (рыс. 258).



Рыс. 258.

Пад адзнакай 4 на шкале CD чытаем адзнаку 8 на шкале AB. Гэта адзнака і паказвае здабытак лікаў 2 і 4.

Аналагічна выконваецца дзяленне. Няхай 9 трэба падзяліць на 6. Адзнаку 6 на шкале CD устанаўліваем пад адзнакай 9 на шкале AB (рыс. 259). Пад адзнакай 1 на шкале CD стаіць адзнака 1,5 на шкале AB. Гэта адзнака і дае адносіну $\frac{9}{6}$.



Рыс. 259.

§ 196. Асноўныя спосабы рашэння паказальных ураўненняў

Паказальнымі ўраўненнямі называюцца ўраўненні, якія змяшчаюць невядомую велічыню ў паказчыку ступені.

Да такіх адносяцца, напрыклад, ураўненні $3^x = 2^{x-1}$; $5^{x^2-6} - 1 = 0$ і іншыя.

Паказальныя ўраўненні, гэтак жа як і трыганаметрычныя, у адрозненне ад алгебраічных (напрыклад, лінейных, квадратных) адносяцца да *трансцэндэнтных* ураўненняў.

Найпрасцейшым паказальным ураўненнем з'яўляецца ўраўненне

$$a^x = b, \tag{1}$$

дзе a і b — дадзеныя дадатныя лікі ($a \neq 1$), а x — невядомая велічыня. Такое ўраўненне мае адзіны корань $x = \log_a b$. Больш складаныя паказальныя ўраўненні часта зводзяцца або да алгебраічных ураўненняў, або да ўраўненняў выгляду (1).

Разгледзім асноўныя спосабы рашэння паказальных ураўненняў на прыватных прыкладах.

I. Рашыць ураўненне

$$5^{x-6} = 5^{15-2x}.$$

Рашэнне падобных ураўненняў заснавана на наступнай уласцівасці ступеней: калі дзве ступені аднаго і таго ж дадатнага ліку, адрознага ад 1, роўныя, то роўныя і іх паказчыкі. У дадзеным выпадку гэта ўласцівасць ступеней дае:

$$x - 6 = 15 - 2x,$$

адкуль $x = 7$.

Праверка. Пры $x = 7$ $5^{x-6} = 5$, $5^{15-2x} = 5$. Значыць, $x = 7$ — корань дадзенага ўраўнення.

Адказ. $x = 7$.

Аналагічна рашаецца ўраўненне

$$49^x = \left(\frac{1}{7}\right)^{x^2}.$$

Сапраўды,

$$49^x = (7^2)^x = 7^{2x}; \quad \left(\frac{1}{7}\right)^{x^2} = (7^{-1})^{x^2} = 7^{-x^2}.$$

Таму $7^{2x} = 7^{-x^2}$, адкуль $2x = -x^2$, або $x_1 = 0$, $x_2 = -2$. Праверка паказвае, што абодва гэтыя значэнні задавальняюць дадзенаму ўраўненню.

Адказ. $x_1 = 0$; $x_2 = -2$.

Па гэтаму ж прынцыпу можна рашаць і паказальнае ўраўненне $a^x = b$, калі толькі b ёсць цэлая ступень ліку a. Напрыклад, калі $3^x = 27$, то, запісаўшы 27 у выглядзе $27 = 3^3$, атрымліваем $3^x = 3^3$, адкуль $x = 3$.

II. Часам шляхам увядзення новай невядомай велічыні паказальнае ўраўненне зводзіцца да алгебраічнага ўраўнення. Няхай, напрыклад, трэба рашыць ураўненне

$$4^x + 2^x - 6 = 0.$$

Абазначым 2^x праз y. Тады $4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2 = y^2$. Таму дадзенае ўраўненне зводзіцца да квадратнага ўраўнення

$$y^2 + y - 6 = 0,$$

з якога атрымліваем $y_1 = 2$, $y_2 = -3$. Але $y = 2^x$. Значыць, калі толькі дадзенае ўраўненне мае корані, то яны павінны задавальняць або ўраўненню $2^x = 2$, або ўраўненню $2^x = -3$. Першае з гэтых ураўненняў мае корань $x = 1$; другое ж ураўненне кораняў не мае, паколькі выраз $2x$ не можа прымаць адмоўных значэнняў. Такім чынам, мы атрымалі $x = 1$.

Праверка. Пры $x = 1$

$$4^x + 2^x - 6 = 4^1 + 2^1 - 6 = 0.$$

Значыць, $x = 1$ — корань дадзенага ўраўнення.

Адказ. $x = 1$.

III. Рашыць ураўненне $2^x = 3^x$.

Падзяліўшы абедзве часткі дадзенага ўраўнення на 3^x (такое дзяленне магчыма, паколькі пры любым x $3^x > 0$), атрымаем $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$. Але $1 = \left(\frac{2}{3}\right)^0$. Таму $x = 0$. Праверка паказвае, што гэта сапраўды корань дадзенага ўраўнення.

Адказ. $x = 0$.

Аналагічна рашаецца ўраўненне $5^{2x} = 7^{3x}$.

Сапраўды, $5^{2x} = (5^2)^x = 25^x$; $7^{3x} = (7^3)^x = 343^x$. Таму дадзенае ўраўненне можна перапісаць у выглядзе

$$25^x = 343^x.$$

Адсюль, гэтак жа як і ў папярэднім выпадку, атрымліваем $x = 0$.

Практыкаванні

Рашыць ураўненні (№ 1449—1454):

1449. а) $5^x = 125$;

б) $4^x = 64$;

в) $3^x = \frac{1}{81}$;

г) $25^x = \frac{1}{5}$;

д) $2^{x+3} = 32$;

е) $8^x = 16$;

ж) $9^{-x} = 27$; і) $\sqrt[4]{7^x} = \sqrt[5]{343}$;

з) $\sqrt{3^x} = \sqrt[3]{9}$; к) $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{3^x} = 36$.

1450. а) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^4$; г) $2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}$;

б) $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^5$; д) $a^{(x-2)(x-3)} = 1$ $(a > 0)$;

в) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$; е) $5^2 \cdot 5^4 \cdot 5^6 \cdot \ldots \cdot 5^{2x} = 0{,}04^{-28}$.

1451. а) $3^x + 3^{x+1} = 108$;

б) $7^x - 7^{x-1} = 6$;

в) $5^{x+1} - 5^{x-1} = 24$;

г) $3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} = 13$;

д) $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x-1} = 347$;

е) $5^{x+1} + 3 \cdot 5^{x-1} - 6 \cdot 5^x + 10 = 0$.

1452. а) $2^{5-x} = 2^{3x-3}$;

б) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$;

в) $5^x \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3} = \left(\frac{1}{125}\right)^x$;

г) $2^x \cdot 5^x = 0{,}1 \cdot (10^{x-1})^5$;

д) $\sqrt[x]{\sqrt[3]{4^{x+1}}} = \sqrt[3]{\sqrt[x]{(0{,}5)^{2-4x}}}$;

е) $(0{,}25)^{2-x} = \frac{256}{2^{x+3}}$;

ж) $\sqrt{27^{x-1}} = \sqrt[3]{9^{2-x}}$;

з) $\sqrt[4]{a^{x+1}} = \sqrt[5]{a^{x-2}}$ $(a > 0)$;

і) $4^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}$;

к) $16\sqrt{(0{,}25)^{5-\frac{x}{4}}} = 2^{\sqrt{x+1}}$.

1453. а) $5^{2x} - 5^x - 600 = 0$;

б) $9^x - 3^x - 6 = 0$;

в) $4^x + 2^{x+1} = 80$;

г) $3^x + 9^{x-1} - 810 = 0$;

д) $3^{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{\sqrt{2x}} + 3 = 0$;

е) $4+\frac{2}{3^x-1}=\frac{5}{3^{x-1}}$;

ж) $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1}+\left(\frac{3}{5}\right)^{1-x}=1{,}2$;

з) $9^x+6^x=4^x$.

1454. а) $11^x=17^x$;

б) $9^x=\left(\frac{1}{243}\right)^{5x}$;

в) $13^x=19^{-4x}$;

г) $5^{2x}-7^x-5^{2x}\cdot 17+7^x\cdot 17=0$;

д) $3\cdot 2^x=2\cdot 3^x$;

е) $7\cdot 2^x=5\cdot 3^x$;

ж) $a^x=b^x$ $(a>0,\ b>0)$.

Рашыць сістэмы ўраўненняў:

1455. $\begin{cases} 3\cdot 2^x+2\cdot 3^y=\frac{11}{4}; \\ 2^x-3^y=-\frac{3}{4}. \end{cases}$

1456. $\begin{cases} 2^x\cdot 3^y=648; \\ 3^x\cdot 2^y=432. \end{cases}$

1457. $\begin{cases} 2^x+3^y=8\frac{1}{9}; \\ 2^x\cdot 3^y=\frac{8}{9}. \end{cases}$

1458. $\begin{cases} 5^x-5^y=100; \\ 5^{x-1}+5^{y-1}=20. \end{cases}$

1459. $\begin{cases} \sqrt[x-1]{49}=\sqrt[y-1]{343}; \\ 3^y=9^{2x-y}. \end{cases}$

§ 197. Асноўныя спосабы рашэння лагарыфмічных ураўненняў

Лагарыфмічнымі ўраўненнямі называюцца ўраўненні, якія змяшчаюць невядомыя велічыні пад знакам лагарыфма.

Да такіх адносяцца, напрыклад, ураўненні

$$\log_2 x=5,\ \log_x(x-1)=0$$

і г. д. Гэтак жа як і паказальныя, лагарыфмічныя ўраўненні з'яўляюцца трансцэндэнтнымі.

Найпрасцейшым лагарыфмічным ураўненнем з'яўляецца ўраўненне

$$\log_a x=b, \qquad (1)$$

дзе a і b — дадзеныя лікі, а x — невядомая велічыня.

Калі a — дадатны і не роўны адзінцы лік, то такое ўраўненне мае адзіны корань

$$x = a^b.$$

Рашэнне больш складаных лагарыфмічных ураўненняў, як правіла, зводзіцца або да рашэння алгебраічных ураўненняў, або да рашэння ўраўненняў выгляду (1). Растлумачым гэта на некаторых прыватных прыкладах.

I. Рашыць ураўненне

$$\log_x (x^2 - 3x + 6) = 2.$$

Па азначэнню лагарыфма з гэтага ўраўнення вынікае, што

$$x^2 = x^2 - 3x + 6,$$

адкуль

$$x = 2.$$

Праверка. Пры $x = 2$

$$\log_x (x^2 - 3x + 6) = \log_2 (4 - 6 + 6) = \log_2 4 = 2.$$

Значыць, $x = 2$ — корань дадзенага ўраўнення.

Адказ. $x = 2$.

II. Рашыць ураўненне

$$\lg (x^2 - 17) = \lg (x + 3).$$

Рашэнне падобных ураўненняў заснавана на наступнай уласцівасці лагарыфмаў: калі лагарыфмы двух лікаў па адной і той жа аснове роўныя, то роўныя і самыя гэтыя лікі. З гэтай уласцівасці лагарыфмаў вынікае, што калі толькі дадзенае ўраўненне мае карані, то яны павінны задавальняць ураўненню

$$x^2 - 17 = x + 3,$$

адкуль

$$x_1 = 5, \; x_2 = -4.$$

Праверка. Пры $x = 5$

$$\lg (x^2 - 17) = \lg 8; \quad \lg (x + 3) = \lg 8.$$

Значыць, $x = 5$ — корань дадзенага ўраўнення. Пры $x = -4$ левая і правая часткі дадзенага ўраўнення не вызначаны, паколькі $x^2 - 17 = -1 < 0$ і $x + 3 = -1 < 0$. Значыць, $x = -4$ не ёсць корань гэтага ўраўнення.

Адказ. $x = 5$.

Разгледзім яшчэ адно ўраўненне:

$$2\lg (x - 1) = \frac{1}{2} \lg x^5 - \lg \sqrt{x}. \qquad (2)$$

Выканаем наступныя пераўтварэнні:

$$2\lg(x-1)=\lg(x-1)^2,$$

$$\frac{1}{2}\lg x^5-\lg\sqrt{x}=\lg x^{\frac{5}{2}}-\lg x^{\frac{1}{2}}=\lg\frac{x^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}=\lg x^2.$$

Такім чынам, зыходзячы з ураўнення (2), мы прыйшлі да ўраўнення

$$\lg(x-1)^2=\lg x^2. \qquad (3)$$

З яго вынікае, што $(x-1)^2=x^2$, або $x=\frac{1}{2}$. Але пры $x=\frac{1}{2}$ левая частка ўраўнення (2) не вызначана $\left(x-1=-\frac{1}{2}<0\right)$, значыць, дадзенае ўраўненне не мае кораняў.

Заўважым, аднак, што для ўраўнення (3) лік $\frac{1}{2}$ з'яўляецца коранем. Такім чынам, ураўненні (2) і (3) не эквівалентны адно другому. Гэта лішні раз гаворыць аб тым, што пры рашэнні лагарыфмічных ураўненняў неабходна рабіць праверку атрыманых значэнняў. Сярод іх часта аказваюцца «пабочныя» карані.

III. Некаторыя лагарыфмічныя ўраўненні зводзяцца да алгебраічных ураўненняў пры дапамозе ўвядзення новай невядомай велічыні. Калі, напрыклад, ва ўраўненні

$$\log_3^2 x-3\log_3 x-10=0$$

$\log_3 x$ абазначыць праз y, то яно звядзецца да квадратнага ўраўнення

$$y^2-3y-10=0,$$

адкуль $y_1=-2$, $y_2=5$. Успамінаючы, што $y=\log_3 x$, атрымліваем: калі $\log_3 x=-2$, то $x=\frac{1}{9}$, калі ж $\log_3 x=5$, то $x=243$. Праверкай лёгка ўстанавіць, што абодва гэтыя значэнні x задавальняюць дадзенаму ўраўненню.

Адказ. $x_1=\frac{1}{9}$, $x_2=243$.

IV. Некаторыя ўраўненні рашаюцца шляхам пачленнага лагарыфмавання. Няхай, напрыклад, дадзена ўраўненне

$$x^{\lg x-1}=100.$$

Пралагарыфмуем гэта ўраўненне пачленна:

$$\lg (x^{\lg x-1}) = \lg 100,$$

$$(\lg x - 1)\lg x = 2.$$

Абазначаючы $\lg x$ літарай y, мы прыходзім да квадратнага ўраўнення:

$$y^2 - y - 2 = 0,$$

якое мае корані $y_1 = -1$, $y_2 = 2$. Успамінаючы, што $y = \lg x$, атрымліваем: або $\lg x = -1$, і тады $x = 0{,}1$; або $\lg x = 2$, і тады $x = 100$.

Праверка. Пры $x = 0{,}1$

$$x^{\lg x-1} = 0{,}1^{-1-1} = 0{,}1^{-2} = \frac{1}{0{,}01} = 100.$$

Значыць, $x = 0{,}1$ — корань дадзенага ўраўнення. Пры $x = 100$

$$x^{\lg x-1} = 100^{2-1} = 100,$$

так што $x = 100$ — таксама корань ураўнення.

Адказ. $x_1 = 0{,}1$; $x_2 = 100$.

V. Пры рашэнні некаторых лагарыфмічных ураўненняў аказваецца карысным прымяніць формулу пераходу ад адной асновы лагарыфма да другой.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Рэшым, напрыклад, ураўненне $\log_2 x + \log_3 x = 1$. Для гэтага ад лагарыфмаў па асновах 2 і 3 пяройдзем да лагарыфмаў па аснове 10.

$$\log_2 x = \frac{\lg x}{\lg 2}; \quad \log_3 x = \frac{\lg x}{\lg 3}.$$

Тады дадзенае ўраўненне прыме выгляд:

$$\frac{\lg x}{\lg 2} + \frac{\lg x}{\lg 3} = 1,$$

адкуль

$$\lg x = \frac{\lg 2 + \lg 3}{\lg 2 \cdot \lg 3} = \frac{\lg 2 \cdot \lg 3}{\lg 6}.$$

Таму

$$x = 10^{\frac{\lg 2 \cdot \lg 3}{\lg 6}} = (10^{\lg 2})^{\frac{\lg 3}{\lg 6}} = 2^{\frac{\lg 3}{\lg 6}}.$$

Пры неабходнасці гэта значэнне x можна вызначыць пры дапамозе табліц лагарыфмаў.

Праверка. Пры знойдзеным значэнні x

$$\log_2 x = \frac{\lg x}{\lg 2} = \frac{1}{\lg 2} \cdot \lg\left(10^{\frac{\lg 2 \cdot \lg 3}{\lg 6}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\lg 2} \cdot \frac{\lg 2 \cdot \lg 3}{\lg 6} = \frac{\lg 3}{\lg 6}.$$

Аналагічна,

$$\log_3 x = \frac{\lg 2}{\lg 6}.$$

Таму

$$\log_2 x + \log_3 x = \frac{\lg 3}{\lg 6} + \frac{\lg 2}{\lg 6} = \frac{\lg 3 + \lg 2}{\lg 6} = \frac{\lg 6}{\lg 6} = 1.$$

Значыць, знойдзенае значэнне x з'яўляецца коранем дадзенага ўраўнення.

Адказ. $x = 2^{\frac{\lg 3}{\lg 6}}$.

Разгледзім яшчэ адно ўраўненне:

$$\log_2 x + \log_x 2 = 2.$$

Паколькі

$$\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x},$$

то, абазначаючы $\log_2 x$ праз y, атрымаем $y + \frac{1}{y} = 2$, адкуль $y = 1$. Значыць, $\log_2 x = 1$ і $x = 2$. Праверка паказвае, што $x = 2$ ёсць корань дадзенага ўраўнення.

Адказ. $x = 2$.

Практыкаванні

Рашыць дадзеныя ўраўненні (№ 1460—1465):

1460. а) $\lg(\lg x) = 0$;

б) $\log_2[\log_3(\log_4 x)] = 0$;

в) $\log_{x-1}(x^2 - 5x + 7) = 1$;

г) $\log_x 2 - \log_x 3 = 4$;

д) $\lg x = 3 - \lg 5$;

е) $\dfrac{\lg x}{1-\lg 2}=2$;

ж) $100^{\lg(x+20)}=10\,000$.

1461. а) $\lg x=\lg 2$;

б) $\lg x=-\lg 2$;

в) $\log_2(x-1)=\log_2(x^2-x-16)$;

г) $2\lg\sqrt{x}=\lg(15-2x)$;

д) $2\lg x=-\lg(6-x^2)$;

е) $\dfrac{2\lg x}{\lg(5x-4)}=1$;

ж) $2\log_3 x=\dfrac{7}{4}\log_3\dfrac{x}{5}$.

1462. а) $\lg(0{,}5+x)=\lg 2-\lg x$;

б) $0{,}5\lg(2x-1)=1-\lg\sqrt{x-9}$;

в) $\lg(x+6)-2=\dfrac{1}{2}\lg(2x-3)-\lg 25$.

1463. а) $\dfrac{1}{12}\lg^2 x=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\lg x$;

б) $\dfrac{1}{5-\lg x}+\dfrac{2}{1+\lg x}=1$;

в) $\dfrac{1}{5-4\lg(x+1)}+\dfrac{4}{1+\lg(x+1)}=3$;

г) $0{,}1\lg^4 x-\lg^2 x+0{,}9=0$.

1464. а) $x^x=x$;

б) $x^{\log_5 x-2}=125$;

в) $5^{3\lg x}=12{,}5x$;

г) $x^{\lg x+2}=1000$;

д) $x=10^{1-0{,}25\lg x}$;

е) $0{,}1x^{\lg x-2}=100$.

1465. а) $\log_9 x+\log_{x^2}3=1$;

б) $\log_2 x\cdot\log_3 x=\log_2 3$;

в) $\log_3 x+\log_5 x=\lg 15$;

г) $\log_5 x+\log_x 5=2{,}5$;

д) $\log_{3x}3=(\log_3 3x)^2$;

е) $\log_{16}x+\log_4 x+\log_2 x=7$.

Рашыць сістэмы ўраўненняў (№ 1466—1469):

1466. $\begin{cases} \lg x + 2\lg y = -3, \\ \lg x^3 - \lg y^2 = 9. \end{cases}$

1467. $\begin{cases} x + y = 34, \\ \log_2 x + \log_2 y = 6. \end{cases}$

1468. $\begin{cases} 5^x - 36y = 0, \\ 6^x - 25y = 0. \end{cases}$

1469. $\begin{cases} xy = 40, \\ x^{\lg y} = 4. \end{cases}$

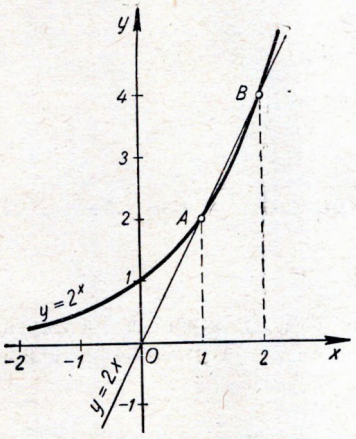
§ 198. Прыклады графічнага рашэння паказальных і лагарыфмічных ураўненняў

Прыклад 1. Рашыць ураўненне

$$2^x = 2x.$$

На адным і тым жа чарцяжы (рыс. 260) пабудуем графікі дзвюх функцый $y = 2^x$ і $y = 2x$. Гэтыя графікі перасякаюцца ў двух пунктах: A з абсцысай 1 і B з абсцысай 2. Таму дадзенае ўраўненне мае два карані:

$$x = 1 \text{ і } x = 2.$$

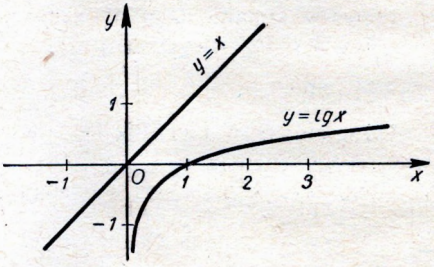


Рыс. 260.

Прыклад 2. Рашыць ураўненне

$$\lg x = x.$$

Графікі функцый $y = \lg x$ і $y = x$ (рыс. 261) не перасякаюцца адзін з другім. Таму дадзенае ўраўненне не мае кораняў.



Рыс. 261.

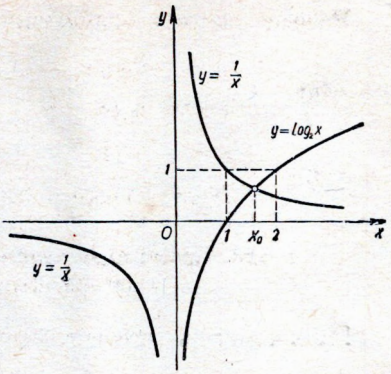
Мы разгледзелі найпрасцейшыя прыклады. Ураўненні, якія атрымліваюцца пры рашэнні практычных задач, звычайна значна адрозніваюцца ад такіх «вучэбных» задач. Для іх рашэння разам з графічнай ілюстрацыяй даводзіцца звяртацца і да табліц. Разгледзім, напрыклад, такое ўраўненне:

$$\log_2 x = \frac{1}{x}.$$

Графікі функцый $y = \log_2 x$ і $y = \frac{1}{x}$ (рыс. 262) перасякаюцца ў адным пункце, абсцыса якога знаходзіцца паміж 1 і 2. Таму дадзенае ўраўненне мае адзін корань x_0, які больш 1, але менш 2:

$$1 < x_0 < 2.$$

Возьмем пункт $x = 1{,}5$, які з'яўляецца сярэднім пунктам інтэрвалу [1, 2]. У гэтым пункце



Рыс. 262.

$$\log_2 x = \log_2 \frac{3}{2} = \log_2 3 - \log_2 2 = \frac{\lg 3}{\lg 2} - 1.$$

Выкарыстоўваючы табліцы У. М. Брадзіса, знаходзім, што

$$\log_2 \frac{3}{2} \approx 0{,}58.$$

Пры $x = 1{,}5$ $\frac{1}{x} \approx 0{,}66$. Паколькі ў пункце $x = 1{,}5$

$$\log_2 x < \frac{1}{x},$$

то шукаемы корань павінен быць большы, чым 1,5 (гл. рыс. 262).

Цяпер мы ўпэўнены, што

$$1{,}5 < x_0 < 2.$$

«Выпрабуем» пункт $x = 1{,}7$ як адзін з найбліжэйшых да сярэдняга пункта інтэрвалу [1,5; 2,0]. Пры $x = 1{,}7$ атрымліваем, выкарыстоўваючы табліцы У. М. Брадзіса,

$$\log_2 x = \frac{\lg 1{,}7}{\lg 2} \approx 0{,}76;$$

$$\frac{1}{x} \approx 0{,}58.$$

Паколькі

$$\log_2 1{,}7 > \frac{1}{1{,}7},$$

то шукаемы корань x_0 павінен быць менш, чым 1,7 (гл. рыс. 262).

Значыць,

$$1{,}5 < x_0 < 1{,}7.$$

Таму з дакладнасцю да 0,1

$$x_0 \approx 1{,}6.$$

Разглядаючы пункты інтэрвалу [1,5; 1,7], мы маглі б атрымаць і больш дакладнае значэнне кораня x_0. Паспрабуйце, напрыклад, самастойна атрымаць набліжанае значэнне x_0 з дакладнасцю да 0,01.

Практыкаванні

1470. Рашыць графічна ўраўненні:

а) $2^x = x + 2$; г) $\log_2 x = x - 1$;

б) $3^x = 3x$; д) $\log_2 x = \frac{x}{2}$;

в) $2^x = x^2$; е) $\log_2 (x + 3) = 3 - x$.

1471. Знайсці корань ураўнення

$$2x = 2 - x$$

з дакладнасцю да 0,1.

1472. Знайсці найменшы корань ураўнення

$$\log_2 x = \frac{1}{3} x$$

з дакладнасцю да 0,01.

§ 199. Паказальныя і лагарыфмічныя няроўнасці

Рашэнне паказальных і лагарыфмічных няроўнасцей заснавана на тым, што функцыі $y = a^x$ і $y = \log_a x$ пры $a > 1$ з'яўляюцца манатонна ўзрастаючымі, а пры $a < 1$ — манатонна ўбываючымі.

Разгледзім некалькі прыкладаў.

1) Рашыць няроўнасць $2^x > 4$.

Перапішам дадзеную няроўнасць, запісаўшы 4 у выглядзе 2^2:

$$2^x > 2^2.$$

Функцыя $y = 2^x$ з'яўляецца манатонна ўзрастаючай. Таму большаму значэнню гэтай функцыі адпавядае большае значэнне аргумента. Значыць, $x > 2$.

2) Рашыць няроўнасць

$$3^{x^2-3x} > \frac{1}{9}.$$

Перапішам дадзеную няроўнасць, запісаўшы $\frac{1}{9}$ у выглядзе 3^{-2}:

$$3^{x^2-3x} > 3^{-2}.$$

Адсюль $x^2 - 3x > -2$, або $x^2 - 3x + 2 > 0$.
Гэта няроўнасць выконваецца пры $x < 1$, а таксама пры $x > 2$ (раздз. III, § 61).

3) Рашыць няроўнасць $\log_{\frac{1}{5}}(x-1) > -2$.

Запісаўшы -2 як $\log_{\frac{1}{5}} 25$, перапішам дадзеную няроўнасць у выглядзе

$$\log_{\frac{1}{5}}(x-1) > \log_{\frac{1}{5}} 25.$$

Функцыя $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ з'яўляецца манатонна ўбываючай. Таму большаму значэнню гэтай функцыі адпавядае меншае значэнне аргумента. Значыць, $x - 1 < 25$. Да гэтай няроўнасці неабходна дадаць яшчэ няроўнасць $x - 1 > 0$, якая выражае той факт, што пад знакам лагарыфма можа знаходзіцца толькі дадатная велічыня. Такім чынам, дадзеная няроўнасць эквівалентна сістэме дзвюх лінейных няроўнасцей

$$\begin{cases} x - 1 < 25, \\ x - 1 > 0, \end{cases}$$

з якой атрымліваем

$$1 < x < 26.$$

Важна адзначыць, што калі б мы «забыліся» ўлічыць умову $x - 1 > 0$, то прыйшлі б да няправільнага вываду: $x < 26$. У прыватнасці, у гэта рашэнне ўваходзіла б і значэнне $x = 0$, пры якім левая частка зыходнай няроўнасці не мае сэнсу.

Практыкаванні

1473. Рашыць няроўнасці:

а) $3^x > \frac{1}{9}$; б) $3^x > 27$; в) $3^x > 2$;

г) $\left(\frac{1}{4}\right)^{6x-x^2} > \left(\frac{1}{4}\right)^5$; д) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-x} < \frac{1}{9}$.

1474. Рашыць няроўнасці:

а) $\lg(x+1) > \lg(5-x)$;

б) $\log_{\frac{1}{2}}(x-7) > 4$;

в) $\log_{\frac{1}{7}}(2x-6) < \log_{\frac{1}{7}} x$.

1475. Дадзеныя няроўнасці рашыць графічна:

а) $2^x < 2x$;

б) $\log_2 x > x - 1$.

§ 200. З гісторыі адкрыцця лагарыфмаў

Асноўная ідэя ўвядзення лагарыфмаў грунтуецца на формуле

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad (1)$$

і заключаецца ў тым, што множанне можна звесці да больш простага дзеяння — складання. З гэтай ідэяй былі знаёмы яшчэ матэматыкі старажытнасці. Агуль-

ная фармулёўка, эквівалентная правілу множання (1) дадзена, напрыклад, у дзевятай кнізе славутых «Пачаткаў» Еўкліда. Аднак аб лагарыфмах у старажытныя часы не магло быць і гутаркі. Тады яшчэ не разглядаліся ступені з дробавымі і адмоўнымі паказчыкамі, ды і самыя адмоўныя лікі многім матэматыкам не былі вядомы. Упершыню дробавыя паказчыкі скарыстаў, відаць, французскі матэматык Арэзм (другая палавіна XIV стагоддзя). Але ідэі Арэзма вельмі апярэдзілі матэматыку таго часу, і трактат яго быў у хуткім часе забыты. Нулявы і адмоўны паказчыкі з'явіліся ў працы французскага матэматыка Шукэ (XV стагоддзе). Увядзенне ў матэматыку ступеней з адвольнымі сапраўднымі паказчыкамі падрыхтавала глебу для разгляду лагарыфмаў.

Першыя лагарыфмічныя табліцы былі складзены незалежна адзін ад другога шатландцам Непера м (1550—1617) і швейцарцам Бюргі (1552—1632). Характэрна наступнае выказванне Непера, якое ён прыводзіць у прадмове да сваіх табліц: «Я заўсёды стараўся, наколькі дазвалялі мае сілы і здольнасці, пазбавіцца ад цяжкасці і нуднасці вылічэнняў, дакучлівасць якіх звычайна адпужвае многіх ад вывучэння матэматыкі».

Табліцы Непера былі ў некаторых адносінах больш дасканалымі, чым табліцы Бюргі. Аднак і яны былі нязручныя для вылічэнняў. Неперавскія лагарыфмы ($\operatorname{Nep}\log x$) вызначаліся (у нашых абазначэннях) такім чынам:

$$\operatorname{Nep}\log x = 10^7 \log_e \frac{10^7}{x},$$

дзе $e \approx 2{,}7$ (гл. § 134). У прыватнасці,

$$\operatorname{Nep}\log 1 = 10^7 \log_e 10^7 \neq 0.$$

Такія табліцы не задавальнялі і самога Непера. Разам са сваім прыхільнікам Брыгсам (1561—1631) Непер вырашыў скласці табліцы больш простых, дзесятковых лагарыфмаў. Гэтыя табліцы былі выдадзены Брыгсам у 1624 годзе пасля смерці Непера.

Найбольшы ўплыў зрабілі лагарыфмы на развіццё астраноміі.

Поспехі мараплавання ў сярэднія стагоддзі абумоўлівалі вялікі попыт на астранамічныя табліцы, састаўленне якіх патрабавала вельмі складаных вылічэнняў. Выкарыстанне лагарыфмічных табліц значна аблягчала і паскарала гэтыя вылічэнні. Па вобразнаму выказванню французскага матэматыка Лапласа (1749—1827), вынаходства лагарыфмаў, скараціўшы работу астранома, прадоўжыла яму жыццё.

Агульнае азначэнне лагарыфмічнай функцыі і яе шырокае абагульненне даў Леанард Эйлер.

Задачы на паўтарэнне

1476. Насельніцтва горада ўзрастае штогод на 3% у параўнанні з папярэднім годам. Праз колькі год насельніцтва гэтага горада павялічыцца ў 1,5 раза?

1477. Адна брыгада за змену выпрацоўвае прадукцыі ў 1,1 раза больш, чым другая. Штомесячна прадукцыйнасць працы першай брыгады расце на 1%, а другой — на 0,7%. Праз колькі месяцаў першая брыгада дагоніць другую па зменнаму выпуску прадукцыі? Якая з брыгад дае больш прадукцыі за паўгода: першая ці другая?

1478. Вылічыць:

а) $2^{4\log_2 3-1}$; б) $2^{3\log_2 5+4}$;

в) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_9 2-3}$; г) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{25} 4+2}$.

1479. Пабудаваць графікі функцый:

а) $y = |\log_2 x|$; б) $y = \log_2 |x|$;

в) $y = \log_2 (-x)$.

1480. Рашыць ураўненні:

а) $(\sqrt{2})^{\sin 2x} = \sqrt[4]{2}$;

б) $5^{\sin 2x} = \left(\frac{1}{25}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

1481. Знайсці $\log_2 \log_2 \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$.

1482. Не рашаючы квадратнага ўраўнення

$$\log_2^2 x - 5\log_2 x + 4 = 0,$$

даказаць, што здабытак яго кораняў роўны 32.

1483. Не рашаючы дадзеных ураўненняў, знайсці здабытак кораняў:

а) $\lg^2 x + \lg x - 2 = 0$;

б) $6\lg^2 x + \lg x - 1 = 0$;

в) $\lg^2 x - \lg x + 1 = 0$.

1484. Рашыць ураўненне $\log_x a = a$ $(a > 1)$.

1485. Карыстаючыся табліцамі дзесятковых лагарыфмаў, знайсці:

а) $\log_7 25$; б) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$.

1486. Што больш:

а) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$ або $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$;

б) $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{7}$ або $\log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{5}$;

в) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\lg \frac{1}{7}}$ або $\left(\frac{1}{7}\right)^{\lg \frac{1}{5}}$?

1487. Пры якіх значэннях x у інтэрвале $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ вызначаны функцыі:

а) $y = \lg (\sin x)$; б) $y = \sin (\lg x)$?

1488. Даказаць, што ўраўненне

$$\lg \sin x = \sin x$$

не мае сапраўдных кораняў.

1489. Колькі лічбаў маюць лікі 2^{100} і 5^{200}?

1490. Даказаць, што функцыя $y = \lg(1 + x)$ з'яўляецца манатонна ўзрастаючай, а функцыя $y = \lg(1 - x)$ манатонна ўбываючай.

Рашыць ураўненні (№ 1491—1499):

1491. $5 \cdot 3^{2x-1} - 9^{x-0,5} = 9^x + 4 \cdot 3^{2x-2}$.

1492. $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 5^x$.

1493. $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$.

1494. $5^{7x} = 7^{5x}$.

1495. $5^{2x+4} = 2^{8+x} \cdot 3^{3x}$.

1496*. $\left(\sqrt{4 + \sqrt{15}}\right)^x - \left(\sqrt{4 - \sqrt{15}}\right)^x = \frac{3}{2}$.

1497. $\log_2(x - 1)^2 - \log_{0,5}(x - 1) = 9$.

1498. $5^{\lg x} - 3^{\lg x - 1} = 3^{\lg x + 1} - 5^{\lg x - 1}$.

1499. $\log_8 x + \log_8^2 x + \log_8^3 x + \ldots = \frac{1}{2}$.

1500. Не карыстаючыся табліцай лагарыфмаў, знайсці $\lg 2$ і $\lg 5$, калі вядома, што $\lg 2 - \lg 5 \approx -0{,}3980$.

1501. Даказаць тоеснасці:

а) $a^{\lg b} = b^{\lg a}$;

б) $a^{\frac{\log_b(\log_b a)}{\log_b a}} = \log_b a$.

1502. Які лік большы: a ці b, калі:

а) $\log_2 a = \log_3 b$; б) $\log_a 2 = \log_b 3$?

1503. Выразіць $\log_{ab} x$ праз $\log_a x$ і $\log_b x$.

1504. Даказаць тоеснасць

$$\log_a\left(b + \sqrt{b^2 - 1}\right) = -\log_a\left(b - \sqrt{b^2 - 1}\right).$$

Рашыць ураўненні (№ 1505 — 1507):

1505. $3\lg^2(x^2) - \lg x - 1 = 0$.

1506. $2\lg^2(x^3) - 3\lg x - 1 = 0$.

1507. $4\log_3^2 5x - 7\log_3 15x + 7 = 0$.

Рашыць сістэмы ўраўненняў (№ 1508, 1509):

1508. $\begin{cases} 3^{\sin x} \cdot 3^{\cos y} = 3, \\ 3^{\sin x \cdot \cos y} = 1. \end{cases}$

1509. $\begin{cases} \lg \sin x + \lg \sin y = \lg \frac{3}{2}, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = \frac{3}{4}. \end{cases}$

1510. Рашыць сістэму ўраўненняў

$$\begin{cases} x^{\sqrt{y}} = y, \\ y^{\sqrt{x}} = x^y. \end{cases}$$

1511. Вызначыць інтэрвалы ўзрастання і інтэрвалы ўбывання функцый:

а) $y = 2^{x^2+4x+3}$;

б) $y = \log_{\frac{1}{5}} (8 + 2x - x^2)$.

Рашыць няроўнасці:

1512. $\lg (x^2 - 3) > \lg (x + 3)$.

1513. $\log^2 x - 2\lg x - 8 \leqslant 0$.

1514. $(0{,}25)^{x-4} \leqslant \left(\frac{1}{16}\right)^x$.

Раздзел IX

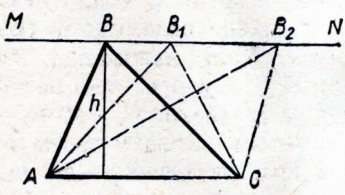
ФУНКЦЫІ І ПРЭДЗЕЛЫ

§ 201. Пастаянныя і пераменныя велічыні

Паняцце функцыі

З паняццем функцыі мы ўжо неаднаразова сутыкаліся. Так, у частцы I мы разгледзелі лінейную, квадратную, ступенную і трыганаметрычныя функцыі. Папярэдні раздзел быў прысвечаны вывучэнню паказальнай і лагарыфмічнай функцый. Цяпер нам трэба зрабіць агульны агляд таго, што мы ўжо ведаем аб функцыях, і разгледзець некаторыя новыя пытанні.

Назіраючы розныя працэсы, можна заўважыць, што велічыні, якія ўдзельнічаюць у іх, вядуць сябе па-рознаму: адны з іх змяняюцца, другія застаюцца пастаяннымі.



Рыс. 263.

Калі, напрыклад, у трохвугольніку ABC вяршыню B перамяшчаць па прамой MN, паралельнай аснове AC (рыс. 263), то велічыні вуглоў A, B і C пры гэтым будуць бесперапынна змяняцца, а сума іх, вышыня h і плошча трохвугольніка будуць заставацца нязменнымі.

Другі прыклад. Калі які-небудзь газ сціскаць пры пастаяннай тэмпературы, то аб'ём яго (V) і ціск (p) будуць змяняцца: аб'ём памяншацца, а ціск павялічвацца. Здабытак жа гэтых велічынь, як устанаўлівае закон Бойля—Марыёта, будзе заставацца пастаянным:

$$Vp = c,$$

дзе c — некаторая канстанта.

Усе велічыні можна падзяліць на *пастаянныя* і *пераменныя*.

Пераменныя велічыні, якія ўдзельнічаюць у якім-небудзь працэсе, звычайна змяняюцца не незалежна адна ад другой, а ў цеснай сувязі адна з другой. Напрыклад, сцісканне газу (пры пастаяннай тэмпературы) прыводзіць да змянення яго аб'ёму, а гэта,

у сваю чаргу, абумоўлівае змяненне ціску газу. Змяненне радыуса асновы цыліндра выклікае змяненне плошчы гэтай асновы; апошняе ж прыводзіць да змянення аб'ёму цыліндра і г. д. Адна з галоўных задач матэматычнага вывучэння таго ці іншага працэсу заключаецца ў тым, каб устанавіць, як змяненне адных пераменных велічынь уплывае на змяненне другіх пераменных велічынь.

Разгледзім некалькі прыкладаў. Памянёны вышэй закон Бойля—Марыёта гаворыць, што пры пастаяннай тэмпературы аб'ём газу V змяняецца адваротна прапарцыянальна ціску p: $V = \frac{c}{p}$. Калі вядомы ціск, то па гэтай формуле можна вылічыць аб'ём газу. Аналагічна формула $S = \pi r^2$ дазваляе вызначыць плошчу круга S, калі вядомы яго радыус r. Па формуле $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ можна знайсці востры вугал прамавугольнага трохвугольніка, калі вядомы другі востры вугал гэтага трохвугольніка, і г. д.

Пры параўнанні дзвюх пераменных велічынь адну з іх зручна разглядаць як *незалежную* пераменную, а другую — як *залежную* пераменную велічыню. Напрыклад, радыус круга r натуральна лічыць незалежнай пераменнай, а плошчу круга $S = \pi r^2$ — залежнай пераменнай велічынёй. Аналагічна ціск газу p можна лічыць незалежнай пераменнай велічынёй; тады яго аб'ём $V = \frac{c}{p}$ будзе залежнай пераменнай велічынёй.

Якую ж з дзвюх пераменных велічынь выбраць у якасці незалежнай і якую ў якасці залежнай? Гэта пытанне рашаецца па-рознаму, у залежнасці ад пастаўленай мэты. Калі, напрыклад, нас цікавіць, да чаго прыводзіць змяненне ціску газу пры пастаяннай тэмпературы, то натуральна ціск прыняць за незалежную, а аб'ём — за залежную пераменную велічыню. У гэтым выпадку залежная пераменная велічыня V будзе выражацца праз незалежную велічыню p па формуле: $V = \frac{c}{p}$. Калі ж мы хочам высветліць вынікі сціскання газу, то лепш аб'ём разглядаць як незалежную, а ціск — як залежную пераменную велічыню. Тады залежная пераменная велічыня p будзе выражацца праз незалежную пераменную велічыню V па формуле: $p = \frac{c}{V}$.

У любым з гэтых выпадкаў дзве велічыні звязаны паміж сабой так, што кожнаму магчымаму значэнню адной з іх адпавядае зусім пэўнае значэнне другой.

Калі кожнаму значэнню адной пераменнай велічыні x якім-небудзь чынам пастаўлена ў адпаведнасць зусім пэўнае значэнне другой велічыні y, то кажуць, што зададзена функцыя. Велічыню y пры гэтым называюць *залежнай* пераменнай велічынёй або *функцыяй*, а велічыню x — *незалежнай* пераменнай велічынёй або *аргументам*.

Для выражэння таго, што y ёсць функцыя аргумента x, звычайна выкарыстоўваюць абазначэнні $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = \varphi(x)$ і г. д. (чытаецца: ігрэк роўны эф ад ікс, ігрэк роўны жэ ад ікс, ігрэк роўны фі ад ікс і г. д.). Выбар літары для абазначэння функцыі (f, g, φ) з'яўляецца, безумоўна, неістотным. Істотна толькі тое, якую сувязь паміж велічынямі x і y выражае гэта літара.

Значэнне, якое прымае функцыя $f(x)$ пры $x = a$, абазначаецца $f(a)$. Калі, напрыклад, $f(x) = x^2 + 1$, то

$$f(1) = 1^2 + 1 = 2;$$
$$f(2) = 2^2 + 1 = 5;$$
$$f(a + 1) = (a + 1)^2 + 1 = a^2 + 2a + 2;$$
$$f(2a) = (2a)^2 + 1 = 4a^2 + 1$$

і г. д.

Практыкаванні

1515. Газ, які знаходзіцца пад ціскам 2 атмасферы, сціскаецца. Як зменяцца пры гэтым: а) вага газу; б) яго аб'ём; в) яго ціск?

1516. Па электрычнаму ланцугу цячэ ток. Пры дапамозе рэастата мы змяняем супраціўленне ланцуга. Ці змяняецца пры гэтым: а) ток у ланцугу; б) напружанне току?

1517. Вяршыня B трохвугольніка ABC рухаецца па акружнасці, дыяметр якой супадае з асновай AC гэтага трохвугольніка. Якія велічыні ў гэтым працэсе застаюцца пастаяннымі і якія змяняюцца?

1518. $f(x) = \dfrac{1 + x}{1 - x}$.

Знайсці: а) $f(0)$; б) $f(a^2)$; в) $f\left(\dfrac{1}{a}\right)$; г) $f(\sin\alpha)$.

1519. Выразіць $f(2a)$ праз $f(a)$ для функцый:
а) $f(x) = \sin x$; б) $f(x) = \operatorname{tg} x$; в) $f(x) = x^2$.

§ 202. Спосабы задавання функцый

Задаць функцыю — гэта значыць указаць, як па значэннях аргумента адшукваюцца адпаведныя значэнні функцыі.

У школьным курсе матэматыкі мы прывыклі да *аналітычнага* спосабу задавання функцыі. Пры такім спосабе даецца формула, якая звязвае залежную пераменную велічыню (функцыю) з незалежнай пераменнай велічынёй (аргументам); напрыклад: $y = \sqrt{x}$; $y = \lg x$; $S = \pi r^2$; $V = \dfrac{c}{p}$ і г. д. Разгледзім больш складаныя прыклады функцый, зададзеных аналітычна.

Няхай

$$y = \begin{cases} x, \text{ калі } x < 0, \\ \sin x, \text{ калі } x \geqslant 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Кожнаму значэнню x пастаўлена ў адпаведнасць зусім пэўнае значэнне y, прычым пры адмоўных значэннях x велічыня y знаходзіцца па формуле $y = x$, а пры неадмоўных значэннях x — па формуле $y = \sin x$. Калі, напрыклад, $x = -2$, то $y = x = -2$; калі $x = \frac{\pi}{2}$, то $y = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ і г. д.

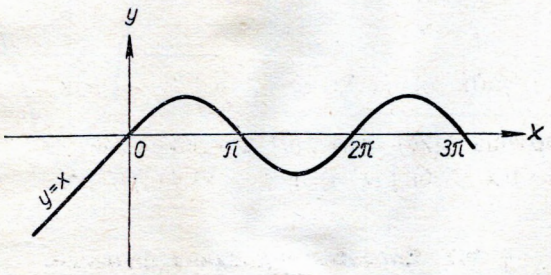
Не трэба думаць, што суадносіна (1) вызначае дзве функцыі. Гутарка ідзе толькі аб адной функцыі y, якая пры адмоўных значэннях аргумента x вядзе сябе як лінейная функцыя $y = x$, а пры неадмоўных значэннях аргумента x — як трыганаметрычная функцыя $y = \sin x$.

Графік разглядаемай функцыі дадзен на рысунку 264.

Разгледзім яшчэ адзін прыклад:

$$y = \begin{cases} x^2, \text{ калі } x \leqslant 0, \\ 3, \text{ калі } x > 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Гэта суадносіна паміж значэннямі x і y таксама вызначае адну функцыю. Графік яе дадзен на рысунку 265. Стрэлачка на прамалінейным участку паказвае, што пункт M не належыць графіку дадзенай функцыі. Бо згодна з формулай (2) пры $x = 0$ велічыня y знаходзіцца па формуле $y = x^2$, а не па формуле $y = 3$. Таму пры $x = 0$ y таксама роўны 0.



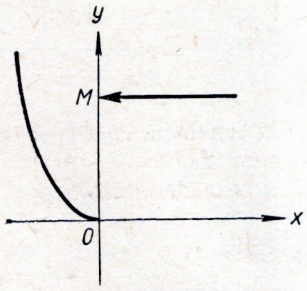
Рыс. 264.

Дапусцім, што функцыя y зададзена пры дапамозе некаторага выразу $f(x)$, напрыклад: $y = x^2$, $y = \operatorname{tg} x$ і г. д. Калі пры гэтым не зроблена ніякіх агаворак адносна таго, у якіх межах змяняюцца значэнні аргумента x, то мы будзем лічыць, што выраз $f(x)$ задае нашу функцыю пры ўсіх тых значэннях x, пры якіх ён вызначаны. Так, запіс $y = x^2$ азначае, што $y = x^2$ пры ўсіх сапраўдных значэннях x. Аналагічна, запіс $y = \operatorname{tg} x$ азначае, што $y = \operatorname{tg} x$ пры ўсіх дадатных значэннях x.

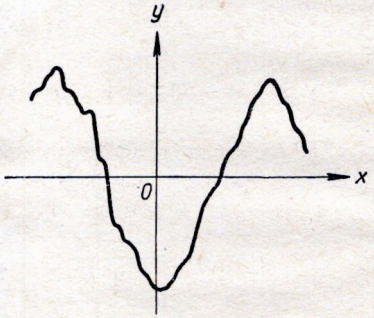
Акрамя аналітычнага спосабу, на практыцы часта карыстаюцца *графічным* спосабам задавання функцый. Гэты спосаб зручны тады, калі задаць функцыю аналітычна даволі цяжка (гл., напрыклад, рыс. 266). Акрамя таго, пры вывучэнні многіх працэсаў мы карыстаемся прыладамі, якія не могуць гаварыць з намі на мове формул. Аднак пры дапамозе гэтых прылад мы атрымліваем крывыя, па якіх можна меркаваць аб характары змянення адных велічынь у залежнасці ад змянення другіх велічынь. У медыцыне, напрыклад, шырока выкарыстоўваюцца электракардыёграфы. Пры дапамозе гэтых прылад можна атрымліваць электракардыяграмы — крывыя, якія паказваюць змяненне электрычных імпульсаў, што ўзнікаюць у мышцы сэрца. Такія крывыя дапамагаюць зрабіць правільныя вывады аб рабоце сэрца.

Графічны спосаб задавання функцыі вельмі часта выкарыстоўваецца ў матэматыцы для ілюстрацыі тых або іншых уласцівасцей функцыі.

Пры вывучэнні некаторых працэсаў зручна карыстацца таксама *таблічным* спосабам задавання функцый. Метэаролагі, напрыклад, складаюць табліцы выпаўшых ападкаў у розных пунктах зямнога шара. Гэтыя розныя пункты зямнога шара выступаюць у дадзеным выпадку ў ролі «значэнняў аргумента», а колькасці ападкаў — у ролі «значэнняў функцыі».



Рыс. 265.



Рыс. 266.

Практыкаванні

1520. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{калі } x \leqslant 0, \\ \sin x, & \text{калі } x > 0. \end{cases}$

Знайсці:

а) $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; б) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$; в) $f(0)$; г) $f(a^2)$.

1521. $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & \text{калі } x < 2, \\ \sin x, & \text{калі } x \geqslant 2. \end{cases}$

Знайсці:

а) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$; б) $f(\pi)$; в) $f(2-a^2)$.

Пабудаваць графікі наступных функцый (№ 1522—1525):

1522. $y=\begin{cases}-1, \text{ калі } x<-1,\\ x, \text{ калі } -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, \text{ калі } x>1.\end{cases}$

1523. $y=\begin{cases}1{,}5x+3, \text{ калі } x<0,\\ 3-2x, \text{ калі } x\geqslant 0.\end{cases}$

1524. $y=\begin{cases}x+6, \text{ калі } x<-2,\\ x^2-x-2, \text{ калі } |x|\leqslant 2,\\ 0, \text{ калі } x>2.\end{cases}$

1525. $y=\begin{cases}2^x, \text{ калі } x>0,\\ 1, \text{ калі } x\leqslant 0.\end{cases}$

1526. Як па графіку функцыі $y=f(x)$ пабудаваць графік функцыі $y=f(x)+c$, дзе c — некаторы зададзены лік?

Адказ растлумачыць на прыкладзе функцый:

1) $y=\frac{1}{x}+2$; 3) $y=2^x+1$;

2) $y=\frac{1}{x}-1$; 4) $y=\lg x-2$.

1527. Як па графіку функцыі $y=f(x)$ пабудаваць графік функцыі $y=f(x+a)$, дзе a — некаторы зададзены лік?

Адказ растлумачыць на прыкладзе наступных функцый:

1) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$; 4) $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$;

2) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$; 5) $y=\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$;

3) $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$; 6) $y=\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

1528. Як па графіку функцыі $y=f(x)$ пабудаваць графік функцыі $y=Af(x)$, дзе A — некаторы зададзены лік?

Адказ растлумачыць на прыкладзе наступных функцый:

1) $y=2x^2$; 4) $y=3\sin x$;

2) $y=-x^2$; 5) $y=-2\cos x$;

3) $y=-2x^2$; 6) $y=\frac{1}{3}\operatorname{tg} x$.

1529. Як па графіку функцыі $y = f(x)$ пабудаваць графік функцыі $y = |f(x)|$?

Адказ растлумачыць на прыкладзе наступных функцый:

1) $y = |x^2 - x - 6|$; 3) $y = |\cos x|$;

2) $y = |-6x^2 + x + 1|$; 4) $y = |\sin x|$.

1530. Як па графіку функцыі $y = f(x)$ пабудаваць графік функцыі $y = f(\omega x)$, дзе ω — некаторы зададзены лік?

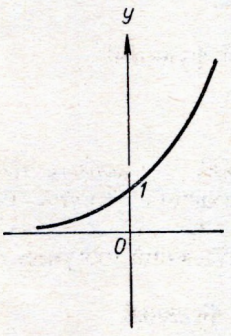
Адказ растлумачыць на прыкладзе наступных функцый:

1) $y = \sin 2x$; 3) $y = \cos 1{,}5x$;

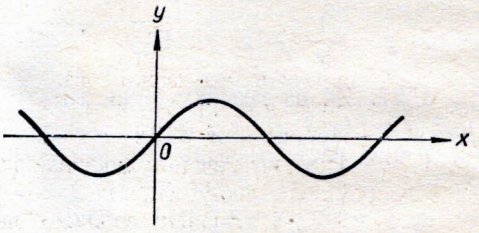
2) $y = \sin \frac{x}{2}$; 4) $y = \cos \frac{x}{3}$.

§ 203. Вобласць вызначэння і вобласць змянення функцыі

Якім бы спосабам ні была зададзена функцыя $y = f(x)$, разглядаючы яе, мы заўсёды маем справу з двума мноствамі: мноствам значэнняў, якія можа прымаць аргумент x, і мноствам значэнняў, якія можа прымаць функцыя y. Так, напрыклад, для функцыі $y = 2^x$ (рыс. 267) мноствам усіх значэнняў, якія можа прымаць аргумент x, з'яўляецца сукупнасць усіх сапраўдных лікаў, а мноствам усіх значэнняў, якія можа прымаць функцыя y, — сукупнасць усіх дадатных лікаў.



Рыс. 267.



Рыс. 268.

Сукупнасць усіх тых значэнняў, якія можа прымаць аргумент x функцыі $y = f(x)$, называецца вобласцю вызначэння гэтай функцыі. Сукупнасць усіх тых значэнняў, якія прымае сама функцыя y, называецца вобласцю змянення гэтай функцыі. Напрыклад, вобласцю вызначэння функцыі $y = \sin x$ (рыс. 268) з'яўляецца сукупнасць усіх сапраўдных лікаў, а вобласцю змянення — сукупнасць усіх лікаў, змешчаных паміж -1 і 1, уключаючы гэтыя два лікі. Для функцыі $y = \lg x$ (рыс. 269) вобласцю вызначэння з'яўляецца сукупнасць усіх дадатных лікаў, а вобласцю змянення — сукупнасць усіх сапраўдных лікаў і г. д.

Раней мы вывучалі лікавыя паслядоўнасці. Члены любой лікавай паслядоўнасці можна разглядаць як магчымыя значэнні некаторай функцыі, вызначанай для натуральных значэнняў аргумента.

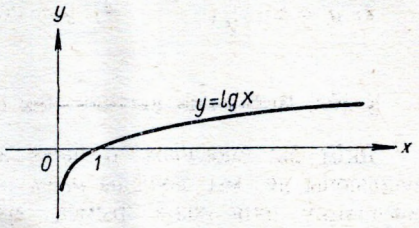
Напрыклад, члены паслядоўнасці

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

з'яўляюцца значэннямі функцыі $y = \frac{1}{n}$, а члены паслядоўнасці

$$1, -1, 1, -1, \ldots$$

— значэннямі функцыі $y = (-1)^{n+1}$. Кожную з гэтых функцый мы разглядаем як функцыю, вызначаную толькі для натуральных значэнняў аргумента n. Вось чаму часам гавораць, што ***лікавая паслядоўнасць ёсць функцыя натуральнага аргумента.***



Рыс. 269.

Разгледзім некалькі больш складаных прыкладаў на знаходжанне вобласці вызначэння функцыі.

Прыклад 1. Знайсці вобласць вызначэння функцыі

$$y = \frac{x-1}{x^2+2x-3}.$$

Гэта функцыя вызначана для ўсіх значэнняў x, акрамя тых, пры якіх назоўнік дробу x^2+2x-3 ператвараецца ў нуль. Рашаючы ўраўненне $x^2+2x-3=0$, знаходзім $x_1=1$, $x_2=-3$. Таму вобласцю вызначэння дадзенай функцыі з'яўляецца сукупнасць усіх сапраўдных лікаў, акрамя 1 і -3.

Прыклад 2. Знайсці вобласць вызначэння функцыі

$$y = \sqrt{\frac{2x-4}{3-6x}}.$$

Корні квадратныя вызначаны толькі для неадмоўных лікаў. Таму вобласць вызначэння дадзенай функцыі можна разглядаць як сукупнасць усіх значэнняў x, якія задавальняюць няроўнасці

$$\frac{2x-4}{3-6x} \geqslant 0.$$

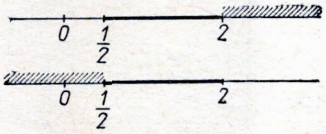
Перш за ўсё высветлім, пры якіх значэннях аргумента x лічнік і назоўнік гэтага дробу дадатныя і пры якіх адмоўныя. Рашаючы няроўнасць $2x-4>0$, атрымліваем $x>2$. Такім чынам, пры $x>2$ лічнік дадатны, пры $x<2$ ён, відавочна, адмоўны. Гэта ад-

значана на рысунку 270. Заштрыхаваная частка верхняй лікавай прамой адпавядае той вобласці, у якой лічнік дадатны, а незаштрыхаваная — той вобласці, у якой ён адмоўны. Аналагічна даследуецца назоўнік $3 - 6x$. Маем:

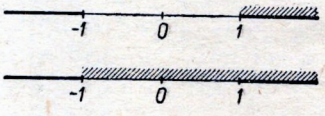
$$3 - 6x > 0; \qquad 6x < 3;$$

$$3 > 6x; \qquad x < \frac{1}{2}.$$

Заштрыхаваная частка другой лікавай прамой на рысунку 270 адпавядае вобласці, у якой назоўнік $3 - 6x$ дадатны, а незаштрыхаваная — вобласці, у якой ён адмоўны.



Рыс. 270.



Рыс. 271.

На рысунку 270 бачна, што абодва выразы (лічнік і назоўнік) маюць аднолькавыя знакі толькі пры $\frac{1}{2} < x < 2$. Таму ў гэтай вобласці дроб $\frac{2x - 4}{3 - 6x}$ дадатны. Пры $x = 2$ ён ператвараецца ў 0. Значыць, вобласцю вызначэння дадзенай функцыі з'яўляецца сукупнасць сапраўдных лікаў, якія задавальняюць няроўнасці

$$\frac{1}{2} < x \leqslant 2.$$

Прыклад 3. Знайсці вобласць вызначэння функцыі

$$y = \lg\left(\frac{2x}{x+1} - 1\right).$$

Дзесятковыя лагарыфмы вызначаны толькі для дадатных лікаў. Таму вобласць вызначэння дадзенай функцыі можна разглядаць як сукупнасць усіх значэнняў x, якія задавальняюць няроўнасці

$$\frac{2x}{x+1} - 1 > 0.$$

Выканаўшы адыманне ў левай частцы гэтай няроўнасці, атрымаем:

$$\frac{x-1}{x+1} > 0.$$

Лічнік гэтага дробу дадатны пры $x > 1$ і адмоўны пры $x < 1$, а назоўнік дадатны пры $x > -1$ і адмоўны пры $x < -1$ (рыс. 271).

Таму дроб дадатны пры $x < -1$ і пры $x > 1$. Усе гэтыя значэнні x можна запісаць у выглядзе адной няроўнасці $|x| > 1$.

Прыклад 4. Знайсці вобласць вызначэння функцыі

$$y = \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x - \cos x}.$$

Па-першае, $\operatorname{tg} x$ не вызначаны для $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$. Па-другое, дадзены дроб не вызначаны для тых значэнняў x, пры якіх назоўнік ператвараецца ў нуль. Гэтыя значэнні знаходзяцца з ураўнення $\sin x - \cos x = 0$. Гэта аднароднае трыганаметрычнае ўраўненне. Дзелячы абедзве яго часткі на $\cos x$ (дакажыце, што гэта дзяленне магчыма!), атрымаем:

$$\operatorname{tg} x = 1,$$

адкуль

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Такім чынам, вобласцю вызначэння дадзенай функцыі з'яўляецца сукупнасць усіх сапраўдных лікаў, акрамя $\frac{\pi}{2} + n\pi$ і $\frac{\pi}{4} + k\pi$, дзе n і k — адвольныя цэлыя лікі.

Цяпер мы разгледзім некалькі прыкладаў на знаходжанне вобласці змянення функцыі.

Прыклад 5. Як вядома, лінейная функцыя $y = ax + b$ пры $a \neq 0$ можа прымаць любыя сапраўдныя значэнні. Таму вобласцю змянення гэтай функцыі з'яўляецца сукупнасць усіх сапраўдных лікаў.

Прыклад 6. Знайсці вобласць змянення функцыі

$$y = x^2 - 4x + 7.$$

Пераўтворым квадратны трохчлен $x^2 - 4x + 7$, вылучыўшы з яго поўны квадрат: $y = x^2 - 4x + 4 + 3 = (x-2)^2 + 3$.

Выраз $(x-2)^2$ прымае, відавочна, усе неадмоўныя значэнні. Таму вобласцю змянення дадзенай функцыі з'яўляецца сукупнасць усіх лікаў, большых або роўных 3. Гэту вобласць можна задаць пры дапамозе няроўнасці $y \geqslant 3$.

Прыклад 7. Знайсці вобласць змянення функцыі

$$y = \sin x + \cos x.$$

Паказаўшы дадзеную функцыю ў выглядзе

$$y = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

(успомніце, як гэта робіцца!), няцяжка зразумець, што вобласць яе змянення вызначаецца няроўнасцю

$$-\sqrt{2} \leqslant y \leqslant \sqrt{2}, \text{ або } |y| \leqslant \sqrt{2}.$$

Практыкаванні

Знайсці вобласці вызначэння наступных функцый (№ 1531—1566):

1531. $y = \dfrac{3x+1}{3x-6}$.

1532. $y = \dfrac{x^2-9}{x+3}$.

1533. $y = \dfrac{5}{6x^2 - x - 1}$.

1534. $y = \dfrac{3x-1}{x^2+x+1}$.

1535. $y = \sqrt{x-1}$.

1536. $y = \sqrt{5-10x}$.

1537. $y = \sqrt{1-\cos x}$.

1538. $y = \sqrt{\sin x - 1}$.

1539. $y = 2\sqrt{x-1} - \dfrac{5}{\sqrt{4-x}}$.

1540. $y = \sqrt{x^2+2x+4}$.

1541. $y = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$.

1542. $y = \sqrt{x^2-4x-12}$.

1543. $y = \sqrt{(1-x)(1+5x)}$.

1544. $y = \log_a (x^2 - 4x - 5)$.

1545. $y = \log_{\frac{1}{3}} (-3x^2 - 7x - 2)$.

1546. $y = \sqrt{\dfrac{2x-4}{x+1}}$.

1547. $y = \sqrt{-\dfrac{x-4}{2-x}}$.

1548. $y = \sqrt{\dfrac{1}{x} - 1}$.

1549. $y = \sqrt{2 + \dfrac{x}{1-x}}$.

1550. $y = \lg \dfrac{x(x-3)}{2x-5}$.

1551. $y = \lg \dfrac{x-5}{2+x-x^2}$.

1552. $y = \operatorname{tg} \dfrac{1}{x}$.

1553. $y = \operatorname{ctg} \pi x$.

1554. $y = (\sin \pi x)^{-1}$.

1555. $y = \dfrac{\cos x}{\sqrt{3 - 2\sin x}}$.

1556. $y = \dfrac{1}{\sqrt{3 + 2\cos x}}$.

1557. $y = \dfrac{1}{\sqrt{3 + \operatorname{tg} x}}$.

1558. $y = \dfrac{1}{\sin x \cos x}$.

1559. $y = \dfrac{1}{\sin x + \cos x}$.

1560. $y = \dfrac{\sin x + \sqrt{3}\cos x}{\sin x - \sqrt{3}\cos x}$.

1561. $y = \dfrac{1000}{\sqrt{2}\sin^2 x - \cos x}$.

1562. $y = 2^{-\sqrt{-x}}$.

1563. $y = 3^{\sqrt{x}} + 3^{\sqrt{-x}}$.

1564. $y = \lg |6x - 8|$.

1565. $y = \lg \cos x$.

1566. $y = \lg \operatorname{tg} x$.

1567. (В у с н а.) Знайсці вобласці змянення наступных функцый:

а) $y = |\sin x|$;
б) $y = \cos^2 x$;
в) $y = \cos x - 1$;
г) $y = \operatorname{tg}^2 x$;
д) $y = \sin^2 x + \cos^2 x$;
е) $y = \cos x - \sin x$;
ж) $y = 3\sin x + 4\cos x$;
з) $y = 12\sin x - 5\cos x$;
і) $y = \sin x \cos x$.

1568. Знайсці вобласці змянення функцый:

а) $y = (x-3)^2 - 1$;
б) $y = -(x+2)^2 + 5$;
в) $y = 2x^2 - 28x + 96$;
г) $y = 5^{\sin x}$;
д) $y = x - |x|$;
е) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

1569. Параўнаць вобласці вызначэння функцый:

а) $y = x$ і $y = 10^{\lg x}$;
б) $y = 2\lg x$ і $y = \lg x^2$.

Пабудаваць графікі гэтых функцый.

§ 204. Узрастанне і ўбыванне функцый

Функцыя $f(x)$ называецца манатонна ўзрастаючай (або проста ўзрастаючай) у інтэрвале $a \leqslant x \leqslant b$, калі з умовы $x_2 > x_1$ вынікае, што

$$f(x_2) > f(x_1).$$

Пры гэтым

$$a \leqslant x_1 \leqslant b,\ a \leqslant x_2 \leqslant b.$$

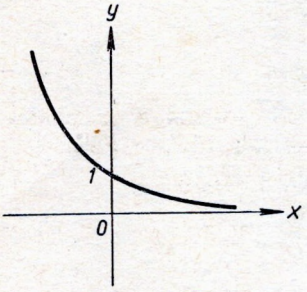
Іншымі словамі, *функцыя называецца манатонна ўзрастаючай у некаторым інтэрвале, калі з двух адвольных значэнняў аргумента, узятых з гэтага інтэрвалу, большаму адпавядае большае значэнне функцыі*.

Напрыклад, функцыя $y = \sin x$ (гл. рыс. 268) з'яўляецца ўзрастаючай у інтэрвалах $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}\pi$, $\frac{7}{2}\pi \leqslant x \leqslant \frac{9}{2}\pi$ і г. д. Функцыя $y = 2^x$ (гл. рыс. 267) з'яўляецца ўзрастаючай на ўсёй лікавай прамой. Функцыя $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ нідзе не ўзрастае (рыс. 272).

Калі функцыя $y = f(x)$ манатонна ўзрастае ў інтэрвале $a \leqslant x \leqslant b$, то графік яе ў гэтым інтэрвале з ростам x падымаецца ўсё вышэй і вышэй. Гэта, безумоўна, не азначае, што графік «уходзіць» уверх як заўгодна высока. Напрыклад, графік функцыі $y = -\frac{1}{x}$ пры дадатных значэннях x (гл. рыс. 273) падымаецца з ростам аргумента ўсё вышэй і вышэй. Тым не менш ён ніколі не пяройдзе і нават не дойдзе да восі абсцыс.

Функцыя $y = f(x)$ называецца манатонна ўбываючай (або проста ўбываючай) у інтэрвале $a \leqslant x \leqslant b$, калі з умовы $x_2 > x_1$ вынікае, што $f(x_2) < f(x_1)$. Пры гэтым $a \leqslant x_1 \leqslant b$, $a \leqslant x_2 \leqslant b$.

Іншымі словамі, *функцыя называецца манатонна ўбываючай у некаторым інтэрвале, калі з двух адвольных значэнняў аргумента, узятых з гэтага інтэрвалу, большаму адпавядае меншае значэнне функцыі*.



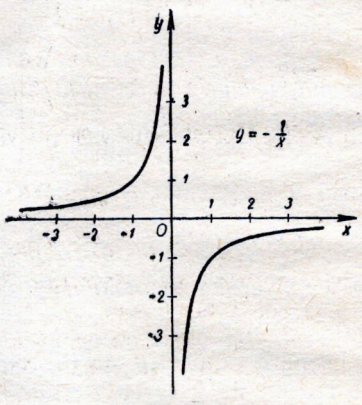
Рыс. 272.

Напрыклад, функцыя $y = \sin x$ манатонна ўбывае ў інтэрвалах $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi \leqslant x \leqslant \frac{7}{2}\pi$, $\frac{9}{2}\pi \leqslant x \leqslant \frac{11}{2}\pi$ і г. д. Функцыя $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ убывае на ўсёй лікавай прамой. Функцыя $y = 2^x$ нідзе не ўбывае.

Калі функцыя $f(x)$ манатонна ўбывае ў інтэрвале $a \leqslant x \leqslant b$, то графік яе ў гэтым інтэрвале з ростам x апускаецца ўсё ніжэй і ніжэй. Гэта таксама не азначае, што графік «уходзіць» як заўгодна далёка ўніз. Вучням прапануецца самастойна пабудаваць адпаведны рысунак.

Функцыі, якія ў інтэрвале $a \leqslant x \leqslant b$ толькі ўзрастаюць або толькі ўбываюць, называюцца *манатоннымі* ў гэтым інтэрвале.

Да гэтага часу мы гаварылі аб інтэрвале $a \leqslant x \leqslant b$. Такі інтэрвал уключае ў сябе крайнія пункты $x = a$ і $x = b$ і таму называецца *замкнёным* інтэрвалам. Але ў некаторых выпадках гаварыць аб замкнёным інтэрвале нядобра. Нязручна, напрыклад, гаварыць аб паводзінах функцыі $y = \operatorname{tg} x$ у інтэрвале $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$. Бо пры $x = -\frac{\pi}{2}$ і $x = \frac{\pi}{2}$ гэта функцыя наогул не вызначана. Таму замест інтэрвалу $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ лепш гаварыць аб інтэрвале $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Такі інтэрвал не змяшчае крайніх пунктаў $x = -\frac{\pi}{2}$ і $x = \frac{\pi}{2}$ і таму называецца *адкрытым* інтэрвалам.



Рыс. 273.

У далейшым нам прыйдзецца гаварыць як аб адкрытых, так і аб замкнёных інтэрвалах. Аднак у кожным з гэтых выпадкаў будзе ясна, аб якім інтэрвале ідзе гутарка, і таму мы будзем гаварыць проста аб інтэрвалах. Адзначым толькі, што замкнёны інтэрвал $a \leqslant x \leqslant b$ звычайна запісваецца ў выглядзе $[a, b]$, а адкрыты інтэрвал $a < x < b$ — у выглядзе (a, b).

Практыкаванні

Вызначыць участкі ўзрастання і ўчасткі ўбывання дадзеных функцый; пабудаваць графікі гэтых функцый (№ 1570—1585):

1570. $y = x^2 + 3x - 108$.

1571. $y = -x^2 + 3x + 4$.

1572. $y = |x^2 + 3x - 10|$.

1573. $y = |-x^2 + 3x + 4|$.

1574. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

1575. $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

1576. $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

1577. $y = \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

1578. $y = |\cos x|$.

1579. $y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

1580. $y = \sin 2x$.

1581. $y = \cos\frac{x}{2}$.

1582. $y = \lg(1 + x)$.

1583. $y = \lg(1 - x)$.

1584. $y = \frac{5x + 4}{x}$.

1585. $y = \frac{x + 1}{x - 1}$.

1586. Вызначыць участкі ўзрастання і ўчасткі ўбывання функцый:

а) $y = 2^{3-6x}$; б) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-5}$.

1587. Даказаць, што сума дзвюх функцый, манатонна ўзрастаючых у некаторым інтэрвале, ёсць функцыя манатонна ўзрастаючая ў дадзеным інтэрвале.

1588. Ці будзе рознасць дзвюх манатонна ўзрастаючых функцый манатонна ўзрастаючай функцыяй?

§ 205. Экстрэмальныя значэнні функцыі

У гэтым параграфе мы вывучым некаторыя пытанні паводзін функцыі $y = f(x)$ у інтэрвале $[a, b]$. Пры гэтым, безумоўна, мы будзем меркаваць, што функцыя $f(x)$ вызначана ў кожным пункце гэтага інтэрвалу.

Найбольшае з усіх тых значэнняў, якія прымае функцыя $y = f(x)$ *у інтэрвале* $[a, b]$, *называецца яе абсалютным максімумам, а найменшае — абсалютным мінімумам у дадзеным інтэрвале.*

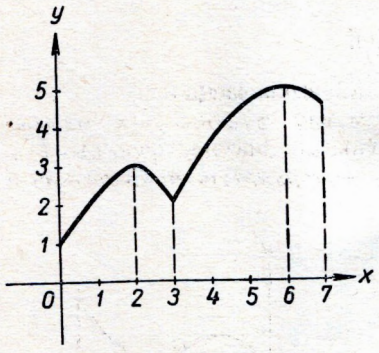
Напрыклад, для функцыі $y = f(x)$, графічна паказанай на рысунку 274, абсалютным мінімумам у інтэрвале $[0,7]$ з'яўляецца значэнне $f(0) = 1$, а абсалютным максімумам — значэнне $f(6) = 5$.

Поруч з абсалютным максімумам і абсалютным мінімумам у матэматыцы часта гавораць аб *лакальных* (гэта значыць м я с ц о в ы х) максімумах і мінімумах.

Пункт $x = c$, *які ляжыць унутры інтэрвалу* $[a, b]$, *называецца пунктам лакальнага максімуму функцыі* $y = f(x)$, *калі для ўсіх значэнняў* x, *дастаткова блізкіх да* c,

$$f(x) \leqslant f(c). \qquad (1)$$

Значэнні функцыі $y = f(x)$ *у пунктах яе лакальных максімумаў называюцца лакальнымі максімумамі гэтай функцыі.* Напрыклад, для функцыі $y = f(x)$, графічна паказанай на рысунку 274, пунктамі лакальнага максімуму з'яўляюцца пункты $x = 2$ і $x = 6$, а самімі лакальнымі максімумамі — значэнні



Рыс. 274.

$$f(2) = 3 \text{ і } f(6) = 5.$$

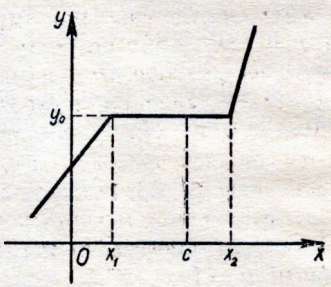
У пунктах $x = 2$ і $x = 6$ функцыя $f(x)$ прымае значэнні, большыя, чым у суседніх пунктах, дастаткова блізкіх да іх:

$$f(2) > f(x); \; f(6) > f(x).$$

Для функцыі $y = f(x)$, графічна паказанай на рысунку 275, пунктам лакальнага максімуму будзе, напрыклад, пункт $x = c$. Для ўсіх x, дастаткова блізкіх да c,

$$f(x) = f(c),$$

таму ўмова (1) выконваецца. Пункт $x = x_1$ таксама з'яўляецца пунктам лакальнага максімуму. Для ўсіх значэнняў x, дастаткова блізкіх да x_1, $f(x) < f(x_1)$, калі $x < x_1$ і $f(x) = f(x_1)$, калі $x > x_1$. Значыць, і ў гэтым выпадку $f(x) \leqslant f(x_1)$. А вось пункт $x = x_2$ ужо не будзе пунктам лакальнага максімуму. Лявей яго $f(x) = f(x_2)$, але правей яго $f(x) > f(x_2)$. Таму ўмова (1) не выконваецца.



Рыс. 275.

Пункт $x = c$, які ляжыць унутры інтэрвалу $[a, b]$, называецца пунктам лакальнага мінімуму функцыі $y = f(x)$, калі для ўсіх значэнняў x, дастаткова блізкіх да c,

$$f(x) \geqslant f(c). \tag{2}$$

Значэнні функцыі ў пунктах лакальных мінімумаў называюцца лакальнымі мінімумамі гэтай функцыі. Напрыклад, для функцыі $y = f(x)$, графічна паказанай на рысунку 274, пунктам лакальнага мінімуму з'яўляецца пункт $x = 3$, а самім лакальным мінімумам — значэнне $f(3) = 2$.

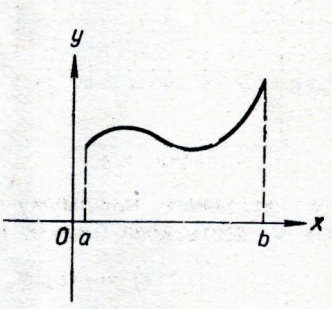
Для функцыі, графічна паказанай на рысунку 275, пунктам лакальнага мінімуму будзе, напрыклад, пункт $x = x_2$. Для ўсіх значэнняў x, дастаткова блізкіх да x_2, $f(x) = f(x_2)$, калі $x < x_2$, і $f(x) > f(x_2)$, калі $x > x_2$. Значыць, умова $f(x) \geqslant f(x_2)$ выконваецца. Пункт $x = c$, адзначаны намі вышэй як пункт лакальнага максімуму, з'яўляецца разам з тым і пунктам лакальнага мінімуму. Для ўсіх жа пунктаў x, дастаткова блізкіх да яго,

$$f(x) = f(c),$$

і таму фармальна няроўнасць $f(x) \geqslant f(c)$ выконваецца.

Пункты мінімумаў і пункты максімумаў функцыі $f(x)$ называюцца *пунктамі экстрэмумаў* гэтай функцыі. Значэнні функцыі $f(x)$ у пунктах экстрэмумаў называюцца *экстрэмальнымі значэннямі* гэтай функцыі.

Рысунак 274 паказвае розніцу паміж абсалютнымі і лакальнымі экстрэмумамі. Функцыя $y = f(x)$, паказаная на гэтым рысунку, мае ў пункце $x = 2$ лакальны максімум, які не з'яўляецца абсалютным максімумам у інтэрвале $[0,7]$. Зусім гэтак жа ў пункце $x = 3$ гэта функцыя мае лакальны мінімум, які не з'яўляецца абсалютным мінімумам у інтэрвале $[0,7]$.



Рыс. 276.

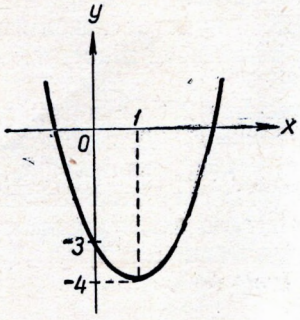
Калі абсалютны максімум функцыі $y = f(x)$ у інтэрвале $[a, b]$ дасягаецца ва ўнутраным пункце гэтага інтэрвалу, то гэты абсалютны максімум з'яўляецца, відавочна, і лакальным максімумам (гл., напрыклад, рыс. 274, у пункце $x = 6$). Але можа здарыцца, што гэты абсалютны максімум дасягаецца не ўнутры інтэрвалу $[a, b]$, а ў якім-небудзь крайнім яго пункце (рыс. 276). Тады ён не з'яўляецца лакальным максімумам. Адгэтуль вынікае наступнае правіла для знаходжання абсалютнага максімуму функцыі $y = f(x)$ у інтэрвале $[a, b]$.

1. Знаходзім усе лакальныя максімумы функцыі $y = f(x)$ у дадзеным інтэрвале.

2. Да атрыманых значэнняў дабаўляем значэнні гэтай функцыі ў канцах дадзенага інтэрвалу, гэта значыць значэнні $f(a)$ і $f(b)$.

Найбольшае з усіх гэтых значэнняў і дасць нам абсалютны максімум функцыі $y = f(x)$ у інтэрвале $[a, b]$.

Аналагічна знаходзіцца і абсалютны мінімум функцыі $y = f(x)$ у інтэрвале $[a, b]$.



Рыс. 277.

Прыклад. Знайсці ўсе лакальныя экстрэмумы функцыі $y = x^2 - 2x - 3$. Якія найбольшае і найменшае значэнні гэтай функцыі ў інтэрвале $[0,5]$?

Пераўтворым дадзеную функцыю, вылучыўшы поўны квадрат:

$$y = x^2 - 2x + 1 - 4 = (x - 1)^2 - 4.$$

Цяпер лёгка пабудаваць яе графік. Гэта будзе накіраваная ўверх парабала з вяршыняй у пункце $(1, -4)$ (рыс. 277). Адзіным пунктам лакальнага экстрэмуму з'яўляецца пункт $x = 1$. У гэтым пункце функцыя мае лакальны мінімум, роўны -4. Каб знайсці найбольшае і найменшае значэнні дадзенай функцыі ў інтэрвале $[0,5]$, заўважым, што пры $x = 0$ $y = -3$, а пры $x = 5$ $y = 12$. З трох значэнняў -4, -3 і 12 найменшым з'яўляецца -4, а найбольшым 12. Такім чынам, найменшае значэнне (абсалютны мінімум) дадзенай функцыі ў інтэрвале $[0,5]$ роўна -4; яно дасягаецца пры $x = 1$. Найбольшае значэнне (абсалютны максімум) роўна 12; яно дасягаецца пры $x = 5$.

Практыкаванні

1589. Якія з вядомых вам функцый на ўсёй лікавай прамой:

а) зусім не маюць лакальных экстрэмумаў;

б) маюць роўна адзін лакальны экстрэмум;

в) маюць бясконцае мноства лакальных экстрэмумаў?

У практыкаваннях № 1590—1600 знайсці пункты лакальных экстрэмумаў і самі лакальныя экстрэмумы дадзеных функцый. Высветліць, якія гэта экстрэмумы (максімумы або мінімумы).

1590. $y = (x - 1)^2 + 5$.

1591. $y = 3 - (x + 2)^2$.

1592. $y = 12x^2 - x - 1$.

1593. $y = (x - 1)(x - 3)$.

1594. $y = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$.

1595. $y = \dfrac{1}{2 - \cos x}$.

1596. $y = \sqrt{x^2 - 2x + 8}$.

1597. $y = -x(x + 2a)$.

1598. $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. **1600.** $y = \sin x + \cos x$.

1599. $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Знайсці абсалютныя экстрэмумы дадзеных функцый у дадзеных інтэрвалах (№ 1601—1603):

1601. $y = -2x^2 - 3x - 1$ у інтэрвале $|x| \leqslant 2$.

1602. $y = |x^2 + 5x + 6|$ у інтэрвале $[-5, 4]$.

1603. $y = \sin x - \cos x$ у інтэрвале $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$.

1604. Знайсці абсалютныя экстрэмумы функцыі $y = (x - 3)(x - 5)$ у інтэрвалах: а) [2,3]; б) [3,4]; в) [4,5]; г) [2,5].

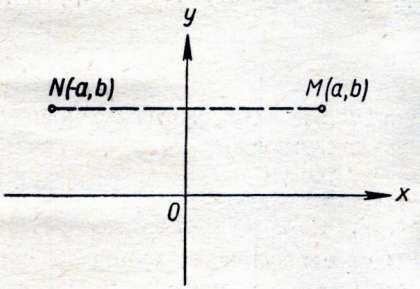
§ 206. Цотныя і няцотныя функцыі

Функцыя $y = f(x)$ называецца цотнай, калі пры ўсіх значэннях x з вобласці вызначэння гэтай функцыі

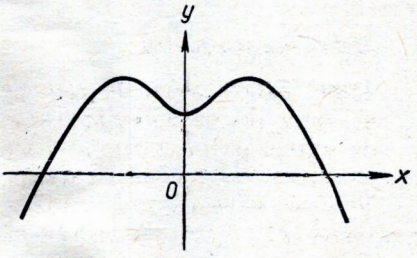
$$f(-x) = f(x).$$

Прыкладамі цотных функцый могуць з'яўляцца добра вывучаныя намі функцыі $y = x^2$, $y = \cos x$, $y = |x|$ і г. д.

Няхай пункт M з каардынатамі (a, b) належыць графіку цотнай функцыі $y = f(x)$. Тады $b = f(a)$. Паколькі функцыя $f(x)$ цотная, то і $f(-a) = f(a) = b$. Але гэта азначае, што разам з пунк-



Рыс. 278.



Рыс. 279.

там M (a, b) графіку функцыі $y = f(x)$ павінен належаць і пункт N з каардынатамі $(-a, b)$. Гэтыя два пункты сіметрычны адзін другому адносна восі y (рыс. 278).

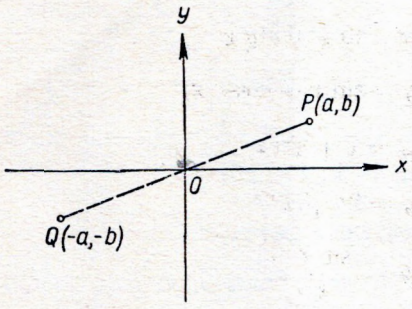
Такім чынам, які б пункт графіка цотнай функцыі мы ні ўзялі, на ім абавязкова знойдзецца пункт, сіметрычны першаму адносна восі y. Вось чаму ***графік цотнай функцыі ўяўляе сабой лінію, сіметрычную адносна восі ардынат*** (адзін з такіх графікаў паказаны на рысунку 279).

Функцыя $y = f(x)$ называецца няцотнай, калі пры ўсіх значэннях x з вобласці вызначэння гэтай функцыі

$$f(-x) = -f(x).$$

Прыкладамі няцотных функцый з'яўляюцца функцыі $y = x$, $y = x^3$, $y = \sin x$ і г. д.

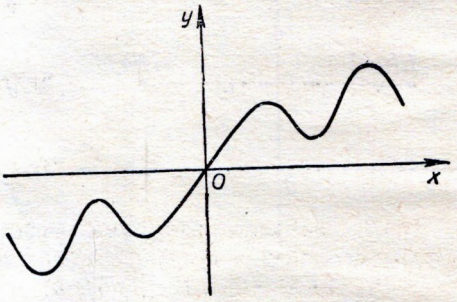
Няхай пункт P з каардынатамі (a, b) належыць графіку няцотнай функцыі $y = f(x)$; тады $b = f(a)$. Паколькі функцыя $f(x)$ няцотная, то $f(-a) = -f(a)$. Таму $f(-a) = -b$. Апошняя роўнасць азначае, што пункт Q з каардынатамі $(-a, -b)$ павінен належаць графіку функцыі $y = f(x)$. Такім чынам, калі пункт P з каардынатамі (a, b) належыць графіку няцотнай функцыі $y = f(x)$, то гэтаму графіку павінен належаць і пункт Q з каардынатамі $(-a, -b)$ (рыс. 280). Пункты P і Q сіметрычныя адносна пачатку каардынат (дакажыце гэта!).



Рыс. 280.

Такім чынам, які б пункт графіка няцотнай функцыі мы ні ўзялі, на ім абавязкова знойдзецца другі пункт, сіметрычны першаму адносна пачатку каардынат. Вось чаму ***графік любой няцотнай функцыі сіметрычны адносна пачатку каардынат*** (гл., напрыклад, рыс. 281).

Не трэба думаць, што ўсякая функцыя з'яўляецца або цотнай, або няцотнай. Існуе вельмі многа функцый, якія нельга аднесці ні да цотных, ні да няцотных. Так, напрыклад, для функцыі $f(x) = x + x^2$ маем: $f(-x) = -x + x^2$. Ні адна з дзвюх тоеснасцей $f(-x) = f(x)$ і $f(-x) = -f(x)$ не мае месца. Значыць, дадзеная функцыя не з'яўляецца ні цотнай, ні няцотнай.



Рыс. 281.

Акрамя таго, гаварыць аб тым, што функцыя $y = f(x)$ цотная або няцотная, можна толькі ў тым выпадку, калі вобласць вызначэння гэтай функцыі з'яўляецца сіметрычнай адносна пачатку каардынат. Гэта азначае, што калі функцыя вызначана пры $x = a$, то яна павінна быць вызначана і пры $x = -a$. У адваротным выпадку параўноўваць выразы $f(x)$ і $f(-x)$ не мае сэнсу. Напрыклад,

функцыя $y = \lg x$ вызначана толькі для дадатных значэнняў аргумента. Таму адзін з выразаў $\lg x$ і $\lg(-x)$ напэўна не мае сэнсу. Значыць, гаварыць аб тым, ці з'яўляецца лагарыфмічная функцыя цотнай або няцотнай, таксама не мае сэнсу.

Практыкаванні

1605. (Вусна.) Сярод дадзеных функцый указаць цотныя і няцотныя:

1) $y = x^{100}$.
2) $y = x^{-3}$;
3) $y = \sqrt{x}$;
4) $y = \sqrt[3]{x}$;
5) $y = x^4 - 2x^2 + 3$;
6) $y = x^3 - 5x - 1$;
7) $y = \sin(x^2)$;
8) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$;
9) $y = \sin x + \operatorname{cosec} x$;
10) $y = x + \sin x$;
11) $y = 2^x + 2^{-x}$;
12) $y = \dfrac{\sin x}{x}$;
13) $y = \dfrac{\cos x}{x}$.

1606. Якія з дадзеных функцый з'яўляюцца цотнымі і якія няцотнымі:

1) $y = 10^{-x} - 10^x$;
2) $y = \sin(-x)$;
3) $y = \cos(-x)$;
4) $y = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$;
5) $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$;
6) $y = \operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$?

1607. Даказаць, што сума, рознасць, здабытак і дзель дзвюх цотных функцый з'яўляюцца цотнымі функцыямі.

1608. Даказаць, што здабытак і дзель дзвюх няцотных функцый уяўляюць сабой цотныя функцыі.

1609. Ці можа функцыя быць адначасова і цотнай і няцотнай?

1610*. Што вы можаце сказаць аб цотнасці функцыі $f(x)$, калі вядома, што функцыя $|f(x)|$: а) цотная; б) няцотная?

1611. Ці можа манатонная па ўсёй лікавай прамой функцыя быць: а) цотнай; б) няцотнай?

1612. Як дабудаваць графік цотнай функцыі $y = f(x)$, калі ён зададзен толькі пры $x > 0$?

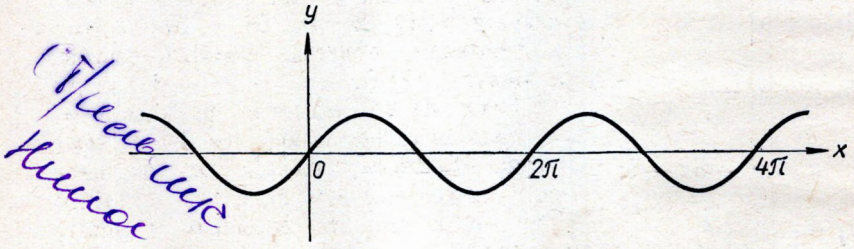
§ 207. Перыядычныя функцыі

Функцыя $y = f(x)$ называецца перыядычнай, калі існуе лік $T \neq 0$ такі, што пры ўсіх значэннях x з вобласці вызначэння гэтай функцыі

$$f(x + T) = f(x).$$

Лік T у гэтым выпадку называецца *перыядам* функцыі.

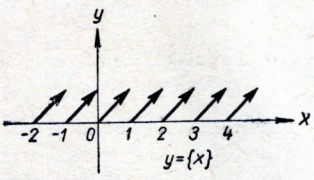
Перыядычнымі з'яўляюцца, напрыклад, трыганаметрычныя функцыі $y = \sin x$ і $y = \cos x$. Іх перыяд роўны 2π. Прыкладам перыядычнай нетрыганаметрычнай функцыі можа з'яўляцца функцыя $y = \{x\}$, якая кожнаму ліку x ставіць у адпаведнасць яго дробавую частку*. Напрыклад, $\{3{,}56\} = 0{,}56$; $\{2{,}01\} = 0{,}01$ і г. д. Калі да адвольнага ліку x прыкласці 1, то зменіцца толькі цэлая частка



Рыс. 282.

гэтага ліку; дробная ж частка застанецца ранейшай. Значыць, $\{x + 1\} = \{x\}$ і таму функцыя $y = \{x\}$ з'яўляецца перыядычнай з перыядам 1.

З роўнасці $f(x + T) = f(x)$ вынікае, што ўсе значэнні функцыі $y = f(x)$ паўтараюцца перыядычна з перыядам T. Гэта знаходзіць сваё адлюстраванне і ў графічным ізабражэнні перыядычных функцый. Так, напрыклад, у інтэрвале $[0{,}2\pi]$ сінусоіда мае тую ж самую форму, што і ў інтэрвалах $[2\pi, 4\pi]$, $[4\pi, 6\pi]$ і г. д. (рыс. 282). На рысунку 283 дадзен графік функцыі $y = \{x\}$. Перыядычнасць функцыі $y = \{x\}$ абумоўлівае тое, што графік яе ў інтэрвале $[0,1]$ мае тую ж форму, што і ў інтэрвалах $[1,2]$, $[2,3]$ і г. д.



Рыс. 283.

Калі T — перыяд функцыі $f(x)$, то $2T$, $3T$, $4T$ і г. д. таксама перыяды гэтай функцыі.

---

* Аб дробавай частцы ліку гл. у раздзеле VIII, § 187.

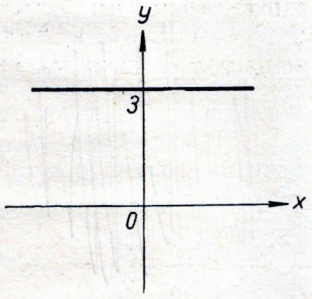
Сапраўды,

$$f(x+2T)=f[(x+T)+T]=f(x+T)=f(x),$$
$$f(x+3T)=f[(x+2T)+T]=f(x+2T)=f(x)$$

і г. д. Акрамя таго, перыядам функцыі $f(x)$ можна лічыць і любы з лікаў: $-T$, $-2T$, $-3T$ і г. д. На самай справе,

$$f(x-T)=f[(x-T)+T]=f(x),$$
$$f(x-2T)=f[(x-2T)+2T]=f(x)$$

і г. д. Такім чынам, калі лік T ёсць перыяд функцыі $f(x)$, то пры любым цэлым n лік nT таксама перыяд гэтай функцыі. Таму ***ўсякая перыядычная функцыя мае бясконцае мноства перыядаў.*** Напрыклад, перыядам функцыі $y=\sin x$ можна лічыць любы з лікаў: 2π, 4π, 6π, -2π, -4π, а перыядам функцыі $y=\{x\}$ — любы з лікаў: 1, 2, 3, —1, —2, —3 і г. д.



Рыс. 284.

Гаворачы аб перыядзе функцыі $y=f(x)$, звычайна маюць на ўвазе *найменшы дадатны* перыяд. Так, мы гаворым, што перыядам функцыі $y=\sin x$ з'яўляецца лік 2π, перыядам функцыі $y=\operatorname{tg} x$ — лік π, перыядам функцыі $\{x\}$ — лік 1 і г. д.

Трэба, аднак, мець на ўвазе, што найменшага дадатнага перыяду ў перыядычнай функцыі можа і не быць. Напрыклад, для функцыі $f(x)=3$ (рыс. 284) любы сапраўдны лік з'яўляецца перыядам. Але сярод дадатных сапраўдных лікаў не існуе найменшага. Таму і функцыя $f(x)=3$, маючы бясконцае мноства перыядаў, не мае найменшага дадатнага перыяду.

Практыкаванні

Для кожнай з дадзеных функцый (№ 1613—1621) знайсці найменшы дадатны перыяд:

1613. $y=\sin 2x$.

1614. $y=\cos\dfrac{x}{2}$.

1615. $y=\operatorname{tg} 3x$.

1616. $y=\cos(1-2x)$.

1617. $y=\sin x\cos x$.

1618. $y=\operatorname{ctg}\dfrac{x}{3}$

1619. $y=\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

1620. $y=\sin^2 x$.

1621. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

1622. Даказаць, што сума і здабытак дзвюх функцый, перыядычных з адным і тым жа перыядам T, з'яўляюцца функцыямі, перыядычнымі з перыядам T.

1623*. Дакажыце, што функцыя $y = \sin x + \{x\}$, якая з'яўляецца сумай дзвюх перыядычных функцый $y = \sin x$ і $y = \{x\}$, сама не з'яўляецца перыядычнай.

Ці не супярэчыць гэта рэзультату папярэдняй задачы?

1624. Як дабудаваць графік функцыі $y = f(x)$, перыядычнай з перыядам T, калі ён зададзен толькі ў інтэрвале $[0,T]$?

§ 208. Адваротныя функцыі

Кожнаму дапушчальнаму значэнню пераменнай велічыні x роўнасць $y = f(x)$ ставіць у адпаведнасць зусім пэўнае значэнне пераменнай велічыні y. Аднак у некаторых выпадках суадносіну $y = f(x)$ можна разглядаць і як такую роўнасць, якая кожнаму дапушчальнаму значэнню пераменнай велічыні y ставіць у адпаведнасць зусім пэўнае значэнне пераменнай велічыні x. Растлумачым гэта на канкрэтных прыкладах.

Прыклад 1. Роўнасць $y = 2x - 1$ кожнаму значэнню y ставіць у адпаведнасць наступнае значэнне x:

$$x = \frac{y+1}{2}.$$

Напрыклад, пры $y = 1$ $x = 1$; пры $y = 2$ $x = 1{,}5$; пры $y = 3$ $x = 2$ і г. д. Таму можна сказаць, што роўнасць $y = 2x - 1$ вызначае x як некаторую функцыю пераменнай велічыні y. У яўным выглядзе гэта функцыя запісваецца такім чынам: $x = \frac{y+1}{2}$.

Прыклад 2. Роўнасць $y = 2^x$ кожнаму дадатнаму значэнню y ставіць у адпаведнасць наступнае значэнне x:

$$x = \log_2 y.$$

Напрыклад, пры $y = 1$ $x = \log_2 1 = 0$; пры $y = 2$ $x = \log_2 2 = 1$; пры $y = 3$ $x = \log_2 3$ і г. д. Значыць, роўнасць $y = 2^x$ вызначае x як некаторую функцыю пераменнай велічыні y. У яўным выглядзе гэта функцыя запісваецца так:

$$x = \log_2 y.$$

Прыклад 3. Пры $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ роўнасць $y = \sin x$ кожнаму значэнню y, змешчанаму ў інтэрвале ад -1 да $+1$, ставіць у адпаведнасць лік x, роўны $\arcsin y$. Напрыклад, пры $y = -1$ $x = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$; пры $y = 0$ $x = \arcsin 0 = 0$; пры $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $x = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$ і г. д. Значыць, роўнасць $y = \sin x$ пры да-

датковай умове, што $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, вызначае x як некаторую функцыю пераменнай велічыні y. У яўным выглядзе гэту функцыю можна запісаць наступным чынам:

$$x = \arcsin y.$$

Наогул, няхай, зыходзячы з роўнасці $y = f(x)$, па кожнаму дапушчальнаму значэнню велічыні y можна вызначыць а д н о і т о л ь к і а д н о значэнне велічыні x. Тады гэта роўнасць вызначае x як некаторую функцыю ад y. Абазначым гэту функцыю літарай φ:

$$x = \varphi(y).$$

У гэтай формуле y выступае у ролі аргумента, а x — у ролі функцыі. Увайшло ў звычай літару x ужываць для абазначэння аргумента, а літару y — для абазначэння функцыі. Таму тую функцыянальную залежнасць, якая абазначана літарай φ, мы перапішам у выглядзе:

$$y = \varphi(x).$$

Так, вызначаная функцыя $y = \varphi(x)$ называецца адваротнай у адносінах да функцыі

$$y = f(x).$$

П р ы к л а д ы. 1) Зыходзячы з роўнасці $y = 2x - 1$, мы атрымалі $x = \frac{y+1}{2}$. Таму функцыя $y = \frac{x+1}{2}$ з'яўляецца адваротнай да функцыі $y = 2x - 1$.

2) Зыходзячы з роўнасці $y = 2^x$, мы атрымалі $x = \log_2 y$. Таму функцыя $y = \log_2 x$ з'яўляецца адваротнай да функцыі $y = 2^x$.

3) Зыходзячы з роўнасці $y = \sin x$ пры $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, мы атрымалі $x = \arcsin y$. Таму функцыя $y = \arcsin x$ з'яўляецца адваротнай да функцыі $y = \sin x$, якая разглядаецца на інтэрвале $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Адзначым, што вобласць вызначэння і вобласць змянення функцыі $y = f(x)$ і адваротнай ёй функцыі $y = \varphi(x)$ як бы мяняюцца ролямі. Тое, што для функцыі $y = f(x)$ было вобласцю вызначэння, для адваротнай функцыі $y = \varphi(x)$ становіцца вобласцю змянення, а тое, што для функцыі $y = f(x)$ было вобласцю змянення, для адваротнай функцыі $y = \varphi(x)$ становіцца вобласцю вызначэння. Так, напрыклад, для функцыі $y = 2^x$ вобласцю вызначэння з'яўляецца сукупнасць усіх сапраўдных лікаў, а вобласцю змянення — сукупнасць усіх дадатных лікаў. Для адваротнай ёй функцыі $y = \log_2 x$, наадварот, сукупнасць усіх дадатных лікаў з'яўляецца вобласцю вызначэння, а сукупнасць усіх сапраўдных лікаў — вобласцю змянення.

Ці для любой функцыі $y = f(x)$ існуе адваротная функцыя $y = \varphi(x)$? Каб адказаць на гэта пытанне, разгледзім два прыклады.

Прыклад 1. Кожнаму значэнню y па формуле $y = x^2$ адпавядаюць два значэнні x; напрыклад, значэнню $y = 1$ адпавядаюць значэнні $x = +1$ і $x = -1$; значэнню $y = 4$ адпавядаюць значэнні $x = 2$ і $x = -2$ і г. д. Таму калі функцыю $y = x^2$ разглядаць на ўсёй лікавай прамой (або пры ўсіх сапраўдных значэннях x), то яна не будзе мець адваротнай функцыі. Аднак, калі гэту функцыю разглядаць толькі пры дадатных значэннях x, то яна будзе валодаць адваротнай функцыяй. Па значэнню квадрата дадатнага ліку гэты лік вызначаецца адназначна. Адваротную функцыю ў дадзеным выпадку можна запісаць у выглядзе $y = \sqrt{x}$.

Прыклад 2. Кожнаму значэнню велічыні y, заключанаму ў інтэрвале ад -1 да 1, па формуле $y = \sin x$ адпавядае бясконцае мноства значэнняў x. Напрыклад, пры $y = 0$ такімі значэннямі x з'яўляюцца 0, π, 2π, 3π і г. д.; пры $y = 1$ $x = \frac{\pi}{2}$, $\frac{5}{2}\pi$, $\frac{9}{2}\pi$ і г. д. Таму калі функцыю $y = \sin x$ разглядаць на ўсёй лікавай прамой (або пры ўсіх сапраўдных значэннях x), то яна не будзе мець адваротнай функцыі. Калі ж гэту функцыю разглядаць толькі пры $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, то па значэннях y значэнні x вызначаюцца адназначна. Значыць, пры $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ функцыя $y = \sin x$ мае адваротную функцыю $y = \arcsin x$.

Няцяжка заўважыць тое агульнае, што рабілі мы ў абодвух прыкладах пры адшукванні функцый, адваротных дадзеным. Для кожнай з дадзеных функцый мы вылучалі інтэрвал, у якім яна з'яўляецца манатоннай. Можна даказаць агульнае сцверджанне:

калі функцыя $f(x)$ манатонна ўзрастае (або ўбывае) у інтэрвале $[a, b]$, то пры $a \leqslant x \leqslant b$ існуе адваротная да яе функцыя.

Практыкаванні

У практыкаваннях № 1625—1628 знайсці функцыі, адваротныя дадзеным. Указаць вобласці вызначэння і вобласці змянення дадзеных і адваротных да іх функцый:

1625. $y = x^3$. **1626.** $y = \log_{\frac{1}{3}} x$. **1627.** $y = \frac{1-x}{1+x}$.

1628. $y = x^2$ $(x < 0)$.

1629. Даказаць, што пры $a \neq 0$ функцыя, адваротная да лінейнай функцыі $y = ax + b$, ёсць функцыя лінейная.

1630. Даказаць, што функцыя, адваротная да дробава-лінейнай функцыі $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad - bc \neq 0)$, сама з'яўляецца дробава-лінейнай.

1631. Якой умове павінны задавальняць лікі a, b, c і d, каб дробава-лінейная функцыя $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ была тоесна роўна адваротнай да яе функцыі.

Прывядзіце некалькі прыкладаў.

1632. Ці існуе функцыя, адваротная да функцыі $y = \cos x$ у інтэрвале:

а) $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$; б) $0 \leqslant x \leqslant \pi$; в) $\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{3}{2}\pi$?

1633. Ці існуе функцыя, адваротная да функцыі $y = \operatorname{tg} x$ у інтэрвале:

а) $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$; б) $0 \leqslant x \leqslant \pi$; в) $\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{3}{2}\pi$?

1634. Ці існуе функцыя, адваротная да функцыі $y = \{x\}$ у інтэрвале:

а) $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}$; б) $0 \leqslant x \leqslant 1$; в) $0 \leqslant x \leqslant 1$;

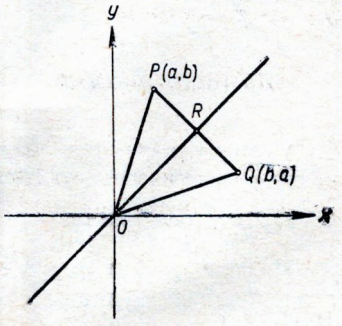
г) $\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{3}{2}$?

§ 209. Узаемнае размяшчэнне графікаў прамой і адваротнай функцыі

У гэтым параграфе мы разгледзім пытанне аб узаемным размяшчэнні графіка функцыі $y = f(x)$ і графіка адваротнай да яе функцыі $y = \varphi(x)$. Для гэтага нам патрэбна будзе наступная лема.

Лема. ***Пункты плоскасці з каардынатамі (a, b) і (b, a) сіметрычныя адзін другому адносна бісектрысы 1-га і 3-га каардынатных вуглоў.***

Доказ. Няхай пункт P мае каардынаты (a, b), а пункт Q — каардынаты (b, a) (рыс. 285). Даказаць, што гэтыя пункты сіметрычныя адзін другому адносна бісектрысы OR, — гэта значыць паказаць, што $PQ \perp OR$ і $PR = QR$.



Рыс. 285.

Паколькі пункт R ляжыць на прамой $y = x$ (бісектрысе 1-га і 3-га каардынатных вуглоў), то яе абсцыса і ардыната роўныя. Абазначым іх літарай c. Тады па формуле для адлегласці паміж двума пунктамі плоскасці атрымліваем:

$$PR = \sqrt{(c-a)^2 + (c-b)^2}, \qquad QR = \sqrt{(c-b)^2 + (c-a)^2},$$

адкуль і вынікае, што $PR = QR$. Значыць, OR — медыяна трохвугольніка OPQ. Далей, па той жа самай формуле

$$OP = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad OQ = \sqrt{b^2 + a^2}.$$

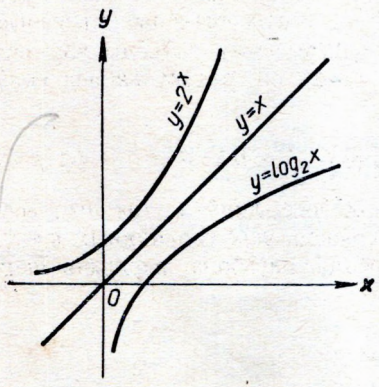
Таму $OP = OQ$. Значыць, трохвугольнік OPQ — раўнабедраны. Але ў такім выпадку яго медыяна OR з'яўляецца і вышынёй, гэта значыць

$$PQ \perp OR.$$

Лема даказана.

Няхай цяпер пункт P з каардынатамі (a, b) належыць графіку функцыі $y = f(x)$. Тады значэнню $y = b$ роўнасць $y = f(x)$ ставіць у адпаведнасць значэнне $x = a$. Але гэта азначае, што пункт Q з каардынатамі (b, a) павінен належаць графіку адваротнай функцыі $y = \varphi(x)$.

Такім чынам, калі пункт P з каардынатамі (a, b) належыць графіку функцыі $y = f(x)$, то пункт Q з каардынатамі (b, a) павінен належаць графіку адваротнай функцыі $y = \varphi(x)$. Гэтыя пункты сіметрычныя адносна бісектрысы 1-га і 3-га каардынатных вуглоў.



Рыс. 286.

Такім чынам, які б пункт P на графіку функцыі $y = f(x)$ мы ні ўзялі, на графіку адваротнай да яе функцыі $y = \varphi(x)$ абавязкова знойдзецца пункт Q, сіметрычны пункту P адносна бісектрысы 1-га і 3-га каардынатных вуглоў. Вось чаму ***графікі ўзаемна адваротных функцый сіметрычныя адзін другому адносна бісектрысы 1-га і 3-га каардынатных вуглоў*** (гл., напрыклад, рысунак 286, на якім паказаны графікі ўзаемна адваротных функцый $y = 2^x$ і $y = \log_2 x$).

Практыкаванні

На адным і тым жа чарцяжы пабудаваць графікі дадзенай і адваротнай ёй функцый (№ 1635—1641):

1635. $y = x^2 \ (x \geqslant 0)$. **1636.** $y = \frac{1}{3}x + 1$.

1637. $y = \begin{cases} x, & \text{калі } x < 0, \\ 2x, & \text{калі } x \geqslant 0. \end{cases}$

1638. $y = \sqrt{1 - x}$.

1639. $y = \begin{cases} 0{,}5x + 2, & \text{калі } x \geqslant 0, \\ 2x + 2, & \text{калі } x < 0. \end{cases}$

1640. $y = \begin{cases} x^2, & \text{калі } x > 0, \\ x^3, & \text{калі } x < 0. \end{cases}$

1641. $y = \sin x \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \right)$.

1642. Якія асаблівасці графіка функцыі $y = f(x)$, калі гэта функцыя тоесна роўна адваротнай да яе функцыі?

Адказ растлумачыць на прыкладах.

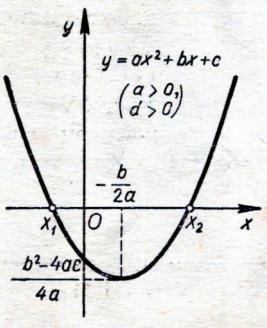
§ 210. Кароткі агляд уласцівасцей раней вывучаных функцый

У гэтым параграфе мы дадзім кароткі агляд уласцівасцей і графікаў раней вывучаных функцый. Пры гэтым мы будзем прытрымлівацца наступнага плана: 1) вобласць вызначэння функцыі; 2) вобласць змянення функцыі; 3) цотнасць функцыі; 4) перыядычнасць функцыі; 5) інтэрвалы знакапастаянства; 6) нулі функцыі, гэта значыць тыя значэнні аргумента, пры якіх функцыя ператвараецца ў нуль; 7) манатоннасць функцыі; 8) лакальныя экстрэмумы функцыі; 9) паводзіны функцыі паблізу «асобых» пунктаў (напрыклад, функцыі $y = \frac{1}{x}$ паблізу пункта $x = 0$).

Аднак парадак гэты не з'яўляецца абавязковым і ў некаторых выпадках для карысці справы можа быць смела зменены. Адзначым толькі, што ажыццяўленне кожнага пункта плана заўсёды карысна суправаджаць геаметрычнай інтэрпрэтацыяй на графіку даследуемай функцыі.

1. Квадратная функцыя $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

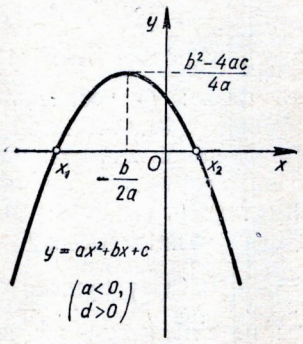
Гэта функцыя вызначана для ўсіх значэнняў x, так што вобласцю яе вызначэння з'яўляецца сукупнасць усіх сапраўдных лікаў. Графікам квадратнай функцыі з'яўляецца парабала, вяршыня якой



Рыс. 287.

мае каардынаты $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$. Пры $a>0$ парабала накіравана ўверх (рыс. 287), а пры $a<0$ — уніз (рыс. 288). Калі $a>0$, то вобласцю змянення дадзенай функцыі з'яўляецца сукупнасць усіх лікаў, большых або роўных $-\frac{b^2-4ac}{4a}$; калі ж $a<0$, то вобласцю змянення яе з'яўляецца мноства ўсіх лікаў, меншых або роўных $-\frac{b^2-4ac}{4a}$.

Пры $b\neq 0$ функцыя $y=ax^2+bx+c$ не будзе ні цотнай, ні



Рыс. 288.

няцотнай, паколькі ні адна з роўнасцей

$$ax^2-bx+c=ax^2+bx+c \quad [f(-x)=f(x)]$$

і

$$ax^2-bx+c=-(ax^2+bx+c) \quad [f(-x)=-f(x)]$$

не выконваецца тоесна. Пры $b=0$ квадратная функцыя прымае выгляд $y=ax^2+c$ і таму з'яўляецца цотнай функцыяй.

Дадзеная функцыя неперыядычная. Калі дыскрымінант

$$d=b^2-4ac$$

адмоўны, то функцыя не мае нулёў. У гэтым выпадку ўсе яе значэнні маюць адзін і той жа знак — знак каэфіцыента (гл. рыс. 289 для $a>0$ і рыс. 290 для $a<0$). Калі дыскрымінант d дадатны, то функцыя мае два нулі:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ і } x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

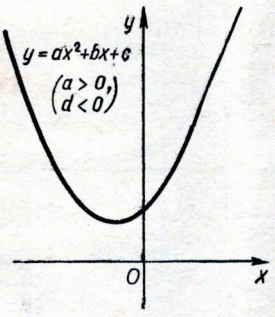
Калі да таго ж $a>0$, то функцыя дадатная пры $x<x_1$ і $x>x_2$, а адмоўная пры $x_1<x<x_2$ (гл. рыс. 287). У выпадку, калі $d>0$,

а $a < 0$, функцыя дадатная пры $x_1 < x < x_2$, а адмоўная пры $x < x_1$ і $x > x_2$ (гл. рыс. 288).

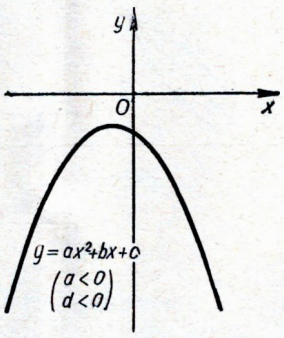
Нарэшце, магчымы і выпадак, калі $d = 0$. Тады квадратная функцыя мае адзіны нуль

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Пры ўсіх значэннях $x \neq -\frac{b}{2a}$ яна захоўвае адзін і той жа знак — знак каэфіцыента a.



Рыс. 289.



Рыс. 290.

У выпадку, калі $a > 0$, квадратная функцыя $y = ax^2 + bx + c$ манатонна ўбывае пры $x < -\frac{b}{2a}$ і манатонна ўзрастае пры $x > -\frac{b}{2a}$ (гл. рыс. 287 і рыс. 289). У выпадку, калі $a < 0$, яна, наадварот, манатонна ўзрастае пры $x < -\frac{b}{2a}$ і манатонна ўбывае пры $x > -\frac{b}{2a}$ (гл. рыс. 288 і рыс. 290).

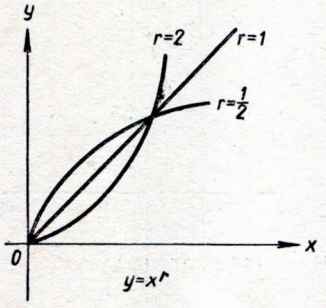
Дадзеная функцыя мае адзіны лакальны экстрэмум

$$y_{\text{экстр.}} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

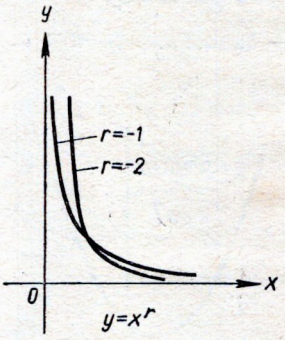
Гэты экстрэмум дасягаецца пры $x = -\frac{b}{2a}$ і з'яўляецца мінімумам пры $a > 0$ (рыс. 287 і рыс. 289) і максімумам пры $a < 0$ (рыс. 288 і рыс. 290).

2. Ступенная функцыя $y = x^r$

Вобласць вызначэння такой функцыі залежыць ад r. Напрыклад, пры $r = 1$ $(y = x)$ гэта будзе сукупнасць усіх сапраўдных лікаў, а пры $r = \frac{1}{2}$ $(y = \sqrt{x})$ — сукупнасць неадмоўных лікаў. Для дадатных значэнняў x функцыя $y = x^r$ вызначана заўсёды, незалежна ад таго, чаму роўны r.



Рыс. 291.



Рыс. 292.

Вобласць змянення функцыі $y = x^r$ таксама залежыць ад r. Напрыклад, функцыя $y = x$ $(r = 1)$ можа прымаць усе сапраўдныя значэнні, а функцыя $y = x^2$ $(r = 2)$ — толькі неадмоўныя значэнні.

Сярод ступенных функцый ёсць цотныя і няцотныя. Напрыклад, функцыі $y = x^2$, $y = x^4$ — цотныя, а функцыі $y = x^3$, $y = x^{-3}$ — няцотныя. Некаторыя ступенныя функцыі (напрыклад, $y = \sqrt{x}$) вызначаны толькі для дадатных значэнняў аргумента. Для іх ставіць пытанне аб цотнасці не мае сэнсу.

Ступенная функцыя $y = x^r$ перыядычная толькі пры $r = 0$, калі яна ператвараецца ў $y = 1$. Перыядам у гэтым выпадку з'яўляецца любы сапраўдны лік.

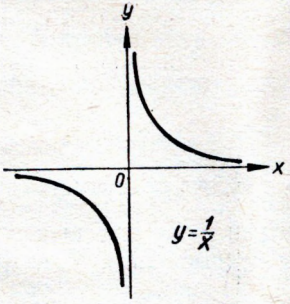
Пры $x > 0$ ступенная функцыя $y = x^r$ незалежна ад r дадатная.

Некаторыя ступенныя функцыі $\left(\text{напрыклад, } y = 1,\ y = \frac{1}{x},\ y = x^{-\frac{3}{2}}\right)$ не маюць нулёў, для іншых жа нулём з'яўляецца лік 0 (напрыклад, для функцый $y = \sqrt{x}$, $y = x^3$ і г. д.).

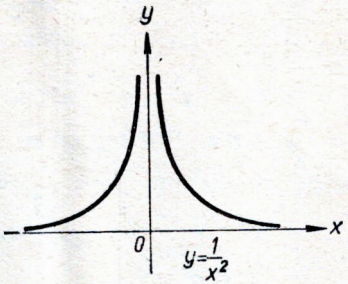
Калі лік r дадатны, то пры $x > 0$ ступенная функцыя $y = x^r$ манатонна ўзрастае (рыс. 291). Калі ж r — адмоўны, то пры $x > 0$ ступенная функцыя $y = x^r$ манатонна ўбывае (рыс. 292).

Некаторыя ступенныя функцыі, напрыклад $y = x^2$, $y = x^4$, маюць лакальны мінімум у пункце $x = 0$.

Адзначым яшчэ паводзіны функцый $y = \frac{1}{x}$ і $y = \frac{1}{x^2}$ паблізу пункта $x = 0$. Калі x імкнецца да нуля, застаючыся дадатным, функцыя $y = \frac{1}{x}$ неабмежавана ўзрастае. Калі ж x імкнецца да нуля, застаючыся адмоўным, яна неабмежавана ўбывае (рыс. 293).



Рыс. 293.



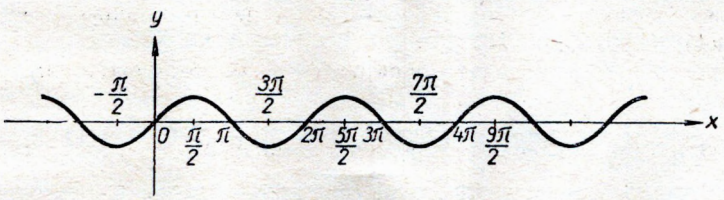
Рыс. 294.

Функцыя $y = \frac{1}{x^2}$ пры набліжэнні x да нуля (як злева, так і справа) неабмежавана ўзрастае (рыс. 294).

3. Трыганаметрычныя функцыі

З трыганаметрычных функцый мы разгледзім толькі дзве функцыі: $y = \sin x$ і $y = \operatorname{tg} x$.

Вобласцю вызначэння функцыі $y = \sin x$ з'яўляецца сукупнасць усіх сапраўдных лікаў, а вобласцю змянення — сукупнасць усіх лікаў, змешчаных у інтэрвале $[-1, 1]$. Функцыя з'яўляецца няцотнай і перыядычнай з перыядам 2π. У інтэрвалах $2n\pi < x < \pi + 2n\pi$ гэта функцыя дадатная, а ў інтэрвалах $\pi + 2n\pi < x < 2\pi + 2n\pi$ — адмоўная (рыс. 295). Пры $x = n\pi$ яна ператвараецца ў нуль. У інтэрвалах $-\frac{\pi}{2} + 2n\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ функцыя манатонна ўзрас-

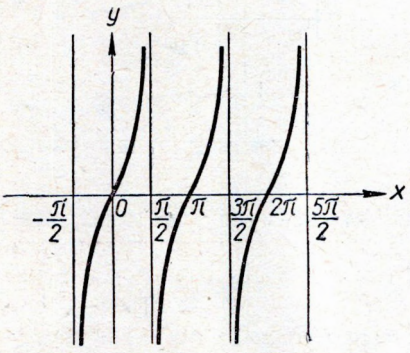


Рыс. 295.

тае, а ў інтэрвалах $\frac{\pi}{2}+2n\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2n\pi$ — манатонна ўбывае.

Пункты $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ з'яўляюцца пунктамі лакальнага максімуму функцыі $y = \sin x$. У іх яна прымае найбольшыя значэнні, роўныя 1. Пункты $x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ з'яўляюцца пунктамі лакальнага мінімуму. У іх функцыя прымае найменшыя значэнні, роўныя -1.

Функцыя $y = \operatorname{tg} x$ вызначана пры ўсіх значэннях x, акрамя $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$. Вобласцю яе змянення з'яўляецца сукупнасць усіх сапраўдных лікаў. Гэта функцыя няцотная і перыядычная з перыядам π (рыс. 296). У інтэрвалах $n\pi < x < \frac{\pi}{2} + n\pi$ яна дадатная, а ў інтэрвалах $-\frac{\pi}{2} + n\pi < x < n\pi$ — адмоўная. Пры $x = n\pi$ функцыя ператвараецца ў нуль. У кожным інтэрвале, які не змяшчае пунктаў $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, гэта функцыя манатонна ўзрастае. Лакальных экстрэмумаў функцыя не мае. Калі значэнні x неабмежавана набліжаюцца да $\frac{\pi}{2} + n\pi$, застаючыся меншымі $\frac{\pi}{2} + n\pi$, значэнні функцыі $y = \operatorname{tg} x$ неабмежавана ўзрастаюць. Калі ж значэнні x неабмежавана набліжаюцца да $\frac{\pi}{2} + n\pi$, застаючыся большымі за гэтыя значэнні, функцыя $y = \operatorname{tg} x$ неабмежавана ўбывае.



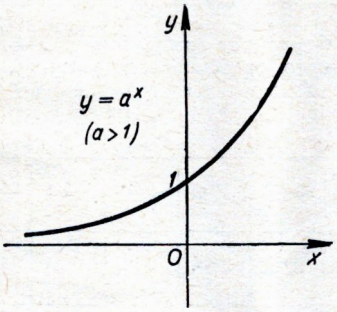
Рыс. 296.

4. Паказальная функцыя $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$

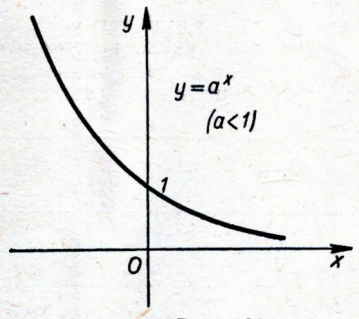
Вобласцю вызначэння гэтай функцыі з'яўляецца сукупнасць усіх сапраўдных лікаў, а вобласцю змянення — сукупнасць усіх дадатных лікаў. Функцыя не з'яўляецца ні цотнай, ні няцотнай. Не з'яўляецца яна і перыядычнай. Пры ўсіх значэннях аргумента x гэта функцыя дадатная. Пры $a > 1$ паказальная функцыя $y = a^x$ з'яўляецца манатонна ўзрастаючай (рыс. 297), а пры $a < 1$ — манатонна ўбываючай (рыс. 298). Пунктаў лакальных экстрэмумаў функцыя не мае.

5. Лагарыфмічная функцыя $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$

Вобласцю вызначэння гэтай функцыі з'яўляецца сукупнасць усіх дадатных лікаў, а вобласцю змянення — сукупнасць усіх сапраўдных лікаў. Аб цотнасці або няцотнасці гэтай функцыі гаварыць не мае сэнсу. Функцыя не з'яўляецца перыядычнай. Калі $a > 1$, то пры $x > 1$ функцыя дадатная, а пры $x < 1$ — адмоўная (рыс. 299). Калі ж $a < 1$, то, наадварот, пры $x > 1$ функцыя ад-

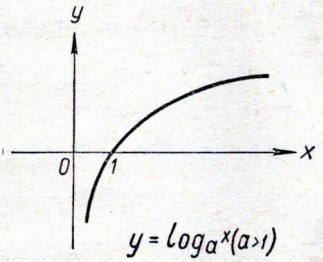


Рыс. 297.

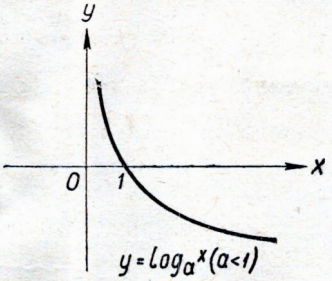


Рыс. 298.

моўная, а пры $x < 1$ — дадатная (рыс. 300). Адзіным нулём лагарыфмічнай функцыі з'яўляецца пункт $x = 1$. Пры $a > 1$ гэта функцыя з'яўляецца манатонна ўзрастаючай (рыс. 299), а пры $a < 1$ — манатонна ўбываючай (рыс. 300). Лакальных экстрэмумаў функцыя не мае. Калі $a > 1$, то пры набліжэнні x да нуля функцыя неабмежавана ўбывае; калі ж $a < 1$, то пры набліжэнні x да нуля функцыя неабмежавана ўзрастае.



Рыс. 299.



Рыс. 300.

Практыкаванні

Па плану, апісанаму ў дадзеным параграфе, даследаваць функцыі (№ 1643—1652):

1643. $y = \sin^2 x$.

1644. $y = \sin 2x$.

1645. $y = -|\cos x|$.

1646. $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

1647. $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

1648. $y = x^2 - 4x + 5$.

1649. $y = x^2 + x - 7$.

1650. $y = 1 + x - 2x^2$.

1651. $y = x\sqrt{x}$.

1652. $y = \frac{1+x}{1-x}$.

§ 211. Прэдзел функцыі

Перш чым даць агульнае азначэнне прэдзелу функцыі, разгледзім некалькі прыкладаў.

Прыклад 1. Няхай $f(x) = x^2$. Калі аргумент x прабягае рад значэнняў, якія сыходзяцца да ліку 2, то функцыя $f(x)$ будзе прабягаць рад значэнняў, якія сыходзяцца да ліку 4. Гэта можна заўважыць, разглядаючы табліцу набліжаных значэнняў функцыі $|x^2 - 4|$.

x	1,96	1,97	1,98	1,99	2,00	2,01	2,02
x^2 (набліжана)	3,84	3,88	3,92	3,96	4,00	4,04	4,08
$\lvert x^2 - 4\rvert$ (набліжана)	0,16	0,12	0,08	0,04	0	0,04	0,08

Чым бліжэй значэнне аргумента x да 2, тым меншая абсалютная велічыня рознасці $x^2 - 4$.

У гэтым можна пераканацца і строга матэматычна, не звяртаючыся да таблічнай ілюстрацыі. Дакажам, што, які б малы дадатны лік ε мы ні ўзялі, заўсёды можна ўказаць такі інтэрвал, які змяшчае ўнутры сябе пункт $x = 2$, што для ўсіх пунктаў гэтага інтэрвалу будзе выконвацца няроўнасць $|x^2 - 4| < \varepsilon$.

Сапраўды, няроўнасць $|x^2 - 4| < \varepsilon$ эквівалентна двайной няроўнасці

$$-\varepsilon < x^2 - 4 < \varepsilon,$$

адкуль атрымліваем:

$$4 - \varepsilon < x^2 < 4 + \varepsilon,$$

$$\sqrt{4-\varepsilon} < x < \sqrt{4+\varepsilon}.$$

(Мы ўлічваем толькі дадатныя значэнні x, паколькі паводзіны функцыі $y = x^2$ нас цікавяць зараз толькі паблізу пункта $x = 2$.)

Такім чынам, няроўнасць $|x^2 - 4| < \varepsilon$ выконваецца ў інтэрвале $\sqrt{4-\varepsilon} < x < \sqrt{4+\varepsilon}$, які змяшчае ўнутры сябе пункт $x = 2$.

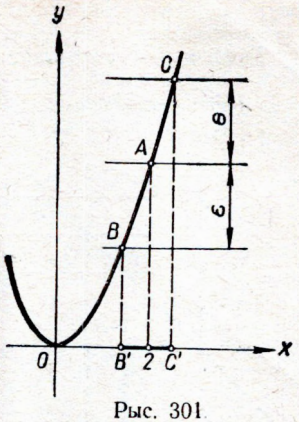
Напрыклад, няроўнасць $|x^2 - 4| < 0{,}1$ ($\varepsilon = 0{,}1$) выконваецца ў інтэрвале $\sqrt{3{,}9} < x < \sqrt{4{,}1}$, або $1{,}98 < x < 2{,}02$; няроўнасць $|x^2 - 4| < 0{,}01$ ($\varepsilon = 0{,}01$) выконваецца ў інтэрвале $\sqrt{3{,}99} < x < \sqrt{4{,}01}$, або $1{,}998 < x < 2{,}002$.

Інтэрвал $(\sqrt{4-\varepsilon},\ \sqrt{4+\varepsilon})$ можна было б пабудаваць і графічна. Няхай A ёсць пункт графіка функцыі $y = x^2$ з абсцысай $x = 2$ (рыс. 301). Па абодва бакі ад гэтага пункта правядзём гарызантальныя прамыя, якія знаходзяцца ад A на адлегласці ε. Гэтыя прамыя перасякаюць правую частку парабалы $y = x^2$ у пунктах B і C. Апускаючы з іх перпендыкуляры на вось абсцыс, атрымаем адрэзак $B'C'$. Гэты адрэзак і ўяўляе сабой інтэрвал $(\sqrt{4-\varepsilon},\ \sqrt{4+\varepsilon})$, які раней мы атрымалі алгебраічна.

Такім чынам, калі значэнні аргумента x выбіраць дастаткова блізкімі да 2, то значэнні функцыі $y = x^2$ будуць як заўгодна мала адрознівацца ад 4. Можна, напрыклад, дабіцца, каб выконваліся няроўнасці:

$$|x^2 - 4| < 0{,}001;$$

$$|x^2 - 4| < 0{,}0001 \text{ і г. д.}$$



Рыс. 301

Лік 4 у такім выпадку натуральна назваць прэдзелам функцыі $y = x^2$ пры x, які імкнецца а 2.

Прыклад 2. Разгледзім табліцу значэнняў функцыі $y = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ паблізу пункта $x = 3$.

x	2,94	2,96	2,98	3	3,02	3,04	3,06
$y = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$	5,94	5,96	5,98	функцыя не вызначана	6,02	6,04	6,06

Для $x = 3$ наша функцыя не вызначана: лічнік і назоўнік дробу ператвараюцца ў нуль. Калі ж значэнні x выбіраць дастаткова блізкімі да 3 (але не роўнымі 3), то адпаведныя значэнні y будуць як заўгодна блізкія да 6.

Не абмяжоўваючыся таблічнай ілюстрацыяй, дакажам гэты факт строга матэматычна, а іменна: пакажам, што для любога дадатнага ліку ε, якім бы малым ён ні быў, можна ўказаць такі інтэрвал, які змяшчае пункт $x = 3$, што ўсюды ўнутры яго, за выключэннем самога пункта $x = 3$, будзе выконвацца няроўнасць

$$|y - 6| < \varepsilon. \qquad (1)$$

Сапраўды, калі $x \neq 3$, то

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = x + 3.$$

Таму няроўнасць (1) зводзіцца да такой няроўнасці:

$$|x + 3 - 6| < \varepsilon,$$

або

$$|x - 3| < \varepsilon.$$

Апошняя няроўнасць эквівалентна двайной няроўнасці:

$$-\varepsilon < x - 3 < \varepsilon,$$

адкуль атрымліваем:

$$3 - \varepsilon < x < 3 + \varepsilon.$$

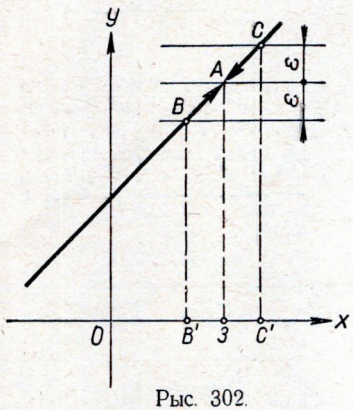
Такім чынам, няроўнасць (1) выконваецца для ўсіх значэнняў x, змешчаных у інтэрвале ад $3 - \varepsilon$ да $3 + \varepsilon$, акрамя значэння $x = 3$.

Калі, напрыклад, мы хочам, каб значэнне y адрознівалася ад 6 менш чым на $\varepsilon = 0{,}01$, то павінны разглядаць значэнні x у інтэрвале ад $3 - 0{,}01$ да $3 + 0{,}01$, гэта значыць у інтэрвале (2,99; 3,01). Аналагічна пры $\varepsilon = 0{,}001$ мы атрымалі б інтэрвал $(3 - 0{,}001; 3 + 0{,}001)$, або (2,999; 3,001) і г. д.

Інтэрвал $3 - \varepsilon < x < 3 + \varepsilon$ можна было б пабудаваць і геаметрычна. Гэта пабудаванне зусім аналагічна таму, якое мы рабілі пры разглядзе прыкладу 1.

Таму мы абмяжуемся толькі тым, што прывядзём адпаведны рысунак (рыс. 302), прапаноўваючы вучням самастойна ў ім разабрацца.

Такім чынам, калі значэнні аргумента x выбіраць дастаткова блізкімі да 3, але не роўнымі 3, то значэнні функцыі $f(x)$ будуць як заўгодна мала адрознівацца ад 6. Можна, напрыклад, дабіцца, каб рознасць $|y-6|$ была менш 0,1; 0,01; 0,001 і г. д. Нягледзячы на тое што разглядаемая функцыя не вызначана пры $x=3$, натуральна лічыць, што прэдзел яе пры $x \to 3$ існуе і роўны 6.



Рыс. 302.

Разгледзеўшы прыклады, мы прыходзім да наступнага азначэння прэдзелу функцыі.

Лік b называецца прэдзелам функцыі $f(x)$ пры x, які імкнецца да a, калі для любога дадатнага ліку ε можна ўказаць такі інтэрвал, які змяшчае пункт $x=a$, што ўсюды ўнутры яго, за выключэннем, быць можа, самога пункта $x=a$, будзе выконвацца няроўнасць

$$|f(x)-b|<\varepsilon.$$

Той факт, што прэдзел функцыі $f(x)$ пры x, які імкнецца да a, роўны b, запісваецца такім чынам:

$$\lim_{x\to a} f(x)=b$$

(чытаецца: прэдзел $f(x)$ пры x, які імкнецца да a, роўны b).

Напрыклад,

$$\lim_{x\to 2} x^2=4; \quad \lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6.$$

Практыкаванні

Зыходзячы з азначэння прэдзелу, даказаць наступныя суадносіны (№ 1653—1658):

1653. $\lim\limits_{x\to 0}(3x+5)=5.$

1654. $\lim\limits_{x\to 8}\sqrt[3]{x}=2.$

1655. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{x^2-0{,}25}{x-0{,}5}=1.$

1656. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=2.$

1657. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-x-6}{x+2}=-5.$

1658*. $\lim\limits_{x\to 0}10^x=1.$

1659. Чаму пры знаходжанні прэдзелаў некаторых дробаў (гл., напрыклад, практыкаванні 1655—1657) магчыма скарачэнне гэтых дробаў? Той жа выраз, на які мы скарачаем, можа ператварыцца ў нуль!

§ 212. Асноўныя тэарэмы аб прэдзелах функцый

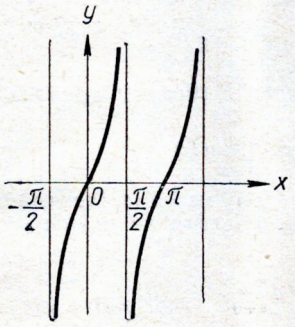
Перш за ўсё заўважым, што не для ўсякай функцыі $y=f(x)$ існуе прэдзел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. Так, напрыклад, пры $x\to\dfrac{\pi}{2}$ значэнні функцыі $y=\operatorname{tg}x$ (рыс. 303) або неабмежавана растуць $\left(\text{пры } x<\dfrac{\pi}{2}\right)$, або неабмежавана ўбываюць

$\left(\text{пры } x > \frac{\pi}{2}\right)$. Таму нельга ўказаць ніякага ліку b, да якога імкнуліся б значэнні функцыі.

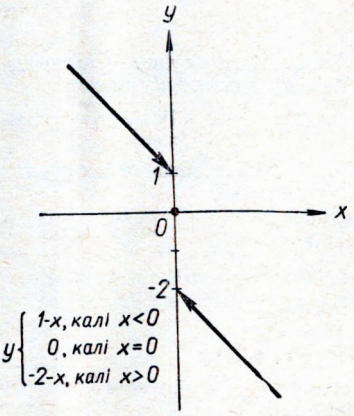
Другі прыклад. Няхай

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{калі } x < 0, \\ 0, & \text{калі } x = 0, \\ -2 - x, & \text{калі } x > 0. \end{cases}$$

Графік гэтай функцыі дадзен на рысунку 304. Калі значэнні аргумента x набліжаюцца да 0, застаючыся адмоўнымі, адпаведныя значэнні функцыі імкнуцца да 1. Калі значэнні аргумента x набліжаюцца да 0, застаючыся дадатнымі, адпаведныя значэнні функцыі імкнуцца да -2. У самім жа пункце $x = 0$ функцыя ператвараецца ў 0. Відавочна, што ўказаць адзін які-небудзь лік, да якога імкнуліся б усе значэнні y пры набліжэнні x да 0, нельга. Таму дадзеная функцыя не мае прэдзелу пры $x \to 0$.



Рыс. 303.



Рыс. 304.

Гаворачы ў далейшым аб прэдзеле функцыі, мы заўсёды будзем дапускаць, што гэты прэдзел існуе.

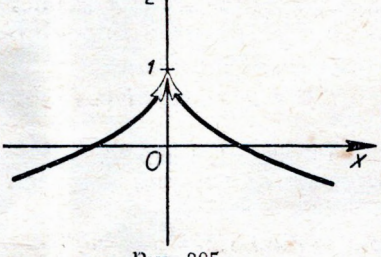
Дапушчэнне аб існаванні прэдзелу $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ яшчэ не азначае, што гэты прэдзел супадае са значэннем функцыі $f(x)$ у пункце $x = a$. Для прыкладу разгледзім функцыю, графік якой дадзен на рысунку 305. Відавочна, што прэдзел $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ існуе і роўны 1. Але ў самым пункце $x = 0$ функцыя прымае значэнне, роўнае 2. Таму ў дадзеным выпадку

$$\lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0).$$

Калі функцыя $y = f(x)$ задавальняе ўмове

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

то яна называецца *неперарыўнай у пункце* $x = a$. Калі ж дадзеная ўмова не выконваецца, то функцыя $f(x)$ называецца *разрыўнай у пункце* $x = a$.



Рыс. 305.

Усе элементарныя функцыі (напрыклад, $y = x^n$, $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x$ і г. д.) неперарыўныя ў кожным пункце, у якім яны вызначаны.

Функцыя $y = f(x)$ называецца *неперарыўнай у інтэрвале* $[a, b]$, калі яна неперарыўная ў кожным пункце гэтага інтэрвалу. Напрыклад, функцыя $y = \operatorname{tg} x$ неперарыўная ў інтэрвале $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, функцыі $y = \sin x$ і $y = \cos x$ — неперарыўныя ў любым інтэрвале і г. д.

Прывядзём без доказу асноўныя тэарэмы аб прэдзелах функцый. Гэтыя тэарэмы зусім аналагічныя тым, якія мы разглядалі (таксама без доказу) раней пры вывучэнні прэдзелаў лікавых паслядоўнасцей.

1. Прэдзел канстанты роўны самой гэтай канстанце:

$$\lim_{x \to a} c = c.$$

2. Пастаянны множнік можна выносіць за знак прэдзелу:

$$\lim_{x \to a} [kf(x)] = k \lim_{x \to a} f(x).$$

3. Прэдзел сумы (рознасці) функцый роўны суме (рознасці) прэдзелаў гэтых функцый:

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x).$$

4. Прэдзел здабытку функцый роўны здабытку прэдзелаў гэтых функцый:

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x).$$

5. Прэдзел адносіны дзвюх функцый роўны адносіне прэдзелаў гэтых функцый, калі толькі прэдзел дзельніка не роўны нулю:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}, \quad (\lim_{x \to 0} g(x) \neq 0).$$

Разгледзім некалькі тыповых прыкладаў знаходжання прэдзелаў функцый.

Прыклад 1. Знайсці

$$\lim_{x \to 5} \frac{7x - 5}{10 + 2x}.$$

Па ўласцівасці прэдзелаў

$$\lim_{x \to 5} \frac{7x - 5}{10 + 2x} = \frac{\lim\limits_{x \to 5} (7x - 5)}{\lim\limits_{x \to 5} (10 + 2x)} = \frac{\lim\limits_{x \to 5} 7x - \lim\limits_{x \to 5} 5}{\lim\limits_{x \to 5} 10 + \lim\limits_{x \to 5} 2x} =$$

$$= \frac{7 \lim\limits_{x \to 5} x - 5}{10 + 2 \lim\limits_{x \to 5} x} = \frac{7 \cdot 5 - 5}{10 + 2 \cdot 5} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}.$$

Прыклад 2. Знайсці

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6}.$$

Пры $x \to 3$ лічнік і назоўнік дадзенага дробу імкнуцца да нуля. Таму непасрэднае прымяненне тэарэмы аб прэдзеле дзелі тут немагчыма. Аднак дадзены дроб можна скараціць:

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6} = \frac{(x - 3)(x + 1)}{(x - 3)(x - 2)} = \frac{x + 1}{x - 2}.$$

Пасля гэтага прэдзел можа быць лёгка знойдзен:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 3}\frac{x+1}{x-2}=\frac{3+1}{3-2}=4.$$

Прыклад 3. Знайсці

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}.$$

Гэты прэдзел лёгка знаходзіцца, калі папярэдне дадзены дроб скараціць на $\sqrt{x}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\frac{0+1}{0-1}=-1.$$

Звярніце ўвагу на наступную важную асаблівасць, характэрную для разгледжанага прыкладу. Калі мы гаворым аб прэдзеле $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, то звычайна дапускаем, што функцыя $f(x)$ вызначана в а ў с і х пунктах, дастаткова блізкіх да пункта $x=a$. Аднак функцыя $\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$ вызначана толькі для д а д а т н ы х значэнняў x. Таму, разглядаючы прэдзел гэтай функцыі, мы фактычна дапускаем, што $x\to 0$, застаючыся ўвесь час дадатным. У падобных выпадках гавораць не проста аб прэдзеле, а аб *аднастаронніх* прэдзеле. З аналагічнымі прыкладамі мы яшчэ сустрэнемся пры выкананні практыкаванняў да гэтага параграфа.

Прыклад 4. Знайсці

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-1}.$$

Лічнік і назоўнік гэтага дробу пры $x=0$ ператвараюцца ў 0. Таму непасрэднае выкарыстанне тэарэмы аб прэдзеле дзелі тут немагчыма. Акрамя таго, дадзены дроб нельга скараціць, як мы рабілі гэта ў прыкладах 2 і 3. У дадзеным выпадку лічнік і назоўнік дробу трэба памножыць на выраз $\sqrt{1+x}+1$, супрэжаны назоўніку дробу. У рэзультаце атрымаем:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x}-1}=\frac{x(\sqrt{1+x}+1)}{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}=\frac{x(\sqrt{1+x}+1)}{1+x-1}=\sqrt{1+x}+1.$$

Пасля гэтага дадзены прэдзел знаходзіцца лёгка:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x}+1)=1+1=2.$$

Дапускаючы, што

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{1+x}=1,$$

мы тым самым выкарыстоўваем уласцівасць неперарыўнасці функцыі $y=\sqrt{1+x}$:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{1+x}=\sqrt{1+0}=1.$$

Прыклад 5. Знайсці

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}.$$

Пры $x\to 4$ лічнік і назоўнік дадзенага дробу імкнуцца да 0. Таму прымяніць тэарэму аб прэдзеле дробу нельга. Пераўтворым дроб, прадставіўшы назоўнік у выглядзе здабытку:

$$\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}=\frac{1}{\sqrt{x}+2}.$$

Цяпер атрымліваем:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}.$$

Практыкаванні

Знайсці прэдзелы (№ 1660—1675):

1660. $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2+3x-5)$.

1661. $\lim\limits_{x\to 5}(3x-x^2)$.

1662. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

1663. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$.

1664. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+5x-2}{5x^2+12x+4}$.

1665. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2-6x-7}$.

1666. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2+x}{1-\sqrt{x+3}}$.

1667. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{x}$.

1668. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{1+\sqrt{x}}$.

1669. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$.

1670. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{x}-3x}{3\sqrt{x}-2x}$.

1671. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+4}-2}$.

1672. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{2x+10}-4}$.

1673. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$.

1674. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x+1}-1}$.

1675. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[3]{a}}{x}$.

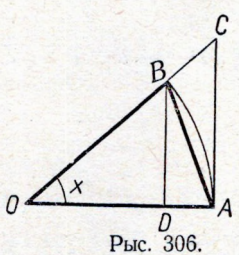
§ 213. Некаторыя трыганаметрычныя няроўнасці і іх выкарыстанне пры знаходжанні прэдзелаў

У гэтым параграфе мы дакажам некаторыя трыганаметрычныя няроўнасці, якія будуць адыгрываць важную ролю ў далейшым вывучэнні функцый.

1. Для любога вострага вугла x

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x. \qquad (1)$$

Доказ. Няхай на рысунку 306 $OA=OB=1$, $\angle AOB=x$ радыянам, BD і AC перпендыкулярны да OA. Відавочна, што плошча трохвугольніка OAB меншая за плошчу кругавога сектара OAB, а плошча кругавога сектара OAB у сваю чаргу меншая за плошчу трохвугольніка OAC. Але



Рыс. 306.

$$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}BD\cdot OA=\frac{1}{2}BD;$$

$$S_{\text{сект. }OAB}=\frac{\pi\cdot OA^2}{2\pi}\cdot x=\frac{x}{2};$$

$$S_{\triangle OAC}=\frac{1}{2}OA\cdot AC=\frac{1}{2}AC.$$

Улічваючы, што $BD=\sin x$, $AC=\operatorname{tg} x$, атрымліваем:

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{x}{2}<\frac{1}{2}\operatorname{tg} x,$$

адкуль і вынікае няроўнасць (1).

Рысунак 307 служыць графічнай ілюстрацыяй няроўнасці (1). У інтэрвале $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ графік функцыі $y=x$ размешчан вышэй графіка функцыі $y=\sin x$, але ніжэй графіка функцыі $y=\operatorname{tg} x$.

Спынімся больш падрабязна на няроўнасці $\sin x < x$. Мы даказалі яе ў дапушчэнні, што $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Але пры такім дапушчэнні x і $\sin x$ дадатныя. Таму $x = |x|$, $\sin x = |\sin x|$ і няроўнасць $\sin x < x$ можна перапісаць у выглядзе:

$$|\sin x| < |x|. \tag{2}$$

Гэта няроўнасць правільная і для адмоўных значэнняў x, змешчаных у інтэрвале $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, паколькі

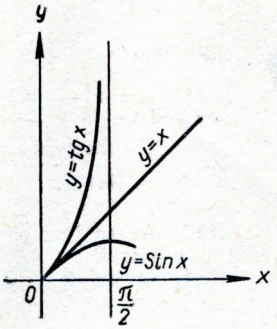
$$|\sin(-x)| = |-\sin x| = |\sin x|,$$
$$|-x| = |x|.$$

Перапішам няроўнасць (2) у выглядзе:

$$|\sin x - 0| < |x|.$$

Калі x імкнецца да 0, то $|\sin x - 0|$, будучы меншым за $|x|$, тым больш будзе імкнуцца да нуля. У прыватнасці, $|\sin x - 0|$ можа стаць менш 0,1; 0,01; 0,001 і г. д. Наогул, які б малы дадатны лік ε мы ні ўзялі, заўсёды можна дабіцца, каб выконвалася няроўнасць $|\sin x - 0| < \varepsilon$. Для гэтага трэба x выбіраць у інтэрвале $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Але гэта азначае, што

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0.$$



Рыс. 307.

Прэдзел сінуса x пры x → 0 роўны 0.

Паколькі $0 = \sin 0$, то атрыманы рэзультат па сутнасці азначае, што функцыя $y = \sin x$ неперарыўная ў нулі (г. зн. пры $x = 0$).

2. Для любога вострага вугла x

$$1 - \cos x < x. \tag{3}$$

Сапраўды, $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$. Але $0 < \sin \frac{x}{2} < 1$. Таму $\sin^2 \frac{x}{2} < \sin \frac{x}{2}$. Па даказанаму вышэй $\sin \frac{x}{2} < \frac{x}{2}$.

Такім чынам:

$$1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} < 2\sin \frac{x}{2} < 2 \cdot \frac{x}{2} = x,$$

што і даказвае формулу (3).

Калі вугал x востры, то x і $1 - \cos x$ дадатныя. Таму $x = |x|$, $1 - \cos x = |1 - \cos x|$. Значыць, няроўнасць (3) можна перапісаць у выглядзе:

$$|1 - \cos x| < |x|. \tag{4}$$

Гэта няроўнасць, відавочна, правільная і пры $x < 0$, паколькі

$$|1 - \cos(-x)| = |1 - \cos x|; \quad |-x| = |x|.$$

З (4) вынікае, што

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1.$$

Прэдзел косінуса x пры x → 0 роўны 1.

Паколькі $1 = \cos 0$, то атрыманы рэзультат па сутнасці азначае, што функцыя $y = \cos x$ неперарыўная ў нулі.

Адсюль, выкарыстоўваючы даказаную вышэй неперарыўнасць у нулі функцыі $y = \sin x$, лёгка паказаць, што функцыі $y = \sin x$ і $y = \cos x$ неперарыўныя ў л ю б ы м пункце x. Паспрабуйце гэта зрабіць самі!

Практыкаванні

Знайсці прэдзелы (№ 1676—1681):

1676. $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{tg} x$.

1677. $\lim\limits_{x \to 0} \cos \frac{x}{2}$.

1678. $\lim\limits_{x \to 0} \sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right)$.

1679. $\lim\limits_{x \to 0} \sin 2x$.

1680. $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} + 2x \right)$.

1681. $\lim\limits_{x \to 0} \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right)$.

1682. Даказаць тоеснасці:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \sin (x + \alpha) = \sin \alpha$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \cos (x + \alpha) = \cos \alpha$.

1683. Ці для ўсіх дадатных значэнняў x правільныя няроўнасці: а) $\sin x < x$; б) $x < \operatorname{tg} x$?

1684. Дакажыце, што адзіным коранем ураўнення $\sin x = 0$ з'яўляецца $x = 0$.

§ 214. Прэдзел адносіны $\frac{\sin x}{x}$ пры $x \to 0$

Дакажам, што

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (1)$$

Няхай x імкнецца да нуля, застаючыся ўвесь час дадатным. Тады можна лічыць, што $0 < x < \frac{\pi}{2}$, і таму, як было паказана ў § 213,

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x,$$

прычым усе выразы, якія ўваходзяць у гэту няроўнасць, дадатныя.

Разгледзім тры дробы:

$$\frac{\sin x}{\sin x}, \quad \frac{\sin x}{x} \text{ і } \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}.$$

Пры аднолькавых лічніках меншы той дроб, назоўнік якога большы. Таму

$$\frac{\sin x}{\sin x} > \frac{\sin x}{x} > \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x},$$

або

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Памножым гэту няроўнасць пачленна на -1. Знакі няроўнасці пры гэтым зменяцца на процілеглыя:

$$-1 < -\frac{\sin x}{x} < -\cos x.$$

Дадаўшы да кожнай часткі гэтай няроўнасці 1, атрымаем:

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x.$$

Але $1 - \cos x < x$ (гл. § 213). Таму

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < x.$$

Паколькі $x > 0$ і $1 - \frac{\sin x}{x} > 0$, то велічыні $1 - \frac{\sin x}{x}$ і x у апошняй няроўнасці можна замяніць іх абсалютнымі значэннямі. У рэзультаце атрымаем:

$$\left| 1 - \frac{\sin x}{x} \right| < |x|,$$

што магчыма, безумоўна, запісаць і ў такім выглядзе:

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < |x|. \qquad (2)$$

Няроўнасць (2) мы атрымалі пры дапушчэнні, што $x > 0$. Аднак яна правільная і пры $x < 0$, паколькі функцыя $\frac{\sin x}{x}$ цотная, і, значыць,

$$\left| \frac{\sin(-x)}{(-x)} - 1 \right| = \left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right|.$$

Калі x імкнецца да нуля, то, як бачна з (2), $\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right|$, будучы меншым за $|x|$, тым больш будзе імкнуцца да нуля. Якім бы малым ні быў дадатны лік ε, заўсёды можна дабіцца, каб выконвалася няроўнасць

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Для гэтага x трэба выбіраць у інтэрвале $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Але гэта і азначае, што

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Вынік. Паколькі пры малых значэннях x $\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right|$ малое, то можна напісаць набліжаную роўнасць $\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| \approx 0$.

Адсюль $\frac{\sin x}{x} \approx 1$ і, значыць, $\sin x \approx x$.

Такім чынам, ***пры малых значэннях*** x,

$$\sin x \approx x.$$

Гэта яшчэ раз пацвярджае справядлівасць вываду, да якога мы прыйшлі ў § 113 раздзела V пры разглядзе графіка функцыі $y = \sin x$ пры малых значэннях x.

Прыклады:

$$\sin(0{,}01) \approx 0{,}01;$$
$$\sin(0{,}04) \approx 0{,}04;$$
$$\sin(0{,}07) \approx 0{,}07;$$
$$\sin(-0{,}03) \approx -0{,}03.$$

Параўнайце гэтыя значэнні з тымі, якія дадзены ў таблiцах У. М. Брадзіса!.

§ 215. Прыклады вылічэння прэдзелаў

У гэтым параграфе мы вылічым некалькі прэдзелаў, выкарыстоўваючы суадносіну

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Прыклад 1. Знайсці $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

Памножыўшы лічнік і назоўнік дадзенага дробу на 3, атрымаем:

$$\frac{\sin 3x}{x}=\frac{3\sin 3x}{3x}.$$

Абазначым $3x$ праз y. З умовы $x\to 0$, відавочна, вынікае, што і $y\to 0$. Таму

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}=\lim_{y\to 0}\frac{3\sin y}{y}=3\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=3\cdot 1=3.$$

Прыклад 2. Знайсці

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{nx}\qquad (n\neq 0).$$

Памнажаючы лічнік і назоўнік дадзенага дробу на m і ўводзячы новую пераменную $y=mx$, атрымліваем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{nx}=\lim_{x\to 0}\frac{m\sin mx}{n(mx)}=\lim_{y\to 0}\frac{m\sin y}{ny}=$$

$$=\frac{m}{n}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=\frac{m}{n}\cdot 1=\frac{m}{n}.$$

Прыклад 3. Знайсці

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Выкарыстоўваючы тоеснасць $1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}$ (гл. § 155), атрымліваем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}.$$

Увядзём новую пераменную $y=\dfrac{x}{2}$. Тады $x=2y$ і

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{y\to 0}\frac{2\sin^2 y}{(2y)^2}=\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sin^2 y}{y^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

Такім чынам,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

Адсюль, у прыватнасці, вынікае, што пры малых значэннях x

$$\frac{1-\cos x}{x^2}\approx\frac{1}{2},$$

або

$$1 - \cos x \approx \frac{1}{2} x^2,$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2} x^2.$$

Напрыклад,

$$\cos (0{,}04) \approx 1 - \frac{1}{2} \cdot 0{,}0016 \approx 0{,}9992,$$

$$\cos (-0{,}08) \approx 1 - \frac{1}{2} \cdot 0{,}0064 \approx 0{,}9968.$$

Параўнайце гэтыя значэнні з таблічнымі!

Практыкаванні

Знайсці прэдзелы:

1685. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x}{2x}$.

1686. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{6x}$.

1687. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x}{\sin \frac{x}{3}}$.

1688. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{3}}$.

1689. $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{4x + \pi}$.

1690. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$.

1691. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} ax}{bx}$.

1692. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 6x - \cos 4x}{x^2}$.

1693. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin 4x}{x}$.

1694. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sqrt{x + \sin x} - \sqrt{x}}{\sin x}$.

1695. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x - \sin 12x}{10x}$.

1696. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x + \sin 7x}{\frac{x}{4}}$.

1697. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{5 + \sin x} - \sqrt{5 - \sin x}}{x}$.

1698 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + \cos x} - \sqrt{2}}{x^2}$.

1699. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 10x - \cos x}{4x^2}$.

1700. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 11x - 6x}{5x}$.

1701. $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{5}} \dfrac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{5} + x\right)}{(5x + \pi)^2}$.

1702. $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{\sin^2 x - \sin^2 \alpha}{x^2 - \alpha^2}$.

§ 216. З гісторыі развіцця паняццяў функцыі і прэдзелу

Да XVII стагоддзя матэматыка была навукай аб пастаянных велічынях. Увядзенне пераменных велічынь звязана з імем французскага вучонага Дэкарта. Яго працы атрымалі высокую ацэнку Ф. Энгельса, які гаварыў: «Паваротным пунктам у матэматыцы была дэкартава *пераменная велічыня*. Дзякуючы гэтаму ў матэматыку ўвайшлі *рух* і *дыялектыка*».

Тэрмін «функцыя» з'явіўся ў адной з работ нямецкага вучонага Лейбніца (1646—1716).

Паняцце функцыі вучоныя XVII і XVIII стагоддзяў уводзілі па-рознаму. Адны вызначалі функцыю як нейкі «аналітычны выраз», другія звязвалі паняцце функцыі з «адвольна начэрчанай крывой». Ідэю адпаведнасці, як адзіную аснову паняцця функцыі, падкрэсліў у сваім азначэнні выдатны нямецкі матэматык Дырыхле (1805—1859). y ёсць функцыя ад x, гаварыў ён, калі ўсякаму значэнню x адпавядае зусім пэўнае значэнне y, прычым зусім няважна, якім іменна спосабам устаноўлена дадзеная адпаведнасць. Яшчэ да Дырыхле ідэю адпаведнасці выказаў заснавальнік неэўклідавай геаметрыі Мікалай Іванавіч Лабачэўскі (1792—1856). Аднак доўгі час гэта заставалася незаўважаным у матэматыцы.

Звычнае для нас абазначэнне функцыі $y = f(x)$ належыць Эйлеру.

Азначэнне прэдзелу ўпершыню з'явілася ў XVII стагоддзі. Зародкі тэорыі прэдзелаў можна знайсці, напрыклад, у працах англійскага фізіка і матэматыка Ісака Ньютана (1642—1727). Аднак матэматыкі XVII і XVIII стагоддзяў не ставілі сваёй задачай пабудаваць стройную тэорыю прэдзелаў. Гэта задача была пастаўлена і рэшана толькі ў XIX стагоддзі. Вялікая заслуга ў гэтым належыць вядомаму французскаму матэматыку Кашы (1789—1857). Ён развіў тэорыю прэдзелаў і паклаў яе ў аснову пабудавання аднаго з найважнейшых раздзелаў матэматыкі — матэматычнага аналізу.

Задачы на паўтарэнне

Знайсці вобласці вызначэння функцый (№ 1703—1706):

1703. $y = \sqrt{\dfrac{x+3}{2x-4}} - 1$.

1704. $y = \lg \dfrac{x(2-x)}{x^2 - 2x - 15}$.

1705. $y = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}$.

1706. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$.

Знайсці вобласці змянення функцый (№ 1707—1709):

1707. $y = (-1)^x$. **1708** $y = 5 \sin x - 10 \cos x + 1$. **1709.** $y = 10^{\cos x}$.

1710. Функцыі $f(x)$ і $g(x)$ — манатонна ўзрастаючыя на ўсёй лікавай прамой. Ці будзе іх здабытак манатонна ўзрастаючай функцыяй? Адказ растлумачыць прыкладамі.

1711. Даказаць, што калі функцыя $f(x)$ перыядычная з перыядам mT, а функцыя $g(x)$ перыядычная з перыядам nT, дзе m і n — натуральныя лікі, то функцыі $f(x) + g(x)$ і $f(x) \cdot g(x)$ перыядычныя з перыядам mnT.

1712. Даказаць, што функцыі $y = a^x$ і $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) не з'яўляюцца перыядычнымі.

Якое абагульненне гэтага рэзультату вы маглі б прапанаваць?

1713. Выкарыстоўваючы тоеснасць (падумайце, як яна атрымліваецца!)

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

даказаць, што любую вызначаную на ўсёй лікавай прамой функцыю можна даць у выглядзе сумы цотнай і няцотнай функцый.

1714*. Даказаць, што любую функцыю $f(x)$, вызначаную на ўсёй лікавай прамой, можна адзіным спосабам прадставіць у выглядзе сумы цотнай функцыі $\varphi(x)$ і няцотнай функцыі $g(x)$:

$$f(x) = \varphi(x) + g(x).$$

1715. Прадставіць функцыю $y = 2^x$ у выглядзе сумы цотнай і няцотнай функцый.

Даследаваць функцыі (№ 1716—1721):

1716. $y = \sqrt{3} \sin x + \cos x$. **1719.** $y = \sqrt{1 - \cos x}$.

1717. $y = |x^2 - 2x - 3|$.

1718. $y = \dfrac{2x-1}{x}$.

1720. $y = 6x^2 + x + 1$.

1721. $y = \{x\}$.

Знайсці прэдзелы (№ 1722—1737):

1722. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+3x+2}{x^2-2x+3}$.

1723. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{2-x}}{2x}$.

1724. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{x}$.

1725. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$.

1726. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x}$.

1727. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 9x + \sin 11x}{5x}$.

1728. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3}$.

1729. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$.

1730. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx}$.

1731. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} ax}{\operatorname{tg} bx}$.

1732. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x}{\sin 3x}$.

1733. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} ax + \operatorname{tg} bx}{(a+b)x}$.

1734. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\operatorname{tg} x}$.

1735. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$.

1736. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{\sin x}-\sqrt{\sin a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$.

1737*. $y = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sqrt{\sin x}}{\sqrt{1+\cos x}-1}$.

1738. Даказаць, што пры любых натуральных ліках m і n тоеснасць

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \frac{m}{n}.$$

Раздзел X

ВЫТВОРНАЯ І ЯЕ ПРЫМЯНЕННЕ ДА ДАСЛЕДАВАННЯ ФУНКЦЫЙ

§ 217. Раўнамерны і пераменны рух па прамой. Скорасць і сярэдняя скорасць руху

З усіх рухаў цел найпрасцейшым з'яўляецца раўнамерны рух па прамой. Гэта такі рух, калі цела, не змяняючы напрамку, за любыя роўныя прамежкі часу праходзіць шляхі аднолькавай даўжыні. Раўнамерна і прамалінейна рухаюцца на некаторых участках паязды, аўтамабілі, параходы, самалёты і г. д.

Шлях, які праходзіць цела пры раўнамерным руху па прамой у адзінку часу, называецца скорасцю гэтага руху.

На практыцы мы часта маем справу з нераўнамерным рухам. Поезд, які адыходзіць ад станцыі, спачатку толькі «набірае скорасць». За другую мінуту свайго руху ён праходзіць шлях, большы, чым за першую, за трэцюю мінуту — шлях, большы, чым за другую, і г. д. Набраўшы пэўную скорасць, ён ідзе раўнамерна, праходзячы за кожную мінуту шляхі аднолькавай даўжыні. Пры набліжэнні да месца прызначэння поезд пачынае зніжаць скорасць, праходзячы за кожную мінуту шлях, меншы, чым за папярэднюю мінуту. Тое ж самае можна сказаць аб аўтамабілі, параходзе і г. д.

У розныя, але роўныя па велічыні інтэрвалы часу цела, якое знаходзіцца ў нераўнамерным руху, можа праходзіць шляхі рознай даўжыні. Таму нераўнамерны рух (у адрозненне ад раўнамернага) нельга цалкам ахарактарызаваць даўжынёй шляху, пройдзенага ў якую-небудзь адзінку часу.

Часта нераўнамерны рух характарызуецца *сярэдняй скорасцю* за пэўны прамежак часу.

Сярэдняй скорасцю руху за час t называецца адносіна даўжыні s шляху, пройдзенага целам за час t, да гэтага часу:

$$v_{\text{сярэдн.}} = \frac{s}{t}.$$

Для раўнамернага руху сярэдняя скорасць на любым участку шляху супадае са скорасцю руху. Сярэдняй скорасцю звычайна характарызуецца рух паяздоў. Напрыклад, экспрэс Масква — Ленінград (адлегласць 650 *км*) знаходзіцца ў дарозе 6 гадзін, і таму мы гаворым, што яго сярэдняя скорасць роўна:

$$v_{\text{сярэдн.}} = \frac{650}{6} \approx 108 \left(\frac{км}{гадз} \right).$$

Аднак гэта не азначае, што за кожную гадзіну экспрэс праходзіць 108 *км*. Напрыклад, за першую гадзіну руху, калі поезд «набірае скорасць», ён прахо-

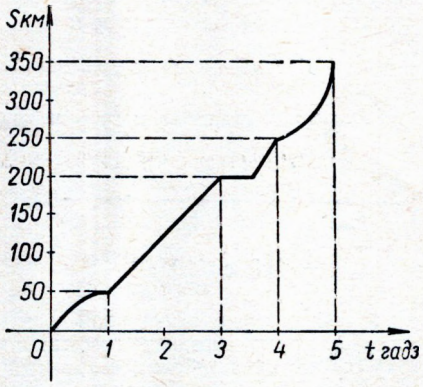
дзіць усяго толькі 80—90 *км*. У наступны час пройдзены шлях складае прыкладна 130 *км*. У Балагом экспрэс робіць прыпынак, і таму ў тую гадзіну, на якую прыпадае гэты прыпынак, экспрэс праходзіць шлях яшчэ меншы, чым 80 — 90 *км*.

З гэтага прыкладу відаць, што сярэдняя скорасць не можа з'яўляцца поўнай характарыстыкай нераўнамернага руху.

Практыкаванні

1739. На рысунку 308 дадзен графік руху поезда. На якіх участках поезд ішоў раўнамерна і на якіх нераўнамерна? Калі ён рабіў прыпынак і на колькі мінут? Знайсці сярэднюю скорасць поезда за першыя 4 гадзіны.

З якой сярэдняй скорасцю ішоў поезд на працягу чацвёртай гадзіны руху?



Рыс. 308.

1740. У інтэрвале часу $(0,\ t_1)$ поезд ішоў са скорасцю $v_1\ \frac{км}{гадз}$, у інтэрвале часу $(t_1,\ t_2)$ — са скорасцю $v_2\ \frac{км}{гадз}$, у інтэрвале часу $(t_2,\ t_3)$ — са скорасцю $v_3\ \frac{км}{гадз}$ і г. д., нарэшце, у інтэрвале часу $(t_{n-1},\ t_n)$ — са скорасцю $v_n\ \frac{км}{гадз}$. Чаму роўна сярэдняя скорасць руху поезда ў інтэрвале часу $(0,\ t_n)$?

§ 218. Закон руху. Імгненная скорасць руху

Да больш поўнай характарыстыкі руху можна прыйсці наступным чынам. Час руху цела разаб'ём на некалькі асобных прамежкаў $(t_1,\ t_2)$, $(t_2,\ t_3)$ і г. д. (не абавязкова роўных, гл. рыс. 309) і на кожным з іх зададзім сярэднюю скорасць руху. Гэтыя сярэднія скорасці, безумоўна, будуць больш поўна характарызаваць рух на ўсім участку, чым сярэдняя скорасць за ўвесь час руху. Аднак яны не дадуць адказу на такое, напрыклад, пытанне: у які момант часу ў інтэрвале ад t_1 да t_2 (рыс. 309) поезд ішоў хутчэй: у момант t_1' або ў момант t_2'?

Сярэдняя скорасць тым паўней характарызуе рух, чым карацей участкі шляху, на якіх яна вызначана. Таму адзін з магчымых спосабаў апісання нераўнамернага руху складаецца ў задаванні сярэдніх скорасцей гэтага руху на ўсё больш і больш малых участках шляху.

Дапусцім, што зададзена функцыя $s(t)$, якая паказвае шлях, што праходзіць цела, рухаючыся прамалінейна ў адным і тым жа напрамку, за час t ад пачатку руху. Гэта функцыя вызначае *закон руху цела*. Напрыклад, раўнамерны рух адбываецца па закону

$$s(t) = v\,t,$$

дзе v — скорасць руху; свабоднае падзенне цел адбываецца па закону

$$s(t) = \frac{gt^2}{2},$$

дзе g — паскарэнне свабодна падаючага цела, і г. д.

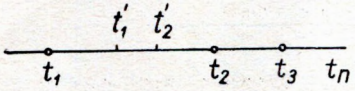
Разгледзім шлях, пройдзены целам, якое рухаецца па некатораму закону $s(t)$, за час ад t да $t+\tau$. К моманту часу t цела пройдзе шлях $s(t)$, а к моманту часу $t+\tau$ — шлях $s(t+\tau)$. Таму за час ад t да $t+\tau$ яно пройдзе шлях, роўны $s(t+\tau)-s(t)$. Падзяліўшы гэты шлях на час руху τ, мы атрымаем сярэднюю скорасць руху за час ад t да $t+\tau$:

$$v_{\text{сярэдн.}}=\frac{s(t+\tau)-s(t)}{\tau}.$$

Прэдзел гэтай скорасці пры $\tau\to 0$ (калі толькі ён існуе) называецца *імгненнай скорасцю руху ў момант часу t*:

$$v(t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{s(t+\tau)-s(t)}{\tau}. \qquad (1)$$

Імгненнай скорасцю руху ў момант часу t называецца прэдзел сярэдняй скорасці руху за час ад t да $t+\tau$, калі τ імкнецца да нуля.



Рыс. 309.

Разгледзім два прыклады.

Прыклад 1. Раўнамерны рух па прамой.

У гэтым выпадку $s(t)=vt$, дзе v — скорасць руху. Знойдзем імгненную скорасць гэтага руху. Для гэтага папярэдне трэба знайсці сярэднюю скорасць у інтэрвале часу ад t да $t+\tau$. Але для раўнамернага руху сярэдняя скорасць на любым участку супадае са скорасцю руху v. Таму імгненная скорасць $v(t)$ будзе роўна:

$$v(t)=\lim_{\tau\to 0} v=v.$$

Значыць, для раўнамернага руху імгненная скорасць (як і сярэдняя скорасць на любым участку шляху) супадае са скорасцю руху.

Да такога ж выніку, безумоўна, можна было б прыйсці і фармальна, зыходзячы з роўнасці (1).

Сапраўды,

$$v(t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{s(t+\tau)-s(t)}{\tau}=\lim_{\tau\to 0}\frac{v(t+\tau)-vt}{\tau}=$$

$$=\lim_{\tau\to 0}\frac{v\tau}{\tau}=\lim_{\tau\to 0} v=v.$$

Прыклад 2. Роўнапаскораны рух з нулявой пачатковай скорасцю і паскарэннем a. У гэтым выпадку, як вядома з фізікі, цела рухаецца па закону

$$s(t)=\frac{at^2}{2}.$$

Па формуле (1) атрымліваем, што імгненная скорасць такога руху $v(t)$ роўна:

$$v(t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{s(t+\tau)-s(t)}{\tau}=\lim_{\tau\to 0}\frac{\frac{a(t+\tau)^2-at^2}{2}}{\tau}=$$

$$=\lim_{\tau\to 0}\frac{at^2+2at\tau+a\tau^2-at^2}{2\tau}=\lim_{\tau\to 0}\frac{2at\tau+a\tau^2}{2\tau}=$$

$$=\lim_{\tau\to 0}\left(at+\frac{a}{2}\tau\right)=\lim_{\tau\to 0} at+\lim_{\tau\to 0}\frac{a}{2}\tau.$$

Паколькі at не залежыць ад τ,

$$\lim_{\tau\to 0} at=at.$$

Акрамя таго,

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{a}{2} \tau = \frac{a}{2} \lim_{\tau \to 0} \tau = \frac{a}{2} \cdot 0 = 0.$$

Таму

$$v(t) = at + 0 = at.$$

Такім чынам, імгненная скорасць роўнапаскоранага руху ў момант часу t роўна здабытку паскарэння на час t. У адрозненне ад раўнамернага руху імгненная скорасць раўнамерна паскоранага руху мяняецца з цягам часу.

Практыкаванні

1741. Пункт рухаецца па закону $s(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2}$ (s — шлях у метрах, t — час у мінутах). Знайсці імгненную скорасць гэтага пункта:

а) у пачатковы момант руху;

б) у момант часу t_0.

1742. Знайсці імгненную скорасць пункта, які рухаецца па закону $s(t) = t^3$ (s — шлях у метрах, t — час у мінутах):

а) у пачатковы момант руху;

б) праз 10 секунд пасля пачатку руху;

в) у момант $t = 5$ *мін*.

1743. Знайсці імгненную скорасць цела, якое рухаецца па закону $s(t) = \sqrt{t}$, у адвольны момант часу t.

§ 219. Вытворная функцыі

На працягу ўсяго школьнага курса алгебры і элементарных функцый мы пашыралі матэматычныя паняцці, паглыблялі іх, даводзячы да больш агульных, больш складаных паняццяў. Тое ж самае нам трэба зрабіць і ў гэтым параграфе.

Што ўяўляе сабой імгненная скорасць руху, вызначаная ў § 218?

Ёсць некаторая функцыя $s(t)$, якая паказвае шлях, пройдзены целам за час ад 0 да t. Аргументу t даецца некаторае *прырашчэнне* τ, гэта значыць замест значэння t разглядаецца $t + \tau$. Гэтаму прырашчэнню аргумента адпавядае наступнае *прырашчэнне функцыі* $s(t)$:

$$s(t + \tau) - s(t).$$

Гэта прырашчэнне функцыі дзеліцца на прырашчэнне аргумента τ

$$\frac{s(t + \tau) - s(t)}{\tau} \tag{1}$$

і бярэцца прэдзел пры $\tau \to 0$. Выраз

$$\frac{s(t + \tau) - s(t)}{\tau}$$

можна разглядаць як «сярэднюю скорасць» змянення функцыі $s(t)$ у інтэрвале ад t да $t + \tau$, а прэдзел гэтай адносіны пры $\tau \to 0$ — як імгненную скорасць змянення гэтай функцыі ў момант часу t.

У прыведзеных вышэй разважаннях функцыя $s(t)$ уяўляе сабой шлях, пройдзены целам за час ад 0 да t. Гэта абставіна накладвала на функцыю $s(t)$ пэўныя абмежаванні. У прыватнасці, яна павінна была быць вызначана толькі для неадмоўных значэнняў аргумента t (бо t — час), прымаць толькі неадмоўныя значэнні (s — даўжыня шляху) і быць манатонна ўзрастаючай (чым большы час, тым большы пройдзены шлях). Цяпер жа мы абагулім нашы вынікі на адвольныя функцыі, наогул кажучы, ніяк не звязаныя з рухам цел.

Няхай $f(x)$ — адвольная функцыя. Пры фіксіраваным значэнні x_0 аргумента x гэта функцыя прымае значэнне, роўнае $f(x_0)$. Дадзім значэнню x_0 *прырашчэнне* Δx_0*, гэта значыць замест значэння x_0 разгледзім значэнне $x_0 + \Delta x_0$. Тады функцыя $f(x)$ прыме значэнне $f(x_0 + \Delta x_0)$ і, такім чынам, атрымае прырашчэнне Δy_0**.

$$\Delta y_0 = f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0).$$

Адносіна

$$\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0}$$

уяўляе сабой *сярэднюю скорасць* змянення функцыі $f(x)$ у інтэрвале ад x_0 да $x_0 + \Delta x_0$. Гэта сярэдняя скорасць залежыць, відавочна, як ад x_0, так і ад Δx_0. Імкнучы цяпер Δx_0 да нуля, мы атрымаем *імгненную скорасць* змянення функцыі $f(x)$ у пункце $x = x_0$:

$$\lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0}$$

(калі, безумоўна, дадзены прэдзел існуе). Для зададзенай функцыі $f(x)$ гэты прэдзел залежыць ад x_0 і называецца *вытворнай ад функцыі $f(x)$ у пункце $x = x_0$*. Кожнаму значэнню x_0 адпавядае сваё значэнне імгненнай скорасці змянення функцыі $f(x)$. Таму прэдзел (калі толькі ён існуе)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

які ўяўляе сабой імгненную скорасць змянення функцыі $f(x)$ у адвольным пункце x, можна разглядаць як новую функцыю аргумента x. Гэта новая функцыя называецца *вытворнай ад зададзенай функцыі $f(x)$*.

Часта ў выразе «вытворная ад функцыі $f(x)$» слова «ад» апускаюць і гавораць проста «вытворная функцыі $f(x)$».

У матэматыцы выкарыстоўваецца некалькі абазначэнняў для вытворнай. Мы будзем карыстацца наступнымі абазначэннямі: y' і $f'(x)$:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Разгледзім некалькі прыкладаў.

Прыклад 1. Знайсці вытворную функцыі $f(x) = c$, дзе c — некаторая канстанта.

Маем: $f(x) = c$, $f(x + \Delta x) = c$.

Таму $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0$ і, значыць, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$. Такім чынам,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0.$$

Вытворная канстанты роўна 0.

Прыклад 2. Знайсці вытворную функцыі $f(x) = x$.

Маем:

$$f(x) = x, \; f(x + \Delta x) = x + \Delta x.$$

Таму

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x) - x = \Delta x.$$

---

* Выраз Δx_0 чытаецца: дэльта ікс нуль. Гэта адзіны, непадзельны выраз. Яго не трэба блытаць са здабыткам $\Delta \cdot x_0$.

** Δy_0 таксама непадзельны выраз. Яго не трэба блытаць са здабыткам $\Delta \cdot y_0$.

Значыць,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Адсюль вынікае, што

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1.$$

Вытворная функцыі $f(x) = x$ роўна 1.

Прыклад 3. Знайсці вытворную функцыі $f(x) = x^2$.

Маем:

$$f(x) = x^2, \quad f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2.$$

Таму

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 =$$
$$= [x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2] - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

Значыць,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Значыць,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x) = 2x + 0 = 2x.$$

Вытворная функцыі $f(x) = x^2$ роўна $2x$.

У адрозненне ад першых двух прыкладаў тут вытворная залежыць ад x.

Значэнне вытворнай ад функцыі $f(x)$ пры $x = a$ абазначаюць $f'(a)$. Напрыклад, калі $f(x) = x^2$, то $f'(x) = 2x$ і таму

$$f'(0) = 2 \cdot 0 = 0,$$
$$f'(1) = 2 \cdot 1 = 2.$$

Практыкаванні

1744. Знайсці вытворныя наступных функцый:

а) $y = x + 1$; д) $y = 1 - x^2$;

б) $y = 2x^2$; г) $y = 2\sqrt{x}$;

в) $y = (x + 1)^2$; е) $y = x^3$.

1745. Пры награванні цела тэмпература яго T змяняецца з цягам часу t па закону $T = 0{,}4t^2$ (T — тэмпература ў градусах, t — час у секундах). Знайсці:

а) сярэднюю скорасць змянення тэмпературы цела за прамежак часу ад $t_1 = 4$ *сек* да $t_2 = 8$ *сек*;

б) імгненную скорасць змянення тэмпературы цела ў момант $t = 5$ *сек*.

1746. Ток I ампер змяняецца з цягам часу t па закону $I = 0{,}5t^2$, дзе t — лік секунд. Знайсці скорасць змянення току ў канцы пятай секунды.

§ 220. Дыферэнцыруемыя функцыі

Вытворная функцыі $y = f(x)$ у пункце x вызначаецца як прэдзел

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Але прэдзелы існуюць не заўсёды. Зусім гэтак жа не заўсёды існуюць і вытворныя. У якасці прыкладу разгледзім наступную функцыю:

$$f(x) = |x|.$$

Пакажам, што вытворная $f'(0)$ ад гэтай функцыі пры $x = 0$ не вызначана. Сапраўды, па азначэнню вытворнай

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}. \quad (1)$$

Калі Δx імкнецца да нуля, застаючыся дадатным, то $|\Delta x| = \Delta x$ і тады

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x > 0)}} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1.$$

Калі ж Δx імкнецца да нуля, застаючыся адмоўным, то $|\Delta x| = -\Delta x$ і тады

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x < 0)}} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1.$$

Калі б прэдзел у формуле (1) існаваў, то ён не залежаў бы ад таго, як Δx імкнецца да нуля. На самай справе гэта не так. Але адсюль можна зрабіць толькі той вывад, што прэдзел у (1) не існуе.

Такім чынам, для функцыі $f(x) = |x|$ вытворная ў пункце $x = 0$ не вызначана. Лёгка паказаць, што ва ўсіх астатніх пунктах вытворная функцыі $f(x) = |x|$ існуе і роўна

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{калі } x > 0; \\ -1, & \text{калі } x < 0. \end{cases}$$

Прапануем вучням самастойна пераканацца ў гэтым.

Аперацыя знаходжання вытворнай ад дадзенай функцыі называецца *дыферэнцыраваннем* гэтай функцыі. Функцыя, якая мае вытворную ў пункце $x = a$, называецца *дыферэнцыруемай* у гэтым пункце. Калі функцыя дыферэнцыруема ў кожным пункце некаторага інтэрвалу, то гавораць, што яна дыферэнцыруема ў гэтым інтэрвале. Напрыклад, функцыя $y = |x|$ дыферэнцыруема ў кожным інтэрвале, які не змяшчае пункта $x = 0$; функцыя $y = x$ дыферэнцыруема ўсюды.

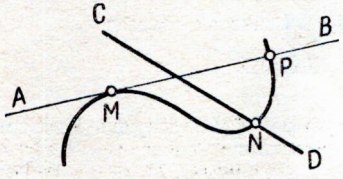
Можна даказаць, што функцыя, разрыўная ў пункце $x = a$ (гл. раздзел IX, § 212), не з'яўляецца дыферэнцыруемай у гэтым пункце. Такім чынам, ***дыферэнцыруемымі могуць быць толькі неперарыўныя функцыі.*** Аднак не трэба думаць, што любая неперарыўная ў пункце $x = a$ функцыя з'яўляецца дыферэнцыруемай у гэтым пункце. Напрыклад, функцыя $y = |x|$ неперарыўная ў пункце $x = 0$, але, як паказана вышэй, не дыферэнцыруема ў гэтым пункце. Існуюць і больш пераканаўчыя прыклады: функцыя можа быць усюды неперарыўная, але нідзе не дыферэнцыруема. Аднак разгляд такіх функцый выходзіць далёка за межы нашай праграмы.

Практыкаванне

1747. Ці з'яўляюцца функцыі $f(x) = |x|^2$ і $f(x) = |x|^3$ дыферэнцыруемымі ў пункце $x = 0$?

§ 221. Датычная да крывой

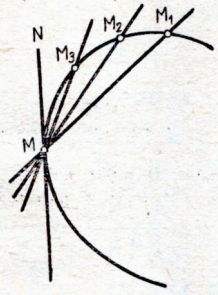
Да гэтага часу мы мелі справу толькі з датычнай да акружнасці. Датычнай да акружнасці ў зададзеным пункце M мы называлі прамую, што мае з акружнасцю адзін і толькі адзін агульны пункт — пункт M. Такое азначэнне прымяніма не для ўсякай крывой. Напрыклад, натуральна лічыць, што прамая AB датыкаецца да крывой MNP у пункце M (рыс. 310), хаця мае з гэтай крывой не адзін, а два агульныя пункты M і P. Прамая CD, наадварот, мае толькі адзін агульны пункт з крывой MNP — пункт N. Аднак лічыць яе датычнай да крывой MNP у пункце N было б зусім ненатуральна.



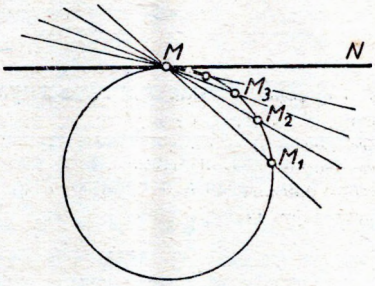
Рыс. 310.

Каб вызначыць датычную да адвольнай крывой у пункце M (рыс. 311), возьмем на гэтай крывой яшчэ адзін пункт M_1 і правядзём сякучую MM_1. Калі пункт M_1 перамяшчаць па дадзенай крывой, неабмежавана набліжаючы яго да пункта M, то сякучая будзе ўвесь час паварочвацца вакол пункта M, займаючы паслядоўна становішчы MM_1, MM_2, MM_3 і г. д. Гранічнае становішча сякучай MN і дае нам датычную да крывой у пункце M.

Датычнай да крывой у пункце M называецца гранічнае становішча сякучай MM_1, калі пункт M_1, рухаючыся па крывой, неабмежавана набліжаецца да пункта M.



Рыс. 311.

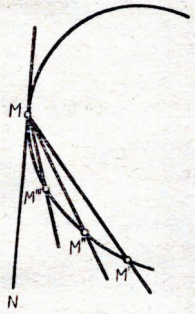


Рыс. 312.

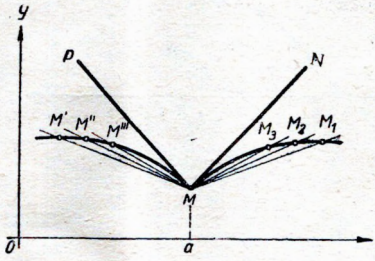
Няцяжка зразумець, што для акружнасці гэта азначэнне эквівалентна таму, якім мы карысталіся да гэтага часу ў геаметрыі (гл. рыс. 312).

Пункт M_1, рухаючыся па крывой, можа неабмежавана набліжацца да пункта M з розных бакоў. Напрыклад, на рысунку 313 пункт M' набліжаецца да пункта M не зверху, як на рысунку 311, а знізу. У гэтым выпадку мы маем справу з іншымі сякучымі: MM', MM'', MM''' і г. д., але іх гранічнае становішча тое ж самае — MN.

Аднак не выключана і такая магчымасць (гл. рыс. 314): у выніку набліжэння пункта M_1 да пункта M **справа** сякучыя MM_1, MM_2, MM_3 імкнуцца



Рыс. 313.



Рыс. 314.

заняць адню гранічнае становішча — MN, а ў выніку набліжэння пункта M' да пункта M **злева** сякучыя MM', MM'', MM''' імкнуцца заняць іншае гранічнае становішча — MP. У падобных выпадках гавораць, што крывая не мае датычнай у дадзеным пункце.

Практыкаванні

1748. Што з'яўляецца датычнай да прамой у любым яе пункце?

1749. Ці мае графік функцыі $y = |x|$ датычную ў пункце з абсцысай:

а) -1; б) 0; в) $+1$?

1750. Ці існуе датычная да графіка функцыі $y = |\sin x|$ у пункце $x = \pi$?

1751. Добра вядома, як вызначаецца вугал паміж дзвюма прамымі. А як бы вы вызначылі вугал паміж дзвюма крывымі, якія перасякаюцца, у пункце іх перасячэння (гл. рыс. 315)?



Рыс. 315.

§ 222. Геаметрычнае тлумачэнне вытворнай

Няхай крывая KL, дадзеная на рысунку 316, ёсць графік функцыі $y = f(x)$. Адзначым на ёй два пункты: M з каардынатамі (x, y) і M_1 з каардынатамі $(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Правядзём прамую MP, паралельную восі абсцыс. У трохвугольніку MM_1P $MP = \Delta x$, $M_1P = \Delta y$. Таму адносіна $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ роўна тангенсу вугла α, утворанага сякучай MM_1 з воссю абсцыс. Пры $\Delta x \to 0$ пункт M застаецца нерухомым, а M_1 неабмежавана набліжаецца ўздоўж крывой да пункта M. Сякучая MM_1 увесь гэты час мяняе свой напрамак. Разам з гэтым змяняецца і вугал α. Але ў любы момант часу

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha.$$

У прэдзеле хорда MM_1 зойме становішча датычнай MN, утвараючы з воссю абсцыс некаторы вугал β. Відавочна, што пры гэтым $\beta = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha$, і

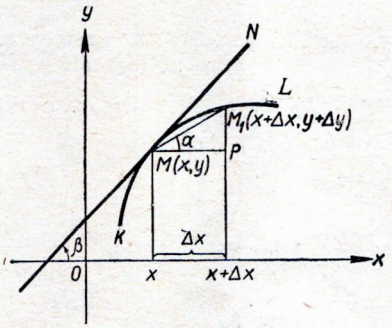
$$\operatorname{tg} \beta = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \alpha.$$

Але

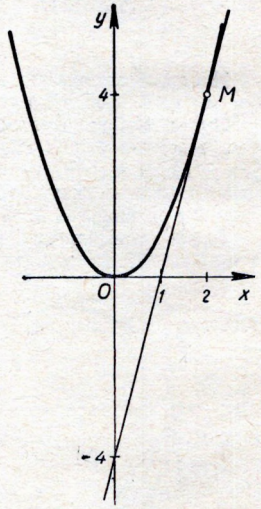
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Значыць,

$$\operatorname{tg} \beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'.$$



Рыс. 316.



Рыс. 317.

Такім чынам, ***вытворная функцыі $f(x)$ у пункце x роўна тангенсу вугла нахілу датычнай да графіка гэтай функцыі ў пункце з абсцысай x.***

Атрыманая суадносіна паміж значэннем вытворнай ад функцыі $(f)x$ у адвольным пункце x і вуглавым каэфіцыентам датычнай да крывой $y = f(x)$ у гэтым пункце дазваляе даволі проста саставіць ураўненне датычнай. Растлумачым гэта на наступным прыкладзе.

Няхай трэба знайсці ўраўненне датычнай да парабалы $y = x^2$ у пункце M з абсцысай $x = 2$ (рыс. 317). Шукаемая датычная мае ўраўненне $y = kx + b$. Вуглавы каэфіцыент k роўны значэнню вытворнай ад функцыі $y = x^2$ у пункце $x = 2$. Паколькі $y = x^2$, то $y' = 2x$. Таму $k = 4$. Значыць, датычная мае ўраўненне $y = 4x + b$. Невядомы каэфіцыент b можна знайсці з умовы, што датычная праходзіць праз пункт M парабалы $y = x^2$ з абсцысай $x = 2$ (гэта значыць, праз пункт дотыку). Ардыната гэтага пункта роўна 4. Падстаўляючы ва ўраўненне $y = 4x + b$ $x = 2$, $y = 4$, атрымаем $4 = 8 + b$, адкуль $b = -4$. Такім чынам, шукаемая датычная мае ўраўненне $y = 4x - 4$.

Практыкаванні

1752. Напісаць ураўненне датычнай да парабалы $y = x^2$ у пункце з абсцысай:

а) -1; б) 0; в) $+1$.

1753. Пад якім вуглом прамая $x = 3$ перасякаецца з парабалай $y = x^2$?

1754. У якіх пунктах прамая $y = x$ перасякаецца з парабалай $y = x^2$? Якія вуглы ўтвараюцца пры перасячэнні?

§ 223. Вынясенне пастаяннага множніка за знак вытворнай

Няхай $g(x) = af(x)$, дзе a — некаторы лік, а $f(x)$ — адвольная дыферэнцыруемая функцыя. Пакажам, што функцыя $g(x)$ таксама дыферэнцыруема і

$$g'(x) = af'(x). \qquad (1)$$

Сапраўды,

$$\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \frac{af(x+\Delta x) - af(x)}{\Delta x} = a\,\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Паколькі функцыя $f(x)$ дыферэнцыруема, то прэдзел адносіны $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ пры $\Delta x \to 0$ існуе і роўны $f'(x)$. Таму

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

таксама існуе і роўны $af'(x)$. Суадносіна (1) даказана.

Пастаянную велічыню можна выносіць за знак вытворнай.

Прыклады.

$$(3x)' = 3 \cdot (x)' = 3 \cdot 1 = 3;$$

$$(-5x^2)' = -5 \cdot (x^2)' = -5 \cdot 2x = -10x.$$

Практыкаванне

1755. (Вусна.) Знайсці вытворныя наступных функцый:

а) $y = -x$; в) $y = -\frac{1}{3}x$;

б) $y = \frac{x}{2}$; г) $y = \sqrt{5}\,x$;

д) $y = -\frac{x^2}{6}$; ж) $y = -\sqrt{3}\,x^2$;

е) $y = \frac{1}{2}\,x^2$; з) $y = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}}\,x^2$.

§ 224. Вытворная сумы функцый

Тэарэма. ***Калі функцыі $u(x)$ і $v(x)$ дыферэнцыруемы, то іх сума $w(x) = u(x) + v(x)$ таксама дыферэнцыруема, прычым***

$$w'(x) = u'(x) + v'(x).$$

(Вытворная ад сумы дзвюх функцый роўна суме вытворных ад гэтых функцый.)

Доказ. Маем:

$$\Delta w(x) = w(x + \Delta x) - w(x) = [u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x)] -$$
$$- [u(x) + v(x)] = [u(x + \Delta x) - u(x)] + [v(x + \Delta x) - v(x)].$$

Таму

$$\frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}.$$

Паколькі функцыі $u(x)$ і $v(x)$ дыферэнцыруемы, то існуюць прэдзелы:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = u'(x);$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} = v'(x).$$

Значыць, існуе і прэдзел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = w'(x),$$

прычым

$$w'(x) = u'(x) + v'(x).$$

Мы атрымалі формулу для вытворнай сумы дзвюх функцый. Аналагічна можна атрымаць і формулу для вытворнай рознасці дзвюх функцый:

$$[u(x) - v(x)]' = u'(x) - v'(x).$$

Між іншым, яе можна вывесці з формулы для вытворнай ад сумы, калі выраз $u(x) - v(x)$ разглядаць як суму $u(x) + [-v(x)]$ і выкарыстаць тэарэму аб вынясенні пастаяннага множніка за знак вытворнай. Прапануем вучням самастойна разабрацца ў гэтым.

Адзначым, што даказаная вышэй тэарэма правільная для любога ліку складаемых:

$$(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)' = u_1' + u_2' + \ldots + u_n'$$

Прыклады. Няхай $f(x) = x^2 + 2x - 5$. Тады

$$f'(x) = (x^2)' + (2x)' - (5)' = 2x + 2 - 0 = 2x + 2.$$

Аналагічна

$$(-3x^2 + 5x + 7)' = (-3x^2)' + (5x)' + (7)' =$$
$$= -3 \cdot 2x + 5 \cdot 1 + 0 = -6x + 5.$$

Практыкаванні

Знайсці вытворныя наступных функцый:

1756. (В у с н а.)

а) $y = 1 - x$;

б) $y = x - x^2$;

в) $y = 2x + x^2 - 7$;

г) $y = 1 - 3x + 6x^2$;

д) $y = 6 - 3x^2$;

е) $y = x - \frac{\sqrt{2}}{2} x^2$;

ж) $y = x(1 - x)$;

з) $y = (x + 1)(x - 1)$

1757. $y = (x - 1)(x + 2)$.

1758. $y = (x - 1)^2$.

1759. $y = (2x - 1)^2$.

1760. $y = (3 - 2x)(x - 6)$.

1761. $y = 3x - 5(1 - x)(1 - 2x)$.

1762. $y = (x - 1)^2 - (x + 1)^2$.

§ 225. Дыферэнцыраванне здабытку дзвюх функцый

Няхай функцыя $w(x)$ ёсць здабытак дзвюх функцый $u(x)$ і $v(x)$:

$$w(x) = u(x) \cdot v(x).$$

Тое ж самае мы будзем запісваць карацей:

$$w = u \cdot v.$$

Дапусцім, што функцыі u і v дыферэнцыруемы. Ці будзе дыферэнцыруемым іх здабытак? Маем:

$$\Delta w = w(x + \Delta x) - w(x) = u(x + \Delta x)\, v(x + \Delta x) - u(x)\, v(x).$$

Але

$$u(x + \Delta x) - u(x) = \Delta u,$$
$$v(x + \Delta x) - v(x) = \Delta v.$$

Адсюль

$$u(x + \Delta x) = u + \Delta u,$$
$$v(x + \Delta x) = v + \Delta v.$$

Значыць,

$$\Delta w = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = u \cdot v + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot v + \Delta u \cdot \Delta v - uv =$$
$$= u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v.$$

Таму

$$\frac{\Delta w}{\Delta x} = u \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta v.$$

Пры $\Delta x \to 0$ атрымліваем:

$$u \to u;$$
$$v \to v;$$
$$\frac{\Delta u}{\Delta x} \to u';$$
$$\frac{\Delta v}{\Delta x} \to v'.$$

Пакажам, што пры $\Delta x \to 0$ $\Delta v \to 0$. Сапраўды,

$$\Delta v = \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \Delta x \to v' \cdot 0 = 0.$$

Такім чынам,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = uv' + u'v + u' \cdot 0 = uv' + u'v.$$

Значыць, у разглядаемым выпадку вытворная здабытку існуе і роўна:

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Вытворная здабытку дзвюх функцый роўна здабытку вытворнай ад першай функцыі на другую функцыю плюс здабытак першай функцыі на вытворную ад другой функцыі.

Прыклады.

1) Знайсці вытворную функцыі $y = (x + a)(x + b)$.

Па правілу дыферэнцыравання здабытку:

$$y' = (x + a)'(x + b) + (x + a)(x + b)' = 1 \cdot (x + b) + (x + a) \cdot 1 = 2x + a + b.$$

2) Знайсці вытворную функцыі $y = (x + 1)(x^2 - 3)$.

Маем:

$$y' = (x + 1)' \cdot (x^2 - 3) + (x + 1) \cdot (x^2 - 3)' = (1 + 0)(x^2 - 3) + (x + 1)(2x + 0) = 3x^2 + 2x - 3.$$

Практыкаванні

Знайсці вытворныя наступных функцый (№ 1763 — 1771):

1763. $y = (x^2 + 1)(3 - 5x^2)$.

1764. $y = 5x^2(x - x^2)$.

1765. $y = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.

1766. $y = (1 - 3x + 7x^2)(-5x^2 - 1)$.

1767. $y = x^4$.

1768. $y = x^2(1 - x^2)$.

1769. $y = (2x - 3)^4$.

1770. $y = (x^2 + ax)^2$.

1771. $y = (x^3 - a)(x^3 + b)$.

1772. Паказаць, што тэарэма аб вынясенні пастаяннага множніка за знак вытворнай (§ 223) з'яўляецца прыватным выпадкам тэарэмы аб дыферэнцыраванні здабытку.

1773. Даказаць тоеснасць

$$(u \cdot v \cdot w)' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

Выкарыстоўваючы яе, знайсці вытворную функцыі

$$y = (x + a)(x + b)(x + c).$$

§ 226. Вытворная дробу

Няхай u і v — некаторыя функцыі аргумента x. Як, ведаючы вытворныя гэтых функцый u' і v', знайсці вытворную іх адносіны $\frac{u}{v}$ у тых пунктах, у якіх v не ператвараецца ў 0? Ды і наогул ці існуе гэта вытворная?

Каб рашыць гэту задачу, зробім наступныя вылічэнні:

$$\frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{uv + v\Delta u - uv - u\Delta v}{v(v + \Delta v)} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v^2 + v \cdot \Delta v}.$$

Таму

$$\frac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}=\frac{1}{v^2+v\cdot\Delta v}\left[\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v-u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}\right].$$

Паколькі функцыі u і v дыферэнцыруемы, існуюць прэдзелы:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u',$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v'.$$

Акрамя таго,

$$\lim_{\Delta x\to 0}[v^2+v\cdot\Delta v]=\lim_{\Delta x\to 0}\left[v^2+v\frac{\Delta v}{\Delta x}\Delta x\right]=v^2+vv'\cdot 0=v^2.$$

Таму існуе і прэдзел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\dfrac{u}{v}}{\Delta x}=\left(\frac{u}{v}\right)',$$

роўны

$$\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Такім чынам, ***калі функцыі u і v дыферэнцыруемы, то ў тых пунктах, у якіх v адрозна ад нуля, адносіна $\frac{u}{v}$ таксама дыферэнцыруема і***

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Прыклады.

1) $\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)'=\dfrac{(1+x)'(1-x)-(1+x)(1-x)'}{(1-x)^2}=$

$$=\frac{1\cdot(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}=\frac{2}{(1-x)^2};$$

2) $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=\dfrac{(1)'\cdot x-1\cdot(x)'}{x^2}=\dfrac{0\cdot x-1\cdot 1}{x^2}=-\dfrac{1}{x^2}.$

Практыкаванні

Знайсці вытворныя наступных функцый:

1774. $y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

1775. $y=\dfrac{2x-3}{5-4x}$.

1776. $y=\dfrac{x}{x^2-1}$.

1777. $y=\dfrac{2x^2}{1-7x}$.

1778. $y=\dfrac{5}{6x-4}$.

1779. $y=\dfrac{5}{6-x}$.

1780. $y=\dfrac{-7}{3-10x}$.

1781. $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

§ 227. Вытворная ступеннай функцыі

У папярэдніх параграфах мы ўжо разглядалі некаторыя прыклады на знаходжанне вытворнай ад ступеннай функцыі $y = x^n$ пры натуральным n. Так, напрыклад, мы даказалі, што $(x)' = 1$, $(x^2)' = 2x$. Выкарыстоўваючы тэарэму аб вытворнай здабытку дзвюх функцый, лёгка атрымаць вытворныя і любых іншых натуральных ступеней x. Напрыклад,

$$(x^3)' = (x^2 \cdot x)' = (x^2)' \cdot x + x^2 \cdot (x)' = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2;$$

$$(x^4)' = (x^3 \cdot x)' = (x^3)' \cdot x + x^3 \cdot (x)' = 3x^2 \cdot x + x^3 \cdot 1 = 4x^3;$$

$$(x^5)' = (x^4 \cdot x)' = (x^4)' \cdot x + x^4 \cdot (x)' = 4x^3 \cdot x + x^4 \cdot 1 = 5x^4 \text{ і г. д.}$$

Няцяжка заўважыць агульнае правіла для знаходжання вытворнай ад функцыі $y = x^n$ пры любым натуральным n.

Каб знайсці вытворную функцыі $y = x^n$, трэба паказчык n узяць каэфіцыентам, а ў самога x паказчык панізіць на адзінку, гэта значыць

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \qquad (1)$$

Напрыклад,

$$(x^{10})' = 10x^9; \quad (x^{45})' = 45x^{44}.$$

Разважанні, якія мы праводзілі тут у пацверджанне справядлівасці формулы (1), з'яўляюцца толькі наводзячымі; за строгі доказ гэтай формулы іх прыняць, вядома, нельга. Да формулы (1) мы яшчэ вернемся ў § 262, дзе і дадзім яе строгі доказ.

Атрыманае намі правіла знаходжання вытворнай ад ступеннай функцыі справядліва не толькі для натуральных, але і для любых паказчыкаў, гэта значыць для любога сапраўднага ліку α:

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (x > 0).$$

Доказ гэтай формулы выходзіць за межы школьнай праграмы і таму тут не даецца.

Прыклады.

1) Няхай $y = \dfrac{1}{x}$. Тады

$$y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \quad (x \neq 0).$$

2) Няхай $y = \sqrt{x}$. Тады

$$y' = (\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0).$$

3) Пры $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$$y' = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}-1} =$$

$$= -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} \quad (x > 0).$$

Практыкаванні

Знайсці вытворныя наступных функцый:

1782. (В у с н а.)

а) $y = x^7$;

б) $y = \frac{1}{5} x^5$;

в) $y = -2x^{\sqrt{2}}$;

г) $y = \frac{4}{x}$;

д) $y = x\sqrt{x}$;

е) $y = \frac{1}{x^2}$;

ж) $y = \frac{1}{3x^2}$.

1783. $y = \sqrt{x\sqrt{x}}$.

1784. $y = \sqrt[3]{3x\sqrt{5x}}$;

1785. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

1786. $y = \frac{1}{x\sqrt{2x}}$.

1787. $y = \frac{5x^2 - x - 1}{x}$.

1788. $y = \frac{7 - 3x + x^4}{x\sqrt{x}}$.

1789. Чаму, прыводзячы агульную формулу $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, звычайна агаворваюць, што $x > 0$?

§ 228. Вытворная многачлена

Многачлен ступені n мае выгляд:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

дзе a_n — свабодны член, a_0, a_1, ..., a_{n-1} — каэфіцыенты пры x^n, x^{n-1}, ..., x (адпаведна), прычым $a_0 \neq 0$. Такі выраз можна разглядаць як суму $(n+1)$ функцый a_0x^n, a_1x^{n-1}, a_2x^{n-2}, ..., $a_{n-1}x$, a_n. Таму вытворная многачлена роўна суме вытворных гэтых функцый:

$$P_n'(x) = (a_0x^n)' + (a_1x^{n-1})' + (a_2x^{n-2})' + \ldots + (a_{n-1}x)' + (a_n)'.$$

Вытворная ад a_n, як вытворная ад канстанты, роўна нулю. Астатнія вытворныя лёгка знайсці, выкарыстоўваючы тое, што пастаянны множнік можна выносіць за знак вытворнай і пры любым натуральным k $(x^k)' = k \cdot x^{k-1}$. Такім чынам, атрымліваем:

$$(a_0x^n)' = a_0(x^n)' = a_0nx^{n-1};$$
$$(a_1x^{n-1})' = a_1(x^{n-1})' = a_1(n-1)x^{n-2};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(a_{n-1}x)' = a_{n-1}(x)' = a_{n-1};$$
$$(a_n)' = 0.$$

Адсюль

$$(a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n)' =$$
$$= a_0nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}.$$

Прыклады.

1) $(3x^2 - 5x - 7)' = 3 \cdot 2x - 5 = 6x - 5$;

2) $(10x^6 - 4x^3 + x)' = 10 \cdot 6x^5 - 4 \cdot 3x^2 + 1 = 60x^5 - 12x^2 + 1$.

Практыкаванні

Знайсці вытворныя наступных функцый:

1790. $y = 2x^5 - x$.

1791. $y = 3x^7 - 6x^6 - 4x^3 + 5x^2 + 17$.

1792. $y = -x^3 - 3x^2 + 6x - 100$.

1793. $y = 5 - 6x + 17x^4$.

1794. $y = (x^3 - 1 - 2x)(x^2 - 5)$.

1795. $y = (x^7 + x)^2$.

1796. $y = (2x - 6x^5)^3$.

§ 229. Дыферэнцыраванне трыганаметрычных функцый

Т э а р э м а 1. ***Вытворная сінуса роўна косінусу:***

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Д о к а з. Няхай аргумент x атрымаў прырашчэнне Δx. Тады функцыя $y = \sin x$ атрымае прырашчэнне:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x.$$

Ператворым гэты выраз, выкарыстоўваючы формулу для сінуса сумы двух вуглоў:

$$\Delta y = \sin x \cdot \cos(\Delta x) + \cos x \cdot \sin(\Delta x) - \sin x =$$

$$= \cos x \cdot \sin(\Delta x) - \sin x(1 - \cos \Delta x).$$

Улічваючы, што $1 - \cos \Delta x = 2\sin^2\left(\frac{\Delta x}{2}\right)$, атрымліваем:

$$\Delta y = \cos x \cdot \sin \Delta x - 2 \sin x \cdot \sin^2\left(\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Адсюль

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x \cdot \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} - 2 \sin x \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Мы ведаем (раздзел IX, § 214), што $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1$. Выходзячы з гэтага, знойдзем прэдзел выразу $\frac{\sin^2\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$. Абазначым $\frac{\Delta x}{2}$ праз z. Тады $\Delta x = 2z$ і таму

$$\frac{\sin^2\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin^2 z}{2z}.$$

Значыць,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin^2\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{z \to 0} \frac{\sin^2 z}{2z} = \frac{1}{2} \lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} \lim_{z \to 0} \sin z = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0 = 0.$$

Цяпер з (1) атрымліваем:

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} - 2 \sin x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin^2 \left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \cos x \cdot 1 - 2 \sin x \cdot 0 = \cos x.$$

Тэарэма даказана.

Тэарэма 2. ***Вытворная косінуса роўна сінусу, узятаму з процілеглым знакам:***

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Доказ. Няхай аргумент x атрымаў прырашчэнне Δx. Тады функцыя $y = \cos x$ атрымае прырашчэнне:

$$\Delta y = \cos (x + \Delta x) - \cos x.$$

Пераўторым гэты выраз, скарыстоўваючы формулу для косінуса сумы двух вуглоў:

$$\Delta y = \cos (x + \Delta x) - \cos x = \cos x \cdot \cos \Delta x -$$

$$- \sin x \cdot \sin \Delta x - \cos x = -\sin x \cdot \sin \Delta x - \cos x (1 - \cos \Delta x) =$$

$$= -\sin x \sin \Delta x - 2 \cos x \sin^2 \left(\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Адсюль

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} - 2 \cos x \frac{\sin^2 \left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x},$$

але

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1, \text{ а } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin^2 \left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = 0.$$

Таму

$$(\cos x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin x \cdot 1 - 2 \cos x \cdot 0 = -\sin x.$$

Тэарэма даказана.

Прыклады.

1) Знайсці вытворную функцыі $y = a \sin x + b \cos x$.

Маем:

$$y' = (a \sin x + b \cos x)' = a (\sin x)' + b (\cos x)' = a \cos x - b \sin x.$$

2) Знайсці вытворную функцыі $y = x \sin x$.

Па правілу дыферэнцыравання здабытку дзвюх функцый атрымліваем:

$$y' = (x \sin x)' = x' \sin x + x (\sin x)' = \sin x + x \cos x.$$

Скарыстоўваючы правіла дыферэнцыравання дробу, лёгка знайсці вытворныя функцый $\operatorname{tg} x$ пры $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ і $\operatorname{ctg} x$ пры $x \neq n\pi$.

Сапраўды,

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Такім чынам,

$$(\operatorname{tg} x)' = -\frac{1}{\cos^2 x} \qquad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi\right).$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \qquad (x \neq n\pi).$$

Практыкаванні

1797. Напісаць ураўненне датычнай да сінусоіды $y = \sin x$ у пункце з абсцысай:

а) $x = 0$; б) $x = \frac{\pi}{2}$; в) $x = \frac{3}{2}\pi$; г) $x = \frac{\pi}{4}$; д) $x = \pi$.

1798. Напісаць ураўненне датычнай да касінусоіды $y = \cos x$ у пункце з абсцысай:

а) $x = 0$; б) $x = \frac{\pi}{2}$; в) $x = \frac{3}{2}\pi$; г) $x = \frac{\pi}{4}$; д) $x = \pi$.

Знайсці вытворныя наступных функцый:

1799. $y = 3 \sin x + 2 \cos x$.

1800. $y = 4 \sin x - 5 \cos x$.

1801. $y = -\sin x + 7 \cos x$.

1802. $y = -6 \sin x - 9 \cos x$.

1803. $y = \sin^2 x$.

1804. $y = \cos^2 x$.

1805. $y = \sin x \cos x$.

1806. $y = x^2 \sin x$.

1807. $y = x^2 \cos x$.

1808*. $y = \cos^2 \frac{x}{2}$.

1809. $y = (5x + \sin x)(x^2 - \cos x)$.

1810. $y = (1 - 2 \sin x)(1 - 3 \cos x)$.

1811. $y = \sin 2x$.

1812. $y = \cos 2x$.

1813. $y = (a + bx) \sin x + (c + dx) \cos x$.

1814. $y = \frac{\sin x}{x}$.

1815. $y = \sin^2 x + \cos^2 x$.

1816. $y = \sqrt{x} \sin x$.

1817. $y = \frac{3 \cos x}{\sqrt{x}}$.

1818. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

1819. $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

§ 230. Дыферэнцыраванне функцыі $f(ax + b)$

У матэматыцы часта прыходзіцца мець справу з выразамі выгляду $f(ax + b)$, дзе $f(x)$ — некаторая зададзеная функцыя. Так, пры вывучэнні гарманічных ваганняў разглядаюцца функцыі тыпу $\sin(\omega x + \varphi)$. Пры рашэнні розных задач часта сустракаюцца выразы выгляду $\lg(ax + b)$, $(x + a)^n$ і г. д. Вялікі інтарэс уяўляе пытанне аб дыферэнцыраванні падобных функцый.

Няхай $f(x)$ — некаторая функцыя, для якой мы можам знайсці вытворную. Як у такім выпадку знайсці вытворную функцыі $\varphi(x)$, якая выражаецца праз $f(x)$ наступным чынам:

$$\varphi(x) = f(ax + b)?$$

Згодна з азначэннем вытворнай

$$\varphi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f[a(x + \Delta x) + b] - f(ax + b)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f[(ax + b) + a \cdot \Delta x] - f(ax + b)}{\Delta x}.$$

Абазначыўшы $ax + b$ праз y, атрымаем:

$$\varphi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(y + a\,\Delta x) - f(y)}{\Delta x}.$$

Памножым лічнік і назоўнік гэтага выразу на лік a:

$$\varphi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(y + a\,\Delta x) - f(y)}{a\,\Delta x} \cdot a.$$

Абазначыўшы цяпер $a\,\Delta x$ праз h, атрымаем:

$$\varphi'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(y + h) - f(y)}{h} \cdot a.$$

(Паколькі $\Delta x \to 0$, то і $h = a\,\Delta x \to 0$.)

Але

$$\lim_{h \to 0} \left[\frac{f(y + h) - f(y)}{h}\right] = f'(y).$$

Таму

$$\varphi'(x) = af'(y).$$

Успамінаючы, што $y = ax + b$, атрымліваем канчаткова:

$$\varphi'(x) = af'(ax + b).$$

Такім чынам,

$$[f(ax + b)]' = af'(ax + b). \qquad (1)$$

Лік a ёсць вытворная функцыі $ax + b$. Таму роўнасць (1) можна сфармуляваць такім чынам.

Для знаходжання вытворнай выразу $f(ax + b)$ дастаткова прадыферэнцыраваць яго па правілу дыферэнцыравання выразу $f(x)$ (з заменай у канчатковым выразе x на $ax + b$) і рэзультат памножыць на вытворную выразу $ax + b$ (гэта значыць на лік a).

Прыклады.

1) $[(2x + 1)^{10}]' = 10(2x + 1)^9 \cdot (2x + 1)' = 10(2x + 1)^9 \cdot 2 = 20(2x + 1)^9$;

2) $(\sin 3x)' = \cos 3x \cdot (3x)' = 3\cos 3x$;

3) $$\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right)\right]' = -\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right) \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right)' =$$

$$= -\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right).$$

Практыкаванні

Знайсці вытворныя наступных функцый:

1820. $y = (2x + 3)^5$.

1821. $y = (x + 7)^6$.

1822. $y = (1 - 5x)^7$.

1823. $y = \sin 4x$.

1824. $y = \sin\frac{x}{5}$.

1825. $y = \cos 6x$.

1826. $y = \sin(2x - 3)$.

1827. $y = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

1828. $y = A\sin(\omega x + \varphi)$.

1829. $y = A\cos(\varphi - \omega x)$.

1830. $y = 3x\sin 2x$.

1831. $y = 3(x-5)^3 + 2(1-x)^4$.

1832. $y = 3x\sin 2x + 2x\cos 3x$.

1833. $y = \sqrt{2x+1}$.

1834. $y = \sqrt[3]{1-x}$

1835. Даказаць, што

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} \quad \left(x \neq -\frac{d}{c}\right).$$

§ 231. Паняцце аб другой вытворнай. Вытворныя вышэйшых парадкаў

Вытворная ад вытворнай y' функцыі y называецца *другой вытворнай* гэтай функцыі і абазначаецца y'' або $f''(x)$:

$$y'' = (y')'; \quad f''(x) = [f'(x)]'.$$

Разгледзім некалькі прыкладаў.

1) Няхай $y = 3x^3 - 6x^2 + 7x - 1$. Па правілу дыферэнцыравання мнагачленаў:

$$y' = (3x^3 - 6x^2 + 7x - 1)' = 9x^2 - 12x + 7;$$

$$y'' = (9x^2 - 12x + 7)' = 18x - 12.$$

2) Няхай $y = \sin x$. Тады $y' = (\sin x)' = \cos x$; $y'' = (\cos x)' = -\sin x$.

3) Калі $y = \frac{ax^2}{2}$,

то

$$y' = \left(\frac{ax^2}{2}\right)' = \frac{a}{2}(x^2)' = \frac{a}{2} \cdot 2x = ax;$$

$$y'' = (ax)' = a.$$

Другая вытворная y'' функцыі y, таксама як і першая яе вытворная y', дапускае простую фізічную інтэрпрэтацыю. Будучы вытворнай ад першай вытворнай y', яна характарызуе скорасць змянення гэтай вытворнай. Першая ж вытворная y' характарызуе скорасць змянення функцыі y. Такім чынам, y'' характарызуе «скорасць змянення скорасці змянення» функцыі y. З падобным паняццем мы ўжо сустракаліся ў фізіцы. Вывучаючы роўнапаскораны рух, мы ўводзілі паняцце п а с к а р э н н я як змянення скорасці руху ў адзінку часу. Гэта паняцце якраз і характарызуе скорасць змянення скорасці руху. Таму, скарыстоўваючы мову механікі, можна сказаць, што другая вытворная y'' функцыі y ёсць *паскарэнне*, з якім функцыя $y = f(x)$ змяняе свае значэнні пры змяненні значэнняў аргумента x.

Трэцяя вытворная функцыі $y = f(x)$ ёсць вытворная ад другой вытворнай гэтай функцыі. Яна абазначаецца y''' або $f'''(x)$; $y''' = (y'')'$; $f'''(x) = [f''(x)]'$. Аналагічна чацвёртая вытворная функцыі $y = f(x)$ (абазначаецца y^{IV} або $f^{IV}(x)$) ёсць вытворная ад яе трэцяй вытворнай і г. д.

n-я вытворная функцыі $f(x)$ інакш называецца *вытворнай n-га парадку* (абазначаецца $f^n(x)$). Напрыклад, трэцяя вытворная інакш называецца вытворнай трэцяга парадку, чацвёртая вытворная — вытворнай чацвёртага парадку і г. д.

П р ы к л а д ы.

1) Для функцыі $y = x^2 + x + 1$ маем:

$$y' = 2x + 1;$$
$$y'' = 2;$$
$$y''' = 0;$$
$$y^{IV} = 0.$$

Відавочна, што ўсе вытворныя дадзенай функцыі, пачынаючы з трэцяй, роўны нулю.

2) Для функцыі $y = \sin x$:

$$y' = \cos x;$$
$$y'' = -\sin x;$$
$$y''' = -\cos x;$$
$$y^{IV} = -(-\sin x) = \sin x;$$
$$y^{V} = \cos x$$

і г. д.

Практыкаванні

1836. Знайсці паскарэнне цела, якое рухаецца па закону $s(t) = 2t^3 + 5t^2 + 4t$ (s — шлях у метрах, t — час у мінутах), у момант часу:

а) $t = 40$ *сек*; б) $t = 1$ *гадз*.

1837. Знайсці паскарэнне цела, якое рухаецца па закону $s = \sqrt{t}$ (s—шлях у метрах, t — час у мінутах), у адвольны момант часу t.

Для дадзеных функцый знайсці вытворныя ўсіх парадкаў:

1838. $y = (x + 2)^3$.

1839. $y = (2x - 1)^3$.

1840. $y = x^2 - x - 1$.

1841. $y = x^5 + 4x^3 - 7x^2$.

1842. $y = \cos x$.

1843. $y = (1 + x)^{100}$.

1844. Даказаць, што для функцыі $y = a \sin x + b \cos x$ справядліва суадносіна $y^{IV} = y$.

1845. Колькі разоў трэба прадыферэнцыраваць функцыю $y = (x^2 + 1)^{100}$, каб у выніку атрымаўся мнагачлен 50-й ступені?

1846*. Знайсці вытворную 100-га парадку ад функцыі

$$y = \sin x \cdot \cos^2 x.$$

§ 232. Выражэнне каэфіцыентаў мнагачлена праз значэнні яго вытворных

Няхай

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots + a_n x^n. \quad (1)$$

Тады

$$P'(x) = 1 \cdot a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots + n a_n x^{n-1}; \quad (2)$$
$$P''(x) = 2 \cdot 1 \cdot a_2 + 3 \cdot 2 a_3 x + 4 \cdot 3 a_4 x^2 + \ldots + n(n-1) a_n x^{n-2}; \quad (3)$$
$$P'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 a_4 x + \ldots + n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3} \quad (4)$$

і г. д.

Дапускаючы ў формулах (1), (2), (3) і (4) $x = 0$, атрымліваем:

$$P(0) = a_0,$$
$$P'(0) = 1 \cdot a_1,$$
$$P''(0) = 1 \cdot 2 a_2,$$
$$P'''(0) = 1 \cdot 2 \cdot 3 a_3,$$

адкуль

$$a_0 = P(0),$$
$$a_1 = \frac{P'(0)}{1},$$
$$a_2 = \frac{P''(0)}{1 \cdot 2},$$
$$a_3 = \frac{P'''(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Працягваючы гэты працэс далей, мы атрымалі б:

$$a_4 = \frac{P^{IV}(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

$$a_5 = \frac{P^{V}(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

і г. д. Відавочна, што для любога натуральнага k

$$a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}, \tag{5}$$

дзе $P^{(k)}(0)$ — значэнне k-й вытворнай многачлена $P(x)$ пры $x = 0$.

Здабытак $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k$ прынята абазначаць сімвалам $k!$ (чытаецца: ка факторыял). Таму формулу (5) можна перапісаць у выглядзе

$$a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}. \tag{6}$$

Гэта формула будзе правільная і пры $k = 0$, калі пад выразам $P^{(0)}(x)$ (нулявой вытворнай функцыі $P(x)$) падразумяваць проста функцыю $P(x)$ і лічыць, што $0! = 1$.

Формула (6) выражае каэфіцыент многачлена $P(x)$ пры x^k праз значэнне k-й вытворнай гэтага многачлена ў нулі.

Растлумачым гэту формулу на некаторых прыкладах.

Прыклад 1. Знайсці каэфіцыент многачлена $(x + 1)^{10}$ пры x^3.

Маем:

$$P(x) = (x + 1)^{10};$$
$$P'(x) = 10(x + 1)^9;$$
$$P''(x) = 10 \cdot 9 (x + 1)^8;$$
$$P'''(x) = 10 \cdot 9 \cdot 8 (x + 1)^7.$$

Таму $P'''(0) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 1^7 = 720$. Па формуле (6) атрымаем:

$$\frac{P'''(0)}{3!} = \frac{720}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

Такім чынам, каэфіцыент многачлена $(x + 1)^{10}$ пры x^3 роўны 120.

Прыклад 2. Знайсці каэфіцыент многачлена $(3x - 1)^9$ пры x^2.

Маем:

$$P(x) = (3x - 1)^9;$$
$$P'(x) = 9(3x - 1)^8 \cdot 3 = 27(3x - 1)^8;$$
$$P''(x) = 27 \cdot 8 (3x - 1)^7 \cdot 3 = 648(3x - 1)^7.$$

Таму шукаемы каэфіцыент роўны:

$$\frac{P''(0)}{2!} = \frac{648 \cdot (-1)^7}{1 \cdot 2} = -324.$$

Практыкаванні

У задачах № 1847—1851 знайсці каэфіцыенты дадзеных многачленаў пры дадзеных ступенях x:

1847. $P(x) = (x + 2)^{10}$ пры x^3.

1848. $P(x) = (1 - x)^{40}$ пры x^2.

1849. $P(x) = (2 - x)^{25}$ пры x^3.

1850. $P(x) = (x + a)^9$ пры x^4.

1851. $P(x) = (x + 1)^n$ пры x^5.

1852. Вызначыць ступень многачлена $P(x) = (x + 2)^n$, калі яго каэфіцыент пры x^2 роўны 24.

§ 233. Формула бінома Ньютана

Да гэтага часу нам былі вядомы формулы для другой і трэцяй ступені двухчлена $a + b$:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

У гэтым параграфе мы атрымаем формулу для ступені $(a + b)^n$ з адвольным натуральным паказчыкам n. Для гэтага разгледзім многачлен ступені n:

$$P(x) = (x + a)^n,$$

дзе a — некаторы зададзены лік.

Свабодны член гэтага многачлена роўны $P(0) = a^n$. Для знаходжання каэфіцыентаў пры ступенях x скарыстаем формулу (6) папярэдняга параграфа. Згодна з гэтай формулай каэфіцыент пры x^k роўны $\frac{P^{(k)}(0)}{k!}$, дзе $P^{(k)}(0)$ — значэнне k-й вытворнай многачлена $P(x)$ пры $x = 0$. Знойдзем гэта значэнне. Маем:

$$P(x) = (x + a)^n;$$
$$P'(x) = n(x + a)^{n-1};$$
$$P''(x) = n(n - 1)(x + a)^{n-2};$$
$$P'''(x) = n(n - 1)(n - 2)(x + a)^{n-3}$$

і г. д. Відавочна, што k-я вытворная многачлена $P(x)$ роўна

$$P^{(k)}(x) = n(n - 1)(n - 2)\dots(n - k + 1)(x + a)^{n-k}.$$

Таму

$$P^{(k)}(0) = n(n - 1)(n - 2)\dots(n - k + 1)a^{n-k}.$$

Значыць, каэфіцыент многачлена $P(x)$ пры x^k роўны:

$$\frac{P^{(k)}(0)}{k!} = \frac{n(n - 1)(n - 2)\dots(n - k + 1)}{k!}a^{n-k}.$$

Выраз

$$\frac{n(n - 1)(n - 2)\dots(n - k + 1)}{k!}$$

прынята абазначаць C_n^k (чытаецца: цэ э эн па ка). Таму каэфіцыент многачлена $P(x)$ пры x^k роўны $C_n^k a^{n-k}$. Напрыклад, каэфіцыент пры x роўны $C_n^1 a^{n-1}$, каэфіцыент пры x^2 роўны $C_n^2 a^{n-2}$ і г. д. Але ў такім выпадку гэты многачлен можна даць у выглядзе:

$$(x + a)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}x + C_n^2 a^{n-2}x^2 + \dots + C_n^{n-1}ax^{n-1} + C_n^n x^n.$$

Няхай у гэтай формуле $x = b$, тады атрымаем:

$$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^n b^n. \qquad (1)$$

Адзначым, што $(k + 1)$-е па падліку складаемае ў раскладанні $(a + b)^n$ мае выгляд:

$$C_n^k a^{n-k}b^k \quad (0 < k \leqslant n).$$

Формула (1) называецца *формулай бінома* Ньютана*, а каэфіцыенты $1, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^{n-1}, C_n^n$, што ўдзельнічаюць у ёй, — бінаміяльнымі каэфіцыентамі.

Прыклад.

$$(a+b)^4 = a^4 + C_4^1 a^3 b + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 a b^3 + C_4^4 b^4.$$

Але

$$C_4^1 = \frac{4}{1} = 4;$$

$$C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6;$$

$$C_4^3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4;$$

$$C_4^4 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 1.$$

Таму

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Практыкаванні

1853. Вылічыць:

а) C_5^2; б) C_6^3; в) C_8^3; г) C_7^6; д) C_{10}^4; е) C_6^5.

1854. Зыходзячы з формулы бінома Ньютана, атрымаць формулы для кубаў сумы і рознасці двух лікаў.

1855. Вылічыць па формуле бінома Ньютана:

а) $(\sqrt{5} - \sqrt{2})^4$;

б) $(\sqrt{6} + \sqrt{2})^4$;

в) $(\sqrt{6} - \sqrt{2})^5$;

г) $(\sqrt{10} - \sqrt{2})^5$.

1856. Вызначыць ступень бінома $(3a-2)^n$, калі вядома, што каэфіцыент пры a^2 у раскладанні гэтага бінома роўны 216.

1857. Даказаць роўнасці:

а) $C_n^{n-1} = C_n^1 = n$;

б) $C_n^{n-2} = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

1858. Даказаць тоеснасць:

$$C_n^{k+1} = C_n^k \frac{n-k}{k+1}.$$

1859*. Даказаць, што лік $11^{10} - 1$ дзеліцца на 100.

§ 234. Аб адной уласцівасці бінаміяльных каэфіцыентаў

Згодна з азначэннем,

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k}. \qquad (1)$$

* Формула (1) была строга даказана яшчэ да Ньютана Якабам Бернулі (1654—1705) — адным з членаў сям'і швейцарскіх вучоных, якія далі свету 11 вядомых матэматыкаў. Ньютану належыць ідэя аб распаўсюджванні формулы (1) на выпадак дробавых і адмоўных значэнняў n. Гэта ідэя шырока выкарыстоўваецца пры рашэнні многіх задач вышэйшай матэматыкі.

Памножыўшы лічнік і назоўнік гэтага дробу на

$$(n-k)(n-k-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1,$$

атрымаем:

$$C_n^k=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k(n-k)(n-k-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Такім чынам,

$$C_n^k=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}. \tag{2}$$

Гэта формула справядліва для любых натуральных лікаў n і k, калі толькі $n>k$. У прыватнасці, замяняючы ў ёй k на $n-k$, атрымаем:

$$C_n^{n-k}=\frac{n!}{(n-k)!\,[n-(n-k)]!}=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}. \tag{3}$$

Правыя часткі роўнасцей (2) і (3) роўныя; значыць, роўныя і левыя часткі:

$$C_n^k=C_n^{n-k}. \tag{4}$$

Формула (4), выражаючы важную ўласцівасць бінаміяльных каэфіцыентаў, значна спрашчае іх вылічэнне. Напрыклад, пры ўзвядзенні двухчлена $a+b$ у 6-ю ступень прыходзіцца вылічваць C_6^1, C_6^2, C_6^3, C_6^4, C_6^5, C_6^6. Згодна з азначэннем (гл. формулу (1)):

$$C_6^1=\frac{6}{1}=6;$$

$$C_6^2=\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}=15.$$

$$C_6^3=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}=20.$$

Для вылічэння C_6^4 і C_6^5 цяпер няма неабходнасці даваць іх па формуле (1). Дастаткова скарыстаць формулу (4) і ўжо атрыманыя значэнні:

$$C_6^4=C_6^{6-4}=C_6^2=15;$$

$$C_6^5=C_6^{6-5}=C_6^1=6.$$

Адзначым яшчэ, што $C_n^n=1$. Гэта вынікае непасрэдна з азначэння ліку C_n^n:

$$C_n^n=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-2)(n-1)n}=1.$$

Умовімся лічыць, што $C_n^0=1$. У выніку такой згоды формула (4) аказваецца правільнай не толькі для $n>k$, але і для $n=k$:

$$C_n^n=C_n^0=1.$$

Практыкаванні

1860. Вылічыць:

а) C_{10}^8; б) C_{15}^{12}; в) C_{100}^{96}; г) C_{36}^{34}.

1861. Вядома, што $C_n^x=C_n^y$. Ці можна сцвярджаць, што $x=y$?

1862. Рашыць ураўненні:

а) $C_x^{x-2} + 2x = 9$;

б) $C_{x-1}^{x-2} = x^2 - 13$;

в) $C_n^{n-2} = C_n^3$.

1863. У раскладанні $\left(a + \frac{1}{a}\right)^{12}$ знайсці каэфіцыент пры a^8.

1864. У раскладанні $\left(2a - \frac{1}{3a}\right)^{10}$ знайсці каэфіцыент пры a^4.

§ 235. Прымяненне формулы бінома Ньютана да набліжаных вылічэнняў

Дапусціўшы ў формуле бінома Ньютана

$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$ $a = 1$, $b = x$, атрымаем:

$$(1 + x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n. \quad (1)$$

Калі велічыня x малая, то велічыні x^2, x^3, ..., x^n тым больш малыя. Таму, калі ў формуле (1) мы адкінем члены, якія змяшчаюць x^2, x^3, ..., x^n, то атрыманая ў выніку формула

$$(1 + x)^n \approx 1 + C_n^1 x \quad (2)$$

будзе набліжанай, прычым памылка такога набліжэння павінна быць невялікай. Паколькі $C_n^1 = n$, формулу (2) можна перапісаць у выглядзе:

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx. \quad (3)$$

Практычна пры малых значэннях x формула (3) дае зусім здавальняючы рэзультат. У пацверджанне гэтага прывядзём наступную табліцу для выпадку $x = 0{,}01$.

n \ $(1+x)^n$	Па формуле (3)	Значэнне з чатырма дакладнымі дзесятковымі знакамі
2	1,02	1,0201
3	1,03	1,0303
4	1,04	1,0406
10	1,10	1,1046

Формула (3) правільная і для малых адмоўных значэнняў x.

Напрыклад,

$$(1 - 0{,}02)^5 \approx 1 - 5 \cdot 0{,}02 = 0{,}9;$$

$$(0{,}93)^2 = (1 - 0{,}07)^2 \approx 1 - 2 \cdot 0{,}07 = 0{,}86.$$

Формулу (3) мы атрымалі для натуральных значэнняў n. Аднак ёю можна карыстацца пры любых сапраўдных значэннях n.

Напрыклад,

$$\sqrt{1{,}003} = (1 + 0{,}003)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}003 = 1{,}0015;$$

$$\sqrt[3]{0{,}97} = (1 - 0{,}03)^{\frac{1}{3}} \approx 1 - \frac{1}{3} \cdot 0{,}03 = 0{,}99;$$

$$\frac{1}{0{,}98} = 0{,}98^{-1} = (1 - 0{,}02)^{-1} \approx 1 + (-1)(-0{,}02) = 1{,}02;$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{0{,}96}} = 0{,}96^{-\frac{1}{4}} = (1 - 0{,}04)^{-\frac{1}{4}} \approx 1 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}04 = 1{,}01.$$

Практыкаванні

Знайсці набліжаныя значэнні наступных выразаў:

1865. $(1{,}04)^3$.

1866. $(1{,}001)^{10}$.

1867. $(1{,}03)^6$.

1868. $(0{,}99)^3$.

1869. $(0{,}98)^4$.

1870. $(0{,}97)^5$.

1871. $\sqrt{1{,}05}$.

1872. $\sqrt{0{,}95}$.

1873. $\sqrt[3]{1{,}03}$.

1874. $\sqrt[5]{0{,}99}$.

1875. $\sqrt{2\sqrt{0{,}24}}$.

1876. $(\sqrt[3]{0{,}98})^4$.

1877. $\frac{1}{\sqrt{0{,}98}}$.

1878. $\frac{1}{1{,}02}$.

1879. $\frac{1}{0{,}97}$.

1880. $\frac{1}{(\sqrt[4]{0{,}99})^3}$.

§ 236. Прымяненне вытворнай да знаходжання ўчасткаў узрастання і ўчасткаў убывання функцый

Пры дапамозе вытворнай лёгка знайсці ўчасткі ўзрастання і ўчасткі ўбывання любой дыферэнцыруемай функцыі. Мае месца наступная тэарэма.

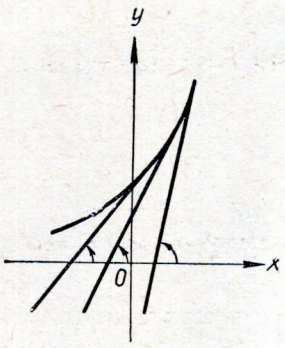
Тэарэма. ***Калі вытворная $f'(x)$ функцыі $f(x)$ дадатная ў інтэрвале $[a, b]$, то функцыя $f(x)$ манатонна ўзрастае ў гэтым інтэрвале. Калі ж вытворная адмоўная ў гэтым інтэрвале, то ў ім функцыя $f(x)$ манатонна ўбывае.***

Доказ гэтай тэарэмы выходзіць за межы школьнай праграмы. Таму мы абмяжуемся толькі яе геаметрычнай ілюстрацыяй.

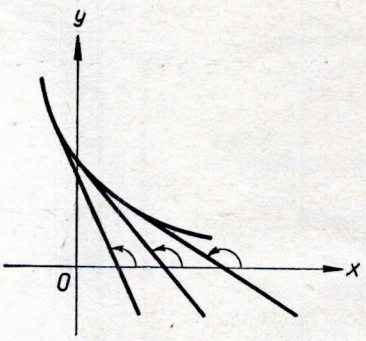
Вытворная функцыі $y = f(x)$ роўна вуглавому каэфіцыенту датычнай, праведзенай да графіка функцыі $y = f(x)$ у пункце з абсцысай x. Умова $f'(x) > 0$ азначае, што ў разглядаемым інтэрвале вуглавыя каэфіцыенты датычных дадатныя. Але гэта магчыма толькі ў тым выпадку, калі вуглы, утвораныя датычнымі з дадатным напрамкам восі x, вострыя (рыс. 318). Тады графік функцыі $y = f(x)$ з ростам x паднімаецца ўсё вышэй і вышэй. А гэта азначае, што функцыя $y = f(x)$ манатонна ўзрастае.

Выпадак, калі ў інтэрвале $[a, b]$ $f'(x) < 0$, разглядаецца аналагічна. Умова $f'(x) < 0$ азначае, што вуглавыя каэфіцыенты датычных да графіка функцыі

$y = f(x)$ адмоўныя. Але гэта магчыма толькі ў тым выпадку, калі вуглы, утвораныя датычнымі з дадатным напрамкам восі x, тупыя (рыс. 319). Тады графік функцыі $y = f(x)$ з ростам x апускаецца ўсё ніжэй і ніжэй. А гэта азначае, што функцыя $y = f(x)$ манатонна ўбывае.



Рыс. 318.



Рыс. 319.

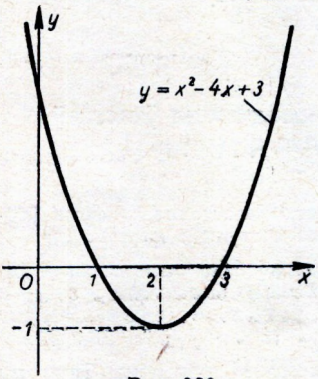
Прыклад. Вызначыць участкі ўзрастання і ўчасткі ўбывання функцыі

$$f(x) = x^2 - 4x + 3.$$

Маем:

$$f'(x) = 2x - 4.$$

Пры $x > 2$ $f'(x) > 0$, а пры $x < 2$ $f'(x) < 0$. Значыць, функцыя $f(x) = x^2 - 4x + 3$ пры $x > 2$ узрастае, а пры $x < 2$ убывае.



Рыс. 320.

Да таго ж самага выніку мы прыйшлі б, калі б даследавалі дадзеную функцыю шляхам вылучэння поўнага квадрата (гл. рыс. 320).

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 = x^2 - 4x + 4 - 1 = (x-2)^2 - 1.$$

Скарыстанне вытворнай у дадзеным выпадку лягчэй і хутчэй прыводзіць да рашэння задачы.

Практыкаванні

Вызначыць участкі ўзрастання і ўчасткі ўбывання наступных функцый:

1881. $y = 3 + 4x - x^2$.

1882. $y = x^3 - 3x + 1$.

1883. $y = x^4 - 2x^2 - 3$.

1884. $y = x^3 + 6x^2 - 15x + 2$.

1885. $y = x^2 - 5 - 2x - 8x^3$.

1886. $y = 3x^2 + x$.

1887. $y = \sqrt{x^3 - 3x}$.

1888. $y = x + \frac{1}{x}$.

1889. $y = \sin x - \frac{1}{2}x$.

1890. $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \cos x$.

Даказаць, што дадзеныя функцыі (№ 1891—1894) з'яўляюцца манатоннымі на ўсёй лікавай прамой. Якія з іх манатонна ўзрастаюць і якія манатонна ўбываюць?

1891. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 5$. 1893. $y = \sqrt{2}x - \cos x$.

1892. $y = 6 - 6x - 2x^3 + 3x^2$. 1894. $y = \sin x - \frac{\pi}{2}x$.

Вызначыць участкі ўзрастання і ўчасткі ўбывання наступных функцый:

1895. $y = \frac{x^2 + 1}{x}$.

1896. $y = \frac{x^2}{2} + \cos x$.

1897. $y = \sin^2 x - x$.

§ 237. Прымяненне вытворнай да знаходжання лакальных экстрэмумаў функцыі

У гэтым параграфе мы пакажам, як пры дапамозе вытворнай можна знаходзіць лакальныя экстрэмумы дыферэнцыруемай функцыі.

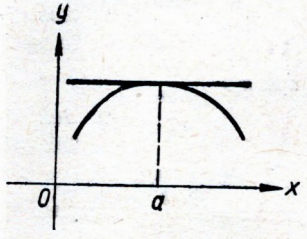
Тэарэма. ***Калі пункт $x = a$ з'яўляецца пунктам лакальнага экстрэмуму дыферэнцыруемай функцыі $y = f(x)$, то вытворная $f'(x)$ у гэтым пункце ператвараецца ў нуль:***

$$f'(a) = 0.$$

Доказ гэтай тэарэмы выходзіць за межы школьнай праграмы, таму мы абмяжуемся толькі яе геаметрычнай ілюстрацыяй.

Няхай пункт $x = a$ з'яўляецца пунктам лакальнага максімуму функцыі $y = f(x)$ (рыс. 321). Тады датычная да графіка гэтай функцыі ў пункце з абсцысай a будзе паралельна восі x. Вуглавы каэфіцыент гэтай датычнай роўны 0. Але, як мы ведаем, гэты вуглавы каэфіцыент павінен раўняцца $f'(a)$. Значыць,

$$f'(a) = 0.$$



Рыс. 321.

Аналагічна інтэрпрэтуецца выпадак, калі пункт $x = a$ з'яўляецца пунктам лакальнага мінімуму (рыс. 322).

Важна падкрэсліць, што атрыманая ўмова $f'(a) = 0$ адносіцца толькі да функцый, *дыферэнцыруемых* у пункце $x = a$. Наогул жа функцыя можа мець лакальны экстрэмум у пункце $x = a$ і з'яўляючыся недыферэнцыруемай у гэтым пункце. Паглядзіце, напрыклад, яшчэ раз на крывую, паказаную на рысунку 274. Гэта крывая з'яўляецца графікам функцыі $f(x)$, для якой пункт $x = 3$ будзе пунктам лакальнага мінімуму. Але гэта функцыя пры $x = 3$ не мае вытворнай (крывая ў пункце з абсцысай 3 не мае датычнай). Таму ўмова $f'(3) = 0$ не выконваецца.

Прыклад. Функцыя $f(x) = ax^2 + bx + c$ мае адзіны лакальны экстрэмум у пункце $x = -\frac{b}{2a}$. У гэтым лёгка пераканацца шляхам вылучэння з дадзенага квадратнага трохчлена поўнага квадрата (гл. § 49):

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Лёгка праверыць, што $f'\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0$. Сапраўды, паколькі $f(x) = ax^2 + bx + c$, то

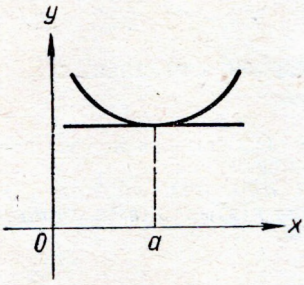
$$f'(x) = 2ax + b$$

і таму

$$f'\left(-\frac{b}{2a}\right)=0.$$

Натуральна ўзнікае пытанне: як, ведаючы, што $x=a$ ёсць пункт лакальнага экстрэмуму функцыі $f(x)$, вызначыць, які экстрэмум яна дае: максімум ці мінімум?

Няхай пры $x<a$ $f'(x)<0$, а пры $x>a$ $f'(x)>0$. Тады паблізу пункта $x=a$ функцыя $f(x)$ павінна ўбываць у пунктах, якія ляжаць злева ад a, і ўзрастаць у пунктах, якія ляжаць справа ад a (рыс. 322). У гэтым выпадку пункт $x=a$ з'яўляецца пунктам лакальнага мінімуму. Калі ж пры $x<a$ $f'(x)>0$, а пры $x>a$ $f'(x)<0$, то, наадварот, лявей пункта $x=a$ функцыя $f(x)$ будзе ўзрастаць, а правей $x=a$ — убываць. У гэтым выпадку пункт $x=a$ будзе пунктам лакальнага максімуму (рыс. 321).



Рыс. 322.

Такім чынам, ***калі вытворная $f'(x)$ у пункце $x=a$ ператвараецца ў нуль, а пры пераходзе праз гэты пункт мяняе свой знак з «—» на «+», то пункт a ёсць пункт лакальнага мінімуму функцыі $f(x)$. Калі вытворная $f'(x)$ у пункце $x=a$ ператвараецца ў нуль, а пры пераходзе праз гэты пункт мяняе свой знак з «+» на «—», то пункт a ёсць пункт лакальнага максімуму функцыі $f(x)$.***

Напрыклад, для функцыі $f(x)=ax^2+bx+c$ вытворная $f'(x)=2ax+b$ ператвараецца ў нуль пры $x=-\frac{b}{2a}$. Дапусцім, што $a>0$; тады пры $x<-\frac{b}{2a}$ атрымаем:

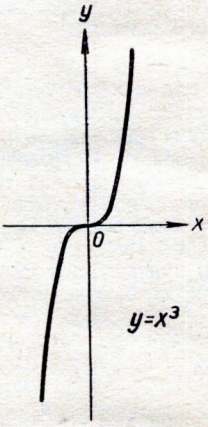
$$2ax<-b;$$
$$2ax+b<0,$$

а пры $x>-\frac{b}{2a}$

$$2ax>-b;$$
$$2ax+b>0.$$

Такім чынам, калі $a>0$, то пры пераходзе праз пункт $x=-\frac{b}{2a}$ вытворная функцыі ax^2+bx+c мяняе знак з «—» на «+». Таму пункт $x=-\frac{b}{2a}$ з'яўляецца пунктам лакальнага мінімуму гэтай функцыі. Да такога ж выніку мы прыходзілі і раней, разглядаючы выраз

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$



Рыс. 323.

Вучням прапануецца самастойна з дапамогай вытворнай разгледзець выпадак $a<0$ і пераканацца, што тады пункт $x=-\frac{b}{2a}$ з'яўляецца пунктам лакальнага максімуму функцыі

$$f(x)=ax^2+bx+c.$$

Не трэба думаць, што калі $f'(a)=0$, то пункт $x=a$ абавязкова з'яўляецца пунктам лакальнага экстрэмуму. Напрыклад, для функцыі $f(x)=x^3$ маем $f'(x)=3x^2$, і таму $f'(0)=0$. Але, як бачна з графіка гэтай функцыі (рыс. 323), пункт $x=0$ не з'яўляецца ні пунктам лакальнага мінімуму, ні пунктам лакаль-

нага максімуму. Тлумачыцца гэта тым, што ў пункце $x=0$ вытворная $f'(x)=3x^2$, ператвараючыся ў нуль, не мяняе свайго знака. Як пры $x<0$, так і пры $x>0$ яна дадатная.

Можна даказаць, што ***калі $f'(a)=0$ і пры пераходзе праз пункт $x=a$ вытворная $f'(x)$ не мяняе знака («+» пераходзіць у «+» або «—» у «—»), то пункт $x=a$ не з'яўляецца ні пунктам лакальнага мінімуму, ні пунктам лакальнага максімуму.***

Пункты, у якіх вытворная $f'(x)$ функцыі $f(x)$ ператвараецца ў нуль, называюцца *стацыянарнымі пунктамі*, а значэнні функцыі ў гэтых пунктах — *стацыянарнымі значэннямі* гэтай функцыі.

Практыкаванні

Для дадзеных функцый знайсці ўсе лакальныя экстрэмумы. Па магчымасці высветліць, якія з іх з'яўляюцца лакальнымі мінімумамі і якія — лакальнымі максімумамі:

1898. $y=4x^2-6x-7$.

1899. $y=-3x^2-12x+100$.

1900. $y=(a-x)(a-2x)$.

1901. $y=(1-ax)(1-2x)$.

1902. $y=2x^3+6x^2-18x+120$.

1903. $y=2x^3-6x^2-48x-17$.

1904. $y=3x^4-4x^3$.

1905. $y=\sin x+\cos x$.

1906. $y=\sqrt{3}\sin x-\cos x$.

1907. $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$.

1908. $y=x^5$.

1909. $y=\sin^2 x-\cos^2 x$.

У задачах № 1910 — 1913 знайсці стацыянарныя значэнні дадзеных функцый:

1910. $y=x-\sin x+\cos x$.

1911. $y=2x+\sin x-\sqrt{3}\cos x$.

1912. $y=5\sin x+12\cos x-13x$.

1913. $y=\sin^2 x-\cos x$.

1914. Дакажыце, што функцыя $f(x)=|x|$ мае ў пункце $x=0$ лакальны мінімум. Ці задавальняецца пры гэтым умова $f'(0)=0$?

1915. У шар радыуса R упісаць цыліндр найбольшага аб'ёму. Дакажыце, што радыус гэтага цыліндра павінен складаць $\frac{2}{3}$ радыуса асновы конуса, а вышыня — $\frac{1}{3}$ вышыні конуса.

§ 238. Найменшае і найбольшае значэнні функцыі ў зададзеным інтэрвале

У раздзеле IX (§ 205) мы разгледзелі пытанне аб тым, як адшукваецца абсалютны мінімум і абсалютны максімум функцыі $f(x)$ у інтэрвале $[a, b]$. Сярод усіх лакальных экстрэмумаў і значэнняў функцыі $f(x)$ у канцах інтэрвалу $[a, b]$ трэба выбраць найменшае і найбольшае значэнні. Яны і даюць абсалютныя экстрэмумы. Аднак у раздзеле IX мы не маглі рашыць пытанне аб тым, як знаходзіць лакальныя экстрэмумы. Цяпер жа мы можам рашыць гэту задачу.

Для таго каб знайсці абсалютны мінімум і абсалютны максімум дыферэнцыруемай функцыі $y=f(x)$ у інтэрвале $[a, b]$, трэба:

1) з ураўнення $f'(x)=0$ знайсці ўсе стацыянарныя пункты функцыі $f(x)$ і, выбіраючы тыя з іх, якія пападаюць у інтэрвал $[a, b]$, вызначыць стацыянарныя значэнні гэтай функцыі ў дадзеным інтэрвале;

2) да стацыянарных значэнняў функцыі $f(x)$ у інтэрвале $[a, b]$ дадаць значэнні гэтай функцыі ў канцах гэтага інтэрвалу, г. зн. $f(a)$ і $f(b)$; сярод атрыманых значэнняў трэба выбраць найменшае і найбольшае.

Зноў, як і ў § 237, трэба падкрэсліць, што атрыманы рэзультат адносіцца толькі да функцый, *дыферэнцыруемых* у разглядаемым інтэрвале $[a, b]$. Калі ж у гэтым інтэрвале ёсць пункты, у якіх даследуемая функцыя не мае вытворнай, то гэтыя пункты трэба разглядаць асоба. Абсалютны мінімум

або абсалютны максімум функцыі ў інтэрвале $[a, b]$ можа дасягацца ў адным з такіх пунктаў (гл. рыс. 274 у інтэрвале [2, 6]).

Разгледзім некалькі прыкладаў.

Прыклад 1. Знайсці найменшае і найбольшае значэнні функцыі $f(x) = x^3 - 3x^2$ у інтэрвале [1, 3].

Маем: $f(x) = x^3 - 3x^2$, $f'(x) = 3x^2 - 6x$. З ураўнення $f'(x) = 0$, або $3x^2 - 6x = 0$, знаходзім стацыянарныя пункты функцыі $f(x)$: $x_1 = 0$ і $x_2 = 2$. У інтэрвал [1, 3] пападае толькі другі пункт. У ім функцыя прымае значэнне $f(2) = -4$. У крайніх пунктах інтэрвалу [1, 3] маем: $f(1) = -2$; $f(3) = 0$. З трох значэнняў $f(2) = -4$, $f(1) = -2$ і $f(3) = 0$ найменшым з'яўляецца -4, а найбольшым 0.

Таму мінімальнае значэнне функцыі $f(x) = x^3 - 3x^2$ у інтэрвале [1, 3] роўна -4, а максімальнае 0. Яны дасягаюцца адпаведна ў пунктах $x = 2$ і $x = 3$.

Прыклад 2. Знайсці найменшае і найбольшае значэнні функцыі $f(x) = \frac{3}{2}x + \sin x$ у інтэрвале $[a, b]$.

Маем: $f'(x) = \frac{3}{2} + \cos x$.

Функцыя $f'(x)$ дадатная пры ўсіх значэннях x. Таму $f(x)$ манатонна ўзрастае на ўсёй лікавай прамой. У такім выпадку ў левым канцы ($x = a$) гэта функцыя павінна прымаць найменшае значэнне $\frac{3}{2}a + \sin a$, а ў правым канцы ($x = b$) — найбольшае значэнне $\frac{3}{2}b + \sin b$.

Практыкаванні

1916. Знайсці найменшае і найбольшае значэнні функцыі $y = x^3 - 3x$ у інтэрвалах: а) $[-0{,}5; 0{,}5]$; б) $[-1{,}5; 2]$.

1917. Знайсці найменшае і найбольшае значэнні функцыі $y = \sin x - \sqrt{3}\cos x$ у інтэрвалах: а) $[-\pi; 0]$; б) $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

1918. Знайсці найменшае і найбольшае значэнні функцыі $y = \frac{x^3}{2} - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 10$ у інтэрвалах: а) [0, 1]; б) [0; 2,5]; в) [0, 4].

Знайсці найменшыя і найбольшыя значэнні дадзеных функцый у дадзеных інтэрвалах:

1919. $y = \frac{1}{2}x - \sin x$ у інтэрвалах: а) $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; б) $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$; в) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

1920. $y = x - \cos 2x$ у інтэрвалах: а) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; б) $[-\pi; \pi]$; в) $[-\pi; 0]$.

1921. $y = x^4 - 8x^2 - 9$ у інтэрвалах: а) $[-1, 1]$; б) $[0, 3]$; в) $[-3, 5]$.

1922. $y = 3x^4 - 4x^3 - 72x^2 + 200$ у інтэрвалах: а) $[-1, 1]$; б) $[-0{,}5; 3{,}5]$; в) $[-2, 5]$.

1923. $y = 1 + 36x + 36x^2 - 2x^3$ у інтэрвалах: а) $[-3, -1]$; б) $[-2, 2]$; в) $[-10, 4]$.

§ 239. Выкарыстанне вытворных для даследавання дыферэнцыруемых функцый і пабудавання іх графікаў

Выкарыстанне вытворных значна палягчае даследаванне дыферэнцыруемых функцый і пабудаванне іх графікаў. Пры дапамозе вытворных можна ўстанавіць участкі ўзрастання і ўчасткі ўбывання функцый, знайсці стацыянарныя пункты

і лакальныя экстрэмумы. А гэта дазваляе больш дакладна пабудаваць графікі даследуемых функцый.

У далейшым мы будзем прытрымлівацца наступнага плана* даследавання функцыі $y = f(x)$:

1) вобласць вызначэння функцыі;

2) паводзіны функцыі паблізу «асобых» пунктаў (напрыклад, функцыі $y = \frac{1}{x}$ паблізу пункта $x = 0$);

3) цотнасць функцыі;

4) перыядычнасць функцыі;

5) стацыянарныя пункты і лакальныя экстрэмумы функцыі;

6) інтэрвалы ўзрастання і інтэрвалы ўбывання функцыі;

7) нулі функцыі, г. зн. корані ўраўнення $f(x) = 0$;

8) інтэрвалы знакапастаянства функцыі;

9) паводзіны функцыі пры неабмежаваным узрастанні значэнняў аргумента ($x \to \infty$) і пры неабмежаваным убыванні значэнняў аргумента ($x \to -\infty$);

10) вобласць змянення функцыі.

Выкананне кожнага пункта гэтага плана карысна суправаджаць геаметрычнай інтэрпрэтацыяй, выконваючы крок за крокам пабудаванне графіка даследуемай функцыі.

У якасці прыкладу разгледзім функцыю

$$y = x^4 - 10x^2 + 9.$$

1) Вобласцю вызначэння дадзенай функцыі з'яўляецца мноства ўсіх сапраўдных лікаў.

2) «Асобых» пунктаў (тыпу пункта $x = 0$ для функцыі $y = \frac{1}{x}$) гэта функцыя не мае.

3) Функцыя цотная, паколькі пры любым значэнні x

$$(-x)^4 - 10(-x)^2 + 9 = x^4 - 10x^2 + 9.$$

Гэта павінна знайсці сваё адлюстраванне і ў графіку функцыі. Ён павінен атрымацца сіметрычным адносна восі ардынат.

4) Разглядаемая функцыя, відавочна, неперыядычная.

Наогул перыядычнасць той ці іншай функцыі часта вызначаецца шляхам простага ўказання на перыядычныя састаўляючыя гэтай функцыі (напрыклад, $\sin x$, $\cos x$ і да т. п.). Дадзеная функцыя падобных састаўляючых не мае. Безумоўна, гэта не можа служыць строгім доказам неперыядычнасці разглядаемай функцыі. Таму мы яшчэ вернемся да гэтага пытання пры разглядзе пункта 6.

(Аднак магчымы і такі доказ неперыядычнасці. Калі б дадзеная функцыя была перыядычнай з перыядам $T > 0$, то пры любым значэнні x выконвалася б роўнасць

$$(x + T)^4 - 10(x + T)^2 + 9 = x^4 - 10x^2 + 9.$$

У прыватнасці, пры $x = 0$ мы атрымалі б

$$T^4 - 10T^2 + 9 = 9,$$

адкуль $T = \sqrt{10}$. Такім чынам, у якасці перыяду можа быць толькі лік $\sqrt{10}$. Але, як мы ведаем, перыядычныя функцыі маюць бясконца многа дадатных перыядаў. Атрымана супярэчнасць. Значыць, дапушчэнне аб перыядычнасці дадзенай функцыі няправільнае.)

5) Стацыянарныя пункты функцыі $f(x)$ знаходзяцца як корані ўраўнення $f'(x) = 0$. У дадзеным выпадку $f'(x) = 4x^3 - 20x$, і таму нам трэба рашыць ураўненне

$$4x^3 - 20x = 0.$$

---

* Гэты план толькі нязначна адрозніваецца ад плана, апісанага ў § 210.

Яно мае тры корані:

$$x_1 = 0,\ x_2 = -\sqrt{5},\ x_2 = +\sqrt{5}.$$

Каб высветліць, якія з гэтых трох стацыянарных пунктаў даюць лакальныя экстрэмумы і якія іменна экстрэмумы (мінімумы або максімумы), разгледзім паводзіны вытворнай $f'(x)$ паблізу стацыянарных пунктаў. Маем:

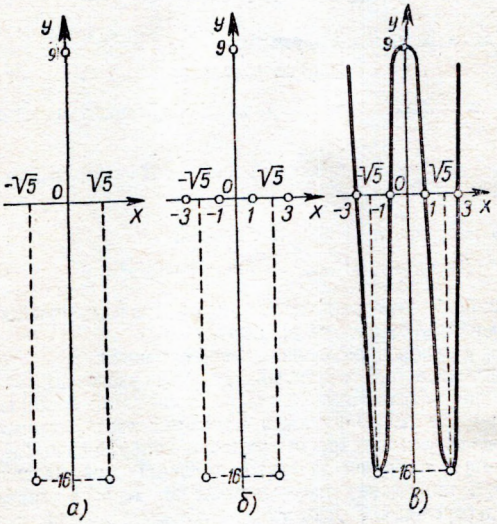
$$f'(x) = 4x^3 - 20x = 4x(x^2 - 5).$$

Калі x блізкае да нуля і $x < 0$, то абодва сумножнікі $4x$ і $x^2 - 5$ адмоўныя. У гэтым выпадку $f'(x) > 0$. Калі ж x блізкае да нуля і $x > 0$, то множнік $4x$ будзе дадатным, а множнік $x^2 - 5$ — адмоўным. У гэтым выпадку $f'(x) < 0$.

Пры пераходзе праз пункт $x = 0$ вытворная $f'(x)$ змяняе знак з «+» на «—». Таму пункт $x = 0$ з'яўляецца пунктам лакальнага максімуму функцыі $x^4 - 10x + 9$.

Аналагічна ўстанаўліваецца (зрабіце гэта самастойна!), што пункты $x = -\sqrt{5}$ і $x = \sqrt{5}$ з'яўляюцца пунктамі лакальных мінімумаў.

Цяпер можна знайсці і самі лакальныя экстрэмумы. Пры $x = 0$ $y = 9$; пры $x \pm \sqrt{5}$ $y = -16$.



Рыс. 324.

Такім чынам, функцыя $x^4 - 10x + 9$ мае адзін лакальны максімум, роўны 9 (ён дасягаецца пры $x = 0$), і два лакальныя мінімумы, кожны з якіх роўны — 16 (яны дасягаюцца пры $x = -\sqrt{5}$ і $x = \sqrt{5}$). Гэта дазваляе нам, дарэчы, адзначыць на каардынатнай плоскасці яшчэ тры пункты графіка нашай функцыі. Гэта будуць пункты з каардынатамі (0, 9), $(-\sqrt{5}, -16)$ і $(\sqrt{5}, -16)$, прычым першы з іх з'яўляецца пунктам лакальнага максімуму, а астатнія два — пунктамі лакальных мінімумаў (рыс. 324, *а*).

б) Знойдзем інтэрвалы ўзрастання і інтэрвалы ўбывання разглядаемай функцыі. Пасля даследавання стацыянарных пунктаў лёгка зразумець, што пры $-\sqrt{5} < x < 0$ і $x > \sqrt{5}$ гэта функцыя ўзрастае, а пры $x < -\sqrt{5}$ і $0 < x < \sqrt{5}$ — убывае (гл. рыс. 324, *а*). Але гэта можна даказаць і строга, не звяртаючыся да геаметрычнай інтуіцыі.

Сапраўды, вытворная

$$f'(x) = 4x(x^2 - 5)$$

пры $-\sqrt{5} < x < 0$ і $x > \sqrt{5}$ дадатная, а пры $x < -\sqrt{5}$ і $0 < x < \sqrt{5}$ адмоўная. А гэта і служыць доказам таго, што́ вышэй мы падмецілі, зыходзячы з геаметрычных меркаванняў.

Атрыманы рэзультат, між іншым, даказвае (і прытым зусім строга), што функцыя $y = x^4 - 10x^2 + 9$ неперыядычная. Сапраўды, пры $x > \sqrt{5}$ яна манатонна ўзрастае і, значыць, значэнні яе не могуць паўтарацца перыядычна.

7) Нулі дадзенай функцыі знаходзяцца з ураўнення

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0.$$

Яно мае чатыры корані:

$$x_1 = -3, \qquad x_3 = 1,$$
$$x_2 = -1, \qquad x_4 = 3.$$

(Сіметрычнасць гэтых кораняў зразумелая: разглядаемая функцыя цотная.)

Цяпер мы можам адзначыць на плоскасці каардынат яшчэ чатыры пункты, якія належаць графіку нашай функцыі. Гэта пункты восі x з абсцысамі $-3, -1, 1$ і 3 (гл. рыс. 324, *б*).

8) Відавочна, што паміж любымі двума суседнімі нулямі функцыя $f(x)$ захоўвае свой знак пастаянным*. Так, пры $-3 < x < -1$ яна набывае або толькі дадатныя, або толькі адмоўныя значэнні. Каб высветліць, якія іменна (па знаку) значэнні набывае наша функцыя пры $-3 < x < -1$, дастаткова вызначыць яе знак у якім-небудзь адным пункце гэтага інтэрвалу. У дадзеным выпадку зручна выбраць $x = -\sqrt{5}$ — пункт лакальнага мінімуму. У ім, як было паказана вышэй, функцыя набывае значэнне, роўнае -16. Таму ўсюды ў інтэрвале $-3 < x < -1$ наша функцыя набывае адмоўныя значэнні.

Аналагічна можна ўстанавіць (зрабіце гэта самастойна!), што пры $-1 < x < 1$ наша функцыя набывае дадатныя значэнні, а пры $1 < x < 3$ — адмоўныя значэнні. Што датычыцца значэнняў функцыі пры $|x| > 3$, то ўсе яны будуць дадатнымі.

9) Пры неабмежаваным узрастанні x ($x \to \infty$) і неабмежаваным убыванні x ($x \to -\infty$) значэнні функцыі $y = x^4 - 10x^2 + 9$ неабмежавана ўзрастаюць ($y \to \infty$). Гэты факт з'яўляецца відавочным, паколькі з ростам x велічыня x^4 расце больш хутка, чым $10x^2$. Магчыма і такое тлумачэнне:

$$x^4 - 10x^2 + 9 = (x^2 - 1)(x^2 - 9).$$

Калі $x \to \infty$ або $x \to -\infty$, то кожны з сумножнікаў $x^2 - 1$ і $x^2 - 9$ неабмежавана расце. Таму неабмежавана расце і іх здабытак.

10) Цяпер няцяжка вызначыць вобласць змянення даследуемай функцыі. Мінімальнае значэнне, роўнае -16, функцыя набывае ў двух пунктах: $x = -\sqrt{5}$ і $x = \sqrt{5}$. Максімальнага значэння яна не мае: пры неабмежаваным росце x (па абсалютнай велічыні) неабмежавана растуць і значэнні функцыі. Таму вобласць змянення функцыі $y = x^4 - 10x^2 + 9$ вызначаецца няроўнасцю $y \geqslant -16$.

Графік функцыі $y = x^4 - 10x^2 + 9$ дадзены на рысунку 324, *в*.

Практыкаванні

Даследаваць дадзеныя функцыі і пабудаваць іх графікі:

1924. $y = x^4 - 2x^2 - 3$.

1925. $y = \frac{1}{10}(x^4 - 13x^2 + 36)$.

1926. $y = x^3 - 9x$.

1927. $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

1928. $y = \frac{1}{2}x + \sin x$.

1929. $y = \sqrt{3}\cos x - 2x$.

1930*. $y = \sin^2 x + 2\cos x + \frac{1}{4}$.

---

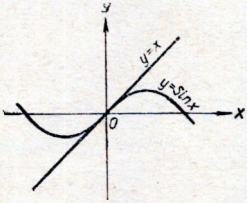
* Гэта «відавочнае» сцвярджанне можа быць даказана і зусім строга. Аднак доказ выходзіць за межы нашай праграмы.

§ 240. Прымяненне вытворнай да графічнага рашэння ўраўненняў

Пытанне аб прымяненні вытворнай да графічнага рашэння ўраўненняў мы разгледзім на прыкладзе ўраўнення $\sin x = x$.

Для рашэння гэтага ўраўнення на адным і тым жа чарцяжы пабудуем графікі функцый $y = \sin x$ і $y = x$ (рыс. 325). Гэтыя графікі перасякаюцца ў пункце з абсцысай $x = 0$. Таму $x = 0$ ёсць корань дадзенага ўраўнення.

Ці можам мы быць упэўнены, што іншых кораняў гэтага ўраўнення не існуе? Магчыма, паблізу пункта $x = 0$ ёсць яшчэ які-небудзь пункт перасячэння графікаў, які мы проста не заўважаем? Нельга ж, напрыклад, пры выбраным на рысунку 325 маштабе графічна пераканацца, што 0,01 — не корань ураўнення $\sin x = x$. Апрача таго, калі мы паглядзім у трыганаметрычныя табліцы, то заўважым, што $\sin 0{,}01 \approx 0{,}01$; $\sin 0{,}02 \approx 0{,}02$; $\sin 0{,}03 \approx 0{,}03\ldots$. Так што пакуль у нас няма ніякіх падстаў лічыць, што $x = 0$ — адзіны корань ураўнення $\sin x = x$.



Рыс. 325.

Каб разабрацца ў дадзеным пытанні, заўважым, што $(\sin x)' = \cos x$, $(x)' = 1$. Для любога вострага вугла x $\cos x < 1$. Таму на ўчастку $0 < x < \frac{\pi}{2}$ скорасць змянення функцыі $y = x$ больш скорасці змянення функцыі $y = \sin x$. Але ў такім выпадку пры $0 < x < \frac{\pi}{2}$ функцыя $y = x$ будзе заўсёды «апераджаць» функцыю $y = \sin x$. Значыць, ніякі лік з інтэрвалу $0 < x < \frac{\pi}{2}$ не можа служыць коранем ураўнення $\sin x = x$. Тым больш не можа быць коранем ураўнення і $x \geqslant \frac{\pi}{2}$, паколькі $\sin x \leqslant 1$. Такім чынам, дадзенае ўраўненне не мае дадатных кораняў.

Калі б існаваў адмоўны корань гэтага ўраўнення — a, то мы мелі б $\sin(-a) = -a$, адкуль $\sin a = a$. Але гэта азначала б, што ўраўненне $\sin x = x$ мае дадатны корань $x = a$. Атрымана супярэчнасць. Значыць, ураўненне $\sin x = x$ не можа мець адмоўных кораняў. Застаецца прызнаць, што лік $x = 0$ з'яўляецца адзіным коранем гэтага ўраўнення.

Практыкаванні

1931. Даказаць, што адзіным коранем ураўнення $\cos x = \frac{\pi}{2} - x$ з'яўляецца $x = \frac{\pi}{2}$.

Рашыць графічна ўраўненні:

1932. $\sin x = -x - \pi$.

1933. $\cos x = x - \frac{3}{2}\pi$.

§ 241. Гістарычныя заўвагі

Той раздзел матэматыкі, які вывучае вытворныя функцыі і іх ужыванне, называецца *дыферэнцыяльным злічэннем*. Гэта злічэнне ўзнікла з рашэння задач на правядзенне датычных да крывых, на вылічэнне скорасці руху, на адшуканне найбольшых і найменшых значэнняў функцый.

Асобныя рэзультаты ў дыферэнцыяльным злічэнні былі атрыманы ўжо даўно. Аднак да канца XVII стагоддзя не ўдавалася вылучыць асноўныя паняцці, якія

ляжалі ў аснове дадзенага пытання. Таму, хаця падстава для стварэння новага злічэння была падрыхтавана, злічэння па сутнасці яшчэ не было.

У сістэматычнай форме дыферэнцыяльнае злічэнне ўпершыню было выкладзена па-рознаму і незалежна адзін ад другога Ньютанам і Лейбніцам. Ньютан выклаў свае погляды на новае злічэнне ў працы «Метад флюксій і бесканечных радоў». Гэты трактат быў складзены каля 1671 г., але выйшаў у свет толькі ў 1736 г. — ужо пасля смерці аўтара. Першая друкаваная работа Лейбніца па дыферэнцыяльнаму злічэнню належыць да 1684 г.

Аўтарам першага курса па дыферэнцыяльнаму злічэнню быў прадстаўнік школы Лейбніца французскі матэматык Лапіталь (1661 — 1704). Гэты курс пад назвай «Аналіз бесканечна малых» выйшаў у свет у 1696 г.

Сучаснай трактоўцы дыферэнцыяльнага злічэння паклаў пачатак Кашы.

Тэрмін «вытворная» быў уведзены французскім матэматыкам Лагранжам (1736 — 1813).

Задачы на паўтарэнне

1934. Знайсці значэнні вытворнай ад функцыі $y = \frac{1}{4}x^4 - 4x^3 + 16$ у пунктах $x = 0$ і $x = 2$.

1935. Знайсці значэнні вытворнай ад функцыі $y = (3x + 5)(2x^2 - 1)$ у пунктах $x = -1$ і $x = 0$.

1936. Знайсці значэнні другой вытворнай ад функцыі $y = 5\sin x - 3\cos x$ у пунктах $x = \frac{\pi}{3}$ і $x = -\frac{\pi}{2}$.

1937. Пункт рухаецца згодна з законам $s(t) = t^3$ (s — шлях у метрах, t — час у секундах). У які момант часу яго імгненная скорасць роўна сярэдняй скорасці руху ў інтэрвале ад $t_1 = 13$ *сек* да $t_2 = 46$ *сек*?

1938. Пункт рухаецца згодна з законам $s(t) = 15 - (5 - t)(3 - t)$ да таго часу, пакуль яго скорасць не ператворыцца ў нуль. Які шлях пройдзе пры гэтым пункт?

1939. Адзін пункт рухаецца згодна з законам $s_1(t) = 13t + t^2$, а другі — згодна з законам $s_2(t) = 3t^2 + t$, дзе s_1 і s_2 — даўжыні шляхоў у метрах, t — час у секундах. Знайсці скорасці рухаў пунктаў у той момант, калі шляхі іх роўныя.

1940. Знайсці ўраўненне датычнай да крывой $y = 3x^3 + 2x + 5$ у пункце перасячэння гэтай крывой з воссю ардынат.

1941. Знайсці ўраўненне датычнай да крывой $y = 8x^3 - 1$ у пункце перасячэння гэтай крывой з воссю абсцыс.

1942. Які вугал утвараецца пры перасячэнні прамой $x = \frac{5}{4}\pi$ з сінусоідай $y = \sin x$?

1943. Якія вуглы ўтвараюцца пры перасячэнні прамой $y = \frac{1}{2}$ з касінусоідай $y = \cos x$?

1944. Знайсці каардынаты вяршынь парабал:

а) $3x^2 - 6x + 7 = 0$;

б) $2x^2 + 8x - 3 = 0$.

1945. У раскладанні $\left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x}\right)^{12}$ знайсці той член, які змяшчае x^4.

1946. Даказаць тоеснасць $1 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$. (Указанне. У формуле бінома Ньютана лічыць, што $a = b = 1$.)

1947. Колькі рацыянальных членаў змяшчае раскладанне $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{100}$?

Даследаваць функцыі і пабудаваць іх графікі (1948—1955):

1948. $y = \frac{1}{16}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + 9$.

1949. $y = 2x^2 - x^4 - 1$.

1950. $y = x - x^3$.

1951. $y = x + \sin x$.

1952. $y = \sin^2 \frac{x}{2}$.

1953*. $y = 0{,}5x^2 + \cos x$.

1954. $y = \sin x\,(1 + \cos x)$.

1955*. $y = 4\cos^2 x - 4\sqrt{3}\sin x + 5$.

1956. Вядома, што трываласць бэлькі з прамавугольным сячэннем прама прапарцыянальна шырыні і квадрату даўжыні сячэння. Знайсці размеры сячэння бэлькі найбольшай трываласці, якую можна выпілаваць з круглага бервяна, што мае дыяметр d сантыметраў.

Знайсці вытворныя наступных функцый (№ 1957—1963):

1957. $y = \frac{1}{2x + 5}$.

1958. $y = \sqrt{3 - x}$.

1959. $y = (x - 3)^3 + \frac{1}{(x - 3)^3}$.

1960. $y = \sin^2 2x + \cos \frac{x}{2}$.

1961. $y = (x^2 + 1)\cos x - (x^2 - 1)\sin x$.

1962. $y = \frac{1}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}$.

1963. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

1964. Даказаць, што крывыя $y = \cos^2 x + \sin 2x$ і $y = -5x^2 + 2x + 1$ датыкаюцца адна да другой у пункце $x = 0$.

1965. У шар радыуса r упісаць цыліндр найбольшага аб'ёму. Чаму роўны гэты аб'ём?

1966*. Даказаць, што бінаміяльныя каэфіцыенты — лікі цэлыя.

Раздзел XI

КАМПЛЕКСНЫЯ ЛІКІ

§ 242. Лікавыя палі

Паняцце ліку прайшло доўгі шлях гістарычнага развіцця. У раздзеле II мы расказалі аб тым, як ад найпрасцейшых натуральных лікаў чалавек прыйшоў да больш складаных, сапраўдных лікаў. Цяпер мы хочам вярнуцца да разгляду гэтага пытання. Але пры гэтым нам давядзецца некалькі адступіць ад гэтага парадку, у якім гістарычна развівалася паняцце ліку.

Адным з найпрасцейшых лікавых мностваў з'яўляецца мноства натуральных лікаў

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

У ім заўсёды выканальны два асноўныя алгебраічныя дзеянні: складанне і множанне. Гэта азначае, што якімі б ні былі натуральныя лікі m і n, сума іх $m+n$, а таксама здабытак $m \cdot n$ з'яўляюцца абавязкова натуральнымі лікамі. Пры гэтым выканальны наступныя пяць законаў:

1) камутатыўны закон складання

$$m+n=n+m;$$

2) асацыятыўны закон складання

$$(m+n)+k=m+(n+k);$$

3) камутатыўны закон множання

$$m \cdot n=n \cdot m;$$

4) асацыятыўны закон множання

$$(m \cdot n) \cdot k=m \cdot (n \cdot k);$$

5) дыстрыбутыўны закон множання адносна складання

$$(m+n) \cdot k=m \cdot k+n \cdot k.$$

Што датычыцца адымання і дзялення, то гэтыя два дзеянні над натуральнымі лікамі выканальны не заўсёды. Так, ні адну

з рознасцей 3—5 і 2—2, а таксама ні адну з дзелей 3:5 і 7:4 нельга выразіць ніякімі натуральнымі лікамі.

Каб дзеянне адымання было выканальным заўсёды, мноства натуральных лікаў трэба пашырыць шляхам далучэння да яго ўсіх адмоўных цэлых лікаў і нуля. У выніку такога пашырэння мы прыходзім да мноства ўсіх цэлых лікаў:

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots$$

Лікавае мноства, у якім заўсёды выконваецца складанне і множанне, падпарадкаванае прыведзеным вышэй пяці законам, называецца кольцам. Такім чынам, ***мноства ўсіх цэлых лікаў утварае кольца.***

Пашырыўшы мноства ўсіх натуральных лікаў да мноства ўсіх цэлых лікаў, мы дабіліся тым самым, што дзеянне адымання стала выканальным заўсёды. Але дзяленне па-ранейшаму засталося, наогул кажучы, невыканальным. Каб ліквідаваць гэты недахоп, трэба мноства ўсіх цэлых лікаў таксама пашырыць. Зрабіць гэта можна шляхам далучэння да яго ўсіх звычайных дробаў, гэта значыць лікаў выгляду $\frac{m}{n}$, дзе m і n — адвольныя цэлыя лікі і $m \neq 0$. У выніку такога расшырэння мы атрымліваем мноства ўсіх рацыянальных лікаў. Як было паказана ў другім раздзеле, у гэтым лікавым мноства заўсёды выканальны дзеянні складання, множання, адымання і дзялення (акрамя дзялення на нуль), прычым першыя два з іх падпарадкаваны пяці асноўным законам складання і множання.

Мноства лікаў, у якім заўсёды выканальны дзеянні складання і множання, падпарадкаваныя пяці асноўным законам, а таксама дзеянні адымання і дзялення (акрамя дзялення на нуль), называецца полем. ***Мноства ўсіх рацыянальных лікаў з'яўляецца найпрасцейшым лікавым полем.***

Дарэчы адразу заўважыць, што мноства ўсіх ірацыянальных лікаў поля не ўтварае. Сапраўды, любое з чатырох дзеянняў (складанне, множанне, адыманне і дзяленне) над ірацыянальнымі лікамі можа прывесці да ліку рацыянальнага. Так, напрыклад,

$$\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0,$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$$

і г. д. А вось мноства ўсіх сапраўдных лікаў утварае поле. Як адзначалася ў другім раздзеле, дзеянні складання, множання, адымання і дзялення сапраўдных лікаў (акрамя дзялення на нуль) не выводзяць нас за межы сапраўдных лікаў, прычым складанне і множанне падпарадкаваны пяці асноўным уласцівасцям.

Прывядзём яшчэ адзін, больш складаны, прыклад лікавага поля. Разгледзім усе сапраўдныя лікі віду $r + s\sqrt{2}$, дзе r і s — рацыянальныя лікі. Няхай $a + b\sqrt{2}$ і $c + d\sqrt{2}$ — адвольныя два лікі разглядаемага віду. Тады

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2};$$

$$(a + b\sqrt{2}) - (c + d\sqrt{2}) = (a - c) + (b - d)\sqrt{2};$$

$$(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = ac + ad\sqrt{2} + bc\sqrt{2} + 2bd =$$
$$= (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}.$$

Дапусцім цяпер, што лік $c + d\sqrt{2}$ не роўны нулю. Тады, відавочна, і супрэжаны з ім лік $c - d\sqrt{2}$ будзе адрозны ад нуля. Таму можна напісаць

$$\frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} = \frac{(a + b\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})}{(c + d\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})} = \frac{(ac - 2bd) + (bc - ad)\sqrt{2}}{c^2 - 2d^2} =$$
$$= \frac{ac - 2bd}{c^2 - 2d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 - 2d^2}\sqrt{2}.$$

Як мы бачым, кожнае з чатырох дзеянняў (складанне, адыманне, множанне і дзяленне) над лікамі віду $r + s\sqrt{2}$ прыводзіць да ліку таго ж самага віду. Зразумела таксама, што складанне і множанне ўсіх гэтых лікаў падпарадкавана кожнаму з пяці дадзеных вышэй законаў. Таму сукупнасць усіх лікаў віду $r + s\sqrt{2}$, дзе a і b — рацыянальныя лікі, утварае лікавае поле.

Практыкаванні

1967. Ці ўтварае кольца:

а) мноства ўсіх цотных лікаў;
б) мноства ўсіх няцотных лікаў;
в) мноства ўсіх лікаў, кратных некатораму ліку p?

1968. Ці ўтварае поле:

а) мноства ўсіх дробаў з назоўнікам 3;
б) мноства ўсіх дробаў, назоўнікі якіх ёсць цэлыя ступені ліку 3?

1969. Дакажыце, што мноства ўсіх канечных дзесятковых дробаў утварае кольца, але не ўтварае поле.

1970. Дакажыце, што любое лікавае поле або супадае з мноствам усіх рацыянальных лікаў, або змяшчае ў сабе гэта мноства.

1971. Дакажыце, што мноства ўсіх лікаў віду $a + b\sqrt{3}$, дзе a і b — рацыянальныя лікі, з'яўляецца полем. Ці змяшчае гэта поле:

а) усе рацыянальныя лікі;
б) усе ірацыянальныя лікі;
в) усе сапраўдныя лікі?

§ 243. Пастаноўка задачы аб пашырэнні поля сапраўдных лікаў. Камплексныя лікі

Патрэбы матэматыкі ўжо даўно ўказвалі на сур'ёзную неабходнасць пашырэння поля сапраўдных лікаў. Як мы ведаем, у ім, акрамя складання, адымання, множання і дзялення, выканальна яшчэ і дзеянне ўзвядзення ў ступень, якое ўяўляе сабой не што іншае, як мнагакратнае множанне. А вось здабыванне кораняў, гэта значыць дзеянне, адваротнае ўзвядзенню ў ступень, выканальна не заўсёды. Мы не ведаем, напрыклад, які сэнс можна надаць выразам $\sqrt{-1}$, $\sqrt[4]{-16}$. Таму ў полі сапраўдных лікаў невырашальныя нават такія, на першы погляд, простыя ўраўненні, як $x^2+1=0$; $x^4+16=0$ і г. д.

Перад матэматыкай паўстала задача *пашырыць поле сапраўдных лікаў шляхам далучэння да яго новых лікаў так, каб пашыранае мноства ўтварала лікавае поле, у якім было б выканальна дзеянне здабывання кораняў.*

Канчаткова гэта задача была рэшана толькі ў XIX стагоддзі.

Паглядзім, якія ж элементы павінна змяшчаць новае, пашыранае поле. Перш за ўсё яно павінна змяшчаць усе сапраўдныя лікі. Далей, у ім павінна быць вырашальна ўраўненне $x^2=-1$, паколькі дзеянне, адваротнае ўзвядзенню ў ступень, у гэтым полі выканальна. *Лік, квадрат якога роўны -1, прынята абазначаць літарай «i» і называць уяўнай адзінкай.* Такім чынам, па азначэнню ліку i

$$i^2=-1.$$

Мы патрабуем, каб новае мноства лікаў было полем. Таму разам з сапраўдным лікам b і ўяўнай адзінкай i яму павінен належаць і іх здабытак bi. Зусім гэтак жа разам з сапраўдным лікам a і здабыткам bi новаму лікаваму полю павінна належаць і іх сума $a+bi$. Такім чынам, новае мноства лікаў павінна змяшчаць усе лікі віду $a+bi$, дзе a і b — адвольныя сапраўдныя лікі, а i — уяўная адзінка. Гэтыя лікі мы назавём *камплекснымі лікамі.*

Лік a прынята называць *сапраўднай часткай*, а выраз bi — *уяўнай часткай* камплекснага ліку $a+bi$. Лік b называецца *каэфіцыентам пры ўяўнай частцы.* Напрыклад, для камплекснага ліку $2+3i$ сапраўднай часткай з'яўляецца лік 2, а ўяўнай — выраз $3i$; каэфіцыент пры ўяўнай частцы роўны 3. Для ліку $0-3i$ сапраўднай часткай з'яўляецца лік 0, а ўяўнай — выраз $-3i$; каэфіцыент пры ўяўнай частцы роўны -3. Для ліку $5+0i$ сапраўднай часткай з'яўляецца лік 5, а ўяўнай — выраз $0i$; каэфіцыент пры ўяўнай частцы роўны 0.

Два камплексныя лікі лічацца роўнымі, калі роўныя іх сапраўдныя часткі і каэфіцыенты пры ўяўных частках. Іншымі словамі,

$$a+bi=c+di$$

тады і толькі тады, калі $a=c$, $b=d$.

Як мы ведаем, для няроўных с а п р а ў д н ы х лікаў вызначаны суадносіны «больш» і «менш». Так, $5>4$, $0<7$ і г. д. Для няроўных к а м п л е к с н ы х лікаў такія суадносіны вызначыць немагчыма. Нельга, напрыклад, сказаць, які з двух лікаў большы: $2+3i$ або $5-7i$, $0+2i$ або $0+4i$ і г. д.

Практыкаванні

1972. Што значыць, што два камплексныя лікі $a+bi$ і $c+di$:

а) роўныя адзін другому; б) не роўныя адзін другому?

1973. Знайсці сапраўдныя значэнні x і y з ураўненняў:

а) $(x-y)+(3x+y)i=3-3i$,

б) $(x-5y)+(2x-y)i=6+3i$.

§ 244. Складанне камплексных лікаў. Процілеглыя лікі

А з н а ч э н н е. *Сумай двух камплексных лікаў* $a+bi$ *і* $c+di$ *называецца камплексны лік* $(a+c)+(b+d)i$:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i.$$

Іншымі словамі, *пры складанні камплексных лікаў іх сапраўдныя часткі і каэфіцыенты пры ўяўных частках складваюцца.*

П р ы к л а д ы.

1) $(1+i)+(2+3i)=(1+2)+(1+3)i=3+4i$;
2) $(5+6i)+(7-6i)=(5+7)+(6-6)i=12+0i$;
3) $(4+9i)+(-4+i)=(4-4)+(9+1)i=0+10i$;
4) $(3-7i)+(-3+7i)=(3-3)+(-7+7)i=0+0i$.

У вобласці сапраўдных лікаў ёсць лік 0, дадаванне якога да любога іншага сапраўднага ліку не мяняе гэтага ліку:

$$a+0=a.$$

Аналагічным лікам у вобласці камплексных лікаў з'яўляецца лік $0+0i$. Сапраўды, які б ні быў камплексны лік $a+bi$,

$$(a+bi)+(0+0i)=(a+0)+(b+0)i=a+bi.$$

Як мы ведаем, два сапраўдныя лікі a і $-a$, сума якіх роўна нулю, называюцца процілеглымі. Па аналогіі з гэтым два камплексныя лікі $a+bi$ і $-a-bi$ таксама называюцца *процілеглымі.*

Практыкаванні

1974. (В у с н а.) Назваць камплексныя лікі, процілеглыя дадзеным:

а) $3+i$; б) $1-5i$; в) $-2+0i$; г) $0+4i$; д) $0+0i$; е) $7+i$.

1975. Знайсці сапраўдныя значэнні x і y з ураўненняў:

а) $(5x+3yi)+(2y-xi)=3-i$;

б) $(2x-5i)+(7y+2xi)=-12+3yi$;

в) $(x+3yi)+\left(\frac{3}{2}y+2xi\right)=4+8i$.

§ 245. Адыманне камплексных лікаў

А з н а ч э н н е. *Рознасцю двух камплексных лікаў* $z_1=a+bi$ *і* $z_2=c+di$ *называецца такі камплексны лік* $z_3=x+yi$, *які ў суме з* z_2 *дае* z_1.

Іншымі словамі, для камплексных лікаў гэтак жа, як і для сапраўдных, роўнасць

$$z_3=z_1-z_2$$

па азначэнню азначае тое ж самае, што і роўнасць

$$z_2+z_3=z_1.$$

Само па сабе ўведзенае намі азначэнне не гарантуе, што ад кожнага камплекснага ліку можна адняць любы іншы камплексны лік. Магчымасць такога адымання і яго адназначнасць устанаўліваюцца наступнай тэарэмай.

Т э а р э м а. ***Для любых камплексных лікаў*** $z_1=a+bi$ ***і*** $z_2=c+di$ ***рознасць*** $z_3=z_1-z_2$ ***вызначана і прытым адназначна.***

Фактычна нам трэба даказаць, што існуе і прытым адзіны камплексны лік $z_3=x+yi$, які ў суме з z_2 дае z_1:

$$(c+di)+(x+yi)=a+bi. \qquad (1)$$

Па азначэнню сумы камплексных лікаў:

$$(c+di)+(x+yi)=(c+x)+(d+y)i.$$

Таму ўраўненне (1) можна перапісаць у выглядзе:

$$(c+x)+(d+y)i=a+bi.$$

Два камплексныя лікі роўныя тады і толькі тады, калі роўныя іх сапраўдныя часткі і каэфіцыенты пры ўяўных частках. Таму

$$\begin{cases} c+x=a, \\ d+y=b. \end{cases}$$

Гэта сістэма ўраўненняў заўсёды мае і прытым адзінае рашэнне:

$$x=a-c,$$
$$y=b-d.$$

Таму існуе і прытым адзіная пара сапраўдных лікаў (x, y), якая задавальняе ўраўненне (1). Тым самым тэарэма даказана.

Па сутнасці мы даказалі, што

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$$

Каб ад аднаго камплекснага ліку адняць другі, дастаткова гэта адыманне выканаць асобна для сапраўдных частак гэтых лікаў і каэфіцыентаў пры ўяўных частках.

Прыклады.

1) $(5+6i)-(3+7i)=(5-3)+(6-7)i=2-i$;
2) $(2+i)-(9+i)=(2-9)+(1-1)i=-7+0i$;
3) $(3+4i)-(3-i)=(3-3)+(4+1)i=0+5i$;
4) $(7-i)-(7-i)=(7-7)+(-1+1)i=0+0i$.

Практыкаванні

1976. Што выражае кожная з дадзеных формул — азначэнне або тэарэму:

а) $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$;
б) $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$?

1977. Знайсці сапраўдныя значэнні x і y з ураўненняў:

а) $(0+3xi)-(10x+2yi)=-5y+3i$;

б) $\left(-3y+\frac{1}{2}xi\right)-(-8x+5yi)=-2+12i$;

в) $\left(\frac{3}{4}x-2yi\right)-\left(\frac{1}{3}y+6xi\right)=0+21i$.

§ 246. Множанне камплексных лікаў

Натуральна патрабаваць, каб множанне камплексных лікаў $(a+bi)$ і $(c+di)$ выконвалася таксама, як і множанне двухчленаў з сапраўднымі каэфіцыентамі, а іменна:

$$(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=ac+(ad+bc)i+bdi^2.$$

Але па азначэнню ліку i

$$i^2=-1.$$

Таму $bdi^2=-bd$ і, такім чынам,

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i. \qquad (1)$$

Гэта формула і кладзецца ў аснову азначэння здабытку двух камплексных лікаў.

А з н а ч э н н е. *Здабыткам двух камплексных лікаў* $a+bi$ *і* $c+di$ *называецца камплексны лік* $(ac-bd)+(ad+bc)i$.

Для таго каб умець памнажаць камплексныя лікі адзін на другі, формулу (1) памятаць не абавязкова. Трэба толькі ведаць, што яна дае такі ж рэзультат, як і простае множанне двухчленаў $a+bi$ і $c+di$ з наступнай заменай i^2 на -1.

П р ы к л а д ы.

1) $(2+3i)(6-5i)=12-10i+18i-15i^2=(12+15)+$
$+(18-10)i=27+8i$;

2) $(4+i)(4-i)=16-4i+4i-i^2=(16+1)+(-4+$
$+4)i=17+0i$;

3) $(1+i)^2=(1+i)\cdot(1+i)=1+i+i+i^2=(1-1)+$
$+2i=0+2i$.

Як мы ведаем, у вобласці сапраўдных лікаў нуль валодае той уласцівасцю, што здабытак яго з любым іншым сапраўдным лікам роўны нулю:

$$a\cdot 0=0.$$

Вучні без асаблівай цяжкасці могуць пераканацца ў тым, што ў мностве камплексных лікаў аналагічнай уласцівасцю валодае лік $0+0i$. Для любога камплекснага ліку $a+bi$ выконваецца роўнасць:

$$(a+bi)\cdot(0+0i)=0+0i.$$

Практыкаванні

Вылічыць:

1978. $(5+i)(-2+3i)$.

1979. $(3+4i)(6-5i)$.

1980. $(7-2i)(3{,}5-i)$.

1981. $(0{,}5+0{,}2i)(2+3i)$.

1982. $(7+4i)^2$.

1983. $(5+i)(15-3i)$.

1984. $(-6+2i)(11+5i)$.

1985. $(0{,}5+i)(1+2i)$.

1986. $(\sqrt{2}-i)(\sqrt{3}+2i)$.

1987. $(\sqrt{3}+5i)(5-\sqrt{3}i)$.

1988. Знайсці камплексны лік z з ураўнення $(2-3i)z=$
$=-1-5i$.

§ 247. Дзяленне камплексных лікаў

У вобласці камплексных лікаў таксама, як і ў вобласці сапраўдных лікаў, суадносіна

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2}$$

разумеецца ў тым сэнсе, што $z_3 \cdot z_2 = z_1$.

Азначэнне. *Дзеллю ад дзялення камплекснага ліку z_1 на камплексны лік z_2 называецца такі камплексны лік z_3, які пры памнажэнні на z_2 дае z_1.*

У вобласці сапраўдных лікаў дзель $\frac{a}{b}$ вызначана для ўсіх значэнняў a і b, калі толькі $b \neq 0$. Аналагічна абстаіць справа і ў вобласці камплексных лікаў.

Тэарэма. ***Дзель $\frac{a+bi}{c+di}$ вызначана і прытым адназначна для ўсіх камплексных лікаў $a+bi$ і $c+di$, калі толькі***

$$c + di \neq 0 + 0i.$$

Доказ. Нам трэба паказаць, што пры $c+di \neq 0+0i$ існуе і прытым адзіная пара сапраўдных лікаў (x, y), якая задавальняе ўраўненню

$$(x+yi)(c+di) = a+bi. \tag{1}$$

Па правілу множання камплексных лікаў:

$$(x+yi)(c+di) = (xc-yd)+(xd+yc)i.$$

Таму ўраўненне (1) можна перапісаць у выглядзе:

$$(xc-yd)+(xd+yc)i = a+bi.$$

Два камплексныя лікі роўныя тады і толькі тады, калі роўныя іх сапраўдныя часткі і каэфіцыенты пры ўяўных частках. Таму

$$\begin{cases} cx - dy = a, \\ dx + cy = b. \end{cases} \tag{2}$$

Вылічым галоўны вызначальнік гэтай сістэмы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix} = c^2 + d^2.$$

Паколькі $c+di \neq 0+0i$, хаця б адзін з лікаў c і d адрозны ад нуля. Але тады $\Delta = c^2+d^2 > 0$. Значыць, па правілу Крамера (гл. § 30) сістэма ўраўненняў (2) мае і прытым адзінае рашэнне:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a & -d \\ b & c \end{vmatrix}}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2}.$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix}}{c^2 + d^2} = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Такім чынам,

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i.$$

Запамінаць гэту формулу не трэба; дастаткова ведаць, як яна атрымліваецца.

Прыклад. Знайсці адносіну $\frac{9 - 7i}{2 - 3i}$.

Няхай

$$\frac{9 - 7i}{2 - 3i} = x + yi.$$

Тады

$$(x + yi)(2 - 3i) = 9 - 7i;$$
$$2x + 2yi - 3xi - 3yi^2 = 9 - 7i;$$
$$(2x + 3y) + (2y - 3x)i = 9 - 7i.$$

Адсюль

$$\begin{cases} 2x + 3y = 9, \\ -3x + 2y = -7. \end{cases}$$

Рашаючы гэту сістэму, знаходзім $x = 3$, $y = 1$. Таму

$$\frac{9 - 7i}{2 - 3i} = 3 + i.$$

Практыкаванні

1989. Што выражае кожная з дадзеных формул — азначэнне ці тэарэму:

а) $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$;

б) $\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$?

Вылічыць:

1990. $\frac{0 + 4i}{1 + i}$.

1991. $\frac{2 + i}{2 - i}$.

1992. $\frac{5 + 0i}{-4 + 3i}$.

Даказаць роўнасці:

1993. $\frac{6 - i}{3 + 4i} = \frac{13 + 41i}{-25 + 25i}$.

1994. $\frac{2 + i}{3 - i} = \frac{13 + 4i}{17 - 9i}$.

§ 248. Поле камплексных лікаў

Камплексным лікам мы прысвяцілі ўжо некалькі параграфаў. Але нашы разважанні часта былі не строгімі. Мы дапускалі (хоць і свядома!) рад лагічных пагрэшнасцей, якія цяпер трэба выправіць.

Каб разабрацца ў гэтым, паставім перад сабой такое пытанне: што значыць *увесці ў разгляд новыя лікі?* Безумоўна, для новых лікаў мы павінны выбраць якіясьці абазначэнні. Напрыклад, камплексныя лікі мы абазначаем $a + bi$. Але галоўнае не ў гэтым. Галоўнае ў тым, каб вызначыць, як параўноўваюцца гэтыя лікі адзін з другім, як робяцца дзеянні над імі (складанне, адыманне, множанне, дзяленне). Пакуль гэтыя дзеянні не вызначаны, ужываць такія выразы, як, напрыклад, «сума новых лікаў» і «здабытак новых лікаў», мы не маем права.

А як мы ўводзілі камплексныя лікі? Перш за ўсё (гл. § 243) мы патрэбавалі, каб новае мноства лікаў змяшчала лік, квадрат якога (гэта значыць, *здабытак* з самім сабой) роўны — 1. Сярод ужо вядомых нам сапраўдных лікаў такога ліку не існуе. Калі ён і існуе, то толькі сярод новых лікаў. Але як жа ў такім выпадку мы можам гаварыць аб здабытку? Множанне ж новых лікаў яшчэ не было вызначана! Такім чынам, ужо азначэнне ўяўнай адзінкі было матэматычна некарэктным. Аб множанні новых лікаў мы гаварылі фактычна і тады, калі патрабавалі, каб новае мноства лікаў разам з сапраўдным лікам b і ўяўнай адзінкай i змяшчала іх здабытак bi. Далей, мы гаварылі аб *суме* $a + bi$, хоць складанне новых лікаў гэтак жа, як і множанне, яшчэ не было вызначана.

Вось чаму наша выкладанне тэорыі камплексных лікаў нельга прызнаць матэматычна строгім. Але як жа ў такім выпадку ўвесці ў разгляд камплексныя лікі? Адказ на гэта пытанне даецца ніжэй.

Камплекснымі лікамі называюцца лікі, якія запісваюцца ў выглядзе $a + bi$, *дзе* a *і* b *— адвольныя сапраўдныя лікі,* a *і — некаторы сімвал.*

Уводзячы абазначэнне $a + bi$, мы зусім не звязваем яго з якой бы там ні было сумай. Знак «+» у выразе $a + bi$ пакуль не з'яўляецца прызнакам сумірання. Ён уваходзіць проста як састаўная частка аднаго, не падзяляемага на часткі, выразу $a + bi$. Адзначым таксама, што мы не патрабуем з а г а д з я, каб выконвалася суадносіна $i^2 = -1$. Бо пакуль што i — гэта проста сімвал, а не лік.

Па азначэнню $a + bi = c + di$ *тады і толькі тады, калі* $a = c$, $b = d$.

Сума двух камплексных лікаў вызначаецца па формуле:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\,i, \tag{1}$$

а здабытак — па формуле:

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)\,i. \tag{2}$$

Рознасць двух камплексных лікаў $a + bi$ *і* $c + di$ *вызначаецца як такі камплексны лік, які ў суме з* $c + di$ *дае* $a + bi$. Як было даказана ў § 245, гэты лік існуе і роўны $(a - c) + (b - d)\,i$, гэта значыць

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)\,i. \tag{3}$$

Дзеллю ад дзялення камплекснага ліку $a + bi$ *на камплексны лік* $c + di$ *называецца такі камплексны лік, які ў выніку множання на* $c + di$ *дае* $a + bi$. У § 247 было даказана, што калі $c + di \neq 0 + 0i$, то дзель ад дзялення $a + bi$ на $c + di$ існуе і роўна:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\,i. \tag{4}$$

З прыведзеных вышэй чатырох формул натуральнымі на першы погляд здаюцца толькі формулы (1) і (3). Другія ж дзве формулы цяжка зразумець з першага погляду. Вось чаму мы пачалі з такога выкладу тэорыі камплексных лікаў, які хоць і з'яўляецца нястрогім, але затое дае магчымасць зразумець, як можна прыйсці да формул (2) і (4).

Дзеянні складання, множання, адымання і дзялення над камплекснымі лікамі прыводзяць зноў жа да камплексных лікаў. Паглядзім, ці выконваюцца пры гэтым тыя законы складання і множання, якія былі ўласцівы сапраўдным лікам:

$$z_1+z_2=z_2+z_1;$$
$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3);$$
$$z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1;$$
$$(z_1\cdot z_2)z_3=z_1(z_2\cdot z_3);$$
$$(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3.$$

Калі мы пакажам, што гэтыя законы выконваюцца, то тым самым будзе даказана, што мноства ўсіх камплексных лікаў утварае поле.

Пачнём з першага закону. Няхай $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$. Тады

$$z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i,$$
$$z_2+z_1=(c+di)+(a+bi)=(c+a)+(d+b)i.$$

Для сапраўдных лікаў перамяшчальны закон складання, як мы ведаем, выконваецца. Значыць, $a+c=c+a$, $b+d=d+b$. Таму камплексныя лікі z_1+z_2 і z_2+z_1 маюць аднолькавыя сапраўдныя часткі і каэфіцыенты пры ўяўных частках. Але ў такім выпадку яны роўныя: $z_1+z_2=z_2+z_1$.

Цяпер звернемся да пятага закону. Няхай $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$, $z_3=e+fi$. Тады $z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i$.

Значыць,

$$(z_1+z_2)z_3=[(a+c)+(b+d)i]\ (e+fi)=$$
$$=[(a+c)e-(b+d)f]+[(a+c)f+(b+d)e]i=$$
$$=[(ae-bf)+(ce-df)]+[(af+be)+(cf+de)]i.$$

З другога боку,

$$z_1z_3=(a+bi)\ (e+fi)=(ae-bf)+(af+be)i,$$
$$z_2z_3=(c+di)\ (e+fi)=(ce-df)+(cf+de)i.$$

Таму

$$z_1z_3+z_2z_3=[(ae-bf)+(ce-df)]+[(af+be)+(cf+de)]i.$$

Параўноўваючы лікі $(z_1+z_2)\,z_3$ і $z_1z_3+z_2z_3$, мы заўважаем, што яны маюць адпаведна роўныя сапраўдныя часткі і каэфіцыенты пры ўяўных частках. Але ў такім выпадку гэтыя камплексныя лікі роўныя паміж сабой: $(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3$.

Мы даказалі, што для камплексных лікаў выконваюцца перамяшчальны закон складання і размеркавальны закон множання адносна складання. Прапануем вучням самастойна пераканацца ў тым, што для камплексных лікаў выконваюцца і ўсе астатнія законы складання і множання.

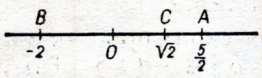
Такім чынам, ***мноства ўсіх камплексных лікаў утварае поле.***

Практыкаванне

1995. Ці ўтварае поле сукупнасць усіх лікаў выгляду:
а) $0+bi$, дзе b — сапраўдны лік;
б) $a+ai$, дзе a — сапраўдны лік;
в) $a+bi$, дзе a і b — адвольныя рацыянальныя лікі?

§ 249. Геаметрычнае ізабражэнне камплексных лікаў

Як вядома (гл. § 44), сапраўдныя лікі можна абазначаць пунктамі лікавай прамой. Пры гэтым кожнаму сапраўднаму ліку адпавядае адзіны пункт лікавай прамой. Напрыклад, сапраўднаму ліку $\frac{5}{2}$ адпавядае пункт A (рыс. 326), які знаходзіцца справа ад пачатковага пункта 0 на адлегласці ў $\frac{5}{2}$ адзінкі даўжыні; сапраўднаму ліку -2 адпавядае пункт B, які знаходзіцца злева ад пункта 0 на адлегласці ў 2 адзінкі даўжыні; сапраўднаму ліку $\sqrt{2}$ адпавядае лік C, які знаходзіцца справа ад 0 на адлегласці ў 2 адзінкі даўжыні. Наадварот, кожнаму пункту лікавай прамой адпавядае зусім пэўны сапраўдны лік. Напрыклад, пунктам A і B (рыс. 326) адпавядаюць рацыянальныя лікі $\frac{5}{2}$ і -2, а пункту C — ірацыянальны лік $\sqrt{2}$.

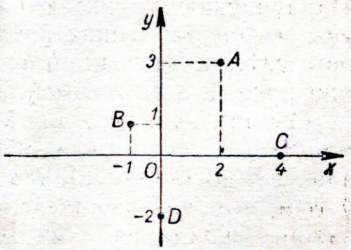


Рыс. 326.

Такім чынам, ***мноства ўсіх сапраўдных лікаў знаходзіцца ва ўзаемна адназначнай адпаведнасці з мноствам усіх пунктаў лікавай прамой.***

Падобна да таго як сапраўдныя лікі можна абазначаць пунктамі лікавай прамой, камплексныя лікі можна геаметрычна абазначаць пунктамі плоскасці.

Кожнаму камплекснаму ліку $a+bi$ паставім у адпаведнасць пункт плоскасці з каардынатамі (a, b). Напрыклад, ліку $2+3i$ паставім у адпаведнасць (рыс. 327) пункт A з каардынатамі (2, 3), ліку $-1+i$ — пункт B з каардынатамі $(-1, 1)$, ліку $4+0i$ — пункт C з каардынатамі (4, 0), ліку $0-2i$ — пункт D з каардынатамі $(0, -2)$ і г. д.



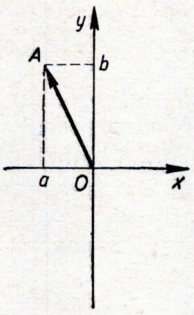
Рыс. 327.

Кожны пункт плоскасці мае пэўныя каардынаты. Таму пры выбранай адпаведнасці кожнаму пункту плоскасці будзе адпавядаць некаторы камплексны лік. Напрыклад,

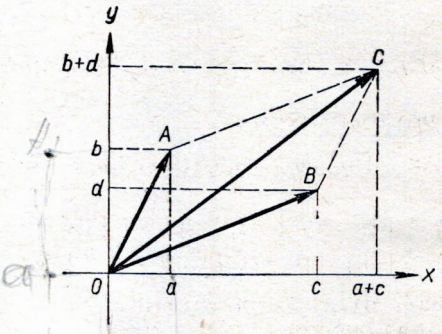
пункту A з каардынатамі (2, 3) адпавядае лік $2+3i$ (рыс. 327), пункту B з каардынатамі $(-1, 1)$ — лік $-1+i$, пункту C з каардынатамі (4, 0) — лік $4+0i$, а пункту D з каардынатамі (0, —2) — лік $0-2i$. Але ці не можа здарыцца так, што аднаму і таму ж пункту плоскасці, напрыклад пункту (α, β), будуць адпавядаць розныя камплексныя лікі, напрыклад a_1+b_1i і a_2+b_2i? Калі б было так, то мы мелі б:

$$\alpha=a_1, \quad \beta=b_1,$$
$$\alpha=a_2, \quad \beta=b_2.$$

Адсюль $a_1=a_2$, $b_1=b_2$. Але ў такім выпадку лікі a_1+b_1i і a_2+b_2i былі б роўныя паміж сабой.



Рыс. 328.



Рыс. 329.

Такім чынам, кожнаму камплекснаму ліку $a+bi$ адпавядае адзін, зусім пэўны пункт плоскасці, а іменна пункт з каардынатамі (a, b). Наадварот, кожнаму пункту плоскасці (α, β) адпавядае адзін, зусім пэўны камплексны лік, а іменна лік $\alpha+\beta i$. Такім чынам, ***мноства ўсіх камплексных лікаў знаходзіцца ва ўзаемна адназначнай адпаведнасці з мноствам усіх пунктаў плоскасці.***

З кожным пунктам плоскасці A можна звязаць вектар $\vec{OA}$, які выходзіць з пачатку каардынат і заканчваецца ў пункце A (рыс. 328). Таму камплексныя лікі дапускаюць і другую геаметрычную інтэрпрэтацыю. Кожны камплексны лік $a+bi$ можна геаметрычна інтэрпрэтаваць як вектар $\vec{OA}$ з каардынатамі (a, b). Каардынаты вектара $\vec{OA}$ пры гэтым будуць такімі ж, як і каардынаты пункта A, а іменна (a, b). Лёгка паказаць, што такая адпаведнасць паміж усімі камплекснымі лікамі і ўсімі вектарамі плоскасці, якія выходзяць з пачатку каардынат, з'яўляецца таксама ўзаемна адназначнай.

Выкарыстоўваючы вектарную інтэрпрэтацыю камплексных лікаў, лёгка вытлумачыць тое азначэнне, якое мы прынялі для сумы двух камплексных лікаў:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i.$$

Як вядома, пры складанні вектараў іх адпаведныя каардынаты складваюцца. Таму калі вектар $\vec{OA}$ (рыс. 329) мае каардынаты (a, b), а вектар $\vec{OB}$ — каардынаты (c, d), то іх сума — вектар $\vec{OC}$ — будзе мець каардынаты $(a+c, b+d)$. Гэты вектар якраз і адпавядае камплекснаму ліку $(a+c)+(b+d)i$, які з'яўляецца сумай камплексных лікаў $a+bi$ і $c+di$.

На жаль, вызначэнне здабытку двух камплексных лікаў

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

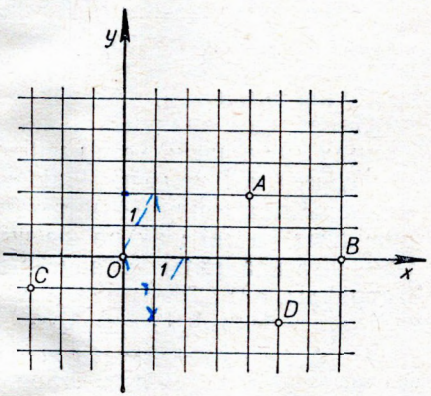
не дапускае такой простай інтэрпрэтацыі.

Практыкаванні

1996. Дадзеныя камплексныя лікі паказаць пунктамі плоскасці:

а) $1+i$; б) $1-i$; в) $-2+3i$; г) $-3-2i$;
д) $5+0i$; е) $-6+0i$; ж) $0+5i$; з) $0-4i$.

1997. Якія камплексныя лікі абазначаюць на рысунку 330 пункты A, B, C, D і O?



Рыс. 330.

1998. Даць геаметрычную інтэрпрэтацыю формулам:

а) $(1+2i)+(1-2i)=2+0i$;
б) $(3-4i)+(-1+2i)=2-2i$.

1999. Няхай пункт M служыць ізабражэннем на плоскасці камплекснага ліку $a+bi$. Пабудаваць на той жа плоскасці пункты, якія паказвалі б камплексныя лікі:

а) $a-bi$; б) $-a+bi$; в) $-a-bi$; г) $a+0i$;
д) $0+bi$; е) $-a+0i$; ж) $0-bi$.

2000. Няхай пункт M служыць ізабражэннем на плоскасці камплекснаму ліку $a-bi$. Дзе на той жа плоскасці размешчаны пункты, якія паказваюць лікі:

а) $3a+0i$; б) $-5a+0i$; в) $0-bi$; г) $0+2bi$; д) $4a+3bi$?

§ 250. Сапраўдныя і чыста ўяўныя лікі

Разгледзім асобна ўсе пункты плоскасці, якія ляжаць на восі абсцыс. Яны маюць каардынаты $(a, 0)$ і, значыць, адпавядаюць камплексным лікам віду $a+0i$. Няхай a_1+0i і a_2+0i — два такія лікі. Лёгка пераканацца ў справядлівасці наступных суадносін:

$$(a_1+0i)+(a_2+0i)=(a_1+a_2)+0i;$$
$$(a_1+0i)-(a_2+0i)=(a_1-a_2)+0i;$$
$$(a_1+0i)\cdot(a_2+0i)=a_1a_2+0i;$$
$$\frac{a_1+0i}{a_2+0i}=\frac{a_1}{a_2}+0i \qquad (a_2\neq 0).$$

Гэтыя суадносіны паказваюць, што ўсе камплексныя лікі віду $a+0i$, гэта значыць лікі з нулявым каэфіцыентам пры ўяўнай частцы, складваюцца, адымаюцца, памнажаюцца і дзеляцца адзін на другі як адпаведныя ім сапраўдныя лікі. Геаметрычнае ізабражэнне гэтых лікаў таксама супадае з геаметрычным ізабражэннем адпаведных сапраўдных лікаў: як адны, так і другія паказваюцца пунктамі восі абсцыс. Гэта дазваляе нам не рабіць адрознення паміж камплексным лікам $a+0i$ і сапраўдным лікам a. Таму ў далейшым мы ўсюды замест $a+0i$ будзем пісаць проста a. У прыватнасці, $0+0i=0$. Па гэтай прычыне вось абсцыс, на якой размешчаны пункты, што адпавядаюць сапраўдным лікам або камплексным лікам віду $a+0i$, называецца *сапраўднай воссю*.

Цяпер нам зразумела, якім чынам сапраўдныя лікі ўваходзяць у сукупнасць усіх камплексных лікаў.

Пункты восі ардынат маюць каардынаты $(0, b)$ і таму адпавядаюць лікам віду $0+bi$, гэта значыць камплексным лікам, сапраўдныя часткі якіх роўны нулю. Такія лікі характарызуюцца тым, што квадраты іх заўсёды адмоўныя (калі толькі $b\neq 0$). Сапраўды,

$$(0+bi)^2=(0+bi)(0+bi)=0+0\cdot bi+$$
$$+b\cdot 0i-b^2=-b^2+0i=-b^2.$$

У прыватнасці,

$$(0+i)^2=-1.$$

Калі камплексныя лікі яшчэ не былі ўведзены ў матэматыку, цяжка было ўявіць сабе, што квадраты лікаў могуць быць адмоўнымі. Таму камплексныя лікі віду $0+bi$ атрымалі назву *чыста ўяўных лікаў*. У далейшым гэтыя лікі мы будзем абазначаць не $0+bi$, а проста bi. Вось ардынат, на якой размяшчаюцца ўсе чыста ўяўныя лікі, называецца *ўяўнай воссю*.

Умовімся ў далейшым камплексны лік $0 + i$ абазначаць проста i. Пасля такой згоды мы можам гаварыць не толькі аб якімсьці сімвале i, але і аб камплексным ліку i, падразумяваючы пад ім лік $0 + i$. Як было паказана вышэй, $(0 + i)^2 = -1$. Таму камплексны лік i характарызуецца тым, што квадрат яго роўны -1:

$$i^2 = -1.$$

Лік i атрымаў назву *ўяўнай адзінкі*. Разгледзім здабытак адвольнага сапраўднага ліку b на ўяўную адзінку i:

$$b \cdot i = (b + 0i)(0 + i) = b \cdot 0 + bi + 0 \cdot 0i + 0 \cdot i^2 = 0 + bi.$$

Такім чынам,

$$b \cdot i = 0 + bi.$$

Гэтым і апраўдваецца прынятая вышэй згода абазначаць лікі віду $0 + bi$ проста bi.

У § 248 мы гаварылі, што па азначэнню $a + bi$ ёсць проста асобае абазначэнне, а не выражэнне сумы лікаў a і bi. Бо тады ж мы яшчэ не ведалі, што ўяўляюць сабой камплексныя лікі a і bi; тым больш мы не маглі ведаць, як складваюцца гэтыя лікі. Цяпер жа мы ведаем, што ўяўляюць сабой камплексныя лікі a і bi і што ўяўляе сабой сума двух камплексных лікаў. Таму цяпер законна паставіць пытанне: а ці нельга выраз $a + bi$ разглядаць як суму двух лікаў a і bi? Для рашэння гэтага пытання заўважым, што

$$a = a + 0i;$$
$$bi = 0 + bi.$$

Таму сума лікаў a і bi роўна:

$$(a + 0i) + (0 + bi) = (a + 0) + (0 + b)i = a + bi.$$

Гэта дае дадатны адказ на пастаўленае вышэй пытанне. Камплексны лік $a + bi$ можна разглядаць як суму двух камплексных лікаў: сапраўднага ліку a і чыста ўяўнага ліку bi.

Практыкаванні

2001. Што азначае кожны з выразаў:

а) камплексны лік $a+bi$ роўны нулю;

б) камплексны лік $a+bi$ не роўны нулю?

2002. Знайсці сапраўдныя значэнні x і y з ураўненняў:

а) $(x+y)+(x-y)i=2+4i$;

б) $(x+y)+(x-y)i=4i$;

в) $(x+y)+(x-y)i=2$;

г) $(y+2x)+(2y+4x)i=0$;

д) $(x+1{,}5y)+(2x+3y)i=13i$.

2003. Знайсці чыста ўяўныя лікі u і v з ураўненняў:

а) $u+iv=-3+2i$;

б) $5u-6iv=-24-5i$.

2004. Што можна сказаць аб двух камплексных ліках, калі іх сума і рознасць адначасова ўяўляюць сабой:

а) сапраўдныя лікі;

б) чыста ўяўныя лікі?

2005. Вылічыць:

а) $[i(2-i)]^2$;

б) $[2i(3-4i)]^2$.

2006. Даказаць, што квадрат камплекснага ліку $a+bi$ ўяўляе сабой сапраўдны лік тады і толькі тады, калі або $a=0$, або $b=0$.

§ 251. Супрэжаныя лікі. Практычны спосаб дзялення камплексных лікаў

Камплексны лік $a-bi$ называецца супрэжаным да камплекснага ліку $a+bi$. Напрыклад, лік $2-3i$ з'яўляецца супрэжаным да ліку $2+3i$, лік $5+4i$ — супрэжаным да ліку $5-4i$, лік $-6i$ $(=0-6i)$ — супрэжаным да ліку $6i$ $(=0+6i)$ і г. д.

Няхай a — адвольны сапраўдны лік. Тады

$$a = a + 0i = a - 0i.$$

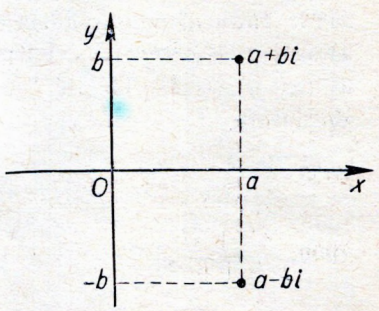
Таму любы сапраўдны лік роўны свайму супрэжанаму. Правільнае і адваротнае сцверджанне: калі камплексны лік $a+bi$ роўны свайму супрэжанаму, гэта значыць

$$a + bi = a - bi, \qquad (1)$$

то гэты лік сапраўдны. На самай справе, з (1) вынікае, што $b=-b$, або $b=0$. Значыць, $a+bi=a+0\cdot i=a$, што і трэба было даказаць.

Такім чынам, ***з усіх камплексных лікаў сапраўдныя лікі (і толькі яны) роўны сваім супрэжаным лікам.***

Лік $a-bi$ з'яўляецца супрэжаным да ліку $a+bi$. Але лік $a+bi$ будзе, відавочна, супрэжаным да ліку $a-bi$. Такім чынам, лікі $a+bi$ і $a-bi$ з'яўляюцца супрэжанымі адзін другому. Таму яны называюцца *ўзаемна супрэжанымі* камплекснымі лікамі. Відавочна, што любыя ўзаемна супрэжаныя камплексныя лікі $a+bi$ і $a-bi$ абазначаюцца на плоскасці пунктамі, сіметрычнымі адзін другому адносна сапраўднай восі (гл. рыс. 331).



Рыс. 331.

Здабытак двух узаемна супрэжаных камплексных лікаў ёсць лік сапраўдны.

На самай справе,

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2i^2.$$

Але $i^2=-1$. Таму

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2.$$

Даказаная ўласцівасць узаемна супрэжаных лікаў дазваляе даволі проста выконваць дзяленне камплексных лікаў. Няхай трэба знайсці дзель

$$\frac{a+bi}{c+di} \qquad (c+di \neq 0).$$

Памножым лічнік і назоўнік гэтага дробу на лік $c-di$, супрэжаны назоўніку. У рэзультаце мы атрымаем дроб, назоўнік якога будзе сапраўдным лікам:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}.$$

Цяпер, выкарыстоўваючы дыстрыбутыўны закон множання адносна складання, атрымаем:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{1}{c^2+d^2}[(ac+bd)+(bc-ad)i]=$$

$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

У § 247 гэта формула была атрымана іншым шляхам.

Прыклады.

1) $\frac{7-i}{3+i}=\frac{(7-i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{21-7i-3i-1}{9+1}=$

$=\frac{20-10i}{10}=2-i;$

2) $\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i-1}{1+1}=\frac{2i}{2}=i.$

Практыкаванні

2007. Назваць камплексныя лікі, супрэжаныя дадзеным:
Паказаць дадзеныя і супрэжаныя да іх лікі пунктамі плоскасці.
а) $1+i$; б) $2-3i$; в) 5; г) $6i$; д) 0; е) $2i-1$.
Вылічыць:

2008. $\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$.

2009. $\frac{42+2i}{3+5i}$.

2010. $\frac{7-2i}{2+7i}$.

2011. $\frac{1}{i}$.

2012. $\frac{2-5i}{4+i}-\frac{6-7i}{4-i}$.

2013. $\frac{2+1}{3-5i}+\frac{i}{i-1}$.

2014. $\frac{a-bi}{b+ai}-i\frac{b-ai}{a+bi}$.

§ 252. Ступені ўяўнай адзінкі

Па азначэнню першай ступенню ліку i з'яўляецца лік i, а другой ступенню лік -1.

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1.$$

Больш высокія ступені ліку i знаходзяцца наступным чынам:

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i;$$
$$i^4 = i^3 \cdot i = -i^2 = 1;$$
$$i^5 = i^4 \cdot i = i;$$
$$i^6 = i^5 \cdot i = i^2 = -1$$

і г. д. Відавочна, што пры любым натуральным n

$$i^{4n} = 1;$$
$$i^{4n+1} = i;$$
$$i^{4n+2} = -1;$$
$$i^{4n+3} = -i.$$

Напрыклад,

$$i^{125} - i^{26} = i^{124+1} - i^{24+2} = i - i^2 = i + 1;$$
$$i^{100} + i^{98} + i^{63} = i^{100} + i^{96+2} + i^{60+3} = 1 - 1 - i = -i.$$

Практыкаванні

Вылічыць:

2015. $i^6 + i^{16} + i^{26} + i^{36} + i^{46} + i^{56}$.

2016. $i^3 + i^{13} + i^{23} + i^{33} + i^{43} + i^{53}$.

2017. $i + i^2 + i^3 + i^4 + \ldots + i^n \ (n > 4)$.

2018. $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \ldots i^{100}$.

2019. $\frac{1}{i^3}$.

2020. $\frac{1}{i^{11}} - \frac{1}{i^{41}} + \frac{1}{i^{75}} - \frac{1}{i^{1023}}$.

2021. Пры якім сапраўдным значэнні a лік $3i^3 - 2ai^2 + (1 - a)i + 5$ будзе: а) сапраўдным; б) чыста ўяўным; в) роўным нулю?

§ 253. Здабыванне кораняў квадратных з адмоўных лікаў. Рашэнне квадратных ураўненняў з адмоўнымі дыскрымінантамі

Як мы ведаем,

$$i^2 = -1.$$

Разам з тым

$$(-i)^2 = (-1 \cdot i)^2 = (-1)^2 \cdot i^2 = -1.$$

Такім чынам, існуе па крайняй меры два значэнні кораня квадратнага з -1, а іменна i і $-i$. Але можа ёсць яшчэ якія-нябудзь камплексныя лікі, квадраты якіх роўны -1?

Каб высветліць гэта пытанне, дапусцім, што квадрат камплекснага ліку $a+bi$ роўны -1. Тады

$$(a+bi)^2=-1,$$
$$a^2+2abi-b^2=-1.$$

Два камплексныя лікі роўныя тады і толькі тады, калі роўныя іх сапраўдныя часткі і каэфіцыенты пры ўяўных частках. Таму

$$\begin{cases} a^2-b^2=-1, \\ ab=0. \end{cases} \tag{1}$$

Згодна з другім ураўненнем сістэмы (1) хоць бы адзін з лікаў a і b павінен раўняцца нулю. Калі $b=0$, то з першага ўраўнення атрымліваецца $a^2=-1$. Лік a сапраўдны, і таму $a^2\geqslant 0$. Неадмоўны лік a^2 не можа раўняцца адмоўнаму ліку -1. Таму роўнасць $b=0$ у дадзеным выпадку немагчыма. Застаецца прызнаць, што $a=0$, але тады з першага ўраўнення сістэмы атрымліваем:

$$-b^2=-1, \quad b=\pm 1.$$

Значыць, камплекснымі лікамі, квадраты якіх роўны -1, з'яўляюцца толькі лікі i і $-i$. Умоўна гэта запісваюць у выглядзе:

$$\sqrt{-1}=\pm i.$$

Аналагічнымі разважаннямі вучні могуць пераканацца ў тым, што існуе роўна два лікі, квадраты якіх роўны адмоўнаму ліку $-a$. Такімі лікамі з'яўляюцца $\sqrt{a}\,i$ і $-\sqrt{a}\,i$. Умоўна гэта запісваецца так:

$$\sqrt{-a}=\pm\sqrt{a}\,i.$$

Пад $\sqrt{a}$ тут падразумяваецца арыфметычны, гэта значыць дадатны корань; напрыклад: $\sqrt{4}=2$, $\sqrt{9}=3$, таму

$$\sqrt{-4}=\pm 2i, \quad \sqrt{-9}=\pm 3i \text{ і г. д.}$$

Калі раней пры разглядзе квадратных ураўненняў з адмоўнымі дыскрымінантамі мы гаварылі, што такія ўраўненні не маюць кораняў, то цяпер так гаварыць ужо нельга. Квадратныя ўраўненні з адмоўнымі дыскрымінантамі маюць камплексныя карані. Гэтыя карані атрымліваюцца па вядомых нам формулах. Няхай, напрыклад, дадзена ўраўненне $x^2+2x+5=0$; тады

$$x_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-5}=-1\pm\sqrt{-4}=-1\pm 2i.$$

Такім чынам, дадзенае ўраўненне мае два карані: $x_1=-1+2i$; $x_2=-1-2i$. Гэтыя карані ўзаемна супрэжаныя. Цікава адзначыць, што сума іх роўна -2, а здабытак 5, таму выконваецца тэарэма Віета!

Практыкаванні

2022. (Вусна.) Рашыць ураўненні:

а) $x^2 = -16$;

б) $x^2 = -2$;

в) $3x^2 = -5$.

2023. Знайсці ўсе камплексныя лікі, квадраты якіх роўны:

а) i; б) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

2024. Рашыць квадратныя ўраўненні:

а) $x^2 - 2x + 2 = 0$;

б) $4x^2 + 4x + 5 = 0$;

в) $x^2 - 14x + 74 = 0$.

Рашыць сістэмы ўраўненняў:

2025. $\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 45. \end{cases}$ **2026.** $\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ xy = 1. \end{cases}$

2027. Даказаць, што корані квадратнага ўраўнення з сапраўднымі каэфіцыентамі і адмоўным дыскрымінантам з'яўляюцца ўзаемна супрэжанымі.

2028. Даказаць, што тэарэма Віета правільная для любога квадратнага ўраўнення, а не толькі для ўраўненняў з неадмоўным дыскрымінантам.

2029. Скласці квадратныя ўраўненні з сапраўднымі каэфіцыентамі, коранямі якога з'яўляюцца:

а) $x_1 = 5 - i$, $x_2 = 5 + i$; б) $x_1 = 3i$, $x_2 = -3i$.

2030. Скласці квадратныя ўраўненні з сапраўднымі каэфіцыентамі, адзін з кораняў якога роўны $(3 - i)(2i - 4)$.

2031. Скласці квадратнае ўраўненне з сапраўднымі каэфіцыентамі, адзін з кораняў якога роўны $\frac{32 - i}{1 - 3i}$.

§ 254. Двухчленныя ўраўненні 3-й ступені з сапраўднымі каэфіцыентамі

Так называюцца ўраўненні віду

$$ax^3 = b,$$

дзе a і b — адвольныя сапраўдныя лікі, адрозныя ад нуля.

Рашэнне такіх ураўненняў мы разгледзім на некаторых прыватных прыкладах.

Прыклад 1. Рашыць ураўненне $x^3 = 8$.

Перапішам дадзенае ўраўненне ў выглядзе $x^3 - 8 = 0$. Скарыстоўваючы формулу для рознасці кубаў, атрымаем $(x-2)(x^2+2x+4)=0$. Калі $x-2=0$, то $x=2$; калі ж $x^2+2x+4=0$, то $x=-1\pm\sqrt{1-4}=-1\pm\sqrt{-3}=-1\pm\sqrt{3}i$. Такім чынам, дадзенае ўраўненне мае тры корані:

$$x_1=2;\quad x_2=-1-\sqrt{3}i;\quad x_3=-1+\sqrt{3}i.$$

Сапраўдным сярод іх з'яўляецца толькі адзін корань $x=2$.

Прыклад 2. Рашыць ураўненне $-\frac{1}{2}x^3=4$.

Памножыўшы абедзве часткі гэтага ўраўнення на -2, мы прыйдзем да ўраўнення $x^3=-8$. Гэта ўраўненне прынцыпова не адрозніваецца ад раней разгледжанага ўраўнення $x^3=8$. Таму мы прыводзім яго рашэнне без тлумачэнняў:

$$x^3+8=0,$$
$$(x+2)(x^2-2x+4)=0,$$

адкуль

$$x_1=-2;\quad x_2=1-\sqrt{3}i;\quad x_3=1+\sqrt{3}i.$$

Прыклад 3. Рашыць ураўненне $\frac{1}{3}x^3=-2$.

Памножыўшы абедзве часткі гэтага ўраўнення на 3, атрымаем $x^3=-6$, адкуль $x^3+6=0$. Разглядаючы лік 6 як куб ліку $\sqrt[3]{6}$, раскладзём x^3+6 на множнікі:

$$x^3+6=(x+\sqrt[3]{6})\left[x^2-\sqrt[3]{6}x+(\sqrt[3]{6})^2\right].$$

Значыць, або $x+\sqrt[3]{6}=0$, або $x^2-\sqrt[3]{6}x+(\sqrt[3]{6})^2=0$. Першае з гэтых ураўненняў мае корань $x_1=-\sqrt[3]{6}$. Другое ўраўненне дае:

$$x_{2,3}=\frac{\sqrt[3]{6}\pm\sqrt{(\sqrt[3]{6})^2-4(\sqrt[3]{6})^2}}{2}=\frac{\sqrt[3]{6}\pm\sqrt[3]{6}\sqrt{3}i}{2}=$$
$$=\frac{\sqrt[3]{6}}{2}(1\pm\sqrt{3}i)$$

Такім чынам, дадзенае ўраўненне мае тры корані:

$$x_1=-\sqrt[3]{6};$$
$$x_2=\frac{\sqrt[3]{6}}{2}(1+\sqrt{3}i);$$
$$x_3=\frac{\sqrt[3]{6}}{2}(1-\sqrt{3}i).$$

З гэтых трох кораняў толькі адзін з'яўляецца сапраўдным лікам.

Практыкаванні

Рашыць ураўненні:

2032. $3x^3 = 81$.

2033. $x^3 = -27$.

2034. $x^3 = 3$.

2035. $x^3 = -5$.

2036. $3x^3 = 2$.

2037. $-4x^3 = \frac{1}{2}$.

2038. Даказаць, што сума ўсіх кораняў ураўнення $x^3 = -4$ роўна 0.

2039. Знайсці здабытак усіх кораняў ураўнення $x^3 = 6$.

§ 255. Двухчленныя ўраўненні 4-й ступені з сапраўднымі каэфіцыентамі

Так называюцца ўраўненні віду

$$ax^4 = b,$$

дзе a і b — адвольныя сапраўдныя лікі, адрозныя ад нуля.

Рашэнне такіх ураўненняў мы разгледзім на некаторых прыватных прыкладах.

Прыклад 1. Рашыць ураўненне $x^4 = 16$.

Перапішам дадзенае ўраўненне ў выглядзе:

$$x^4 - 16 = 0.$$

Левую частку гэтага ўраўнення раскладзём на множнікі:

$$x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x + 2)(x - 2)(x^2 + 4).$$

Адсюль вынікае, што коранямі ўраўнення $x^4 = 16$ будуць:

$$x_1 = 2; \quad x_2 = -2; \quad x_3 = 2i; \quad x_4 = -2i.$$

Сапраўднымі сярод гэтых кораняў з'яўляюцца толькі два карані:

$$x_1 = -2 \text{ і } x_2 = 2.$$

Прыклад 2. Рашыць ураўненне $x^4 = -16$.

У мностве сапраўдных лікаў гэта ўраўненне не мае кораняў, таму што цотная ступень любога сапраўднага ліку неадмоўная. У вобласці ж камплексных лікаў гэта ўраўненне, як мы зараз пакажам, мае 4 розныя карані.

Перапішам дадзенае ўраўненне ў выглядзе:

$$x^4 + 16 = 0.$$

Выраз $x^4 + 16$ можна разглядаць як суму квадратаў лікаў x^2 і 4. Дапоўніўшы гэту суму да дакладнага квадрата, атрымаем:

$$x^4 + 16 = x^4 + 16 + 2 \cdot 4x^2 - 2 \cdot 4x^2 = (x^2 + 4)^2 - 8x^2.$$

Цяпер выкарыстаем формулу для рознасці квадратаў двух лікаў:

$$(x^2 + 4)^2 - 8x^2 = (x^2 + 4 + \sqrt{8x^2})(x^2 + 4 - \sqrt{8x^2}) =$$
$$= (x^2 + 2\sqrt{2}x + 4)(x^2 - 2\sqrt{2}x + 4).$$

Такім чынам,

$$x^4 + 16 = (x^2 + 2\sqrt{2}x + 4)(x^2 - 2\sqrt{2}x + 4).$$

Таму ўраўненне $x^4 = -16$ можна запісаць у выглядзе:

$$(x^2 + 2\sqrt{2}x + 4)(x^2 - 2\sqrt{2}x + 4) = 0.$$

Калі $x^2 + 2\sqrt{2}x + 4 = 0$, то

$$x_1 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i;$$
$$x_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i;$$

калі ж $x^2 - 2\sqrt{2}x + 4 = 0$, то $x_{3,4} = \sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 4}$, або

$$x_3 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i;$$
$$x_4 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i.$$

Мы атрымалі чатыры корані ўраўнення: $x^4 = -16$. Сярод іх няма ні аднаго сапраўднага кораня.

Прыклад 3. Рашыць ураўненне $3x^4 = -6$. Прынцыпова гэта ўраўненне не адрозніваецца ад папярэдняга. Таму мы прыводзім яго рашэнне без тлумачэнняў.

$$x^4 = -2.$$

$$x^4 + 2 = x^4 + (\sqrt{2})^2 = x^4 + (\sqrt{2})^2 + 2x^2\sqrt{2} - 2x^2\sqrt{2} =$$
$$= (x^2 + \sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2}x^2 = (x^2 + \sqrt{2})^2 - (\sqrt[4]{8}x)^2 = (x^2 + \sqrt[4]{8}x +$$
$$+ \sqrt{2}) \cdot (x^2 - \sqrt[4]{8}x + \sqrt{2}).$$

Калі $x^2 + \sqrt[4]{8}x + \sqrt{2} = 0$, то

$$x_{1,2} = \frac{-\sqrt[4]{8} \pm \sqrt{(\sqrt[4]{8})^2 - 4\sqrt{2}}}{2} = \frac{-\sqrt[4]{8} \pm \sqrt{-2\sqrt{2}}}{2} =$$
$$= \frac{-\sqrt[4]{8} \pm \sqrt[4]{8}i}{2}.$$

Калі ж $x^2 - \sqrt[4]{8}x + \sqrt{2} = 0$, то аналагічна атрымаем:

$$x_{3,4} = \frac{\sqrt[4]{8} \pm \sqrt[4]{8i}}{2}.$$

Такім чынам, дадзенае ўраўненне мае чатыры розныя корані. Сярод іх няма ні аднаго сапраўднага кораня.

Практыкаванні

Рашыць ураўненні:

2040. $x^4 = 81$.

2041. $x^4 = -81$.

2042. $x^4 = 2$.

2043. $x^4 = -3$.

2044. $3x^4 = 5$.

2045. Знайсці суму ўсіх кораняў ураўнення $x^4 = 4$.

2046. Знайсці здабытак усіх кораняў ураўнення $x^4 = -7$.

§ 256. Трыганаметрычная форма камплексных лікаў

Няхай камплекснаму ліку $a + bi$ адпавядае вектар $\overrightarrow{OA}$ з каардынатамі (a, b) (рыс. 332). Абазначым даўжыню гэтага вектара праз r, а вугал, які ён утварае з воссю x, праз φ. Па азначэнню сінуса і косінуса:

$$\frac{a}{r} = \cos\varphi; \quad \frac{b}{r} = \sin\varphi.$$

Таму $a = r\cos\varphi$; $b = r\sin\varphi$. Але ў такім выпадку камплексны лік $a + bi$ можна запісаць у выглядзе:

$$a + bi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Як вядома, квадрат даўжыні любога вектара роўны суме квадратаў яго каардынат. Таму $r^2 = a^2 + b^2$, адкуль $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Такім чынам, ***любы камплексны лік $a + bi$ можна даць у выглядзе:***

$$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{1}$$

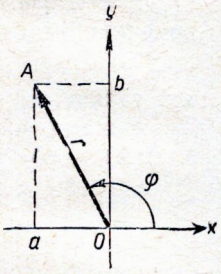
дзе $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, а вугал φ вызначаецца з умовы:

$$\begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{cases} \tag{2}$$

Такая форма запісу камплексных лікаў называецца *трыганаметрычнай*.

Лік r у формуле (1) называецца *модулем*, а вугал φ — *аргументам* камплекснага ліку $a+bi$.

Калі камплексны лік $a+bi$ не роўны нулю, то модуль яго дадатны; калі ж $a+bi=0$, то $a=b=0$ і тады $r=0$. Модуль любога камплекснага ліку вызначаны адназначна.



Рыс. 332.

Калі камплексны лік $a+bi$ не роўны нулю, то аргумент яго вызначаецца формулай (2) адназначна з дакладнасцю да вугла, кратнага 2π. Калі ж $a+bi=0$, то $a=b=0$. У гэтым выпадку $r=0$. З формулы (1) лёгка зразумець, што ў якасці аргумента φ у дадзеным выпадку можна выбраць любы вугал. Бо пры любым φ

$$0\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)=0.$$

Таму аргумент нуля не вызначаны.

Модуль камплекснага ліку z часам абазначаюць $|z|$, а аргумент — $\arg z$.

Разгледзім некалькі прыкладаў на ізабражэнне камплексных лікаў у трыганаметрычнай форме.

Прыклад 1. Запісаць у трыганаметрычнай форме камплексны лік $1+i$.

Знойдзем модуль r і аргумент φ гэтага ліку.

$$r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

Значыць, $\sin\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, адкуль $\varphi=\dfrac{\pi}{4}+2n\pi$.

Такім чынам,

$$1+i=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+2n\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+2n\pi\right)\right],$$

дзе n — любы цэлы лік. Звычайна з незлічонага мноства значэнняў аргумента камплекснага ліку выбіраюць тое, што знаходзіцца паміж 0 і 2π. У дадзеным выпадку такім значэннем з'яўляецца $\dfrac{\pi}{4}$. Таму

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Прыклад 2. Запісаць у трыганаметрычнай форме камплексны лік $\sqrt{3}-i$.

Маем: $r=\sqrt{3+1}=2$,

$$\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2};\quad \sin\varphi=-\frac{1}{2}.$$

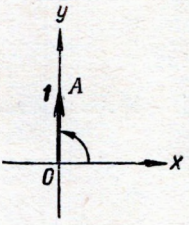
Таму з дакладнасцю да вугла, кратнага 2π, $\varphi = \frac{11}{6}\pi$; значыць,

$$\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi\right).$$

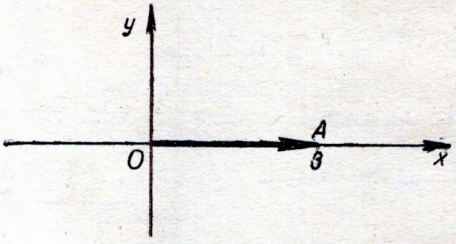
Прыклад 3. Запісаць у трыганаметрычнай форме камплексны лік i.

Камплекснаму ліку i адпавядае вектар $\vec{OA}$, які заканчваецца ў пункце A восі y з ардынатай 1 (рыс. 333). Даўжыня такога вектара роўна 1, а вугал, які ён утварае з воссю абсцыс, роўны $\frac{\pi}{2}$. Таму

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}.$$



Рыс. 333.



Рыс. 334.

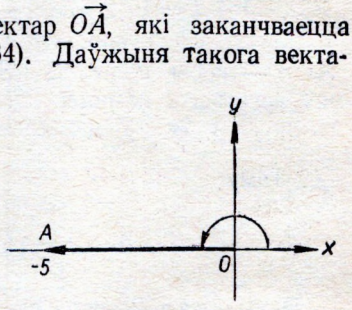
Прыклад 4. Запісаць у трыганаметрычнай форме камплексны лік 3.

Камплекснаму ліку 3 адпавядае вектар $\vec{OA}$, які заканчваецца ў пункце восі x з абсцысай 3 (рыс. 334). Даўжыня такога вектара $\vec{OA}$ роўна 3, а вугал, які ён утварае з воссю абсцыс, роўны 0. Таму

$$3 = 3(\cos 0 + i\sin 0).$$

Прыклад 5. Запісаць у трыганаметрычнай форме камплексны лік -5.

Камплекснаму ліку -5 адпавядае вектар $\vec{OA}$, які заканчваецца ў пункце восі x з абсцысай -5 (рыс. 335). Даўжыня такога вектара роўна 5, а вугал, які ён утварае з воссю абсцыс, роўны π. Таму



Рыс. 335.

$$-5 = 5(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Практыкаванні

2047. Дадзеныя камплексныя лікі запісаць у трыганаметрычнай форме, вызначыўшы іх модулі і аргументы:

1) $2 + 2\sqrt{3}i$;
2) $\sqrt{3} + i$;
3) $6 - 6i$;
4) $12i - 5$;
5) 25;
6) -4;
7) $3i$;
8) $-2i$;
9) $3i - 4$.

2048. Указаць на плоскасці мноства пунктаў, што паказваюць камплексныя лікі, модулі r і аргументы φ якіх задавальняюць умовам:

1) $r = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$;
2) $r = 2$;
3) $r \leqslant 3$;
4) $r < 3$;
5) $2 < r < 3$;
6) $\varphi = \frac{\pi}{3}$;
7) $0 < \varphi < \frac{\pi}{6}$;
8) $0 < \varphi < \pi$;
9) $1 < r < 2$;
10) $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$.

2049. Ці могуць модулем камплекснага ліку адначасова быць лікі r і $-r$?

2050. Ці могуць аргументам камплекснага ліку адначасова быць вуглы φ і $-\varphi$?

Наступныя камплексныя лікі даць у трыганаметрычнай форме, вызначыўшы іх модулі і аргументы:

2051*. $1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$.

2052. $\sin\varphi + i\cos\varphi$.

2053*. $-5(\cos 40^\circ - i\sin 40^\circ)$.

2054*. $2(\cos 20^\circ - i\sin 20^\circ)$.

2055*. $3(-\cos 15^\circ - i\sin 15^\circ)$.

§ 257. Множанне і дзяленне камплексных лікаў, зададзеных у трыганаметрычнай форме

Множанне і дзяленне камплексных лікаў больш зручна выконваць, калі гэтыя лікі зададзены ў трыганаметрычнай форме. Маюць месца наступныя тэарэмы.

Тэарэма 1. ***Модуль здабытку двух камплексных лікаў роўны здабытку іх модуляў, а аргумент — суме іх аргументаў.***

Доказ. Няхай

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ \text{а}\ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Тады

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\ (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)].$$

Але

$$\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 = \cos(\varphi_1 + \varphi_2),$$
$$\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2 = \sin(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Таму

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

А гэта і азначае, што модуль здабытку $z_1 z_2$ роўны здабытку модуляў лікаў z_1 і z_2, а аргумент здабытку — суме аргументаў лікаў z_1 і z_2. Тэарэма 1 даказана.

Прыклады.

$$2(\cos 130° + i\sin 130°)\cdot 3(\cos 230° + i\sin 230°) =$$
$$= 6(\cos 360° + i\sin 360°) = 6;$$
$$5(\cos 47° + i\sin 47°)\cdot 4(\cos 13° + i\sin 13°) = 20(\cos 60° + i\sin 60°) =$$
$$= 20\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 10 + 10\sqrt{3}\,i.$$

Адзначым, што даказаная тэарэма справядліва для любога ліку сумножнікаў, гэта значыць пры любым n:

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\ \ldots\ r_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n) =$$
$$= r_1 r_2 \ldots r_n[\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n)].$$

У прыватным выпадку, калі ўсе сумножнікі роўныя паміж сабой, атрымліваем:

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Гэта формула называецца формулай Муаўра*.

Пры $r = 1$ яна прымае выгляд:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Тэарэма 2. ***Модуль дзелі двух камплексных лікаў роўны дзелі модулей дзялімага і дзельніка; аргумент дзелі двух няроўных нулю камплексных лікаў роўны рознасці аргументаў дзялімага і дзельніка.***

Доказ. Абазначым дзель ад дзялення камплекснага ліку $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ на камплексны лік $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \neq 0$ праз $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тады $z = \frac{z_1}{z_2}$ або $z\cdot z_2 = z_1$. Таму

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1).$$

---

* Муаўр (1667—1754) — англійскі матэматык.

Выконваючы множанне ў левай частцы, атрымаем:

$$r r_2 [\cos(\varphi + \varphi_2) + i \sin(\varphi + \varphi_2)] = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1).$$

Модулі двух роўных камплексных лікаў, якія адрозніваюцца ад нуля, роўныя, а аргументы могуць адрозніваццa толькі на вугал, кратны 2π. Таму з апошняй роўнасці вынікае, што

$$r r_2 = r_1, \quad \varphi + \varphi_2 - \varphi_1 = 2n\pi,$$

дзе n — некаторы цэлы лік. Значыць,

$$r = \frac{r_1}{r_2}, \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2 + 2n\pi.$$

Аргумент любога камплекснага ліку, які адрозніваецца ад нуля, вызначаны толькі з дакладнасцю да вугла, кратнага 2π. Таму можна лічыць, што аргумент φ камплекснага ліку z роўны $\varphi_1 - \varphi_2$. Тэарэма даказана.

Прыклады.

1) $$\frac{2(\cos 150° + i \sin 150°)}{3(\cos 105° + i \sin 105°)} = \frac{2}{3}(\cos 45° + i \sin 45°) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}(1 + i);$$

2) $$\frac{\cos 70° + i \sin 70°}{\cos 100° + i \sin 100°} = \cos(-30°) + i \sin(-30°) =$$

$$= \cos 30° - i \sin 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Практыкаванні

2056. Выканаць наступныя дзеянні:

а) $5(\cos 40° + i \sin 40°) \cdot 3(\cos 50° + i \sin 50°)$;

б) $2(\cos 20° + i \sin 20°) \cdot 7(\cos 100° + i \sin 100°)$;

в) $4\left(\cos\frac{\pi}{8} + i \sin\frac{\pi}{8}\right) \cdot 6\left(\cos\frac{7}{8}\pi + i \sin\frac{7}{8}\pi\right)$;

г) $7\left(\cos\frac{8}{15}\pi + i \sin\frac{8}{15}\pi\right) \cdot 3\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i \sin\frac{2}{3}\pi\right) \times$

$\times 2\left(\cos\frac{4}{5}\pi + i \sin\frac{4}{5}\pi\right)$.

2057. Вылічыць:

а) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)^{100}$; б) $(\sqrt{3} + 1)^{50}$; в) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{8}$.

2058. Як зменяцца модуль і аргумент камплекснага ліку ў выніку множання гэтага ліку на:

а) i; в) $2i$; д) 4;
б) $-i$; г) $-3i$; е) -5?

2059. Выканаць дзяленне:

а) $\frac{\cos 130° + i \sin 130°}{\cos 40° + i \sin 40°}$; б)* $\frac{\cos 130° - i \sin 130°}{\cos 40° + i \sin 40°}$;

в)* $\dfrac{-\cos 100^\circ + i \sin 100^\circ}{\cos 40^\circ - i \sin 40^\circ}$; г) $\dfrac{2(\cos 107^\circ + i \sin 107^\circ)}{5(\cos 47^\circ + i \sin 47^\circ)}$.

2060. Як зменяцца модуль і аргумент камплекснага ліку ў выніку дзялення гэтага ліку на: а) i; б) $-i$?

§ 258. Здабыванне кораняў з камплексных лікаў

Няхай корань ступені n з камплекснага ліку $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, адрознага ад нуля, існуе і роўны

$$\rho(\cos\theta + i\sin\theta)^*.$$

Тады

$$[\rho(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Выкарыстоўваючы формулу Муаўра, атрымліваем:

$$\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Модулі двух роўных камплексных лікаў, адрозных ад нуля, роўныя, а аргументы могуць адрознівацца толькі на вугал, кратны 2π.

Таму

$$\rho^n = r, \quad n\theta = \varphi + 2k\pi,$$

адкуль

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n},$$

дзе k можа быць любым цэлым лікам. У прыватнасці,

$$\text{пры } k = 0 \qquad \theta = \frac{\varphi}{n};$$

$$\text{пры } k = 1 \qquad \theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n};$$

$$\text{пры } k = 2 \qquad \theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{4\pi}{n};$$

. . . . . .

$$\text{пры } k = n-1 \qquad \theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

Пры $k = n$, $n+1$, $n+2$ і г. д. будуць атрымлівацца значэнні θ, якія адрозніваюцца ад напісаных вышэй на вуглы, кратныя 2π. Таму ніякіх новых камплексных лікаў гэтыя значэнні k даць не могуць.

Лёгка паказаць, што ніякіх новых камплексных лікаў мы не атрымаем і пры адмоўных значэннях k.

Такім чынам, калі толькі корань ступені n з камплекснага ліку $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ існуе, то ён можа прымаць толькі наступныя n значэнняў:

$$\alpha_0 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right);$$

$$\alpha_1 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi}{n}\right);$$

. . . . . .

$$\alpha_{n-1} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n}\right).$$

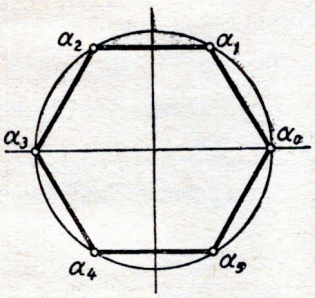
* ρ і θ — грэчаскія літары; чытаюцца адпаведна ро і тэта.

Непасрэднай праверкай лёгка ўстанавіць, выкарыстоўваючы формулу Муаўра, што кожны з гэтых лікаў задавальняе суадносіне

$$\alpha^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

і таму з'яўляецца значэннем кораня ступені n з камплекснага ліку

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$



Рыс. 336.

Такім чынам, кожны камплексны лік, адрозны ад нуля, мае роўна n кораняў n-й ступені.

Геаметрычна ўсе n значэнняў кораня n-й ступені з камплекснага ліку $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ паказваюцца пунктамі, што ляжаць на акружнасці з цэнтрам у пачатку каардынат, радыус якой роўны $\sqrt[n]{r}$ (гл., напрыклад, рыс. 336, на якім $r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 1$, $n = 6$). Калі ўсе гэтыя пункты злучыць паслядоўна прамалінейнымі адрэзкамі, то ў выніку атрымаецца правільны n-вугольнік.

Прыклад. Знайсці ўсе значэнні кораня 4-й ступені з ліку i.

Надаючы i выгляд $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$, знойдзем, што модулі ўсіх кораняў роўны $\sqrt[4]{1} = 1$, а аргументы $\frac{\pi}{8}$; $\frac{\pi}{8} + \frac{2\pi}{4}$; $\frac{\pi}{8} + \frac{4\pi}{4}$; $\frac{\pi}{8} + \frac{6\pi}{4}$, або $\frac{\pi}{8}$; $\frac{5}{8}\pi$; $\frac{9}{8}\pi$; $\frac{13}{8}\pi$. Таму коранямі 4-й ступені з ліку i з'яўляюцца лікі:

$$\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8};$$

$$\cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8};$$

$$\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8};$$

$$\cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8}.$$

Пры жаданні, выкарыстоўваючы трыганаметрычныя табліцы, гэтыя корані можна запісаць у больш яўным выглядзе.

Практыкаванні

2061. Знайсці ўсе значэнні дадзеных кораняў:

а) $\sqrt[3]{3}$; б) $\sqrt[3]{1+i}$; в) $\sqrt[4]{1}$; г) $\sqrt[4]{-1}$; д) $\sqrt{\cos 100^\circ + i\sin 100^\circ}$.

2062. Рашыць ураўненні:

а) $x^5 = a$ (a — сапраўдны лік); б) $x^5 = i$.

2063. Рашыць ураўненне:

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

2064. Даказаць, што ўсе корані n-й ступені з камплекснага ліку z можна размясціць так, што ў выніку атрымаецца геаметрычная прагрэсія. Знайсці першы член і назоўнік гэтай прагрэсіі.

§ 259. Алгебраічнае ўраўненне *n*-й ступені

Найбольш поўна элементарная матэматыка разглядае алгебраічныя ўраўненні толькі дзвюх ступеней: першай і другой. Гэтыя ўраўненні маюць выгляд:

$$ax + b = 0 \quad (a \neq 0)$$

і

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0).$$

У вобласці камплексных лікаў любое алгебраічнае ўраўненне 1-й ступені мае роўна адзін корань, а любое алгебраічнае ўраўненне 2-й ступені — роўна два корані. У вышэйшай алгебры вывучаюцца ўраўненні адвольных ступеней. Алгебраічнае ўраўненне *n*-й ступені мае наступны выгляд:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \qquad (1)$$

дзе x — невядомая велічыня, а a_0, a_1, ..., a_n — зададзеныя камплексныя лікі, прычым $a_0 \neq 0$. Пытанне аб існаванні і колькасці кораняў такога ўраўнення доўгі час з'яўлялася цэнтральным пытаннем алгебры. У 1799 г. выдатны нямецкі матэматык Гаўс (1777—1855) даказаў наступную тэарэму: ***любое алгебраічнае ўраўненне n-й ступені мае хоць бы адзін камплексны корань.***

Гэта сцверджанне ўвайшло ў матэматыку пад назвай асноўнай тэарэмы алгебры*. Пасля доказу Гаўса было прапанавана вельмі многа іншых спосабаў доказу гэтай тэарэмы. Сам Гаўс прапанаваў яшчэ тры доказы. Усе доказы гэтай тэарэмы, якія існуюць да цяперашняга часу, дастаткова складаныя і таму не могуць быць разгледжаны ў нашым падручніку.

Разгледзім ураўненне

$$(x - 1)^3 (x - 2) = 0.$$

Няцяжка зразумець, што яно мае роўна два корані: 1 і 2. Аднак корані гэтыя знаходзяцца ў нераўнапраўным становішчы. Множнік $x - 2$, які адпавядае кораню 2, уваходзіць у левую частку ўраўнення ў першай ступені, а множнік $x - 1$, які адпавядае кораню 1, — у трэцяй ступені. Пра корань 2 кажуць, што ён з'яўляецца *простым* коранем разглядаемага ўраўнення, а пра корань 1 — што ён з'яўляецца *кратным* коранем, дакладней, *коранем кратнасці 3*.

Асноўная тэарэма алгебры гарантуе існаванне хоць бы аднаго камплекснага кораня алгебраічнага ўраўнення. Аднак, зыходзячы з яе, лёгка даказаць, што ***любое алгебраічнае ўраўненне n-й ступені мае роўна n камплексных кораняў, калі кожны корань лічыць столькі разоў, якая яго крат-***

* Па меры развіцця алгебры змяняўся і яе змест. Сучасная алгебра змяшчае настолькі шырокі матэрыял, што цяпер дадзеную тэарэму ўжо не трэба разглядаць як асноўную тэарэму алгебры.

насць. Пры гэтым, калі корані алгебраічнага ўраўнення (1) роўны $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то левая частка гэтага ўраўнення мае выгляд:

$$a_0 (x - x_1) (x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

(параўнайце з квадратным ураўненнем!).

Для ўраўненняў 1-й і 2-й ступені выведзены агульныя формулы, па якіх можна знаходзіць корані гэтых ураўненняў. Так, напрыклад, для ўраўнення $ax^2 + bx + c = 0$ такой формулай з'яўляецца формула

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Аналагічныя формулы атрыманы і для ўраўненняў 3-й і 4-й ступені. Аднак гэтыя формулы вельмі грувасткія і таму тут не прыводзяцца. Што ж датычыцца адвольных алгебраічных ураўненняў больш высокіх ступеней, то для іх, як паказаў нарвежскі матэматык Абель (1802—1829), такіх формул скласці, наогул кажучы, нельга. Вычарпальнае рашэнне пытання аб умовах, пры якіх ураўненне можа быць рэшана ў радыкалах, даў выдатны французскі матэматык Эварыст Галуа (1811—1832).

Такім чынам, дакладна рашыць алгебраічнае ўраўненне ступені вышэй чацвёртай удаецца не заўсёды. Аднак сучасная матэматыка мае вельмі эфектыўныя метады набліжанага рашэння такіх ураўненняў. Гэтыя метады даюцца ў кнігах па вылічальнай матэматыцы.

§ 260. Гістарычныя заўвагі

Першае ўпамінанне аб «уяўных» ліках як аб коранях квадратных з адмоўных лікаў адносіцца яшчэ да XVI стагоддзя. У 1545 годзе італьянскі вучоны Кардана (1501—1576) апублікаваў працу, у якой, імкнучыся рашыць ураўненне $x^3 - 12x + 16 = 0$, ён прыйшоў да выразу $\sqrt{-243}$. Праз гэты выраз даваліся сапраўдныя корані ўраўнення $x_1 = x_2 = 2$; $x_3 = -4$. Такім чынам, у працы Кардана ўяўныя лікі з'явіліся як прамежкавыя члены ў вылічэннях.

У 1629 годзе галандскі вучоны Жырар (1595—1632) упершыню выказаў сцверджанне, што ўсякае алгебраічнае ўраўненне n-й ступені мае роўна n кораняў. Строга даказаць гэта яму не ўдалося. Як мы ведаем, гэта зрабіў Гаўс толькі ў 1799 годзе. Аднак важна тое, што, выказаўшы правільную гіпотэзу, Жырар падкрэсліў, што, акрамя сапраўдных кораняў, пры гэтым трэба ўлічваць і камплексныя корані.

Да сярэдзіны XVIII стагоддзя камплексныя лікі з'яўляюцца толькі эпізадычна ў працах некаторых матэматыкаў. З сярэдзіны XVIII стагоддзя Даламбер, Эйлер і Лагранж з поспехам выкарыстоўваюць функцыі камплекснага аргумента для рашэння некаторых задач гідрадынамікі. З дапамогай функцый камплекснага пераменнага рашаюцца задачы аб складанні геаграфічных карт, а таксама рад чыста матэматычных задач. Да канца XVIII стагоддзя былі вывучаны ўсе асноўныя ўласцівасці камплексных лікаў. Гэтыя лікі становяцца адным з наймацнейшых інструментаў матэматыкі.

Аднак матэматыкі XVIII стагоддзя не разумелі да канца прыроды камплексных лікаў. Яны лічылі гэтыя лікі ўяўнымі, пазбаўленымі ўсякага аб'ектыўнага зместу.

Толькі ў канцы XVIII стагоддзя, калі ў матэматыку трывала ўвайшлі вектары, камплексным лікам стала магчыма даць простую геаметрычную інтэрпрэтацыю і растлумачыць правілы дзеянняў над імі. Упершыню гэта зрабіў датчанін Весель (1745—1818). Цікава адзначыць, што Весель не быў спецыялістам-матэматыкам. Яго даследаванні аб геаметрычным вытлумачэнні камплексных лікаў доўгі час заставаліся невядомымі і звярнулі на сябе ўвагу толькі ў другой палавіне XIX стагоддзя.

Поўнае прызнанне матэматыкамі камплексных лікаў пачалося толькі пасля выхаду ў свет прац Гаўса.

Адным з самых выдатных дасягненняў матэматыкаў XVIII і XIX стагоддзяў з'явілася стварэнне тэорыі функцый камплекснага пераменнага. Гэта тэорыя адыгрывае цяпер адну з асноўных ролей у прыкладной матэматыцы.

Задачы на паўтарэнне

2065. Ці можа сума квадратаў двух лікаў быць адмоўнай? Адказ растлумачыць на прыкладах.

2066. Пры якой умове квадрат камплекснага ліку $a + bi$ з'яўляецца чыста ўяўным лікам?

2067. У якім выпадку сума і здабытак двух камплексных лікаў з'яўляюцца сапраўднымі лікамі?

Спрасціць выразы:

2068. $(1 + i)^2 + (1 - i)^2$.

2069. $(1 + i)^3 + (1 - i)^3$.

2070. $(1 + i)^4 + (1 - i)^4$.

2071. $\dfrac{1 + i}{1 - i} + \dfrac{1 - i}{1 + i}$.

2072. $\dfrac{(1 + i)^8}{(1 - i)^4} + \dfrac{3 + 2i}{i(6 - 8i)} \cdot (1 + i)^2$.

2073. $\dfrac{(1 + i)^8}{0{,}4(1 - i)^8} \cdot \left(\dfrac{2 - i}{4 + 3i} - \dfrac{1 - 2i}{3 + 4i} \right)$.

Даказаць тоеснасці:

2074. $(1 + i)^{20} = -2^{10}$.

2075. $(1 - i)^{30} = 2^{15} i$.

2076. Скласці квадратнае ўраўненне з сапраўднымі каэфіцыентамі, адзін з кораняў якога роўны:

а) $(5 + i)(i - 3)$;

б) $\dfrac{5 + i}{i - 3}$.

2077. Ці можа квадратнае ўраўненне з сапраўднымі каэфіцыентамі мець карані $1 + i$ і $1 + 2i$?

2078. Знайсці сапраўдныя лікі x і y з ураўненняў:

а) $\dfrac{3x - iy}{2y - 5ix} = \dfrac{7 + 5i}{12 - 8i}$;

б) $\dfrac{y - ix}{x + iy} = \dfrac{4 + i}{4i - 1}$.

2079. Знайсці чыста ўяўныя лікі u і v з ураўненняў:

а) $5v - 7ui = -7 + 5i$;

б) $2u + 3vi = 12 + 6i$.

2080. Даказаць, што для любых камплексных лікаў $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$. Якую вядомую з геаметрыі тэарэму аб дыяганалях паралелаграма выражае гэта суадносіна?

2081. Знайсці модуль і аргумент камплекснага ліку

$$(5 - 12i)(3 - 4i).$$

2082. Выразіць модуль і аргумент камплекснага ліку праз модуль і аргумент супрэжанага з ім ліку.

2083. Даць у трыганаметрычнай форме камплексныя лікі:

а) $1 + i \operatorname{tg} \alpha$;

б) $\dfrac{1 - i \operatorname{tg} \alpha}{1 + i \operatorname{tg} \alpha}$.

2084. Пункт плоскасці A паказвае камплексны лік $a + bi$. Які лік паказвае пункт B, сіметрычны пункту A адносна:

а) сапраўднай восі;

б) уяўнай восі;

в) пачатку каардынат?

2085*. На плоскасці вядома становішча пункта, які адпавядае камплекснаму ліку z. Як пры дапамозе цыркуля і лінейкі адшукаць на той жа плоскасці пункт, які адпавядае камплекснаму ліку $\dfrac{1}{z}$?

2086. Даказаць, што ўсе карані n-й ступені з камплекснага ліку $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ геаметрычна паказваюцца як вяршыні правільнага n-вугольніка. Знайсці старану гэтага n-вугольніка.

2087. Даказаць, што сума ўсіх кораняў n-й ступені з любога камплекснага ліку роўна нулю.

2088. Вылічыць:

$$(\sqrt{3} + i)^{10} + (\sqrt{3} - i)^{10}.$$

2089. x_1, x_2 і x_3 — корані ўраўнення $x^3 - 1 = 0$. Чаму роўны выраз

$$\frac{1}{x_1^n x_2^n} + \frac{1}{x_2^n x_3^n} + \frac{1}{x_3^n x_2^n}?$$

Раздзел XII

МЕТАД МАТЭМАТЫЧНАЙ ІНДУКЦЫІ

§ 261. Агульныя і прыватныя сцверджанні. Дэдукцыя і індукцыя

Усе сцверджанні можна падзяліць на агульныя і прыватныя. Прыкладам агульных сцверджанняў з'яўляюцца сцверджанні:

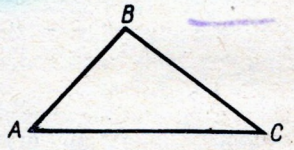
1. У любым трохвугольніку сума дзвюх старон большая за трэцюю старану.

2. Усе лікі, якія канчаюцца цотнай лічбай, дзеляцца на 2 і г. д.

Прыватнымі з'яўляюцца, напрыклад, сцверджанні:

1. У трохвугольніку ABC (рыс. 337) сума дзвюх старон AB і BC большая за трэцюю старану AC.

2. Лік 136 дзеліцца на 2.



Рыс. 337.

Пераход ад агульных сцверджанняў да прыватных называецца *дэдукцыяй*. Дэдукцыя вельмі часта выкарыстоўваецца ў матэматыцы. Усе агульныя тэарэмы мы даказваем іменна для таго, каб затым выкарыстаць іх для рашэння розных прыватных задач.

Але разам з гэтым у матэматыцы часта даводзіцца ад прыватных сцверджанняў пераходзіць да агульных. Напрыклад, разглядаючы арыфметычную прагрэсію a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... (§ 142), мы заўважылі, што

$$a_2 = a_1 + d,$$
$$a_3 = a_1 + 2d,$$
$$a_4 = a_1 + 3d.$$

Зыходзячы з гэтых прыватных формул, мы зрабілі вывад, што пры любым натуральным n

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

Пераход ад прыватных сцверджанняў да агульных называецца *індукцыяй*.

У адрозненне ад дэдукцыі індукцыя можа прывесці як да правільных, так і да няправільных вынікаў. Напрыклад, разглядаючы значэнні квадратнага трохчлена $f(n) = n^2 + n + 41$ пры розных натуральных значэннях n, можна заўважыць, што гэтыя значэнні выражаюцца простымі лікамі (гэта значыць лікамі, якія без астатку дзеляцца толькі на сябе і на 1).

Сапраўды,

$$f(1) = 43;$$
$$f(2) = 47;$$
$$f(3) = 53;$$
$$f(4) = 61$$

і г. д. Напрошваецца вывад, што пры любым натуральным n значэнне выразу $n^2 + n + 41$ з'яўляецца простым лікам. Аднак вывад гэты з'яўляецца няправільным. Напрыклад, пры $n = 41$

$$n^2 + n + 41 = 41^2 + 41 + 41 = 41(41 + 1 + 1) = 41 \cdot 43.$$

Няхай некаторае сцверджанне справядліва ў некалькіх прыватных выпадках. Разгляд усіх астатніх выпадкаў або зусім немагчымы, або патрабуе вялікай колькасці вылічэнняў. Як жа даведацца, ці справядліва гэта сцверджанне наогул? Гэта пытанне часам удаецца рашыць пры дапамозе скарыстання асобага метаду разважанняў, які называецца метадам матэматычнай індукцыі. Гэты метад мы разгледзім у наступным параграфе.

У матэматыцы ўжо здаўна выкарыстоўваецца індуктыўны метад, заснаваны на тым, што тое ці іншае агульнае сцверджанне робіцца на падставе разгледжання толькі некалькіх прыватных выпадкаў. Гісторыя, напрыклад, захавала наступнае выказванне вялікага Эйлера: „У мяне няма для доказу ніякіх іншых вывадаў, за выключэннем доўгай індукцыі, якую я правёў так далёка, што ніякім чынам не магу сумнявацца ў законе, кіруючым утварэннем гэтых членаў... І здаецца немагчымым, каб закон, які, як было выяўлена, выконваецца, напрыклад, для 20 членаў, нельга было б назіраць і для наступных".

Верачы ў беспамылковасць індукцыі, вучоныя часам дапускалі грубыя памылкі. К сярэдзіне XVII стагоддзя ў матэматыцы назбіралася нямала памылковых вывадаў. Стала моцна адчувацца патрэба ў навукова абгрунтаваным метадзе, які дазваляў бы рабіць агульныя вывады на падставе разгледжання некалькіх прыватных выпадкаў. І такі метад быў распрацаваны. Асноўная заслуга ў гэтым належыць французскім матэматыкам Паскалю (1623—1662) і Дэкарту, а таксама швейцарскаму матэматыку Якабу Бернулі (1654 — 1705).

Практыкаванні

2090. Якія з дадзеных сцверджанняў з'яўляюцца агульнымі і якія прыватнымі:

а) лік 16 цотны;

б) усякі лік, які канчаецца лічбай 6, цотны;

в) сінус любога вугла па абсалютнай велічыні не перавышае 1;

г) сінус вугла 50° менш 1;
д) дзесятковы лагарыфм ліку — 2 нявызначаны;
е) адмоўныя лікі не маюць дзесятковых лагарыфмаў?

2091. Лікі 24, 64, 104 дзеляцца на 4. Ці можна на аснове гэтага сказаць, што любы лік, які заканчваецца лічбай 4, дзеліцца на 4?

2092. Сінусы вуглоў 45° і 60° ірацыянальныя $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\text{ і }\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Ці можна з гэтага зрабіць вывад, што сінусы любых вуглоў ірацыянальныя?

§ 262. Метад матэматычнай індукцыі

У аснове метаду матэматычнай індукцыі ляжыць наступны прынцып.

Некаторае сцверджанне правільнае пры любым натуральным n, калі:

1) ***яно правільнае пры*** $n = 1$ **і**

2) ***са справядлівасці гэтага сцверджання пры якім-небудзь адвольным значэнні*** $n = k\ (k \geqslant 1)$ ***вынікае, што яно правільнае і пры*** $n = k + 1$.

Сапраўды, пры $n = 1$ сцверджанне правільнае з прычыны 1). Далей, $2 = 1 + 1$, а таму з прычыны 2) сцверджанне правільнае пры $n = 2$; $3 = 2 + 1$, таму з прычыны 2) сцверджанне правільнае і пры $n = 3$. Наогул, любы натуральны лік n можа быць атрыманы з 1 шляхам паслядоўнага дадавання да яго адзінкі $n - 1$ разоў. Пры кожным такім дадаванні мы атрымліваем натуральны лік, для якога разглядаемае сцверджанне правільнае. Таму яно правільнае і для натуральнага ліку n.

Метад доказу, заснаваны на выкарыстанні гэтага прынцыпу, называецца *метадам матэматычнай індукцыі*.

Разгледзім некалькі прыкладаў.

Прыклад 1. Знайсці суму

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Спачатку знойдзем суму аднаго, двух, трох і чатырох складаемых. Маем:

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2};$$

$$S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3};$$

$$S_3 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4};$$

$$S_4 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{3}{4} + \frac{1}{20} = \frac{4}{5}.$$

У кожным з гэтых выпадкаў атрымліваецца дроб, у лічніку якога стаіць лік складаемых, а ў назоўніку — лік, на 1 большы за лік складаемых. Гэта дазваляе выказаць гіпотэзу (дапушчэнне), што пры любым натуральным n $S_n = \frac{n}{n+1}$.

Для праверкі гэтай гіпотэзы выкарыстаем метад матэматычнай індукцыі.

1) Пры $n = 1$ гіпотэза правільная, таму што $S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$.

2) Дапусцім, што гіпотэза правільная пры $n = k$, гэта значыць

$$S_k = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}.$$

Дакажам, што тады гіпотэза павінна быць правільнай і пры $n = k + 1$, гэта значыць

$$S_{k+1} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Сапраўды,

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

Але па дапушчэнню $S_k = \frac{k}{k+1}$. Таму

$$S_{k+1} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Такім чынам, зыходзячы з дапушчэння, што гіпотэза $S_n = \frac{n}{n+1}$ правільная пры $n = k$, мы даказалі, што яна правільная і пры $n = k + 1$. Таму формула

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

правільная пры любым натуральным n.

Прыклад 2. Даказаць, што n-ы член арыфметычнай прагрэсіі роўны

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d, \tag{1}$$

дзе a_1 — першы член, а d — назоўнік гэтай прагрэсіі.

Гэты прыклад адрозніваецца ад папярэдняга тым, што будаваць гіпотэзу тут не трэба, яна дадзена. Трэба толькі даказаць, што гэта гіпотэза правільная.

Доказ будзем весці метадам матэматычнай індукцыі.

1) Пры $n = 1$ формула (1) прымае выгляд:

$$a_1 = a_1.$$

Значыць, пры $n = 1$ формула (1) правільная.

Дапусцім, што яна правільная пры $n = k$, гэта значыць

$$a_k = a_1 + (k-1)\,d,$$

і, выходзячы з гэтага, дакажам, што яна павінна быць правільнай і пры $n = k + 1$, гэта значыць $a_{k+1} = a_1 + kd$.

Сапраўды,

$$a_{k+1} = a_k + d = [a_1 + (k-1)\,d] + d = a_1 + kd,$$

што і трэба было даказаць.

Абедзве ўмовы метаду матэматычнай індукцыі выконваюцца, і таму формула (1) правільная пры любым натуральным n.

Прыклад 3. Даказаць тоеснасць:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha. \tag{2}$$

1) Пры $n = 1$ абедзве часткі формулы (2) прымаюць адзін і той жа выгляд: $\cos\alpha + i\sin\alpha$, так што пры $n = 1$ гэта формула правільная.

2) Няхай яна правільная пры $n = k$, гэта значыць

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^k = \cos k\alpha + i\sin k\alpha.$$

Тады

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{k+1} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^k \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha) =$$
$$= (\cos k\alpha + i\sin k\alpha)\cdot(\cos\alpha + i\sin\alpha) = (\cos k\alpha\cos\alpha - \sin k\alpha\sin\alpha) +$$
$$+ i\,(\cos k\alpha\sin\alpha + \sin k\alpha\cos\alpha) = \cos(k\alpha+\alpha) + i\sin(k\alpha+\alpha) =$$
$$= \cos(k+1)\alpha + i\sin(k+1)\alpha.$$

Але гэта азначае, што формула (2) правільная і пры $n = k + 1$.

Абедзве ўмовы метаду матэматычнай індукцыі выконваюцца, і таму формула (2) правільная пры любым натуральным n.

Практыкаванні

Даказаць тоеснасці:

2093. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$.

2094. $\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\ldots+\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}=$

$$=\frac{n}{a(a+n)}.$$

2095. $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2096. $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

2097. Вывесці формулу агульнага члена геаметрычнай прагрэсіі.

2098. Даказаць, што пры любым натуральным n лік n^3+5n дзеліцца без астатку на 6.

2099. На колькі частак дзеліцца плоскасць n рознымі прамымі, праведзенымі ў гэтай плоскасці праз адзін яе пункт?

2100. Метадам матэматычнай індукцыі даказаць тоеснасць:

$$\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha\ \ldots\ \cos 2^n\alpha=\frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}.$$

Які яшчэ метад вы можаце прапанаваць для доказу дадзенай тоеснасці?

2101. Даказаць, што пры любым натуральным n і $a>-1$

$$(1+a)^n\geqslant 1+na.$$

2102. Даказаць, што пры любым n пры дапамозе цыркуля і лінейкі з зададзенай адзінкай даўжыні можна пабудаваць адрэзак даўжынёй $\sqrt{n}$.

2103. Даказаць, што пры любым натуральным n

$$|\sin nx|\leqslant n|\sin x|.$$

2104. Даказаць, што пры любым натуральным n

$$[f^n(x)]'=nf^{n-1}(x)\cdot f'(x).$$

2105. Выкарыстоўваючы формулу задачы № 2104, знайсці вытворныя наступных функцый:

1) $y=\sin^6x+\cos^6x$;
2) $y=\sin^32x$;
3) $y=\left(\frac{x-1}{x}\right)^5$;
4) $y=(x^2-3x+5)^4$;
5) $y=\left(\frac{2x^2-1}{x^3}\right)^3$;
6) $y=(\sin x-\cos x)^4$;

§ 263. Другі варыянт метаду матэматычнай індукцыі

Некаторыя сцверджанні справядлівыя не для ўсіх натуральных n, а толькі для натуральных n, пачынаючы з некаторага ліку p. Такія сцверджанні часам удаецца даказаць метадам, які некалькі адрозніваецца ад таго, што апісаны ў § 262, але зусім аналагічны яму. Зводзіцца ён да наступнага.

Сцверджанне правільнае пры ўсіх натуральных значэннях $n \geqslant p$, калі:

1) ***яно правільнае пры $n = p$*** (а не пры $n = 1$, як было ў § 262);

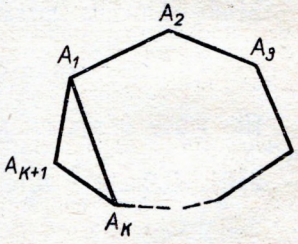
2) ***са справядлівасці гэтага сцверджання пры $n = k$, дзе $k \geqslant p$*** (а не $k \geqslant 1$, як у § 262), ***вынікае, што яно правільнае і пры $n = k + 1$.***

Растлумачым гэта на наступным прыкладзе.

Даказаць, што сума S_n унутраных вуглоў любога выпуклага многавугольніка* роўна $(n - 2)\pi$, дзе n — колькасць старон гэтага многавугольніка:

$$S_n = (n - 2)\pi. \qquad (1)$$

Гэта сцверджанне мае сэнс не для ўсіх натуральных n, а толькі для $n \geqslant 3$. Таму метад, апісаны ў § 262, тут скарыстаць нельга. Аднак можна скарыстаць другі варыянт індукцыі, апісаны вышэй на гэтай старонцы.



Рыс. 338.

1) Пры $n = 3$ наша сцверджанне прымае выгляд: $S_3 = \pi$. Але сума ўнутраных вуглоў любога трохвугольніка сапраўды роўна π. Таму пры $n = 3$ формула (1) правільная.

2) Няхай гэта формула правільная пры $n = k$, гэта значыць $S_k = (k - 2)\pi$, дзе $k \geqslant 3$. Дакажам, што ў такім выпадку мае месца і формула

$$S_{k+1} = (k - 1)\pi.$$

Няхай $A_1A_2 \ldots A_kA_{k+1}$ — адвольны выпуклы $(k + 1)$-вугольнік (рыс. 338). Злучыўшы пункты A_1 і A_k, мы атрымаем выпуклы k-вугольнік $A_1A_2 \ldots A_{k-1}A_k$. Відавочна, што сума вуглоў $(k + 1)$-вугольніка $A_1A_2 \ldots A_kA_{k+1}$ роўна суме вуглоў k-вугольніка $A_1A_2 \ldots A_k$ плюс сума вуглоў трохвугольніка $A_1A_kA_{k+1}$. Але сума вуглоў k-вугольніка $A_1A_2 \ldots A_k$ па дапушчэнню роўна $(k - 2)\pi$, а сума вуглоў трохвугольніка $A_1A_kA_{k+1}$ роўна π. Таму

$$S_{k+1} = S_k + \pi = (k - 2)\pi + \pi = (k - 1)\pi.$$

---

* Гэта сцверджанне справядлівае і для нявыпуклых многавугольнікаў, калі, праўда, стораны іх перасякаюцца толькі ў вяршынях. Мы ж для прастаты абмяжоўваемся толькі выпуклымі многавугольнікамі.

Такім чынам, абедзве ўмовы метаду матэматычнай індукцыі выконваюцца, і таму формула (1) правільная пры любым натуральным $n \geqslant 3$.

Практыкаванні

2106. На колькі трохвугольнікаў выпуклы n-вугольнік можа быць разбіты сваімі дыяганалямі, якія не перасякаюцца?

2107. Даказаць, што пры $n \geqslant 3$

$$2^n \geqslant 2n + 1.$$

2108. Пры якіх натуральных значэннях n справядліва няроўнасць

$$2^n > n^2?$$

§ 264. Заўвага да метаду матэматычнай індукцыі

Доказ метадам матэматычнай індукцыі складаецца з двух этапаў.

1-ы этап. Правяраем ці правільнае сцверджанне пры $n = 1$ (або пры $n = p$, калі гаворка ідзе аб метадзе, апісаным у § 263).

2-і этап. Дапусцім, што сцверджанне правільнае пры $n = k$, і, зыходзячы з гэтага, даказваем, што яно правільнае і пры $n = k + 1$.

Кожны з гэтых этапаў па-свойму важны. У § 263, разглядаючы прыклад $f(n) = n^2 + n + 41$, мы пераканаліся, што сцверджанне можа быць правільным у цэлым радзе прыватных выпадкаў, але няправільным наогул. Гэты прыклад пераконвае нас у тым, наколькі важны 2-і этап доказу метадам матэматычнай індукцыі. Апусціўшы яго, можна прыйсці да няправільнага вываду.

Не трэба, аднак, думаць, што 1-ы этап менш важны, чым 2-і. Зараз мы прывядзём прыклад, што паказвае, да якога недарэчнага вываду можна прыйсці, калі апусціць 1-ы этап доказу.

«Тэарэма». ***Пры любым натуральным n лік $2n + 1$ цотны.***

«Доказ». Няхай гэта тэарэма правільная пры $n = k$, гэта значыць лік $2k + 1$ цотны. Дакажам, што тады лік $2(k + 1) + 1$ таксама цотны.

Сапраўды,

$$2(k + 1) + 1 = (2k + 1) + 2.$$

Па дапушчэнню лік $2k + 1$ цотны, а таму яго сума з цотным лікам 2 таксама цотная. Тэарэма «даказана».

Калі б мы не забыліся праверыць, ці правільная наша «тэарэма» пры $n = 1$, мы не прыйшлі б да такога «выніку».

Задачы на паўтарэнне ўсяго курса алгебры і элементарных функцый

2109. На адным складзе a тон вугалю, на другім b тон. Штодзённа на абодва склады паступае па c тон вугалю. Праз колькі дзён на першым складзе будзе вугалю ў 2 разы больш, чым на другім?

2110. Два краны, працуючы адначасова, напаўняюць сасуд за 6 гадзін. За які час напаўняе сасуд кожны кран паасобку, калі вядома, што адзін першы кран напаўняе сасуд на 5 гадзін больш, чым адзін другі?

2111. Поезд быў затрыманы на 16 мін. і нагнаў спазненне на перагоне 80 *км*, павялічыўшы скорасць на 10 *км/гадз* у параўнанні са звычайнай. Знайсці звычайную скорасць поезда.

2112. На ўзорванне поля адзін трактарыст затрачвае часу ў 1,2 раза больш за другога, але на 3 гадзіны менш за трэцяга трактарыста. Працуючы разам, тры трактарысты ўзаралі поле за 4 гадзіны. За колькі гадзін можа ўзараць поле кожны з трактарыстаў?

2113. Веласіпедыст зрабіў паездку з A ў B і назад. Шлях складаўся з пад'ёму, гарызантальнага ўчастка і спуску. На гарызантальным участку ён ехаў са скорасцю 20 *км/гадз*, на спуску — 25 *км/гадз*, а на пад'ёме — 15 *км/гадз*. З A ў B веласіпедыст ехаў 2 гадзіны 22 мінуты, а з B у A — 2 гадзіны 14 мінут. Вызначыць даўжыню пад'ёму і даўжыню спуску, калі гарызантальная частка шляху складае 30 *км*.

2114. Два самалёты вылятаюць адначасова насустрач адзін другому з гарадоў A і B, адлегласць паміж якімі роўна 1800 *км*. Сустрэча паміж імі адбылася праз гадзіну пасля вылету. Першы самалёт прыляцеў у горад B на 27 мінут раней, чым другі ў горад A. Знайсці скорасці самалётаў.

2115. Адзін сплаў складаецца з двух металаў, якія ўваходзяць у адносіне 1:2, а другі змяшчае тыя ж металы ў адносіне 3:4. Колькі частак кожнага сплаву трэба ўзяць, каб атрымаць трэці сплаў, што змяшчае тыя ж металы ў адносіне 15:22?

2116. Два пешаходы, якія знаходзяцца адзін ад другога на адлегласці 10,2 *км*, выходзяць адначасова з пунктаў A і B, рухаючыся па прамой AB. Яны сустрэнуцца праз 1 гадзіну 12 мін., калі будуць ісці насустрач адзін другому, і праз 6 гадз. 48 мін., калі будуць ісці ў адным напрамку. Знайсці скорасць кожнага пешахода.

2117. У шахматным турніры двое з удзельнікаў выбылі, згуляўшы па пяць партый кожны. Таму ў турніры згулялі ўсяго 38 партый. Колькі ўдзельнікаў было ў пачатку турніру? Ці згулялі паміж сабой выбыўшыя з турніру шахматысты?

2118. Параход ідзе ад Горкага да Астрахані 5 сутак, а ад Астрахані да Горкага 7 сутак. Які час будуць плыць ад Горкага да Астрахані плыты?

2119*. Два канькабежцы выбягаюць адначасова: першы з A ў B, а другі з B у A — і сустракаюцца на адлегласці 300 *м* ад A. Прабегшы дарожку AB да канца, кожны з іх паварочвае назад і сустракае другога на адлегласці 400 *м* ад B. Знайсці даўжыню дарожкі AB.

2120. Рашыць ураўненні:

а) $a^2x - 1 = a + x$; б) $ax = b - x$;

в) $\dfrac{a(1-bx)}{a+b} + \dfrac{b+a^2x}{a-b} = \dfrac{ax(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$.

2121. Рашыць ураўненні:

а) $|2x-3| = a$; б) $|4-5x| = |8-x|$;

в)* $|x+1| + |x-1| + |x-3| = 3 + x$.

2122. (Вусна.) Колькі рашэнняў мае кожная з дадзеных сістэм:

а) $\begin{cases} x - 2y = 0, \\ 3x - y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x + 5y = 3, \\ 2x - 6y = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x - 0{,}5y = 3{,}5, \\ 2x - y = 7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - 9y = 0, \\ 0{,}5x - 4{,}5y = 2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x - 3y = 5, \\ 4y - 6x = 7? \end{cases}$

2123. Рашыць сістэмы ўраўненняў:

$\begin{cases} (a-1)x - y = 1, \\ x + ay = a; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - ay = a + 1, \\ ax - 2y = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1, \\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{y} = 5a - 3. \end{cases}$

2124. Знайсці сапраўдныя рашэнні сістэм ураўненняў:

а) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = -\dfrac{1}{20}, \\ xy = 20; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = 3, \\ x + y = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ x - y = b; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + y = a, \\ xy = b. \end{cases}$

2125. Даказаць няроўнасці:

а) $\dfrac{a+b}{1+a+b} < \dfrac{a}{1+a} + \dfrac{b}{1+b}$ $(a > 0,\ b > 0)$;

б) $a + 4b \geqslant 4\sqrt{ab}$ $(a > 0,\ b > 0)$;

в) $\frac{\sqrt{a}}{b} + \frac{\sqrt{b}}{a} \geqslant \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$;

г) $\frac{a + bx^4}{x^2} \geqslant 2\sqrt{ab}$ $(a > 0,\ b > 0)$.

2126. У прадаўца недакладныя вагі (каромыслы вагаў маюць розную даўжыню). Ведаючы гэта, прадавец адважвае кожнаму пакупніку палавіну тавару на адной шалі, а палавіну на другой шалі вагаў, думаючы, што гэтым ён кампенсуе недакладнасць вагаў. Ці праў ён?

2127*. Даказаць, што з усіх трохвугольнікаў з дадзеным перыметрам найбольшую плошчу мае роўнастаронні трохвугольнік.

2128. Даказаць, што для любога вострага вугла φ

$$\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{ctg}\varphi \geqslant 2.$$

2129. Рашыць няроўнасць

$$1 < \frac{x-6}{1-x} < 3.$$

2130. Для якіх значэнняў a няроўнасць

$$-3 < \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2$$

задавальняецца пры ўсіх значэннях x?

2131. Рашыць ураўненні:

а) $x - 6 = 1 + \sqrt{x-1}$; б) $\sqrt{x-1} + \sqrt{3x+1} = 2$;

в) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-4} = 3$.

2132. Пры якіх значэннях a ўраўненне

$$(a-3)x^2 - 4x - 2a = 0$$

мае:

а) сапраўдныя корані;
б) сапраўдныя корані аднаго знака;
в) сапраўдныя корані розных знакаў?

2133. Рашыць ураўненні:

а) $\sqrt{(x-2)^2} = -(x-2)$; б) $\sqrt{(x^2 - x + 1)^2} = x^2 - x + 1$;

в) $\sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(x-4)^2} = 2$.

2134. Пабудаваць графік функцыі:

$$y = \sqrt{x^2} + \sqrt{(x-1)^2}.$$

2135. Што больш:

а) 3^{600} ці 6^{300};

б) $\left(2\sqrt{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ ці $\left(3\sqrt{2}\right)^{\frac{3}{2}}$;

в) $\left(2\sqrt{21}\right)^{-\frac{2}{7}}$ ці $\left(4\sqrt{5}\right)^{-\frac{2}{7}}$?

2136. Сярэдні гадавы працэнт прыросту насельніцтва з году ў год застаецца пастаянным. Калі б ён павялічыўся на $k\%$, то праз n гадоў колькасць насельніцтва была б у два разы большая, чым пры нармальных умовах. Вызначыць гадавы працэнт прыросту насельніцтва.

2137. Знайсці косінус, тангенс і катангенс вугла φ, калі

$$\sin\varphi = \frac{5}{13}.$$

2138. Знайсці сінус, тангенс і катангенс вугла φ, калі

$$\cos\varphi = -\frac{3}{5}.$$

2139. Знайсці сінус, косінус і катангенс вугла x, калі

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}.$$

2140. Знайсці сінус, косінус, тангенс і катангенс вугла

$$\operatorname{arc}\sin\frac{1}{3}.$$

2141. Знайсці сінус, косінус, тангенс і катангенс вугла

$$\operatorname{arc}\cos\left(-\frac{12}{13}\right).$$

2142. Знайсці сінус, косінус, тангенс і катангенс вугла

$$\operatorname{arc}\operatorname{tg}\left(-\frac{2}{3}\right).$$

Даказаць тоеснасці:

2143. $\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} + \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = 2\,|\operatorname{cosec}\alpha|.$

2144. $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha - 6}{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + 2} = \cos 4\alpha.$

2145. $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\dfrac{1+\sin 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}$.

2146. $2\sin 5\alpha \sin 3\alpha+\cos 8\alpha=\cos 2\alpha$.

2147. $\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

Спрасціць выразы:

2148. $\dfrac{1-\sin^6\alpha-\cos^6\alpha}{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}$.

2149. $\sqrt{1+\cos\varphi}-\sqrt{1-\cos\varphi}$ $\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$.

2150. а) $\operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{tg}2^\circ\cdot\operatorname{tg}3^\circ\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}89^\circ$; б) $\lg\operatorname{tg}1^\circ\cdot\lg\operatorname{tg}2^\circ\cdot\ldots\cdot\lg\operatorname{tg}89^\circ$.

2151. Пры якіх значэннях a дадзеныя ўраўненні маюць сапраўдныя карані:

а) $\lg^2 x-\lg x+a=0$;

б) $\cos^2 x+\cos x+a=0$?

2152. Лікі α, β і γ складаюць арыфметычную прагрэсію з рознасцю $\frac{\pi}{3}$. Даказаць, што

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha=-3.$$

2153. Даказаць роўнасці:

а) $\operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}40^\circ\operatorname{tg}80^\circ=\sqrt{3}$;

б) $\sin 18^\circ\cos 36^\circ=0{,}25$;

в) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 15^\circ}{1+\operatorname{tg}^2 15^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2154. Вылічыць:

а)* $\sin\left[\frac{1}{2}\arccos(-0{,}8)\right]$;

б) $\sin[\operatorname{arc}\operatorname{tg}2+\operatorname{arc}\operatorname{ctg}(-2)]$;

в) $\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}\arcsin(-0{,}6)\right]$.

2155. Праверыць роўнасці:

а) $\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{3}{15}+\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{4}=\frac{\pi}{4}$;

б) $\arcsin 0{,}8-\arccos 0{,}6=0$.

Рашыць ураўненні:

2156. $\sin x - \cos 2x = 2$.

2157. $\sin x \cos 3x = -1$.

2158. $\cos 2x = \sin x \cos 2x$.

2159. $2\cos^2 x - 7\sin x - 5 = 0$.

2160. $\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x} = 0$.

2161. $3\sin x - 2\cos x = 6$.

2162. $\sqrt{3}\cos x = -\sin x$.

2163. $\cos^2 x - 3\sin x \cos x + 1 = 0$.

2164. $\cos(\cos x) = \sin(\sin x)$.

2165. $\sin x \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\cos^2 x$.

2166. $\cos x \operatorname{ctg}^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{3}{2}$.

2167. $\sin^4 x = 1 + \cos^2 x$.

2168. $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = -1$.

2169. $3\cos 4x = 7\sin 2x$.

2170. $2\cos^2 x + \sin^2 x = \dfrac{3}{2}\sin 2x$.

2171. $\cos 3x \cos 5x = \cos x \cos 7x$.

2172. $\sin^2 2x + \sin^2 x = 1$.

2173. $\sin x - \sqrt{3}\cos x = -1$.

2174. $\sin x - 4\cos x + \operatorname{tg} x = 4$.

2175. $\cos^2 x + 3\cos^2 \dfrac{x}{2} = 2$.

2176. $\cos 7x - \sin 5x = \sqrt{3}(\cos 5x - \sin 7x)$.

2177. $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin x + \sin \dfrac{\pi}{3}$.

2178. $\operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{6}$.

2179. $(\operatorname{tg} x)^{\cos x} = (\operatorname{ctg} x)^{\cos x}$.

Рашыць сістэмы ўраўненняў:

2180*. $\begin{cases} x + y = \dfrac{2\pi}{3}, \\ \sin x + \cos y = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

2181. $\begin{cases} 2^{\sin x + \cos y} = 1, \\ 9^{\sin^2 x + \cos^2 y} = 3. \end{cases}$

2182. $\begin{cases} \sin x + \cos y = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}, \\ \sin x \cdot \cos y = -\dfrac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$

2183. $\begin{cases} \cos x \cdot \cos y = \dfrac{1}{4}, \\ \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y = -\dfrac{3}{4}. \end{cases}$

2184. Ці з'яўляецца паслядоўнасць усіх дадатных кораняў ураўнення $\cos \dfrac{1}{x} = 0$:

а) канечнай; б) абмежаванай?

2185. Крайнія члены арыфметычнай прагрэсіі роўны 5 і 25. Знайсці два роўнаддаленыя ад іх члены, здабытак якіх роўны 189.

2186. Знайсці чатыры лікі, з якіх першыя тры складаюць геаметрычную прагрэсію, а апошнія тры — арыфметычную; сума крайніх лікаў роўна 14, а сума сярэдніх роўна 12.

2187. Арыфметычная і ўзрастаючая геаметрычная прагрэсіі маюць першыя члены, роўныя кожны 2, і роўныя трэція члены. Другі член арыфметычнай прагрэсіі на 4 большы за другі член геаметрычнай прагрэсіі. Знайсці гэтыя прагрэсіі.

2188. Знайсці востры вугал прамавугольнага трохвугольніка, калі яго стораны ўтвараюць геаметрычную прагрэсію.

2189. Дадзен правільны трохвугольнік, старана якога роўна a. У трохвугольнік упісаны круг, у круг зноў упісаны правільны трохвугольнік, у трохвугольнік — круг і так бясконца. Вызначыць суму плошчаў усіх кругоў і суму даўжынь усіх акружнасцей.

2190. Знайсці бесканечна ўбываючую геаметрычную прагрэсію, калі яе сума роўна 3, а сума квадратаў яе членаў роўна 4,5.

2191. Пры якіх значэннях x лікі $\lg 2$, $\lg(2^x - 1)$ і $\lg(2^x + 1)$ утвараюць арыфметычную прагрэсію?

2192. Даказаць, што $\log_2 3$ — лік ірацыянальны.

2193. Вылічыць:

а) $\log_{3\sqrt{3}} 27$; б) $\lg 1\frac{1}{2} - \lg 150$; в) $\log \pi \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$;

г) $2^{4\log_2 3 - 1} - 1$; д) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{25} 2 - 5} - 5$; е) $2^{\log_{2\sqrt{2}} 15}$.

Рашыць ураўненні:

2194. $2^{2x} \cdot 9^{x} - 2 \cdot 6^{3x-1} + 4^{2x-1} \cdot 3^{4x-2} = 0$.

2195. $9^{x} - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}$.

2196. $8^{x} + 18^{x} - 2 \cdot 27^{x} = 0$.

2197. $3^{x} - 50 \cdot 2^{x} = 5 \cdot 3^{\frac{x}{2}} \cdot 2^{\frac{x}{2}}$.

2198*. $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{x} + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{x} = 4$.

2199. $\lg(x+a) = \lg x + \lg a$.

2200*. $x^{\lg x^2 - 3} = 100$.

2201. $\lg(3x-4) = \lg(6x+2) - 1$.

2202. $x^{\log_2 x^{13} + \log_2^2 x^4 - 4} = \frac{1}{x}$.

2203. $\log_3^2 4x - \log_3 12x = 1$.

2204. $\lg^2 x^3 - 5\lg x^2 + 1 = 0$.

2205. $\sqrt{\lg\left(4^{\sqrt{x}} + 2^{1+\sqrt{x}} + 9992\right)} = 2$.

2206. $2x - \lg(5^{2x} + 4x - 16) = \lg 4^{x}$.

2207. $\log_3 \frac{3}{x} + \log_3^3 x = 1$.

2208. $\lg \sin x = \lg \cos x$.

2209. Вылічыць:

а) $\log_7 \log_7 \sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7}}}$;

б) $10^{2+\frac{1}{2}\lg 16}$; в) $\log_3 5 \cdot \log_{25} 27$;

г) $\log_{ab} b$, калі $\log_{ab} a = 4$.

2210. Даказаць, што ўраўненне $\lg \cos x = \cos x$ не мае кораняў.

2211. Што больш: а) $\log_3 2$ ці $\log_2 3$; б) $\sqrt[3]{0{,}01}$ ці $\sqrt[5]{0{,}001}$?

2212. Знайсці ўсе значэнні x, для якіх

$$\lg\frac{x+3}{x+4} > \lg\frac{x+5}{x+2}.$$

Рашыць сістэмы ўраўненняў:

2213. а) $\begin{cases} \log_2(xy) = 5, \\ \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{x}{y} = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 5, \\ \log_2(x^2 + y^2) = \log_2 10 + 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \lg x \cdot \lg(xy) = 2, \\ \lg \dfrac{x}{y} = 3; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \sqrt[10]{2^x} \cdot \sqrt{\sqrt[5]{2^y}} = \sqrt[x]{128}, \\ \lg(x + y) = \lg 40 - \lg(x - y); \end{cases}$

д) $\begin{cases} 5(\log_y x + \log_x y) = 26, \\ xy = 64. \end{cases}$

2214. Светавы прамень, які праходзіць праз пластмасавую пласцінку, траціць 1/3 сваёй інтэнсіўнасці. Колькі такіх пласцінак можна паставіць на шляху праменя, каб пры праходжанні праз іх страцілася не больш $\frac{211}{243}$ яго першапачатковай інтэнсіўнасці?

2215. Пабудаваць графікі функцый:

а) $y = |\log_2 x|$; б) $y = \log_2 |x|$; в) $y = \log_2 |-x|$.

2216. Знайсці вобласці вызначэння функцый:

а) $y = \sqrt{-5x^2 + 8x + 4}$;

б) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}$;

в) $y = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+3}} + \sqrt{\dfrac{x+1}{5-x}}$;

г) $y = \dfrac{1}{2^{\frac{x}{3x-1}} - 1}$;

д) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\operatorname{tg} x - 1}$; е) $y = \lg(1{,}5 + \sin x + \cos x)$.

2217. Даказаць, што функцыя $f(x) = \dfrac{(1+2^x)^2}{2^x}$ цотная, а функцыя $f(x) = \lg \dfrac{1+x}{1-x}$ няцотная.

2218. Функцыя Дырыхле вызначаецца наступным чынам:

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{калі } x \text{ рацыянальны,} \\ 1, & \text{калі } x \text{ ірацыянальны.} \end{cases}$$

а) Ці з'яўляецца гэта функцыя цотнай?

б) Даказаць, што гэта функцыя перыядычная, прычым любы рацыянальны лік з'яўляецца яе перыядам. Ці ёсць у гэтай функцыі найменшы дадатны перыяд?

в) Даказаць, што ніякі ірацыянальны лік не з'яўляецца перыядам дадзенай функцыі.

2219. Даказаць, што вытворная перыядычнай функцыі з'яўляецца перыядычнай функцыяй. Прывесці прыклады.

2220. Даказаць, што вытворная цотнай функцыі ёсць функцыя няцотная, а вытворная няцотнай функцыі — функцыя цотная. Прывесці прыклады.

2221. У якіх інтэрвалах існуюць функцыі, адваротныя дадзеным:

а) $y = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$; б) $y = \cos^2 x$?

2222. На адным і тым жа чарцяжы пабудаваць графікі дадзенай і адваротнай ёй функцыі:

а) $y = 2x - 1$; б) $y = 3^{x+1}$.

2223. Знайсці прэдзелы:

а) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x\sqrt{x} - 3\sqrt{3}}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{\sqrt{x^3 + 9} - 3}$;

в) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{3x^2}$; г) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x + a) + \sin(x - a)}{x}$.

2224. Вылічыць:

$x^{25} - 8x^{14} + 5x^4 - 4x^2 - 10$ пры $x = i$.

2225. Даказаць, што лікі $\dfrac{1 - i}{1 + i}$ і $\dfrac{1 + i}{1 - i}$ з'яўляюцца процілеглымі.

2226. Выканаць наступныя дзеянні:

а) $\left(\dfrac{2i - 1}{1 + i} + \dfrac{5 - 2i}{4 - i}\right) \cdot \dfrac{34}{1 - i}$; б) $\dfrac{1 + i \operatorname{tg} \alpha}{1 - i \operatorname{tg} \alpha}$;

в) $\dfrac{(2 + i)(1 - i)}{3 - 2i}$; г) $(2 + i\sqrt{2})^3 + (2 - i\sqrt{2})^3$.

2227. Даказаць, што кубы супрэжаных лікаў з'яўляюцца супрэжанымі лікамі.

2228. Знайсці сапраўдныя значэнні x і y з ураўненняў:

а) $(xi - y)^2 = 6 - 8i + (x + iy)^2$;

б) $\dfrac{x - 2}{1 - i} + \dfrac{y - 3}{1 + i} = 1 - 3i$;

в) $\dfrac{i}{x} + \dfrac{i}{y} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} + \dfrac{5i}{y}$.

2229. Паказаць, што здабытак любых двух кораняў ураўнення $x^3 = 1$ ёсць таксама корань гэтага ўраўнення.

2230. Вылічыць $(1 + \cos\alpha + i\sin\alpha)^n$.

(Указанне. Скарыстаць формулу Муаўра.)

2231. Паказаць, што калі n кратнае 3, то

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n = 2.$$

2232. На плоскасці дадзены два пункты, якія адпавядаюць камплексным лікам $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$. Дзе знаходзіцца пункт, які адпавядае ліку $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$?

2233. Выраз $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^5$ пераўтварыць двума спосабамі: з дапамогай формулы Муаўра і з дапамогай формулы бінома Ньютана. Параўноўваючы рэзультаты, выразіць $\sin 5\varphi$ і $\cos 5\varphi$ праз $\sin\varphi$ і $\cos\varphi$.

2234. Цела рухаецца па закону $s(t) = t^3$ (s — шлях у метрах, t — час у секундах). У некаторы момант τ *сек* яго імгненная скорасць роўна сярэдняй скорасці ў інтэрвале ад t_1 *сек* да t_2 *сек* ($t_2 > t_1$). Даказаць, што $t_1 < \tau < t_2$.

2235. Напісаць ураўненне датычнай да крывой $y = \sqrt{x}$ у пункце з абсцысай $x = 4$.

2236. Напісаць ураўненне датычных да парабал $y = x^2$ і $y = (x-2)^2$ у пункце іх перасячэння.

2237. Знайсці вытворныя наступных функцый:

а) $\sin^4 x$;

б) $\cos^3 2x$;

в) $\cos^5 (x-1)$;

г) $\cos^4 (2-x)$;

д) $(x^2+1)^5$;

е) $(3-2x)^3$.

2238. Цела ўтварае гарманічныя ваганні з амплітудай A, частатой ω і пачатковай фазай φ. Знайсці скорасць і паскарэнне гэтага пункта.

2239. Ці могуць дзве розныя функцыі мець роўныя вытворныя? Адказ растлумачыць прыкладамі.

2240. Даследаваць дадзеныя функцыі і пабудаваць іх графікі:

а) $y = x - 3x^3$; б) $y = x^5 - 4x$;

в) $y = \cos^2\frac{x}{2}$; г) $y = \cos x\,(1 + \sin x)$.

2241. Няхай $C_n^k = C_n^r$. Даказаць, што або $k = r$, або $k = n - r$.

2242. Даказаць, што 1000-я вытворныя функцый $(2x^2+7)^{100}$ і $(7x^2+2)^{100}$ роўны адна другой.

2243. Няхай $(x-2)^{100} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{100}x^{100}$. Знайсці:

а) a_{97};

б) $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}$;

в) $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + 100a_{100}$.

2244. Даказаць, што квадрат сумы n лікаў роўны суме квадратаў гэтых лікаў, складзенай з разнастайнымі іх падвоенымі папарнымі здабыткамі.

2245. Даказаць, што калі T — перыяд функцыі $f(x)$, то пры любым натуральным n nT — таксама перыяд гэтай функцыі.

2246. Даказаць тоеснасць:

$$\lg(a_1 a_2 \dots a_n) = \lg a_1 + \lg a_2 + \dots + \lg a_n$$
$$(a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ \dots,\ a_n > 0).$$

2247. Даказаць, што пры любым натуральным n $\sin nx$ і $\cos nx$ выражаюцца рацыянальна праз $\sin x$ і $\cos x$.

2248. Даказаць няроўнасць

$$|a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|.$$

2249. Даказаць тоеснасць:

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}_{n \text{ радыкалаў}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

2250. Праверыць справядлівасць няроўнасці:

$$\sin^{2n}\alpha + \cos^{2n}\alpha \leqslant 1,$$

дзе n — натуральны лік.

2251. Даказаць, што вытворная сумы любой колькасці дыферэнцыруемых функцый роўна суме вытворных гэтых функцый.

АДКАЗЫ ДА ПРАКТЫКАВАННЯЎ

1. Лінейныя ўраўненні і няроўнасці

1. Левая частка вызначана для любых неадмоўных лікаў a, правая частка — для любых лікаў a, роўнасць у цэлым — для ўсіх неадмоўных лікаў a. **4.** Левая частка вызначана для ўсіх лікаў c, акрамя 0 і 1, правая частка — для ўсіх лікаў c, роўнасць у цэлым — для ўсіх лікаў c, акрамя 0 і 1. **5.** Левая частка вызначана для ўсіх лікаў a, акрамя 0 і —1, правая частка — для ўсіх лікаў a, акрамя 0 і 1, роўнасць у цэлым — для ўсіх лікаў a, акрамя 0, —1 і 1. **6.** Левая частка вызначана для ўсіх неадмоўных лікаў b, акрамя 1, правая частка — для ўсіх лікаў b, роўнасць у цэлым — для ўсіх неадмоўных лікаў b, акрамя 1. **8.** Левая частка вызначана для ўсіх пар (a, b), правая — для ўсіх пар, акрамя пары (0,0), роўнасць у цэлым — для ўсіх пар, акрамя пары (0, 0). **13.** а) Эквівалентныя; б) не; в) не; г) не; д) эквівалентныя. **14.** Калі $a = 1$, то адзін: $x = 1$; калі $a \neq 1$, то ні аднаго. **26.** $\frac{a-1}{3}$ **27.** Пры $a = 1$ няма кораняў; пры $a \neq 1$ $x = \frac{5}{a-1}$. **28.** Пры $a = 0$ кораняў няма; пры $a \neq 0$ $x = \frac{4}{a}$. **29.** Калі $a = \pm 1$, то x — любы; калі $a \neq \pm 1$, то $x = 0$. **30.** Калі $a \neq -2$, то $x = \frac{4 + a^2}{a + 2}$; пры $a = -2$ кораняў няма. **31.** Калі $a \neq \pm 1$, то $x = \frac{1}{a-1}$; калі $a = 1$, то кораняў няма; пры $a = -1$ x — любы. **32.** Калі $a = 1$ і $b \neq -1$, то кораняў няма; калі $a = 1$ і $b = -1$, то x — любы; пры $a \neq 1$ $x = \frac{1+b}{a-1}$. **36.** а) Могуць, калі $m \neq 0$; б) не; в) не; г) могуць, калі $m = n = 0$. **37.** Не. **38.** Не. **39.** б) 5 год назад бацька быў у 4 разы старэйшы за сына. **40.** 2 *гадз.* **41.** Патрэбную колькасць сталі можна атрымаць толькі ў тым выпадку, калі лік r знаходзіцца паміж лікамі p і q. Пры гэтым лому першага гатунку трэба ўзяць $\frac{100(r-q)}{p-q}$ тон. **50.** Няма кораняў. **51.** —1. **52.** Пры $a \neq -19$ $x = \frac{a+5}{2}$; пры $a = -19$ няма кораняў. **53.** Калі $a \neq 1$, то $x = \frac{1-2a}{a-1}$; пры $a = 1$ няма кораняў. **54.** Калі $a = b = 0$, то кожны лік з'яўляецца коранем ураўнення; калі адзін з лікаў a і b роўны нулю, а другі адрозны ад нуля, то кораняў няма; калі $a \neq 0$ і $b \neq 0$, то пры $a^2 \neq b^2$ $x = \frac{1}{a+b}$, пры $b = a$ x — любы, акрамя $\frac{1}{a}$, пры $b = -a$ кораняў няма. **55.** Калі $b = 0$ і $a = 1$, то x — любы; калі $b = 0$ і $a \neq 1$, то кораняў няма; пры $b \neq 0$ і $a \neq -1$ $x = \frac{1-a}{b(a+1)}$; пры $b \neq 0$ і $a = -1$ кораняў няма. **56.** Пры

$b \neq 0$ і $b \neq 1$ $x = 2$; пры $b = 0$ x — любы лік, акрамя $\frac{1}{2}$; пры $b = 1$ ураўненне не мае сэнсу. **57.** Калі $a = 0$, то x — любы лік, акрамя 0; калі $a \neq 0$, то $x = \frac{5}{3}a$. **58.** Калі хаця б адзін з лікаў m і n роўны нулю, то кораняў няма; калі абодва лікі m і n адрозныя ад нуля і $m = n$, то x — любы лік, акрамя n; пры $m \neq 0$, $n \neq 0$ і $m \neq n$ $x = m + n$. **59.** Адносна x: калі $b \neq 0$, то кораняў няма; калі $b = 0$ і $a \neq 0$, то x — любы лік, акрамя 0; пры $a = b = 0$ ураўненне не мае сэнсу. Адносна b: калі хаця б адзін з лікаў a і x роўны нулю, то кораняў няма; калі $a \neq 0$ і $x \neq 0$, то $b = 0$. **61.** Калі $a \geqslant 1$, то $x = \pm (a - 1)$; пры $a < 1$ кораняў няма. **62.** 0,5; 1,5. **63.** Калі $a \geqslant 0$, то $x = 1 \pm a$; калі $a < 0$, то кораняў няма. **64.** 0. **65.** $\frac{11}{8}$. **66.** $\frac{1}{2}$. **67.** $-2; \frac{4}{5}$. **71.** Можа, калі $a = 0$, а b — дадатны лік. **73.** а) Няма; напрыклад, пры $a = b = 1$; б) заўсёды; в) не; напрыклад, пры адмоўным c; г) няма. **75.** x — любы лік, што знаходзіцца ў інтэрвале ад -1 да 1 (уключаючы гэтыя два лікі). **76.** x — любы лік, які не перавышае -3. **77.** Няма кораняў. **78.** Няма кораняў. **79.** а) $a > 0$; б) $b \geqslant 0$, $b \neq 1$; в) $a \neq 0$; г) b — любы; д) x — любы; е) a і b — любыя лікі, не роўныя нулю адначасова. **84.** а) Калі $a = 0$, то $a^2 = 5a^2 = 2a^2$; калі $a \neq 0$, то $a^2 < 2a^2 < 5a^2$; с) калі $a > 1$, то $a < a^2 < a^3$; калі $0 < a < 1$, то $a > a^2 > a^3$; пры $a = 0$ і $a = 1$ $a = a^2 = a^3$; калі $-1 < a < 0$, то $a < a^3 < a^2$; калі $a < -1$, то $a^3 < a < a^2$; пры $a = -1$ $a = a^3 < a^2$. **98.** Дадзеныя лікі роўныя паміж сабой. **99.** $\sqrt[3]{26} > \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$. **100.** $(1 + \sqrt{5})^{100} > 3^{100}$. **102.** $(\sqrt{5} - \sqrt{3})^{51} < (\sqrt{6} - \sqrt{2})^{51}$. **103.** а) $-0{,}4 < a < 2$; б) $-2 < a < 0{,}4$. **104.** $6{,}6 < a + b < 6{,}8$. **105.** 5,61; 5,66. **106.** 0,2; 0,4. **107.** а) 1,38; 1,68; б) $-\frac{22}{35}; -\frac{25}{48}$. **118.** Хутчэй у бязветранае надвор'е. **125.** Указанне. $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$; $b + c \geqslant 2\sqrt{cb}$; $a + c \geqslant 2\sqrt{ac}$. **131.** 2. **133.** а) $a = 4$; б) $a = \frac{1}{2}$; в) $a = \sqrt{5}$. **134.** а) $a = 1$; б) $a = 2$; в) 0. **135.** Квадрат з плошчай $2R^2$. **136.** Квадрат з плошчай $\frac{d^2}{2}$. **137.** Квадрат са стараной $\frac{p}{4}$. **138.** а) 1; б) няма кораняў; в) -1. **139.** Першая брыгада. **142.** Памылка пры ўзважванні на некаторых электрычных вагах складае не больш 0,001% ад сапраўднай вагі цела. **149.** а) 5,5; б) 3,7; в) 8,6; г) 0,6. **150.** а) 14,97 з дакладнасцю да 0,09; б) $-24{,}20$ з дакладнасцю да 0,08; в) $-8{,}99$ з дакладнасцю да 0,05. **151.** а) 0,0005; б) 0,0005; в) 0,00009 (больш дакладна, $\frac{1}{11\,000}$). **152.** а) Эквівалентныя; б) не; в) не; г) эквівалентныя. **153.** а) Эквівалентныя; б) эквівалентныя; в) эквівалентныя; г) эквівалентныя; д) не; е) не; ж) не; з) эквівалентныя. **155.** $x \geqslant 1$. **159.** Калі $a > b$, то $x > -1$; калі $a < b$, то $x < -1$. **163.** Калі $a > -2$, то $x > \frac{3 - b}{a + 2}$; калі $a < -2$, то $x < \frac{3 - b}{a + 2}$; калі $a = -2$ і $b > 3$, то x — любы; пры $a = -2$, $b \leqslant 3$ няма рашэнняў. **164.** $x > \frac{5}{7}$. **165.** Калі $a > -1$, то $x > \frac{2}{(a + 1)^2}$; калі $a < 1$, то $x < \frac{2}{(a + 1)^2}$. **171.** $x \geqslant \frac{3}{4}$. **174.** Калі $a > 0$, то $x > \frac{1}{a}$; калі $a < 0$, то $x < \frac{1}{a}$; пры $a = 0$ няма кораняў. **181.** $x \geqslant 1{,}1$. **186.** $x < -4$; $x > 7{,}5$. **187.** $1 \leqslant a \leqslant \frac{5}{3}$; $b \geqslant 0$. **188.** $2 \leqslant a < 3$, $3 < a \leqslant 4{,}5$; b — любы. **189.** $3 \leqslant x < 3{,}5$. **190.** Калі $a > 0$, то $-\frac{4}{a} \leqslant x < \frac{3}{a}$; калі $a < 0$, то

$\frac{3}{a} < x \leqslant -\frac{4}{a}$; пры $a = 0$ x — любы. **191.** $39° \leqslant t \leqslant 55°$. **194.** Дадатная пры $2{,}5 < x < 3$; адмоўная пры $x < 2{,}5$ і пры $x > 3$. **196.** $x < 0$; $x > 1$. **197.** $-11 \leqslant x < -5$. **198.** $-\frac{19}{6} < x < -3$. **199.** $x < 0$; $x > 2$. **200.** $0 < x \leqslant \frac{1}{3}$. **201.** $x > 2$. **203.** $x < 0$; $x \geqslant 2$. **205.** $x < 0$; $0 < x \leqslant 2$. **207.** $-1 \leqslant x \leqslant 5$. **208.** $x < -9$; $x > 11$. **212.** $x < 1$; $x > 3$. **215.** $x \geqslant -\frac{3}{2}$. **216.** Пры $a < 0$ рашэнняў няма; калі $a > 0$, то $-\frac{a+b}{a} \leqslant x \leqslant \frac{a-b}{a}$; калі $a = 0$, $b \neq 0$, то рашэнняў няма; пры $a = b = 0$ x — любы. **223.** а) -15; б) 3; в) 121; ж) 1. **224.** а) Зменіць знак на процілеглы; в) не зменіцца. **225.** а) 6; б) -2; в) 0; г) пры любым a. **227.** а) ± 2; б) 0; в) ні пры якім значэнні a радкі дадзенага вызначальніка не прапарцыянальныя. **231.** $\frac{1}{6}$; -6; -6. **232.** 4; $5 - a$; $5a + 3a^2$ $(a \neq 0)$. **234.** а) Можна, калі толькі $a \neq \pm 6$; в) можна. **235.** Калі $a = 0$, то рашэнняў няма; калі $a \neq 0$, то $x = -\frac{2}{a}$, $y = \frac{1}{2a}$. **237.** Калі $a \neq 0$, то $x = \frac{2}{a}$, $y = 2$; пры $a = 0$ сістэма несумесная. **238.** Калі $a \neq 0$, то $x = 0$, $y = \frac{1}{2a}$; пры $a = 0$ сістэма несумесная. **239.** Сістэма несумесная. **240.** Калі $a \neq \pm 1$, то $x = \frac{1}{a+1}$, $y = 0$; пры $a = -1$ сістэма несумесная; пры $a = 1$ яна не мае сэнсу. **242.** $x = t$, $y = t - 1$, дзе t — любы лік. **243.** $x = t$, $y = \frac{3}{5}t$, дзе t — любы лік. **245.** а) Бясконцае мноства рашэнняў; б) сістэма несумесная. **247.** Калі $a \neq \pm 4$, то $x = -\frac{12}{4-a}$, $y = \frac{6}{4-a}$; калі $a = -4$, то $x = t$, $y = \frac{t+3}{2}$, дзе t — любы лік; пры $a = 4$ сістэма несумесная. **248.** Калі $a \neq \pm 3$, то $x = 2$, $y = 1$; калі $a = \pm 3$, то $x = t$, $y = \frac{a - 6 + 3t}{a}$, дзе t — любы лік. **249.** Калі $a \neq \frac{1}{2}$, то $x = \frac{a(2a-3)}{2(1-2a)}$, $y = \frac{2a^2 - a + 1}{2(1-2a)}$; пры $a = -\frac{1}{2}$ сістэма несумесная. **260.** а) 2; б) $a < 0$; $a > 2$; в) $0 < a < 2$; г) $a \neq 2$. **262.** Калі $a \neq 0$ і $a \neq \frac{3}{2}$, то $x = 4$. Калі $a = 0$, то x — любы лік, акрамя 1. Пры $a = \frac{3}{2}$ ураўненне не вызначана. **269.** Па возеры. **270.** Указанне. Скарыстаць рэзультат практ. № 267. **272.** $h \geqslant \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{4}$. **273.** $-2{,}8 < x < 8$. **274.** $-2 < x \leqslant -1$; $5 \leqslant x < 6$. **275.** $-1 < x < 2$. **276.** Калі $a \neq \pm 1$, то $x = y = \frac{b}{1+a}$; калі $a = 1$, то $x = t$, $y = b - t$; калі $a = -1$, $b \neq 0$, то сістэма несумесная; калі $a = -1$, $b = 0$, то $x = y = t$, дзе t — любы лік. **277.** $x = 1$, $y = -1$; акрамя таго, пры $a < 1$ атрымліваецца яшчэ адно рашэнне: $x = \frac{a^2 + 2a - 1}{a^2 - 1}$, $y = \frac{1 + a^2}{1 - a^2}$. **278.** Калі $a = -1$, то $x = t$, $y = -\frac{t}{1+3t}$, дзе t — любы лік, адрозны ад 0 і $-\frac{1}{3}$; пры $a \neq -1$ сістэма несумесная. **279.** Калі $a \neq 2$, то $x = -\frac{a}{2}$, $y = a + 1$; пры $a = 2$ $x = t$, $y = 2 - t$, дзе t — любы лік. **280.** Пры $m = -\frac{9}{2}$; n можа быць

любым. **281.** $-6{,}40 < a < 3{,}75$. **282.** $a = -\frac{4}{3}$, $b = -\frac{10}{3}$. **284.** Дадзеныя ўмовы не выконваюцца ні пры якіх значэннях a. **285.** x знаходзіцца з дакладнасцю да 0,006 (дакладней, $\frac{4}{700}$), а y — з дакладнасцю да 0,005 (больш дакладна, $\frac{3}{700}$). **288.** $\frac{34}{65} < m < \frac{38}{65}$; $\frac{9}{130} < n < \frac{12}{130}$.

II. Сапраўдныя лікі

292. а) $-\frac{5}{2}$; б) не; в) -2. **293.** а) $\frac{km}{n}$; б) $\frac{m}{kn}$. **294.** а) 1; $\frac{2}{3}$; 2; б) $\frac{3}{2}$; 1; 3; в) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; 1. **295.** а) і в) азначэнні, б) і г) тэарэмы. **299.** Указанне. Выкарыстаць тоеснасці $a = \frac{(a+b)+(a-b)}{2}$, $b = \frac{(a+b)-(a-b)}{2}$.

302. Усе дзельнікі ліку n маюць выгляд $2^m 5^k$. **308.** Няхай Δ — агульная мера адрэзкаў AB і CD. Тады адрэзак $\frac{\Delta}{nm}$ будзе агульнай мерай адрэзкаў $\frac{AB}{n}$ і $\frac{CD}{m}$. **309.** Калі б n-я доля AB і m-я доля CD мелі агульную меру Δ, то Δ было б і агульнай мерай адрэзкаў AB і CD. **310.** Няхай Δ — агульная мера адрэзкаў Δ_1 і Δ_2. Прыняўшы Δ за адзінку даўжыні, атрымаем, што $|\Delta_1| = m$, $|\Delta_2| = n$, дзе m і n — натуральныя лікі (значок $||$ ужываецца для абазначэння даўжыні). Але тады $|\Delta_1 + \Delta_2| = m + n$, $|\Delta_1 - \Delta_2| = m - n$. Значыць, Δ з'яўляецца агульнай мерай адрэзкаў $\Delta_1 + \Delta_2$ і $\Delta_1 - \Delta_2$. Адваротнае сцверджанне таксама правільнае. **313.** Даказваецца метадам ад адваротнага з дапамогай рэзультату задачы 312. **315.** а) Сувымерныя; б) сувымерныя; в) не. **318.** г) $15{,}25... \geqslant \frac{61}{4}$. **319.** б) $-\frac{3}{8} \geqslant -0{,}375...$; в) $\frac{5}{9} = 0{,}5555...$ (адны пяцёркі); г) які з лікаў большы: $0{,}3333...$ ці $\frac{1}{3}$ — сказаць нельга; усё залежыць ад таго, якія дзесятковыя знакі ліку $0{,}3333...$, што стаяць пасля чацвёртай тройкі; напрыклад, $0{,}33331 < \frac{1}{3}$, але $0{,}33335 > \frac{1}{3}$. **324.** а) З недахопам: 1; 1,7; 1,73; 1,732; ... . З лішкам: 2; 1,8; 1,74; 1,733; ...; б) з недахопам: -2; $-1{,}8$; $-1{,}74$; $-1{,}733$; ... . З лішкам: -1; $-1{,}7$; $-1{,}73$; $-1{,}732$; ... . **326.** Не; напрыклад, $\alpha = \frac{1}{3} = 0{,}333...$. **327.** а) $3{,}146...$; в) $0{,}317...$; г) $-0{,}317...$; д) $1{,}902...$; е) $-1{,}013...$; ж) $-1{,}486...$; з) $3{,}479...$. **328.** а) З недахопам: 3; 3,1; 3,14; 3,145; ...; б) з недахопам: 4; 4,3; 4,37; 4,377; ...; в) з недахопам: -1; $-1{,}0$; $-0{,}92$; $-0{,}914$; ... . **330.** Не, не заўсёды; напрыклад, $\sqrt{2} = 1{,}4142...$; $2 - \sqrt{2} = 0{,}5857...$, але $\sqrt{2} + (2 - \sqrt{2}) = 2{,}000... = 2$. **331.** б) $0{,}88...$; г) $-3{,}16...$; е) $-2{,}73...$. **334.** Не заўсёды. **335.** а) $0{,}91...$. **337.** а) 1,03; б) 0,14; в) $-1{,}22$. **344.** а) Можа; напрыклад, пры $m = 1$, $n = 2$; б) можа, напрыклад, пры $m = n$; в) не, не можа. **345.** Будуць. **351.** Не. **352.** 1-ы спосаб. Калі хоць бы адзін з лікаў $a + b\sqrt{2}$ і $a - b\sqrt{2}$ роўны нулю, то $(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2}) = 0$, адкуль $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$. Лік $\frac{a}{b}$ рацыянальны; але сярод рацыянальных лікаў няма такога, квадрат якога роўны 2. 2-і спосаб. Лік a рацыянальны, а лік $b\sqrt{2}$ ірацыянальны. Значыць, іх сума не можа быць роўна рацыянальнаму ліку 0.

358. $(x-3)^2-1$. **359.** $a(x-2a)^2+3$. **361.** $\left(x+\frac{a+b}{2}\right)^2-\frac{(a-b)^2}{4}$.

362. $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$. **363.** $-3x^2+12x-13=-3(x-2)^2-1$.

370. Не. **371.** а) $a<0$; б) $a=0$; в) $a>0$. **372.** а) $a<\frac{1}{2}$; б) $a\leqslant\frac{1}{2}$; в) $a\geqslant\frac{1}{2}$.

373. Або 1 (пры $a=-2$), або -1 (пры $a=2$). **374.** $|a|\leqslant\frac{1}{4}$. **375.** $a<0$. **376.** $v=\frac{-at+\sqrt{a^2t^2+240abt}}{2t}\ \frac{км}{гадз}$. **377.** $\frac{\pm a+2t+\sqrt{4t^2+a^2}}{2}$ *гадз*. **379.** 2.

380. Пры $a=-\frac{3}{2}$ кораняў няма, пры $a\neq-\frac{3}{2}$ $x=3+a$. **381.** $a=-2$.

384. Указанне. Выкарыстаць тоеснасці: $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$; $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$. **386.** a і $-a$ -4. **388.** 31. **389.** Падабраць такое значэнне a нельга. **390.** а) $a\leqslant4$; б) $0<a\leqslant4$; в) $a<0$; г) $a=0$; д) гэты выпадак не можа мець месца ні пры якім значэнні a. **401.** Аднолькавыя пры $a<0$, розныя пры $a>0$. **402.** Аднолькавыя пры $\frac{1}{2}<a<7$, розныя пры $a<\frac{1}{2}$ і пры $a>7$.

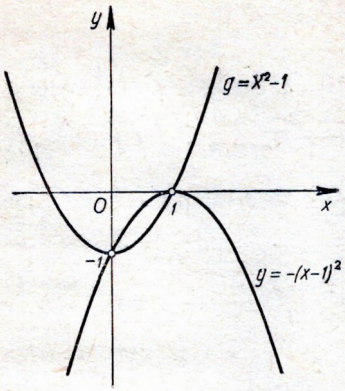
404. $(2x-3a)(x-2a)$. **406.** $(x-2a-b)(x-a+b)$. **409.** 8. **410.** Калі $a\neq-1$ і $a\neq53$, то $x=\frac{54}{a+1}$; пры $a=53$ кораняў няма. **412.** а) $a(15x^2-7x-2)=0$, дзе a — любы цэлы лік, адрозны ад нуля. **413.** $84x^2-18x-30=0$. **414.** Не. **415.** а) $a(x^2-4x+1)=0$, дзе a — любы цэлы лік, адрозны ад нуля. **434.** $x_{min}=-3$, $y_{min}=-5$. **435.** $x_{max}=-1$, $y_{max}=-3$. **436.** $y_{min}=0$; дасягаецца пры $x=\frac{1}{2}$ і $x=-\frac{1}{3}$. **437.** $y_{min}=0$; дасягаецца пры $x=-\frac{1}{2}$ і $x=\frac{3}{2}$.

439. Або $x<1$, або $x>3$. **440.** $1<x<5$. **441.** $-\frac{2}{5}<x<1$. **442.** $0<x<1$.

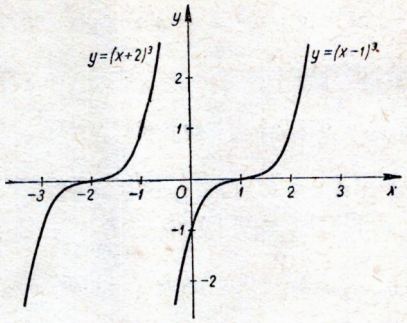
443. Няроўнасць не выконваецца ні пры якіх значэннях x. **447.** -1; 0. **448.** Або $x<-5$, або $-1<x<3$. **449.** Або $|x|<2$, або $6<x<8$. **450.** -3; -2; -1; 0.

451. $a>\frac{5}{3}$. **452.** $a<1$. **454.** б) Або $-5<a<-4$, або $0<a<1$; в) $-4<a<0$.

455. Пры $a=\frac{5}{3}$ адзін корань роўны 0, а другі $\frac{8}{3}$. Пры $\frac{5}{3}<a\leqslant3$, а таксама пры $a\geqslant7$ корані дадатныя. Пры $a<\frac{5}{3}$ корані адмоўныя. Калі $3<a<7$, то ўраўненне не мае кораняў. **458.** $x=\frac{6}{5}\sqrt{3}$, $y=-\frac{6}{5}\sqrt{3}$; $x=-\frac{6}{5}\sqrt{3}$, $y=\frac{6}{5}\sqrt{3}$; $x=\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$, $y=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$; $x=-\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$, $y=-\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. **459.** $x=10$, $y=\frac{3}{2}$; $x=3$, $y=5$. **460.** $x=-3$, $y=4$; $x=-6$, $y=2$. **461.** $x=y=\frac{1}{2}$; $x=y=-\frac{1}{2}$. **463.** $x=1$, $y=5$; $x=5$, $y=1$. **464.** $x=1$, $y=5$; $x=5$, $y=1$; $x=2$, $y=3$; $x=3$, $y=2$. **465.** $x=0$, $y=1$; $x=1$, $y=0$. **466.** $x=2$, $y=-5$. **470.** Гл. рыс. 339. **475.** 12. **476.** -1. **477.** 28. **478.** 4; 5. **479.** 4. **480.** 0; 5.



Рыс. 339.



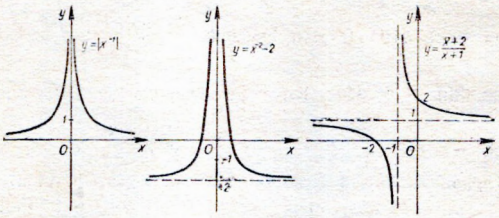
Рыс. 340.

481. $-a$; a. **482.** 7. **484.** $c = 0$. **485.** 5. **486.** $(2x - a)(2x - a + b)$. **489.** Калі $a = b = 0$, то x — любы лік, акрамя 0 і 1; калі хоць бы адзін з лікаў a і b адрозны ад нуля, то кораняў няма. **490.** Пры $x = a$ і $x = \frac{8 + a}{a - 1}$, калі a адрозна ад 1 і -2; пры $x = 1$, калі $a = 1$; пры $a = -2$ задача не мае сэнсу. **491.** Калі $b \neq -2a$, то $x = -b$. Пры $b = -2a$ ўраўненне не мае кораняў. **493.** Не. **494.** $a < -\frac{1}{3}$. **495.** $3 < x < 5$. **496.** Або $-2 < x < 1$, або $x > 6$. **497.** Пры $a \leqslant 1$ і пры $a \geqslant 13$. **498.** а) $5 \leqslant a \leqslant 11$; б) $a \leqslant 5$ і $a \geqslant 11$; в) $a < 5$ і $a > 11$; г) $a = 5$, $a = 11$; д) $5 \leqslant a < 6$ і $10 < a \leqslant 11$; е) $6 < a < 10$. **499.** $x = 27$, $y = 1$; $x = -1$, $y = -27$. **501.** Калі $b \neq 0$, то $x = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + b\right)$, $y = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} - b\right)$. Калі $b = 0$, а $a \neq 0$, то сістэма не мае рашэнняў. Пры $a = b = 0$ $x = t$, $y = t$, дзе t — любы лік. **502.** $x = \frac{4}{3}$, $y = \frac{2}{3}$; $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{4}{3}$. **504.** Няма кораняў. **505.** 6. **506.** Корані аднолькавых знакаў пры $a < -1 - \sqrt{2}$ і пры $-1 + \sqrt{2} < a \leqslant 1$; корані розных знакаў пры $-1 - \sqrt{2} < x < -1 + \sqrt{2}$. **508.** Могуць, але толькі пры $p = q = 0$ і $p = 1$, $q = -2$. **509.** 1. **510.** $3 - \sqrt{12}$. **511.** $b = -6$, $c = 3$.

IV. Ступень з рацыянальным паказчыкам. Ступенная функцыя

517. 0 і 1. **521.** 2) $(-10)^3$ і $(-10)^2$; 5) 2^{200} і 2^{250}. **522.** $60a^6$. **523.** $-173a^{10}$. **524.** c^3. **525.** *ар.* **526.** 4) $(4^3)^{100}$ і $(3^4)^{100}$, $(4^3)^{100} < (3^4)^{100}$; 5) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$ і $\left(-\frac{1}{32}\right)^3$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 < \left(-\frac{1}{32}\right)^3$; 6) $\left[\left(\frac{6}{7}\right)^2\right]^2$ і $\left[\left(\frac{36}{49}\right)^3\right]^2$, $\left[\left(\frac{6}{7}\right)^2\right]^2 > \left[\left(\frac{6}{7}\right)^6\right]^2$. **531.** 3) $-33 \cdot 10^{-5}$. **532.** г) 1; д) $x^{-4} - a^{-6}$; е) $\frac{b(b^2 - 3ab + 3a^2)}{(b - a)^4}$. **535.** 0. **537.** б) і в) гл. рыс. 340. **538.** в), д) і е) гл. рыс. 341. **540.** $100\left(\sqrt[20]{2} - 1\right)\%$. **541.** $100\left(\sqrt[3]{1{,}27} - 1\right)\%$. **542.** $100\left(\sqrt[7]{2} - 1\right)\%$. **545.** 5; -5; -1; 1. **546.** а) $|x - 1|$; г) $3x^2 - x + 1$; **548.** $4 - 2x$ пры $x \leqslant 1$; 2 пры $1 \leqslant x \leqslant 3$; $2x - 4$ пры $x \geqslant 3$.

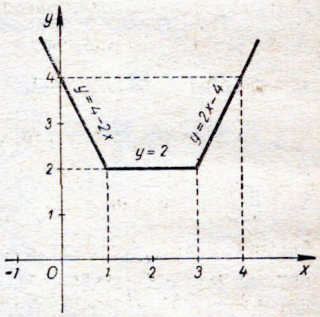
549. Гл. рыс. 342. **550.** $3 \leqslant x \leqslant 5$. **551.** а) $x > -6$; б) x — любы лік; в) $x \leqslant -3$; $x > 1$. **553.** а) $x \geqslant 1$; б мноства ўсіх сапраўдных лікаў; в) $x \leqslant -2$ і $x > \frac{1}{3}$; г) $x \leqslant -2$ і $x \geqslant 7$; д) мноства ўсіх сапраўдных лікаў; е) $x \geqslant 1$. **555.** $x \geqslant 3$. **556.** $2 \leqslant x \leqslant 8$. **557.** x — любы лік. **558.** $x \geqslant 0$. **559.** $x \geqslant a$. **560.** x — любы лік. **563.** а) У тры разы. **566.** 1) $\sqrt{|x^2-1|}$; 2) $\sqrt{x^2-x+1}$. **568.** а) $3\sqrt{2} > 2\sqrt{3}$; г) $4\sqrt[3]{2} > 3\sqrt[3]{4}$. **570.** б) $\sqrt[30]{3^{13}}$; е) $\sqrt[4]{\frac{a+1}{a-1}}$. **572.** а) $4\sqrt{6} - 8\sqrt{3}$; б) 8; в) 1; г) $a-b$. **574.** г) $a^3\sqrt[4]{a}\,\sqrt[8]{(4a)^7}$; д) $\sqrt[6]{a}$ $(a>0)$. **575.** а) $\frac{\sqrt[15]{3^{10}}}{\sqrt[10]{3^3}} < \frac{\sqrt[14]{3^9}}{\sqrt[9]{3^2}}$.



Рыс. 341.

576. 8) $\frac{1}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{15}-3)$; 9) $\frac{1}{10}(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{21}+\sqrt[3]{49})$; 11) $2(2\sqrt{2}+\sqrt{10}-\sqrt{5}-1)$; 12) $(6+7\sqrt{2}+4\sqrt{10}-\sqrt{5})$. **577.** а) 21,95; б) 15,39; в) −7,24. **581.** а) $8^{\frac{2}{3}} > 9^{\frac{3}{4}}$; в) $12^{\frac{3}{2}} > 18^{\frac{2}{3}}$. **582.** $\sqrt{a} - \sqrt[21]{a^5}$. **583.** а) $\frac{a}{b}$, калі $a>0$ і $b>0$; 0, калі $a>0$ і $b=0$; б) $\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ $(x>0,\ y>0,\ x\neq y)$. **584.** $-3\sqrt[3]{9}$. **586.** 3. **587.** 32. **589.** $\frac{19}{3}$. **590.** $\frac{7}{16}$. **591.** 4) $(|a| \neq |x|)$. **592.** 0. **600.** а) $\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{6}{11}} > \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{6}{11}}$; б) $(2\sqrt{3})^{\frac{2}{3}} < (3\sqrt{2})^{\frac{2}{3}}$; г) $(\sqrt{21})^{-\frac{2}{7}} < (2\sqrt{5})^{-\frac{2}{7}}$.

601. а) $a > 1$; б) $a < 1$. **606.** $\frac{2}{2-a}$, калі $1 \leqslant a < 2$; $\frac{2\sqrt{a-1}}{a-2}$, калі $a > 2$; пры $a < 1$ і $a = 2$ задача не мае сэнсу. **607.** $5 - \sqrt{2}$. **608.** $\sqrt{3} + \sqrt{5}$. **616.** Указанне. Запісаць $x + 2\sqrt{x-1}$ у выглядзе $(x-1) + 2\sqrt{x-1} + 1$. **617.** $\sqrt[5]{16}$. **618.** 1. **619.** 1. **620.** $|a|\sqrt{ab}$. **621.** $a\sqrt[3]{b^2}$. **622.** $a\sqrt[3]{a^2b^2}$. **623.** $ab\sqrt[4]{ab^3}$. **624.** 1; $\sqrt{2} = \sqrt[4]{4}$; $\sqrt[3]{3}$. **625.** 0,1. **626.** $\frac{1}{243}$.



Рыс. 342.

629. Вектар перпендыкулярны да восі. **633.** Акружнасць радыуса r з цэнтрам у пункце з каардынатамі (a, b). **634.** а) $-30°$ (мінутная) і $-2°{,}5$ (гадзінная). **635.** а) 1-ы і 4-ы; б) 4-ы і 1-ы. **636.** У адной і той жа чвэрці вуглы φ і $-\varphi$ заканчвацца не могуць. Аднак яны могуць мець адну і тую ж канечную старану, якая ляжыць або на дадатнай, або на адмоўнай паўвосі абсцыс (напрыклад, $360°$ і $-360°$, $180°$ і $-180°$). **637.** а) $360°n$; б) $180° + 360°n$; в) $90° + 360°n$; г) $270° + 360°n$; д) $45° + 360°n$; е) $45° + 180°n$; ж) $-45° + 360°n$.

639. Не. **642.** Не. **643.** $\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\varphi = -1$, $\operatorname{ctg}\varphi = -1$.

644. $\sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\varphi = \frac{1}{2}$; $\operatorname{tg}\varphi = -\sqrt{3}$; $\operatorname{ctg}\varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

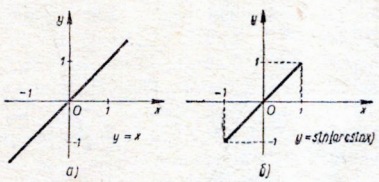
648. а) Правільныя; б) не. **649.** Не. **650.** Не. **653.** $-\frac{2+5\sqrt{3}}{2}$. **654.** $-\frac{14+15\sqrt{2}}{2}$.

655. $\frac{5-3\sqrt{3}}{2}$. **656.** -4. **657.** Выраз не вызначаны: $\operatorname{ctg}0°$ і $\operatorname{cosec}0°$ не існуюць.

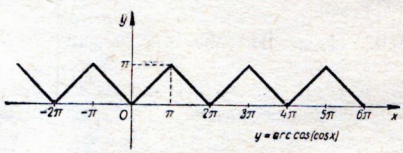
658. -1. **659.** $\sqrt{3}$. **661.** $\frac{3}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{6})$. **662.** $\frac{8}{51}(\sqrt{3}-3)$. **663.** Цотныя: 2, 5, 7, 8; няцотныя: 1, 3, 4, 6, 9. **665.** а) $\sin 100°$; б) $\cos 163°$; в) $\sin 120°$. **666.** а) $\cos 9°$; б) $\sin(-172°)$; в) $\sin(-175°)$; г) $\cos 79$. **670.** а) $\operatorname{tg}25°$; б) $\operatorname{tg}175°$; в) $\operatorname{ctg}120°$; г) $\operatorname{ctg}150°$. **671.** а) $\operatorname{tg}15°$; б) $\operatorname{ctg}87°$; в) $\operatorname{ctg}(-10°)$. **675.** Можа, калі $f(0) = 0$; калі $f(0) \neq 0$, то дадзеная ўмова выконвацца не можа. **676.** Дадатнымі з'яўляюцца выразы 1) і 5); астатнія выразы адмоўныя. **678.** а) $\sin 735°$; б) $\sin 790°$; в) $\cos 860°$; г) $\cos(-10°)$. **679.** а) У першай або трэцяй чвэрці. **680.** а) У 2-й або 4-й чвэрці; б) у 1-й або 3-й чвэрці. **681.** а) У 3-й і 4-й чвэрцях; б) у 1-й і 4-й чвэрцях. **682.** а) $\sin 600° < \sin(-55°) < \sin 1295°$; б) $\cos(-67°) < \cos 654° < \cos 295°$. **684.** Узрастае ад -1 да 0. **685.** Дадатнымі з'яўляюцца выразы 5) і 7); выраз 2) роўны нулю; астатнія выразы адмоўныя. **686.** 3) $\operatorname{tg}353° < \operatorname{tg}359°$; 7) $\operatorname{ctg}(-20°) > \operatorname{ctg}(-10°)$. **687.** б) У 2-й або 4-й чвэрці; в) у любой чвэрці; аднак гэта не азначае, што вугал φ можа быць адвольным. **689.** $\sin x$ і $\operatorname{cosec} x$, $\cos x$ і $\sec x$, $\operatorname{tg} x$ і $\operatorname{ctg} x$. **690.** а) $\operatorname{tg}(-55°)$, $\operatorname{tg}1295°$, $\operatorname{tg}600°$; б) $\operatorname{ctg}295°$, $\operatorname{ctg}654°$, $\operatorname{ctg}(-67°)$. **692.** а) Не; б) не; в) могуць. **694.** ≈ 3764 *м*. **695.** $\approx 3°$. **698.** а) $\frac{2}{9}\pi$; б) $\frac{5}{6}\pi$; в) $\frac{7}{4}\pi$; г) $\frac{50}{9}\pi$. **699.** а) $\approx 25°43'$; б) $108°$. **700.** 1) У 1-й; 2) у 3-й; 3) у 3-й. **701.** а) $(a-b)^2$; б) 4; в) -2; г) дадзены выраз не вызначаны: $\operatorname{ctg}\pi$ не існуе. **702.** $x = n\pi$. **706.** Калі радыус акружнасці роўны 1. **707.** а) $\sin 0{,}87$; б) $\cos 1{,}8$; в) $\sin 4°$. Указанне. $\sin 4° > 0$, $\sin 4 < 0$; г) $\operatorname{tg}\left(\frac{5}{6}\right)°$. **708.** Дадатнымі з'яўляюцца выразы а) і б), адмоўнымі — выразы в) і г). **709.** Дадатным з'яўляецца выраз а), адмоўнымі — выразы б), в) і г). **715.** $\frac{3\operatorname{tg}\alpha - 1}{\operatorname{tg}\alpha + 2}$. **716.** $\frac{a^2-1}{2}$. **717.** 2) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$; 4) $\sin\alpha = -0{,}6$; $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}75$; 5) $\sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. **718.** $\cos\varphi = \frac{b-a}{b+a}$. **719.** $\sin\varphi = \frac{a^2-1}{\sqrt{a^4-2a^2+2}}$, $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{a^4-2a^2+2}}$. **729.** $\frac{1}{3}$. **730.** 0,8, калі вугал φ заканчваецца ў першай чвэрці; $-0{,}8$, калі вугал φ заканчваецца ў другой чвэрці. **732.** 0. **733.** 1. **734.** $-\operatorname{tg}0{,}5 \approx -0{,}5463$. **742.** а) $\cos 40°$; в) $\cos 0{,}87$. **743.** Даюцца адпаведна сінусы, косінусы, тангенсы і катангенсы дадзеных вуглоў: 1) 0,9257; $-0{,}3783$; $-2{,}446$; $-0{,}4088$; 2) $-0{,}6127$; $-0{,}7900$; 0,7752; 1,2900; 3) $-0{,}8023$; $-0{,}5969$; 1,3440; 0,7441; 5) $-0{,}9735$; 0,2287; $-4{,}258$;

—0,2348. **747.** а) 0,017; в) —0,015. **751.** а) 0,9999; в) 0,9999. **764.** $\frac{\sqrt{2r}}{|\sin\alpha|}$. **765.** $\sqrt{2}\,|\sec\alpha|$. **766.** $\operatorname{tg}\alpha$. **767.** $1\left(\alpha\neq\frac{n\pi}{2}\right)$. **768.** $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$ $(\alpha\neq n\pi,\ \beta\neq k\pi)$. **769.** $\cos^2\alpha\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+n\pi\right)$. **770.** $-\frac{7}{6}$. **771.** —1. **772.** —16. **780.** $-1\leqslant a\leqslant 1$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant b\leqslant\frac{\pi}{2}$. **781.** а) 195°; б) —75°; в) —1485°. **785.** а) 0,4; $\sqrt{0{,}84}$; $\frac{0{,}2}{\sqrt{0{,}21}}$; $5\sqrt{0{,}21}$; б) $-\frac{4}{5}$; $\frac{3}{5}$; $-\frac{4}{3}$; $-\frac{3}{4}$. **787.** $(-1)^n\frac{\pi}{4}+n\pi$.

788. $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}+n\pi$. **789.** $\frac{n}{2}\pi$. **790.** $\frac{3}{2}\pi+6n\pi$. **791.** $-60°+180°n$. **792.** $2n\pi$; $-\frac{\pi}{3}+2k\pi$. **793.** Няма кораняў. **794.** $-\frac{1}{2}+(-1)^n\arcsin\frac{\pi}{4}+$ $+n\pi$. **795.** n. **796.** Няма кораняў. **797.** $-1\leqslant a\leqslant 1$; $0\leqslant b\leqslant\pi$. **798.** 270°. **799.** 300°. **800.** 30°. **801.** —270°. **809.** $2\pi-6$. **810.** 1. **811.** а) Могуць; б) не. **812.** $\pm 120°+360°n$. **813.** $\pm\frac{\pi}{18}+\frac{2}{3}n\pi$. **814.** $\frac{\pi}{4}+\frac{n}{2}\pi$. **815.** $30°+360°n$. **816.** Няма кораняў. **817.** $2n$. **818.** $\pm\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}+n\pi$. **819.** $-390°+1080°n$; $510°+1080°n$. **820.** Няма кораняў. **821.** Няма кораняў. **822.** Няма кораняў. **823.** 135°. **824.** 225°. **825.** 255°. **826.** —75°.



Рыс. 343.



Рыс. 344.

827. $-\infty<a<\infty$, $-\frac{\pi}{2}<b<\frac{\pi}{2}$. **828.** $-\infty<a<\infty$, $0<b<\pi$. **831.** а) $\frac{5}{13}$, $\frac{12}{13}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{12}{5}$; б) $-\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $-\frac{3}{4}$, $-\frac{4}{3}$; в) $\frac{12}{13}$, $-\frac{5}{13}$, $-\frac{12}{5}$, $-\frac{5}{12}$; г) $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{4}$. **834.** 2. **835.** $2-\pi$. **836.** $\frac{n}{3}\pi$. **837.** $-52°30'+90°n$. **838.** $\frac{n}{5}\pi$. **839.** $\frac{1}{4}+n$. **840.** $15°+90°n$. **841.** $65°+60°n$. **842.** $\frac{1}{2}+n$. **843.** $-\frac{7}{12}\pi+n\pi$. **844.** Няма кораняў. **845.** $\frac{\pi}{4}+n\pi$. **846.** $\frac{\pi}{4}+n\pi$; $\frac{\pi}{2}+k\pi$. **847.** $n\pi$; $-\frac{\pi}{2}+2k\pi$. **848.** $\frac{\pi}{2}+n\pi$. **849.** $\pi+2n\pi$. **850.** $\frac{\pi}{2}+2n\pi$. **851.** Няма кораняў. **852.** $n\pi$. **853.** $\frac{\pi}{4}+n\pi$; $-\operatorname{arctg}3+k\pi$. **854.** $\pm 60°+360°n$.

855. $(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi$. **856.** $n\pi$; $-\frac{\pi}{2}+k\pi$. **857.** $\frac{\pi}{2}+n\pi$. **858.** $-40°+180°n$; $-10°+180°n$. **859.** Няма кораняў. **860.** Няма кораняў. **861.** Няма кораняў.

862. $\frac{\pi}{2}+2n\pi$. **863.** $\frac{\pi}{2}+n\pi$. **864.** $\frac{\pi}{2}+2n\pi;\ \pi+2k\pi$. **865.** $\frac{\pi}{4}+n\pi$.

866. $\frac{\pi}{6}+n\pi$. **867.** $\operatorname{arctg}\sqrt{2}+n\pi$. **868.** $-\operatorname{arctg}\frac{5}{3}+n\pi$. **869.** $\frac{\pi}{4}+n\pi;$

$\frac{\pi}{3}+k\pi$. **870.** $\frac{\pi}{4}+n\pi;\ \operatorname{arctg}3+k\pi$. **871.** $\frac{\pi}{3}+n\pi;\ \frac{\pi}{6}+k\pi$. **872.** $n\pi$.

873. $\frac{\pi}{2}+n\pi$. **875.** $\frac{\pi}{4}+n\pi;\ \operatorname{arctg}2+k\pi$. **876.** $-\operatorname{arctg}(2+\sqrt{3})+n\pi;$

$\frac{\pi}{6}+k\pi$. **877.** $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{n\pi}{2}$. **878.** $\frac{\pi}{4}+2n\pi$. **881.** 7 кораняў. **882.** 0,47.

885. $x\neq\frac{\pi}{2}+2n\pi$. **892.** $73°<\alpha<90°$. **895.** $\frac{24}{25},\ \frac{7}{24},\ \frac{24}{7}$, калі φ заканчваецца ў першай чвэрці; $-\frac{24}{25},\ -\frac{7}{24},\ -\frac{24}{7}$, калі φ заканчваецца ў другой чвэрці.

896. $\frac{7}{25},\ -\frac{7}{24},\ -\frac{24}{7}$. **897.** $-\frac{1}{\sqrt{10}},\ -\frac{3}{\sqrt{10}}$, 3. **898.** $\frac{7}{25},\ \frac{24}{25},\ \frac{7}{24},\ \frac{24}{7}$ і $-\frac{7}{25},\ \frac{24}{25},\ -\frac{7}{24},\ -\frac{24}{7}$. **899.** $\frac{7}{25},\ \frac{24}{25},\ \frac{7}{24},\ \frac{24}{7}$ і $\frac{7}{25},\ -\frac{24}{25},\ -\frac{7}{24},\ -\frac{24}{7}$.

900. $\frac{5}{13},\ \frac{12}{13},\ \frac{5}{12},\ \frac{12}{5}$ і $-\frac{5}{13},\ \frac{12}{13},\ -\frac{5}{12},\ -\frac{12}{5}$. **901.** $\frac{3}{5},\ \frac{4}{5},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{3}$ і $\frac{3}{5},\ -\frac{4}{5},\ -\frac{3}{4},\ -\frac{4}{3}$. **902.** 0,6. **903.** —0,6.

904. $-\frac{12}{5}$. **905.** 0,8. **907.** Гл. рыс. 343. **908.** Гл. рыс. 344. **911.** а) $a\leqslant\frac{1}{4}$; б) $-2\leqslant a\leqslant\frac{1}{4}$.

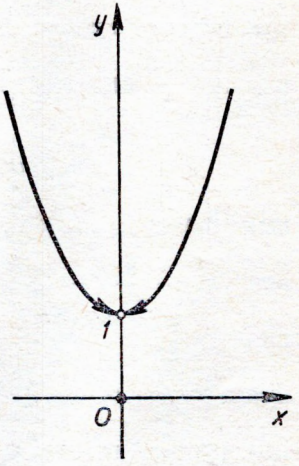
917. $-\frac{\pi}{6}$. **918.** $0{,}9\pi$. **919.** $2-\frac{\pi}{2}$. **921.** $-\frac{\pi}{4}+n\pi;$ $\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$. **922.** $\operatorname{arctg}(-1\pm\sqrt{3})+n\pi$.

923. Няма кораняў. **924.** $\pm\frac{\pi}{4}+2n\pi$.

925. $-\frac{\pi}{4}+n\pi;\ 2k\pi;\ \frac{\pi}{2}+2l\pi$. **926.** $\frac{n}{2}\pi$.

927. $\frac{\pi}{2}+2n\pi;\ \frac{\pi}{4}+\frac{k}{2}\pi$. **928.** Няма кораняў.

929. $-\frac{\pi}{2}+2n\pi<x<\frac{\pi}{2}+2n\pi$. **930.** $\pi+2n\pi<x<2\pi+2n\pi$.



Рыс. 345.

VI. Лікавыя паслядоўнасці

934. а) З'яўляецца; б) не; в) з'яўляецца, калі $a\neq 0$; пры $a=0$, $|b|\leqslant 1$ дадзеная паслядоўнасць бесканечная; пры $a=0$, $|b|>1$ ураўненне $\sin x=ax+b$ зусім не мае кораняў. **936.** Указанне. $a_{n+1}-a_n=\frac{2}{(2n+3)(2n+1)}>0$. **938.** $ad-bc>0$. **947.** $N=199$. **948.** $N=24$. **949.** $N=100$. **950.** $N=200$. **954.** $-\frac{1}{2}$. **955.** 3. **956.** 0. **957.** —1. **958.** 1. **959.** $\frac{a_1}{a_2}$, калі $a_2\neq 0$; калі $a_2=0$, а $a_1\neq 0$, то прэдзел не існуе; калі $a_1=a_2=0$, а $b_2\neq 0$, то прэдзел роўны $\frac{b_1}{b_2}$ і г. д. **961.** а) Не; б) існуе, г) існуе пры $a<0$; не існуе пры $a\geqslant 0$.

964. а) $a_n = 5 - 10(n-1)$; в) $a_n = 6 + 3(n-1)$. **967.** а) Утвараюць; б) не; в) утвараюць. **968.** —1; 0; 1. **969.** Або $a_1 = 2$, $d = 3$, або $a_1 = 14$, $d = -3$. **970.** Або $a_1 = 2$, $d = 2$, або $a_1 = 22$, $d = -2$. **971.** 247500. **972.** 78. **975.** $\frac{3}{2}(m+n)[3(n-m)-1]$. **976.** 22 *м*. **977.** а) 55; б) 1. **978.** 16°. **979.** 1, 3, 5,... . **980.** 100. **981.** в) Або $a_n = (-1)^n$, або $a_n = -1$. **983.** 1, —3, 9, ... **984.** $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$. **989.** г) 2731; д) $\frac{x^{101}-1}{x-1}$, калі $x \neq 1$; 101, калі $x=1$. **990.** $100\left(1-\frac{1}{10}\right)^{10}$ %. **991.** 2^{72}. **993.** а) —1; б) няма кораняў. **994.** 17, 10, 3 або 8, 10, 12. **996.** б) $\frac{9}{4}$; в) $\frac{5+3\sqrt{3}}{2}$. **997.** $x > 0$, калі $a > 0$; $x < -a$, калі $a < 0$; калі ж $a = 0$, то дадзеная геаметрычная прагрэсія не будзе ўбываючай ні пры якім значэнні x. **998.** а) $6a$; б) $\frac{\sqrt{3}}{3}a^2$ **1000.** 5, 1, $\frac{1}{5}, \ldots$, **1004.** а) Наогул кажучы, не; б) будзе. **1006.** а) 0, 1, $\frac{1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2}$; б) 1; в) 1. Заўвага. Паслядоўнасць 0, 0, 0, ... мы не адносім да геаметрычных прагрэсій. **1007.** $\frac{(1+a^{2n+2})(1-a^{2n})}{a^{2n}(1-a^2)} + 2n$. **1009.** Такімі лікамі могуць быць толькі роўныя лікі: a, a, a. **1012.** $a_m = \frac{A+B}{2}$, $a_n = A + \frac{m}{2n}(B-A)$. **1014.** 1, 3, 5, ... або 29, 27, 25,... . **1016.** 1 і —3, або —3 і 1. **1017.** Не. **1019.** Гл. рыс. 345. **1020.** 3, 1, —1 або 15, 1, —13. **1021.** 5, 15, 45. **1022.** 12, 16, 20, 25.

VII. Трыганаметрычныя тэарэмы складання

1024. 1) 1; 2) 7; 3) $5\sqrt{2}$; 4) 5; 5) $3\sqrt{65}$; 6) 25. **1025.** $\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{5}+3}{2}$. **1026.** $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; $N\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **1027.** $M\ (1; \sqrt{3})$; $N\ (1,0)$. **1028.** а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\frac{1}{2}$; д) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; е) —1. **1029.** $\cos\alpha$. **1030.** $\frac{1}{2}$. **1031.** 0. **1032.** $1\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$. **1033.** $1\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + n\pi; \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$. **1034.** $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$. **1035.** а) $\frac{24-5\sqrt{21}}{65}$; б) $\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$. **1036.** $\frac{36}{325}$ і $\frac{204}{325}$. **1037.** $\frac{4\sqrt{2}-\sqrt{5}}{9}$. **1038.** $\frac{\sqrt{5}-4\sqrt{2}}{9}$. **1039.** $\frac{4}{5}$. **1040.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) 1; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **1044.** $1\ (\alpha \neq n\pi)$. **1045.** $1\left(\alpha \neq n\pi; \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$. **1046.** $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\beta$. **1047.** $\cos\alpha \cos\beta\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,\ \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$. **1048.** $-0{,}4 + 0{,}3\sqrt{3}$, калі $\pi + 2n\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$; -4, $-0{,}3\sqrt{3}$, калі $\frac{3}{2}\pi + 2k\pi < \alpha < 2\pi + 2k\pi$. **1049.** 0 і $-\frac{\sqrt{39}}{8}$. **1050.** $-\frac{56}{65}$ і $-\frac{16}{65}$. **1051.** $\frac{2}{9}(1+\sqrt{10})$. **1052.** $\frac{\sqrt{15}-2}{6}$. **1053.** $\frac{\sqrt{2}}{10}$. **1054.** $\frac{13}{14}$. **1055.** $-2-\sqrt{3}$.

1056. б) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; г) 1. **1057.** $-\frac{16}{63}$; $-\frac{56}{63}$. **1058.** $\frac{56}{33}$; $\frac{16}{63}$. **1059.** -1. **1060.** $\frac{2}{3}(\sqrt{2}+\sqrt{5})$. **1061.** $-2\sqrt{2}$. **1062.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{5}$. **1063.** $\frac{\pi}{2}$. **1065.** $\sin 2\alpha = -0{,}96$; $\cos 2\alpha = -0{,}28$. **1066.** $-\frac{24}{7}$; $-\frac{7}{25}$. **1067.** 0,98. **1068.** а) У 1-й; б) у 2-й; в) у 4-й; г) у 3-й. **1069.** в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$. **1072.** Ад $-\frac{1}{2}$ да $+\frac{1}{2}$, уключаючы гэтыя два лікі. **1075.** $\operatorname{tg} 2\alpha$. **1077.** $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg} 2\alpha$ $(\alpha \neq 45^\circ + 180^\circ \cdot n)$.

1078. $\frac{1}{4}\sin 2\alpha$. **1081.** б) $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}}$, калі $-\pi+4n\pi < \alpha < \pi + 4n\pi$, $\sin\alpha = -2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}}$, калі $\pi + 4n\pi < \alpha < 3\alpha + 4k\pi$; $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$. **1082.** $\frac{1}{2}\left(\alpha \neq \frac{n\pi}{2}\right)$. **1083.** $2\left(\alpha \neq \frac{n\pi}{2}\right)$. **1086.** $\cos 2\alpha \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$. **1087.** $\sin\alpha + \cos\alpha\left(\alpha \neq \frac{\pi}{4} + n\pi\right)$. **1088.** $-\frac{3}{4}$. **1089.** $\frac{24}{7}$. **1090.** $\frac{1}{2}$. **1091.** $-\frac{4}{5}$. **1098.** а) $\frac{7}{25}$; б) $-\frac{84}{625}$. **1103.** $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$. **1105.** $\sqrt{0{,}8}$, $\sqrt{0{,}2}$ і 2, калі $\frac{\pi}{2} + 4n\pi < \alpha < \pi + 4n\pi$; $-\sqrt{0{,}8}$, $-\sqrt{0{,}2}$ і 2, калі $\frac{5}{2}\pi + 4k\pi < \alpha < 3\pi + 4k\pi$. **1106.** $3 + 2\sqrt{2}$ або $3 - 2\sqrt{2}$. **1107.** $\sqrt{0{,}1}$. **1108.** $\sqrt{0{,}9}$. **1109.** $-\frac{1}{2}$. **1110.** $-\frac{1}{3}$. **1111.** $\frac{3}{2}$. **1112.** -2. **1114.** $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$. **1115.** $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$. **1116.** $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$. **1117.** $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$. **1118.** $\frac{\sqrt{3}-2}{4}$. **1119.** $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$. **1126.** $\frac{1}{2} - \sin 10^\circ + \cos 20^\circ + \sin 50^\circ$. **1127.** $\cos 5^\circ - \cos 75^\circ + \cos 35^\circ - \frac{\sqrt{2}}{2}$. **1130.** $\sqrt{2+\sqrt{3}}$. **1131.** 0. **1132.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **1133.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **1134.** $\sqrt{2+\sqrt{3}}$. **1135.** 0. **1139.** $\frac{1}{2} + \sin\alpha = \sin\frac{\pi}{6} + \sin\alpha = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{12}\right)$. **1142.** 0. **1143.** $-\sqrt{2-\sqrt{3}}$. **1144.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **1145.** $-\frac{\sqrt{6}}{2}$. **1146.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **1147.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **1151.** $\sqrt{2} + 2\cos\alpha = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos\alpha\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + \cos\alpha\right) = 4\cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\alpha}{2}\right)$. **1155.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\alpha$. **1156.** $2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$. **1158.** $4\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \times \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos 2\alpha$. **1165.** $2\sqrt{2}$. **1166.** -2. **1169.** $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,\ \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$. **1170.** а) $\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)}{\cos\alpha}$. **1184.** $y = \frac{1}{2}(1 + \sin 4x)$ — адзін з прыкладаў; другі назавіце самі. **1185.** $y = -\left|\operatorname{tg}\frac{\pi x}{5}\right|$ — адзін з прыкладаў;

другі назавіце самі. **1215.** $A > 0$, $\omega > 0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ (або $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$). **1219.** 50 герц. **1220.** Мінімальныя значэнні пры $t = \frac{1}{3} + 4n$, максімальныя значэнні пры $t = \frac{7}{2} + 4n$; нулявыя значэнні пры $t = -\frac{4}{3} + 2n\pi$. **1221.** а) Мінімальныя значэнні пры $t = -\frac{\pi}{10} + \frac{2n\pi}{3}$, максімальныя значэнні пры $t = \frac{7\pi}{30} + \frac{2n\pi}{3}$; нулявыя значэнні пры $t = \frac{\pi}{15} + \frac{n\pi}{3}$. **1222.** $2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. **1223.** $\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. **1224.** $5\sin\left(x + \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)$. **1225.** $5\sin\left(x - \operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$. **1226.** $13\sin\left(x - \operatorname{arctg}\frac{12}{5}\right)$. **1227.** $25\sin\left(2x + \pi + \operatorname{arctg}\frac{24}{7}\right)$. **1230.** а) -5; 5; б) 0; 5; в) -13; 13; г) -20; 30; д) 0; $\sqrt[4]{2}$; е) мінімальнае значэнне $\frac{1}{\sqrt{2}}$, максімальнага не існуе. **1234.** $A = \sqrt{2}$, $\omega = 2$, $\varphi = -\frac{\pi}{4}$. **1236.** $A = 5$, $\omega = \pi$, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$. **1254.** $\operatorname{arctg}\frac{1-\sqrt{5}}{2} + n\pi$; $\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{5}}{2} + k\pi$. **1255.** $2n\pi$. **1256.** x — любы лік. **1257.** $\frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{3}$. **1258.** $n\pi$. **1259.** $-\frac{\pi}{4} + n\pi$. **1260.** $\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{4}$. **1261.** $n\pi$. **1262.** $\pm\frac{\pi}{6} + n\pi$. **1263.** $(-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2}$. **1264.** $(2n+1)\pi$; $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3} + 2k\pi$. **1265.** $\frac{1}{2}\left[(-1)^n \arcsin(\sqrt{3} - 1) + n\pi\right]$. **1266.** $\pm\frac{2}{3}\pi + 2n\pi$. **1267.** $\pm\arccos\frac{1}{4} + (2n+1)\pi$. **1268.** $(-1)^n \arcsin\frac{8-\sqrt{14}}{10} + n\pi$. **1269.** $(-1)^n\frac{\pi}{6} + n\pi$. **1270.** $2n\pi$; $2k\pi - 2\operatorname{arctg}3$. **1271.** $n\pi$; $\pm\frac{\pi}{6} + k\pi$. **1272.** Няма кораняў. **1273.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{2} + n\pi$. **1274.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + n\pi$. **1275.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + n\pi$; $-\operatorname{arctg}2 + k\pi$. **1276.** $\frac{n\pi}{7}$; $\frac{k\pi}{3}$. **1277.** $\frac{n\pi}{8}$. **1278.** $\frac{n\pi}{3}$; $\frac{k\pi}{8}$. **1279.** $\frac{n\pi}{5}$. **1280.** $n\pi$. **1281.** Калі $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$, то x — любы лік; калі $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$, то кораняў няма. **1282.** $\pi + 2n\pi$; $\pm\frac{2\pi}{3} + 4k\pi$. **1283.** $2n\pi$; $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$; **1284.** $\frac{\pi}{2} + n\pi$; $\pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$. **1285.** $n\pi$; $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + k\pi$. **1286.** $\pm 2\arccos\frac{1}{3} + 4n\pi$. **1287.** $\frac{n\pi}{2}$. **1288.** $n\pi$; $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$. **1289.** $60° + 360°n$; $150° + 360°n$. **1290.** $\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{4}$; $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$. **1291.** $\frac{n\pi}{4}$. **1292.** Калі $\alpha = \beta + n\pi$, то x — любы лік; калі $\alpha \neq \beta + n\pi$, то $x = -\frac{\pi}{2} + \alpha + 2k\pi$; $x = -\frac{\pi}{2} + \beta + 2m\pi$. **1293.** $\frac{\pi}{10} + \frac{2n\pi}{5}$; $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$. **1294.** $\frac{2n\pi}{5}$; $\frac{\pi}{2} + k\pi$; $(2m+1)\pi$. **1295.** $\frac{2n\pi}{3}$; $\frac{\pi}{4} + k\pi$; $-\frac{\pi}{2} + 2m\pi$. **1296.** $\frac{n\pi}{3}$; $\pm\frac{\pi}{3} + k\pi$. **1297.** $\frac{n\pi}{8}$, дзе n — любы лік, які не дзеліцца на 4. **1298.** $n\pi$. **1299.** $\frac{n\pi}{2}$. **1300.** Калі $\alpha = \frac{n\pi}{2}$, то x — любы лік; калі $\alpha \neq \frac{n\pi}{2}$, то ко-

раняў няма. **1301.** $2n\pi$; $\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$. **1303.** $\pm\arccos\frac{\sqrt{17}-3}{4}+2n\pi$.
1304. $\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}$. **1305.** $\frac{n\pi}{6}$; $\frac{k\pi}{4}$. **1306.** Няма кораняў. **1307.** $\frac{\pi}{2}+2n\pi$; $\frac{7\pi}{6}+2k\pi$.
1308. $\frac{\pi}{12}+2n\pi$; $\frac{7\pi}{12}+2k\pi$. **1309.** $\frac{\pi}{6}+n\pi$; $\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{6}$. **1310.** $2\operatorname{arctg}\sqrt{7}+$
$+2n\pi$; $\pi+2k\pi$. **1311.** $\frac{\pi}{12}+2n\pi$; $-\frac{7\pi}{12}+2k\pi$. **1312.** $\frac{\pi}{4}+n\pi$; $(2k+1)\pi$.
1313. $(2n+1)\pi$; $\operatorname{arctg}\frac{5}{2}+k\pi$. **1314.** $\frac{\pi}{2}+2n\pi$; $-2\operatorname{arctg}(4+\sqrt{15})+$
$+2k\pi$. **1315.** $\pm\frac{\pi}{4}+n\pi$. **1316.** $\frac{n\pi}{2}$. **1317.** $\pm\frac{2\pi}{3}+2n\pi$. **1318.** 0,16.
1319. 0,95. **1320.** а) 1; б) 1; в) 1, калі $a=0$; бясконцае мноства, калі $a\neq 0$; г) 3. **1321.** У тым і толькі ў тым выпадку, калі сума гэтых вуглоў кратная π і тангенс кожнага з вуглоў існуе. **1322.** $-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$, $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.
1323. $-\frac{4(a-b)\sqrt{ab}}{(a+b)^2}$; $-\frac{a^2-6ab+b^2}{(a+b)^2}$. **1324.** $-\frac{24}{25}$. **1328.** $-\sin(\alpha+\beta)$
$(\beta\neq\alpha+n\pi)$. **1329.** а) $2\sin\frac{\varphi}{2}$; б) $-2\cos\frac{\varphi}{2}$. **1330.** $2\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 5\alpha$.
1338. $\frac{\pi}{2}+n\pi$. **1339.** $\pm\frac{\pi}{8}+n\pi$; $\pm\frac{3\pi}{8}+k\pi$. **1340.** $-\frac{\pi}{4}+n\pi$; $-\frac{\pi}{2}+$
$+2m\pi$; $2k\pi$. **1341.** $\frac{\pi}{2}+2n\pi$; $2k\pi$. **1342.** $n\pi$; $\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$. **1343.** $\frac{n\pi}{5}$.
1344. $-\frac{\pi}{4}+n\pi$. **1345.** $\frac{\pi}{2}+n\pi$; $-\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+k\pi$. **1346.** Няма кораняў.
1347. $\frac{\pi}{2}+n\pi$; $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$; $\frac{\pi}{10}+\frac{m\pi}{5}$. **1348.** $n\pi$; $\frac{\pi}{4}+k\pi$. **1349.** $\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2}$.
1351. $-\frac{\pi}{4}+n\pi$; $-\frac{\pi}{2}+2k\pi$; $\pi+2m\pi$. **1352.** $x=\frac{\pi}{6}+2n\pi$,
$y=\frac{\pi}{6}-2n\pi$. **1353.** $x=\frac{\pi}{4}+2n\pi$, $y=\frac{\pi}{4}-2n\pi$. **1354.** $x=\frac{\pi}{4}+(n+m)\pi$,
$y=-\frac{\pi}{12}+(n-m)\pi$; $x=-\frac{\pi}{12}+(r+s)\pi$, $y=\frac{\pi}{4}+(r-s)\pi$;
$x=-\frac{\pi}{12}+(k+l)\pi$, $y=\frac{\pi}{4}+(k-l)\pi$; $x=-\frac{\pi}{4}+(s+t)\pi$,
$y=\frac{\pi}{12}+(s-t)\pi$. **1355.** $x=\frac{\pi}{3}+(n+m)\pi$, $y=\frac{\pi}{3}+(n-m)\pi$;
$x=-\frac{\pi}{3}+(k+l)\pi$, $y=-\frac{\pi}{3}+(k-l)\pi$. **1357.** $\cos x=\frac{1}{2}$, $\cos y=\frac{\sqrt{3}}{2}$
або $\cos x=-\frac{1}{2}$, $\cos y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; адсюль атрымліваецца 8 груп рашэнняў.

VIII. Паказальная і лагарыфмічная функцыі

1358. а) $5^{\frac{2}{3}}$; б) $\sqrt[10]{4^9}$; в) $\left(\frac{1}{3}\right)^{6,5}$; г) $\left(\frac{10}{11}\right)^{5\frac{1}{3}}$. **1361.** $\frac{1}{9}$. **1362.** $2^{-\frac{\sqrt{3}}{4}}$.
1368. а) $x\neq 0$; б) $|x|\geqslant 1$; в) мноства ўсіх сапраўдных лікаў. **1369.** Больш 1: 2), 5), 6), 7); менш 1: 1), 3), 4), 8), 9). **1371.** а) $\left(\frac{1}{\pi}\right)^{-\sqrt{3}}$; б) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2}$;
в) $\left(\frac{2}{3}\right)^{1+\sqrt{6}}$; г) $(\sqrt{3})^{\sqrt{3}-2}$. **1373.** Калі $a\neq 1$, то $x=y$; калі $a=1$, то

x і y — любыя лікі. **1377.** $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$; $\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$; $\log_2 2\sqrt{2} = \frac{3}{2}$. **1380.** $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$; $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3} = -\frac{1}{2}$; $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9\sqrt{3}} = \frac{5}{2}$.

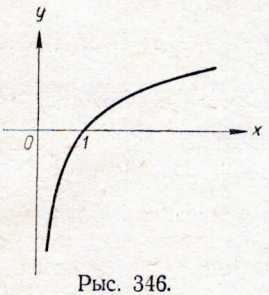
1381. а) —1; б) 0; в) $\frac{1}{2}$; г) 0. **1383.** а) 243; б) 81; в) 7; г) 1; д) $\frac{1}{2}$; е) 49; ж) 100; з) $\frac{1}{6}$; і) $\frac{1}{25}$; к) 20736. **1390.** а) $x > -1$; б) мноства ўсіх лікаў; г) $x < 0$; д) $x \neq 0$; е) $x < -2$; $x > 1$; ж) $2 < x < 3$; з) мноства ўсіх лікаў. **1391.** а) $0 < x < \pi$; б) $0 < x < \frac{\pi}{2}$; $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$; в) $0 < x < \frac{\pi}{2}$; $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$; г) $0 < x < \frac{\pi}{2}$; $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$. **1392.** а) Ні найбольшага, ні найменшага значэння функцыя не мае; б) найменшае значэнне функцыі роўна нулю (пры $x = 1$), а найбольшага не існуе. **1395.** а) $x > 3$; б) $|x| > 2$; в) $0 < x \leqslant 2$; г) $x \geqslant 2$; д) $x \geqslant 5$; е) $|x| < 1$. **1396.** а) $a > 1$; б) $a < 1$; в) $a > 1$; г) $a > 1$; **1397.** $a > 1$. **1398.** а) 2 і 3; б) 1 і 2; в) —2 і —1; г) —4 і —3. **1400.** 5) —3; 9) —3; 10) —2. **1403.** 0,0762; —0,0762. **1404.** $x > 1$. **1405.** $x < 1$; $x > 2$. **1406.** На $\log_2 10000$. **1414.** а) 0, 6309; б) 1,8927; в) 2,2618; г) 0, 4421. **1417.** Не. **1418.** а) $\lg 3 + 7\lg a$; б) $\lg 15 + 3\lg a + 3\lg b + 7\lg c$; в) $\frac{15}{7}\lg a + \frac{5}{7}\lg b$; г) $\frac{4}{3}\lg a + \frac{2}{3}\lg b$. **1419.** а) $\frac{1}{2}[\lg(a+b) - \lg(a-b)]$; г) $\frac{3}{5}(\lg a - \lg b - \lg 2)$. **1420.** а) $-\frac{3}{2}\lg\cos\varphi$; б) $\frac{1}{6}(\lg 2 + 2\lg\cos\varphi - 3\lg\sin\varphi)$. **1421.** а) $\frac{2}{3}(\lg b - \lg a - 3\lg 3)$; б) $\frac{1}{4}\lg 3 + \frac{1}{3}\lg 4 - \frac{3}{4}\lg a - \frac{2}{3}\lg b$; в) $\frac{1}{18}(3\lg 5 + 7\lg m + 4\lg n)$. **1422.** в) $\frac{5}{8}(\lg a - \lg b)$. **1423.** а) 6; б) 0,5; в) 4; г) 8. **1424.** а) 2; б) 16; в) $\sqrt[10]{\frac{64}{7}}$. **1425.** а) $\frac{a(a+b)^n}{\sqrt[n]{a-b}}$; б) $\frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt[24]{\frac{b^6(a-b)^4}{a^4(a+b)^3}}$; в) $\frac{\sqrt[15]{a^4b^5}}{a+b}$. **1426.** а) $\operatorname{tg}\varphi$; б) $2\cos\frac{\varphi}{2}\sqrt{\sin\frac{\varphi}{2}}$. **1427.** $\pi = 3 + 0{,}1415\ldots$; $-2{,}37 = -3 + 0{,}63$; $-7 = -7 + 0$; $-\pi = -4 + 0{,}8584\ldots$. **1431.** а) $\lg 6 \approx$ $\approx 0 + 0{,}7782$; б) $\lg 15 \approx 1 + 0{,}1761$; д) $\lg\frac{1}{12} \approx -2 + 0{,}9208$. **1433.** $\approx 1{,}4651$; $\approx 1{,}2894$; $\approx 1{,}7686$, **1434.** а) $\approx 2{,}304$; б) ≈ 10000; в) $\approx 0{,}4048$; г) $\approx 0{,}002858$; д) $\approx 0{,}0009426$; е) $\approx 0{,}01001$. **1438.** а) $\overline{1}{,}2907$; б) $\overline{15}{,}8640$; в) $\overline{66}{,}2361$; г) 0,6496; д) 0,7112. **1440.** $\approx 186{,}5$. **1441.** $\approx 3{,}870$. **1442.** $\approx -0{,}04146$. **1443.** ≈ 88. **1444.** $\approx 0{,}3224$. **1445.** $\approx 1{,}617$. **1446.** $\approx 1{,}087$. **1447.** ≈ 1076 *см*². **1448.** ≈ 5738 *см*². **1449.** г) $-\frac{1}{2}$; з) $\frac{4}{3}$; к) 4. **1450.** а) —4; в) 3; г) 7; —1; д) калі $a = 1$, то x — любы; калі $a \neq 1$, то $x_1 = 2$, $x_2 = 3$; е) 7. **1451.** а) 3; б) 1; е) 2. **1452.** б) 1; г) $\frac{3}{2}$; е) 3; ж) $\frac{17}{13}$; к) 24. **1453.** а) 2; б) 1; в) 3; г) 4; д) 0; 1; е) 1; $\log_3\frac{5}{4}$; ж) 0; з) $\log_{\frac{2}{3}}\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **1454.** а) 0; б) 0; в) 0; г) 0; д) 1; е) $\frac{\lg 7 - \lg 5}{\lg 3 - \lg 2}$; ж) калі $a \neq b$, то $x = 0$; калі $a = b$, то x — любы. **1455.** $x = -2$, $y = 0$. **1456.** $x = 3$, $y = 4$. **1457.** $x = 3$, $y = -2$; $x = -\log_2 9$, $y = \log_3 8$. **1458.** Сістэма

несумесная. **1459.** $x=3$, $y=4$. **1460.** а) 10; б) 64; в) 2; 4; г) $\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$; д) 200; е) 25; ж) 80. **1461.** а) 2; б) $\frac{1}{2}$; в) 5; г) 5; д) $\sqrt{2}+1$; $\sqrt{2}-1$; е) 4; ж) $\frac{1}{78125}$. **1462.** а) $\frac{\sqrt{33}-1}{4}$; б) 13; в) 14; 6. **1463.** а) 10; 0,0001; б) 100; 1000; в) 9; $\sqrt{10}-1$; г) 0, 001; 0,1; 10; 1000. **1464.** а) 1; -1; б) 0,2; 125; в) 10; г) 0,001. 10; д) $\sqrt[5]{10000}$; е) 0,1; 1000. **1465.** а) 3; б) $\frac{1}{3}$; 3; в) 5; г) $\sqrt{5}$; 25; д) 1; е) 16. **1466.** $x=10\sqrt{10}$; $y=\frac{1}{100\sqrt[4]{10}}$. **1467.** $x=2$, $y=32$; $x=32$; $y=2$. **1468.** $x=-2$, $y=\frac{1}{900}$. **1469.** $x=10$, $y=4$; $x=4$, $y=10$. **1471.** 0,6. **1472.** 1,40. **1473.** а) $x>-2$; б) $x>3$; в) $x>\log_3 2$; г) $x<1$; $x>5$; д) $x<-1$; $x>2$. **1474.** а) $2<x<5$; б) $7<x<7\frac{1}{16}$; в) $x>6$. **1476.** Прыкладна праз 14 год. **1477.** Прыкладна праз 8 месяцаў; другая брыгада. **1478.** а) $\frac{81}{2}$; б) 2000; в) $27\sqrt{2}$; г) $\frac{2}{25}$. **1480.** а) $(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{n\pi}{2}$; б) $n\pi$. **1481.** $\log_2 7-3$. **1483.** а) 0,1; б) $\frac{1}{\sqrt[6]{10}}$; в) ураўненне не мае кораняў. **1484.** $a^{\frac{1}{a}}$. **1485.** а) $\approx 1{,}6541$; б) $\approx 0{,}6309$. **1486.** а) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$; б) $\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{7}$; в) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\lg\frac{1}{7}}=\left(\frac{1}{7}\right)^{\lg\frac{1}{5}}$. **1487.** а) $0<x<\pi$; б) $x>0$. **1489.** 31; 140. **1491.** Няма кораняў. **1492.** $\frac{\lg 13}{\lg 5-\lg 3}$. **1493.** 0; 1. **1494.** $\frac{\lg\lg 7-\lg\lg 5}{\lg 7-\lg 5}$. **1495.** 4. **1496.** $\frac{\lg 2}{\lg\sqrt{4+\sqrt{15}}}$. **1497.** 9. **1498.** 100. **1499.** 2. **1502.** а) b; б) b. **1503.** $\frac{\log_a x\cdot\log_b x}{\log_a x+\log_b x}$. **1505.** $\frac{1}{\sqrt[4]{10}}$; $\sqrt[3]{10}$. **1506.** $\frac{1}{\sqrt[6]{10}}$; $\sqrt[3]{10}$. **1507.** $\frac{1}{5}$; $\frac{3}{5}\sqrt[4]{27}$. **1508.** $x=n\pi$, $y=2k\pi$; $x=\frac{\pi}{2}+2n\pi$, $y=\frac{\pi}{2}+k\pi$. **1509.** Сістэма несумесная. **1510.** $x=y=1$. **1511.** а) Узрастае пры $x>-2$; убывае пры $x<-2$; б) узрастае пры $x>1$, убывае пры $x<1$. **1512.** $-3<x<-2$; $x>3$. **1513.** $0{,}01\leqslant x\leqslant 10000$. **1514.** $x\leqslant -4$.

IX. Функцыі і прэдзелы

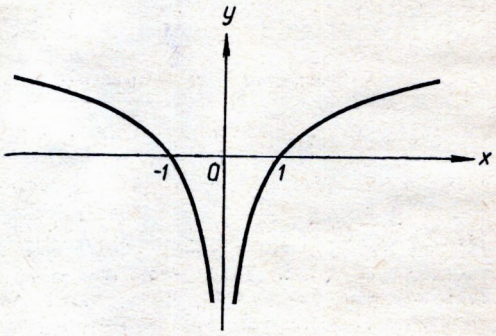
1518. в) Пры $a=0$ і $a=1$ $f\left(\frac{1}{a}\right)$ не вызначана; пры $a\neq 0$ і $a\neq 1$ $f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{a+1}{a-1}$. **1519.** а) Калі $-\frac{\pi}{2}+2n\pi\leqslant a\leqslant\frac{\pi}{2}+2n\pi$ (n — любы цэлы лік), то $f(2a)=2f(a)\sqrt{1-f^2(a)}$; калі $\frac{\pi}{2}+2n\pi\leqslant a\leqslant\frac{3}{2}\pi+2n\pi$, то $f(2a)=-2f(a)\sqrt{1-f^2(a)}$. **1520.** г) 1, калі $a=0$, і $\sin^2 a$, калі $a\neq 0$.

1521. а) $1+\frac{\pi^2}{4}$; б) 0; в) $\sin 2$, калі $a=0$, і $1+(2-a^2)^2$, калі $a\neq 0$. **1534.** Сукупнасць усіх сапраўдных лікаў. **1538.** $x=\frac{\pi}{2}+2n\pi$. **1539.** $1\leqslant x<4$. **1542.** $x\leqslant -2$; $x\geqslant 6$. **1543.** $-\frac{1}{5}\leqslant x\leqslant 1$. **1547.** $x<2$; $x\geqslant 4$. **1548.** $0<x\leqslant 1$.



Рыс. 346.

1550. $0<x<\frac{5}{2}$; $x>3$. **1552.** $x\neq 0$; $x\neq\frac{2}{(1+2n)\pi}$. **1553.** $x\neq n$. **1557.** $x\neq\frac{\pi}{2}+n\pi$; $x\neq -\frac{\pi}{3}+k\pi$. **1563.** $x=0$. **1565.** $-\frac{\pi}{2}+2n\pi<x<\frac{\pi}{2}+2n\pi$. **1568.** в) $y\geqslant -2$; д) $y\leqslant 0$; е) $\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1$. **1569.** б) Гл. рыс. 346 і 347. **1570.** Пры $x<-\frac{3}{2}$ убывае, пры $x>-\frac{3}{2}$ узрастае. **1572.** Убывае пры $x\leqslant -5$ і $-\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 2$; узрастае пры $-5\leqslant x\leqslant -\frac{3}{2}$ і $x\geqslant 2$. **1576.** Узрастае пры $-\frac{5}{6}\pi+n\pi<x<\frac{1}{6}\pi+n\pi$. **1579.** Узрастае ў кожным інтэрвале, які не мае пункта $x=2$. **1581.** Убывае пры $4n\pi\leqslant x\leqslant 2\pi+4n\pi$; узрастае пры $2\pi+4k\pi\leqslant x\leqslant 4\pi+4k\pi$. **1584.** Убывае ў кожным інтэрвале, які не мае пункта $x=0$. **1585.** Указанне. $\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$. **1586.** а) Усюды ўбывае; б) усюды ўбывае. **1588.** Наогул кажучы, не. **1590.** $x_{\min}=1$, $y_{\min}=5$. **1593.** $x_{\min}=2$, $y_{\min}=-1$. **1597.** $x_{\max}=-a$, $y_{\max}=a^2$. **1598.** $x_{\min}=-\frac{\pi}{4}+2n\pi$, $y_{\min}=-1$; $x_{\max}=\frac{3}{4}\pi+2k\pi$, $y_{\max}=1$. **1600.** $x_{\min}=-\frac{3}{4}\pi+2n\pi$, $y_{\min}=-\sqrt{2}$; $x_{\max}=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $y_{\max}=\sqrt{2}$. **1601.** -15; $\frac{1}{8}$. **1602.** 0; 42. **1603.** $-\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. **1606.** Цотныя функцыі 3) і 5), няцотныя 1) і 2). Астатнія функцыі не належаць ні да цотных, ні да няцотных. **1609.** Адзінай такой функцыяй з'яўляецца функцыя $y=0$. **1610.** а) Функцыя $f(x)$ задавальняе ўмове $f(-x)=\pm f(x)$, прычым адным значэнням x можа адпавядаць знак «+», а другім «—». У гэтым выпадку адносна цотнасці функцыі $f(x)$ нельга зрабіць, наогул кажучы, ніякіх вывадаў; б) $f(x)=0$.



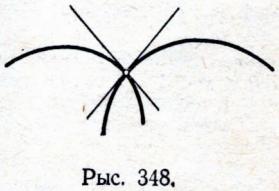
Рыс. 347.

1611. а) Не; б) можа, напрыклад, $y=x^3$. **1613.** π. **1614.** 4π. **1615.** $\frac{\pi}{3}$. **1616.** π. **1617.** π. **1618.** 3π. **1619.** $\frac{2\pi}{3}$. **1620.** π. **1621.** $\frac{\pi}{2}$. **1625.** $y=\sqrt[3]{x}$.

1626. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$. **1627.** $y=\frac{1-x}{1+x}$. Дадзеныя і адваротныя да яе функцыі супадаюць. Вобласці вызначэння гэтых функцый задаюцца няроўнасцю $x \neq -1$, а вобласці змянення — няроўнасцю $y \neq -1$. **1628.** $\sqrt{-x}$. **1632.** а) Не; б) існуе; в) не. **1633.** а) Існуе; б) існуе в) існуе. **1634.** а) Існуе; б) не; в) існуе; г) не. **1660.** 0. **1661.** -10. **1662.** 1. **1663.** $\frac{1}{2}$. **1664.** $\frac{7}{8}$. **1665.** 0. **1666.** -2. **1667.** $\frac{1}{2\sqrt{a}}$. **1668.** -2. **1669.** $\frac{1}{4}$. **1670.** $\frac{2}{3}$. **1671.** 4. . **1672.** 4. **1673.** $\frac{1}{4}$. **1674.** 3. **1675.** $\frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}$. **1677.** 1. Указанне. Увесці новую пераменную $y=\frac{x}{2}$. **1678.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Указанне. $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)$. **1685.** 2. **1687.** 9. **1688.** 1. Указанне. Увесці новую пераменную $y=x-\frac{\pi}{3}$. **1690.** 1. **1692.** -10. **1694.** $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$. **1695.** $-\frac{9}{10}$. **1696.** 48. **1698.** $-\frac{1}{4\sqrt{2}}$. **1700.** 1. **1701.** 0,02. **1702.** $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\alpha}$, калі $\alpha\neq 0$; 1, калі $\alpha=0$. **1703.** $2<x\leqslant 7$. **1704.** $-3<x<0$; $2<x<5$. **1705.** $x\neq\frac{n\pi}{2}$. **1706.** Сукупнасць усіх няцэлых дадатных лікаў. **1708.** $1-5\sqrt{5}\leqslant y\leqslant 1+5\sqrt{5}$. **1709.** $0{,}1\leqslant y\leqslant 10$. **1710.** Наогул кажучы, не. **1715.** $2^x=(2^{x-1}+2^{-x-1})+(2^{x-1}-2^{-x-1})$. **1722.** 3. **1723.** $\frac{1}{4\sqrt{2}}$. **1724.** $\frac{1}{\sqrt{a}}$. **1725.** $\frac{2}{3}$. **1726.** 0. **1727.** 4. **1728.** $-\frac{1}{2}$. **1729.** 0. **1730.** $\frac{a}{b}$. **1731.** 1. **1732.** 1. **1734.** 1. **1735.** 0. **1736.** $\cos\alpha\sqrt{\frac{\alpha}{\sin\alpha}}$. **1737.** 0.

X. Вытворная і яе прымяненне да даследавання функцый

1741. а) v_0; б) v_0+at_0. **1742.** а) 0 *м/мін*; б) $\frac{1}{12}$ *м/мін*; в) 75 *м/мін*. **1743.** $\frac{1}{2\sqrt{t}}$. **1744.** а) 1; б) $4x$; в) $(2x+1)$; г) $\frac{1}{\sqrt{x}}$; д) $-2x$; е) $3x^2$. **1745.** а) 4,8 $\frac{\text{град}}{\text{сек}}$; б) 4 $\frac{\text{град}}{\text{сек}}$. **1746.** 5 $\frac{\text{ампер}}{\text{сек}}$. **1747.** Абедзве функцыі дыферэнцыруемыя ў пункце $x=0$. **1748.** Гэта ж прамая лінія. **1749.** а) Мае, $y=-x$; б) не; в) мае; $y=x$. **1751.** Вугал паміж датычнымі да крывых у пункце іх перасячэння (гл. рыс. 348). **1752.** а) $2x+y+1=0$; б) $y=0$; в) $2x-y-1=0$. **1753.** $\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}6$. **1754.** У пункце (0,0) пад вуглом $\frac{\pi}{4}$ і ў пункце (1,1) пад вуглом $\operatorname{arc\,tg}2-\frac{\pi}{4}$. **1757.** $2x+1$. **1758.** $2x-2$. **1759.** $8x-4$. **1760.** $-4x+15$. **1761.** $18-20x$. **1762.** -4. **1763.** $-20x^3-4x$. **1764.** $5x^2(3-4x)$. **1765.** $4x^3++2x$. **1766.** $-140x^3+45x^2-24x+3$. **1767.** $4x^3$. **1768.** $2x(1-2x^2)$. **1769.** $8(2x-3)^3$. **1770.** $2(x^2+ax)\times\times(2x+a)$. **1771.** $3x^2(2x^3-b+a)$. **1774.** $-\frac{2}{(1+x)^2}$.



Рыс. 348.

1775. $-\frac{2}{(5-4x)^2}$. **1776.** $-\frac{1+x^2}{(x^2-1)^2}$. **1777.** $\frac{4x-14x^2}{(1-7x)^2}$. **1778.** $-\frac{15}{2(3x-2)^2}$.

1779. $\frac{5}{(6-x)^2}$. **1780.** $-\frac{70}{(3-10x)^2}$. **1781.** $\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$. **1783.** $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$. **1784.** $\frac{\sqrt[6]{45}}{2\sqrt{x}}$.

1785. $-\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$. **1786.** $-\frac{3}{2\sqrt{2x^2\sqrt{x}}}$. **1787.** $5+\frac{1}{x^2}$. **1788.** $\frac{-21+3x+5x^4}{2x^2\sqrt{x}}$.

1790. $10x^4-1$. **1791.** $21x^6-36x^5-12x^2+10x$. **1792.** $-3x^2-6x+6$. **1793.** $-6+68x^3$. **1794.** $5x^4-21x^2-2x+10$. **1795.** $2x(x^6+1)\cdot(7x^6+1)$. **1796.** $24x^2(1-3x^4)^2\times$ $\times(1-15x^4)$. **1797.** а) $y=x$; б) $y=1$; в) $y=-1$; г) $4x-4\sqrt{2}y+(4-\pi)=0$; д) $x+y-\pi=0$. **1803.** $\sin 2x$. **1804.** $-\sin 2x$. **1805.** $\cos 2x$. **1806.** $2x\sin x+x^2\cos x$. **1809.** $(5+\cos x)\cdot(x^2-\cos x)+(5x+\sin x)\cdot(2x+\sin x)$. **1812.** $-2\sin 2x$.

1815. 0. **1816.** $\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sin x+2x\cos x)$. **1818.** $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. **1820.** $10(2x+3)^4$.

1821. $(6x+7)^5$. **1822.** $-35(1-5x)^6$. **1823.** $4\cos 4x$. **1824.** $\frac{1}{5}\cos\frac{x}{5}$.

1828. $A\omega\cos(\omega x+\varphi)$. **1829.** $A\omega\sin(\varphi-\omega x)$. **1833.** $\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$. **1834.** $-\frac{1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}$.

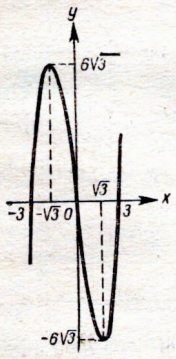
1836. а) 18 *м/мін*²; б) 730 *м/мін*². **1837.** $-\frac{1}{4t\sqrt{t}}$. **1838.** $y'=3(x+2)^2$; $y''=6(x+2)$; $y'''=6$; $y^{IV}=y^V=\ldots=0$. **1839.** $y'=6(2x-1)^2$; $y''=$ $=24(2x-1)$; $y'''=48$; $y^{IV}=y^V=\ldots=0$. **1842.** $y'=-\sin x$; $y''=-\cos x$; $y'''=\sin x$; $y^{IV}=\cos x$ і далей усё паўтараецца. **1845.** 150 разоў. **1846.** $\frac{1}{2}\sin x-$ $-\frac{1}{4}\cos x+\frac{3^{100}}{4}\sin 3x$. **1847.** 15 360. **1848.** 780. **1849.** $-2300\cdot 2^{22}$.

1851. $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120}$. **1852.** 4. **1853.** а) 10; г) 7; е) 6.

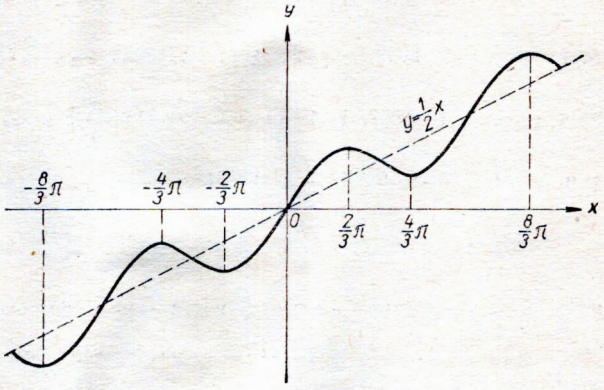
1855. а) $89-28\sqrt{10}$; б) $112+64\sqrt{3}$; в) $176\sqrt{6}-304\sqrt{2}$. **1856.** 4. **1859.** Указанне. $11^{10}-1=(10+1)^{10}-1$; $(10+1)^{10}$ раскласці па формуле бінома Ньютана. Для поўнага рашэння задачы трэба даказаць, што бінаміяльныя каэфіцыенты — лікі цэлыя. **1860.** а) 45; г) 630. **1862.** а) 3; б) 4; в) 5. **1863.** 66. **1864.** $-\frac{5120}{9}$. **1865.** 1,12. **1868.** 0,97. **1871.** 1,025. **1875.** 0,99.

1877. 1,01. **1878.** 0,98. **1881.** Пры $x<2$ узрастае, пры $x>2$ убывае. **1882.** Пры $|x|<1$ убывае, пры $|x|>1$ узрастае. **1883.** Пры $-1<x<0$ і $x>1$ узрастае, а пры $x<-1$ і $0<x<1$ убывае. **1884.** Пры $x<-5$ і $x>1$ узрастае, а пры $-5<x<1$ убывае. **1885.** Усюды ўбывае. **1889.** Пры $-\frac{\pi}{3}+2n\pi<x<\frac{\pi}{3}+2n\pi$ узрастае, пры $\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{5}{3}\pi+2k\pi$ убывае. **1890.** Пры $\frac{\pi}{4}+2k\pi<x<\frac{3}{4}\pi+$ $+2k\pi$ убывае, пры $\frac{3}{4}\pi+2k\pi<x<\frac{9}{4}\pi+2k\pi$ узрастае. **1891.** Узрастае. **1892.** Убывае. **1893.** Узрастае. **1894.** Убывае. **1895.** Пры $-1<x<0$ і $0<x<1$ убывае, пры $|x|>1$ узрастае. **1896.** Пры $x<0$ убывае, а пры $x>0$ узрастае. **1897.** Усюды ўбывае. **1898.** $-\frac{37}{4}$ (мінімум). **1900.** $-\frac{a^2}{8}$ (мінімум). **1902.** Мінімум 110, максімум 174. **1903.** Мінімум — 177, максімум 39. **1904.** Мінімум — 1. **1905.** Мінімум $-\sqrt{2}$, максімум $\sqrt{2}$. **1906.** Мінімум —2,

максімум 2. **1908.** Няма лакальных экстрэмумаў. **1910.** $2n\pi+1$ і $\frac{\pi}{2}+2k\pi-1$. **1916.** а) $-1{,}375$; $1{,}375$; б) -2; 2. **1917.** а) -2; $\sqrt{3}$; б) $-\sqrt{3}$; 1. **1919.** а) $\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$, 0; б) $\frac{\pi}{8}-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\pi}{8}+\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$. **1926.** Гл. рыс. 349. **1928.** Гл. рыс. 350. **1937.** $t=31$ *сек.* **1939.** 25 *м/сек* і 37 *м/сек.* **1940.** $2x-y+5=0$. **1941.** $6x-y-3=0$. **1942.** $\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$. **1943.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$ і $\pi-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$. **1944.** а) (1, 4); б) (—2, —11). **1945.** $\frac{55}{9}x^4$. **1947.** 51. **1956.** Шырыня павінна быць роўна



Рыс. 349.



Рыс. 350.

$\frac{d}{\sqrt{3}}$. **1957.** $-\frac{2}{(2x+5)^2}$. **1958.** $-\frac{1}{2\sqrt{3-x}}$. **1959.** $3(x-3)^2-\frac{3}{(x-3)^4}$. **1960.** $2\sin 4x-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$. **1961.** $(1-2x-x^2)\cos x-(x+1)^2\sin x$. **1963.** $-\sin 4x$.

XI. Камплексныя лікі

1967. а) Утварае; б) не; в) утварае. **1968.** а) Не; б) не. **1972.** а) $a=c$, $b=d$; б) або $a\neq c$, або $b\neq d$, магчыма, безумоўна, што і $a\neq c$ і $b\neq d$. **1973.** а) $x=0$, $y=-3$; б) $x=1$, $y=-1$. **1975.** а) $x=\frac{11}{17}$, $y=-\frac{2}{17}$; в) $x=t$, $y=\frac{2}{3}(4-t)$, дзе t — любы сапраўдны лік. **1977.** а) $x=-3$, $y=-6$; б) $x=-\frac{52}{77}$, $y=-\frac{194}{77}$; в) $x=-2$, $y=-\frac{9}{2}$. **1978.** $-13+13i$. **1982.** $33+56i$. **1988.** $1-i$. **1989.** а) Азначэнне; б) тэарэма. **1990.** $2+2i$. **1991.** $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$. **1993.** Указанне. Для доказу прапорцыі $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ дастаткова паказаць, што лікі b і d адрозныя ад нуля і $ad=bc$. **1995.** а) Не; б) не; в) утварае.

2001. а) $a=b=0$; б) хаця б адзін з лікаў a і b адрозны ад 0. **2002.** а) $x=3$, $y=-1$; б) $x=2$, $y=-2$; в) $x=y=1$; г) $x=t$, $y=-2t$, дзе t — любы сапраўдны лік; д) роўнасць не выконваецца ні пры якіх сапраўдных значэннях x і y. **2004.** а) Сапраўдныя лікі; б) чыста ўяўныя лікі. **2008.** $\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)$. **2011.** $-i$. **2014.** -1 $-i$. **2015.** 0. **2016.** 0. **2017.** 0, калі $n=4k$; i, калі $n=4k+1$; $i-1$, калі $n=4k+2$; -1, калі $n=4k+3$. **2018.** -1. **2019.** i. **2023.** а) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$; $(1+i)$; б) $\pm\frac{\sqrt{3}-i}{2}$. **2024.** а) $1\pm i$. **2029.** а) $a(x^2-10x+26)=0$. **2030.** $a(x^2+20x+200)=0$. **2031.** $a(2x^2-14x+205)=0$. **2032.** 3; $-\frac{3}{2}(1\pm\sqrt{3}i)$. **2033.** -3; $\frac{3}{2}(1\pm\sqrt{3}i)$. **2035.** $-\sqrt[3]{5}$; $\frac{\sqrt[3]{5}}{2}(1\pm\sqrt{3}i)$. **2039.** $x_1x_2x_3=6$. **2042.** $\pm\sqrt[4]{2}$; $\pm\sqrt[4]{2}i$; **2043.** $-\frac{\sqrt[4]{12}(1\pm i)}{2}$; $\frac{\sqrt[4]{12}(1\pm i)}{2}$. **2045.** 0. **2046.** 7. **2047.** 1) $4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; 2) $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$; 3) $6\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\right)$; 4) $13[\cos(\pi-\varphi)+i\sin(\pi-\varphi)]$, дзе $\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{12}{5}$; 5) $25(\cos 0+i\sin 0)$; 6) $4(\cos\pi+i\sin\pi)$; 7) $3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; 8) $2\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$; 9) $5[\cos(\pi-\varphi)+i\sin(\pi-\varphi)]$, дзе $\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{4}$. **2048.** 2) На акружнасці радыуса 2 з цэнтрам у пачатку каардынат; 3) у кругу радыуса 3 з цэнтрам у пачатку каардынат; 5) у кольцы паміж канцэнтрычнымі акружнасцямі радыусаў 2 і 3 з цэнтрам у пачатку каардынат, выключаючы гэтыя акружнасці; 6) на прамені, што выходзіць з пачатку каардынат і ўтварае з воссю x вугал $\frac{\pi}{3}$. **2049.** Толькі пры $r=0$. **2050.** Могуць, пры $\varphi=n\pi$. **2051.** $2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$, калі $-\pi+2k\pi<\alpha<\pi+2k\pi$; $-2\cos\frac{\alpha}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\pi\right)\right]$, калі $\pi+2k\pi<\alpha<3\pi+2k\pi$. **2054.** $2(\cos 340^\circ+i\sin 340^\circ)$. **2055.** $3(\cos 195^\circ+i\sin 195^\circ)$. **2056.** а) $15i$; б) $-7+7\sqrt{3}i$; в) -24; г) 42. **2057.** а) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; б) $2^{49}(1+\sqrt{3}i)$; в) 1. **2059.** а) i; б) $\cos 190^\circ+i\sin 190^\circ$. **2062.** а) $\sqrt[5]{a}\left(\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5}\right)$, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$; б) $\cos\left(\frac{1}{10}\pi+\frac{2}{5}k\pi\right)+i\sin\left(\frac{1}{10}\pi+\frac{2}{5}k\pi\right)$, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$. **2066.** Пры $|a|=|b|\neq 0$. **2069.** -4. **2070.** -8. **2071.** 0. **2073.** $-2i$. **2076.** а) $a(x^2+32x+260)=0$; б) $a(5x^2+14x+13)=0$. **2077.** Не. **2078.** а) $x=2t$, $y=t$, дзе t — любы сапраўдны лік, адрозны ад нуля; б) x і y — любыя сапраўдныя лікі, не роўныя нулю адначасова. **2083.** б) $\cos(-2\alpha)+i\sin(-2\alpha)$. **2088.** 1024.

XII. Метад матэматычнай індукцыі

2099. 2 n частак. **2101.** Пры $n = 1$ сцверджанне правільнае. Няхай яно правільнае пры $n = k$. Тады

$$(1+a)^{k+1} = (1+a)^k \cdot (1+a) \geqslant (1+ka)\cdot(1+a) = 1 + ka + a + ka^2 = \\ = 1 + (k+1)a + ka^2 \geqslant 1 + (k+1)a.$$

Задачы на паўтарэнне ўсяго курса алгебры і элементарных функцый

2109. Калі $a > 2b$, то праз $\frac{a-2b}{c}$ дзён. Калі $a \leqslant b$, то на першым складзе ніколі не будзе вугалю ў 2 разы больш, чым на другім. **2110.** 5 гадзін і 10 гадзін. **2111.** 50 *км/гадз*. **2112.** 12, 10 і 15 гадзін. **2113.** 10 *км* і 5 *км*. **2114.** 1000 *км/гадз* і 800 *км/гадз*. **2115.** 9; 28. **2116.** 5 *км/гадз* і 3,5 *км/гадз*. **2117.** 10 чалавек. **2118.** 35 сутак. **2119.** 500 *м*. **2120.** а) Калі $a \neq \pm 1$, то $x = \frac{1}{a-1}$; калі $a = -1$, то x — любы лік; калі $a = 1$, то кораняў няма; в) няма кораняў. **2121.** а) Калі $a < 0$, то кораняў няма; калі $a \geqslant 0$, то $x = \frac{3 \pm a}{2}$; б) -1; 2. **2123.** а) $x = \frac{2a}{a^2-a+1}$, $y = \frac{a^2-a-1}{a^2-a+1}$; б) калі $a \neq \pm 2$, то $x = \frac{1}{2-a}$, $y = \frac{1-a}{a-2}$; калі $a = 2$, то рашэнняў няма; калі $a = -2$, то $x = t$, $y = -\frac{1+2t}{2}$, дзе t — любы лік; в) пры $a = 0$ і $a = 1$ няма рашэнняў; пры $a \neq 0$ і $a \neq 1$ $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{1-a}$. **2124.** а) $x = 5$, $y = 4$ і $x = -4$, $y = -5$; б) $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{4}{3}$ і $x = \frac{4}{3}$, $y = \frac{2}{3}$; в) калі $b \neq 0$, то $x = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + b\right)$, $y = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} - b\right)$; калі $b = 0$ і $a \neq 0$, то рашэнняў няма; калі $a = b = 0$, то $x = y = t$, дзе t — любы лік. **2129.** $\frac{9}{4} < x < \frac{7}{2}$. **2130.** $-1 < a < 2$. **2131.** а) 10; б) 1; в) 5. **2132.** а) $a \leqslant 1$; $a \geqslant 2$; б) $0 < a < 1$; $2 < a < 3$; в) $a < 0$; $a > 3$. **2133.** а) $x \leqslant 2$; б) x — любы сапраўдны лік; в) $2 \leqslant x \leqslant 4$. **2135.** а) $3^{600} > 6^{300}$. Указанне. $3^{600} = (3^2)^{300} = 9^{300}$. **2136.** Калі $k > 100\left(\sqrt[n]{2} - 1\right)$, то штогодні прырост насельніцтва складае $\frac{k - 100\left(\sqrt[n]{2} - 1\right)}{\sqrt[n]{2} - 1}$ працэнта. Пры $k \leqslant 100\left(\sqrt[n]{2} - 1\right)$ умовы задачы супярэчлівы. **2137.** Калі вугал φ заканчваецца ў 1-й чвэрці, то $\cos\varphi = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{5}{12}$; калі вугал φ заканчваецца ў 2-й чвэрці, то $\cos\varphi = -\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{5}{12}$. **2138.** Калі вугал φ заканчваецца ў 2-й чвэрці, то $\sin\varphi = \frac{4}{5}$,

$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{4}{3}$; калі вугал φ заканчваецца ў 3-й чвэрці, то $\sin\varphi = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{4}{3}$. **2140.** $\frac{1}{3}$; $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\frac{1}{2\sqrt{2}}$; $2\sqrt{2}$. **2141.** $\frac{5}{13}$; $-\frac{12}{13}$; $-\frac{5}{12}$; $-\frac{12}{5}$. **2142.** $-\frac{2}{\sqrt{13}}$; $\frac{3}{\sqrt{13}}$; $-\frac{2}{3}$; $-\frac{3}{2}$. **2148.** $\frac{3}{2}\left(\alpha \neq \frac{n\pi}{2}\right)$. **2149.** $2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$. **2150.** а) 1; б) 0. **2151.** а) $a \leqslant \frac{1}{4}$; б) $-2 \leqslant a < \frac{1}{4}$. **2154.** а) $\sqrt{0{,}9}$; б) $-\frac{3}{5}$; в) $-\frac{1}{3}$. **2156.** $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$. **2157.** Няма кораняў. **2158.** $\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$. **2159.** $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + n\pi$. **2160.** $\pm\frac{\pi}{3} + n\pi$. **2161.** Няма кораняў. **2162.** $-\frac{\pi}{3} + n\pi$. **2163.** $\frac{\pi}{4} + n\pi$; $\operatorname{arc\,tg}\,2 + k\pi$. **2164.** Няма кораняў. **2165.** $\frac{\pi}{2} + n\pi$; $\frac{\pi}{6} + k\pi$. **2167.** $\frac{\pi}{2} + n\pi$. **2168.** $n\pi$; $-\operatorname{arc\,tg}\,3 + k\pi$. **2169.** $\frac{(-1)^n}{2}\operatorname{arc\,sin}\frac{1}{3} + \frac{n\pi}{2}$. **2170.** $\frac{\pi}{4} + n\pi$; $\operatorname{arc\,tg}\,2 + k\pi$. **2171.** $\frac{n\pi}{4}$. **2172.** $\frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{3}$. **2173.** $\frac{\pi}{6} + 2n\pi$; $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$. **2174.** $(2n+1)\pi$; $\operatorname{arc\,tg}\,4 + k\pi$. **2175.** $\pm\operatorname{arc\,cos}\frac{\sqrt{17}-3}{4} + 2n\pi$. **2176.** $\frac{\pi}{12} + n\pi$; $\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{6}$. **2177.** $2n\pi$; $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$. **2178.** $n\pi$; $-\frac{\pi}{6} + k\pi$. **2179.** $\frac{\pi}{4} + n\pi$. **2180.** $x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$; $y = \frac{\pi}{3} - 2n\pi$; $x = 2\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{3}+2) + 2n\pi$, $y = \frac{2\pi}{3} - 2\operatorname{arctg}(\sqrt{3}+2) - 2n\pi$. **2181.** $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + n\pi$, $y = \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$; $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + n\pi$; $y = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$. **2182.** $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + n\pi$, $y = \pm\frac{5}{6}\pi + 2k\pi$; $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + n\pi$, $y = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$. **2183.** $x = \frac{\pi}{3} + (n+k)\pi$, $y = \frac{\pi}{3} + (n-k)\pi$; $x = -\frac{\pi}{3} + (n+k)\pi$, $y = -\frac{\pi}{3} + (n-k)\pi$. **2185.** 9 і 21. **2186.** 2, 4, 8, 12 ці $\frac{25}{2}$, $\frac{15}{2}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{3}{2}$. **2187.** 2, 10, 18 і 2, 6, 18. **2188.** $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$. **2189.** $\frac{\pi a^2}{9}$; $\frac{2\pi a}{\sqrt{3}}$. **2190.** 2, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{9}$, ... **2194.** 1. **2195.** $\frac{3}{2}$. **2196.** 0. **2197.** $\frac{2}{\lg 3 - \lg 2}$. **2198.** 2; -2. **2199.** Калі $a > 1$, то $x = \frac{a}{a-1}$; калі $a \leqslant 1$, то кораняў няма. **2200.** 100; $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}$. **2202.** 1; $\frac{1}{2}$; $\sqrt[16]{8}$. **2203.** $\frac{9}{4}$; $\frac{1}{12}$. **2204.** 10; $\sqrt[9]{10}$. **2205.** 1. **2206.** 4. **2207.** 1; 3; $\frac{1}{3}$. **2208.** $\frac{\pi}{4} + 2n\pi$. **2212.** $x < -5$.

2213. а) $x=4,\ y=8;\ x=-4,\ y=-8$; б) $x=8,\ y=4;\ x=4,\ y=8$; г) $x=7,\ y=3;\ x=-7,\ y=-3$; д) $x=2,\ y=32;\ x=32,\ y=2$.

2214. Не больш 5 пласцінак. **2216.** в) $2 \leqslant x < 5$; г) $x \neq 0;\ x \neq \frac{1}{3}$; д) сукупнасць усіх дадатных лікаў, акрамя $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$ і $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$.

2223. а) 9; б) 6; в) $\frac{2}{3}$; г) $2\cos\alpha$. **2226.** а) $8+53i$; г) -8. **2228.** а) $x=1,\ y=2;\ x=-1,\ y=-2$; б) $x=0,\ y=7$; в) $x=\frac{9}{2},\ y=18$.

2230. $\left(2\cos\frac{\alpha}{2}\right)^n\left(\cos\frac{n\alpha}{2}+i\sin\frac{n\alpha}{2}\right)$. **2233.** $\cos 5\varphi=\cos^5\varphi-10\cos^3\varphi\sin^2\varphi+5\cos\varphi\sin^4\varphi$; $\sin 5\varphi=\sin^5\varphi-10\sin^3\varphi\cos^2\varphi+5\sin\varphi\cos^4\varphi$. **2235.** $x-4y+4=0$. **2236.** $2x-y-1=0$; $2x+y-3=0$. **2237.** а) $4\sin^3 x\cos x$; б) $6\sin^2 2x\cos 2x$; в) $-5\cos^4(x-1)\sin(x-1)$; г) $4\cos^3(2-x)\cdot\sin(2-x)$; д) $10x(x^2+1)^4$; е) $-6(3-2x)^2$. **2238.** $A\omega\cos(\omega t+\varphi)$; $-A\omega^2\sin(\omega t+\varphi)$. **2239.** Могуць, напрыклад, x і $x+1$. **2243.** а) $-1\,293\,600$; б) 1; в) -100.

ЗМЕСТ

Раздзел I. **Лінейныя ўраўненні і няроўнасці**

§ 1. Тоеснасці 3
§ 2. Ураўненні 6
§ 3. Лінейныя функцыі і іх графікі 8
§ 4. Лінейныя ўраўненні 13
§ 5. Графічны спосаб рашэння ўраўнення $mx=n$ 15
§ 6. Ураўненні, якія зводзяцца да лінейных 16
§ 7. Ураўненні, якія змяшчаюць невядомае пад знакам абсалютнай велічыні 18
§ 8. Метад інтэрвалаў 20
§ 9. Няроўнасці 21
§ 10. Асноўныя ўласцівасці лікавых няроўнасцей 23
§ 11. Пачленнае складанне і адыманне няроўнасцей 25
§ 12. Пачленнае множанне няроўнасцей 26
§ 13. Двайныя няроўнасці 28
§ 14. Строгія і нястрогія няроўнасці 29
§ 15. Некаторыя спосабы доказу няроўнасцей . . . . . —
§ 16. Тэарэма аб сярэднім арыфметычным і сярэднім геаметрычным . . 31
§ 17. Тэарэмы аб пастаяннай суме і пастаянным здабытку 34
§ 18. Набліжаныя значэнні ліку. Уласцівасць абсалютнай велічыні сумы 36
§ 19. Набліжанае складанне і множанне на лік 38
§ 20. Эквівалентныя няроўнасці і іх уласцівасці 40
§ 21. Лінейныя няроўнасці 44
§ 22. Графічны спосаб рашэння няроўнасці $mx>n$ 47
§ 23. Сістэмы лінейных няроўнасцей 48
§ 24. Дробава-лінейныя функцыі 50
§ 25. Няроўнасці, якія змяшчаюць невядомае пад знакам абсалютнай велічыні 54

§ 26. Сістэма двух лінейных ураўненняў з двума невядомымі. Сумесныя і несумесныя сістэмы 55
§ 27. Вызначальнікі 2-га парадку 57
§ 28. Умова, пры якой вызначальнік 2-га парадку роўны нулю . . . 60
§ 29. Галоўны і дапаможныя вызначальнікі сістэмы двух лінейных ураўненняў з двума невядомымі 62
§ 30. Правіла Крамера 63
§ 31. Выпадак, калі галоўны вызначальнік сістэмы ўраўненняў роўны нулю, а хаця б адзін з дапаможных вызначальнікаў адрозны ад нуля 66
§ 32. Выпадак, калі і галоўны і абодва дапаможныя вызначальнікі сістэмы ўраўненняў роўны нулю 68
§ 33. Табліца асноўных рэзультатаў аб сістэме двух лінейных ураўненняў з двума невядомымі 71
§ 34. Графічны спосаб рашэння сістэм лінейных ураўненняў 73
Задачы на паўтарэнне 76

Раздзел II. Сапраўдныя лікі

§ 35. Рацыянальныя лікі 79
§ 36. Дзеянні над рацыянальнымі лікамі 81
§ 37. Геаметрычнае ізабражэнне рацыянальных лікаў 85
§ 38. Дзесятковая форма запісу рацыянальных лікаў 87
§ 39. Здабыванне квадратных кораняў з рацыянальных лікаў . . . 90
§ 40. Сувымерныя і несувымерныя адрэзкі 93
§ 41. Даўжыня адрэзка, несувымернага з адзінкай даўжыні . . . 95
§ 42. Сапраўдныя лікі 97
§ 43. Параўнанне сапраўдных лікаў 98
§ 44. Геаметрычнае ізабражэнне сапраўдных лікаў 100
§ 45. Дзесятковыя набліжэнні сапраўдных лікаў 103
§ 46. Складанне сапраўдных лікаў 106
§ 47. Множанне сапраўдных лікаў 109
§ 48. Адыманне і дзяленне сапраўдных лікаў 112
Задачы на паўтарэнне 115

Раздзел III. Квадратны трохчлен

§ 49. Вылучэнне з квадратнага трохчлена поўнага квадрата 117
§ 50. Квадратныя ўраўненні 119
§ 51. Прыватныя віды квадратных ураўненняў 122
§ 52. Тэарэма Віета 124
§ 53. Даследаванне знакаў кораняў квадратнага ўраўнення па яго каэфіцыентах 126
§ 54. Раскладанне квадратнага трохчлена на лінейныя множнікі . . . 128
§ 55. Састаўленне квадратнага ўраўнення па зададзеных коранях . . 130
§ 56. Біквадратныя ўраўненні 131
§ 57. Графік квадратнай функцыі 132
§ 58. Прыклады пабудавання графікаў квадратнай функцыі 137
§ 59. Характарыстычныя пункты парабалы 138
§ 60. Экстрэмальныя значэнні функцыі $y=ax^2+bx+c$ 140

§ 61. Квадратныя няроўнасці 142
§ 62. Прыклады рашэння квадратных няроўнасцей 144
§ 63. Рашэнне некаторых сістэм ураўненняў 146
§ 64. Графічны спосаб рашэння некаторых сістэм ураўненняў . . . 149
§ 65. Ірацыянальныя ўраўненні 150
§ 66. Прыклады рашэння ірацыянальных ураўненняў 152
§ 67. З гісторыі развіцця алгебры 155
Задачы на паўтарэнне 156

Раздзел IV. **Ступень з рацыянальным паказчыкам. Ступенная функцыя**

§ 68. Ступень з натуральным паказчыкам. Узвядзенне ў ступень здабытку і дзелі 159
§ 69. Множанне і дзяленне ступеней з аднолькавымі асновамі . . . 161
§ 70. Параўнанне ступеней 164
§ 71. Ступені з нулявымі і адмоўнымі паказчыкамі 165
§ 72. Уласцівасці ступеней з цэлымі паказчыкамі 168
§ 73. Функцыі $y=x^n$ пры $n=1, 2, 3$ 171
§ 74. Функцыі $y=x^n$ пры $n=-1$ і $n=-2$ 172
§ 75. Корань n-й ступені з сапраўднага ліку a 175
§ 76. Корань n-й ступені з дадатнага ліку a 176
§ 77. Арыфметычнае значэнне кораня 178
§ 78. Корань n-й ступені з адмоўнага ліку $-a$ 180
§ 79. Здабыванне кораняў са здабытку і дзелі 181
§ 80. Здабыванне кораня са ступені. Узвядзенне кораня ў ступень. Здабыванне кораня з кораня 184
§ 81. Вынясенне множніка з-пад знака кораня і ўвядзенне яго пад знак кораня 187
§ 82. Множанне і дзяленне кораняў 189
§ 83. Вызваленне ад радыкалаў у назоўніку дробу 190
§ 84. Ступень дадатнага ліку з дадатным дробавым паказчыкам . . . 193
§ 85. Асноўныя ўласцівасці ступені дадатнага ліку з дадатным дробавым паказчыкам 195
§ 86. Ступень дадатнага ліку з адмоўным дробавым паказчыкам . . . 198
§ 87. Функцыі $y=x^r$ пры $r=\frac{1}{2}$ і $r=\frac{1}{3}$ 202
§ 88. Агульныя ўласцівасці ступенных функцый 204
Задачы на паўтарэнне 207

Раздзел V. **Трыганаметрычныя функцыі**

§ 89. Паняцце вектара і восі 210
§ 90. Праекцыя вектара на вось 211
§ 91. Свабодныя і звязаныя вектары 213
§ 92. Каардынаты вектара на плоскасці 214
§ 93. Абагульненне паняцця вугла і дугі 216

§ 94. Тэарэма аб адносінах каардынат вектара да яго даўжыні . . . 220
§ 95. Вызначэнне трыганаметрычных функцый вугла 222
§ 96. Трыганаметрычны круг. Восі тангенсаў і катангенсаў 225
§ 97. Пабудаванне вугла па зададзеных значэннях яго трыганаметрычных функцый 228
§ 98. Значэнні трыганаметрычных функцый некаторых вуглоў . . . 230
§ 99. Цотнасць трыганаметрычных функцый 233
§ 100. Перыядычнасць функцый $\sin\varphi$ і $\cos\varphi$ 234
§ 101. Перыядычнасць функцый $\operatorname{tg}\varphi$ і $\operatorname{ctg}\varphi$ 236
§ 102. Аб перыядычных функцыях 237
§ 103. Змяненне функцый $\sin\varphi$ і $\cos\varphi$ 238
§ 104. Змяненне функцый $\operatorname{tg}\varphi$ і $\operatorname{ctg}\varphi$ 241
§ 105. Табліцы значэнняў трыганаметрычных функцый 245
§ 106. Выкарыстанне трыганаметрычных табліц для знаходжання вострага вугла па значэннях яго трыганаметрычных функцый . . . 248
§ 107. Радыяннае вымярэнне вуглоў і дуг 249
§ 108. Трыганаметрычныя функцыі лікавага аргумента 251
§ 109. Алгебраічныя суадносіны паміж трыганаметрычнымі функцыямі аднаго і таго ж аргумента 252
§ 110. Знаходжанне значэнняў трыганаметрычных функцый вугла па значэнню якой-небудзь адной з іх 253
§ 111. Формулы прывядзення 255
§ 112. Вызначэнне па табліцах значэнняў трыганаметрычных функцый любога вугла 261
§ 113. Графік функцыі $y=\sin x$ 263
§ 114. Графік функцыі $y=\cos x$ 268
§ 115. Графікі функцый $y=\operatorname{tg} x$ і $y=\operatorname{ctg} x$ 269
§ 116. Доказ трыганаметрычных тоеснасцей 272
§ 117. Арксінус ліку a 277
§ 118. Ураўненне $\sin x=a$ 280
§ 119. Арккосінус ліку a 285
§ 120. Ураўненне $\cos x=a$ 287
§ 121. Арктангенс і арккатангенс ліку a 291
§ 122. Ураўненні $\operatorname{tg} x=a$ і $\operatorname{ctg} x=a$ 294
§ 123. Больш складаныя трыганаметрычныя ўраўненні 296
§ 124. Аднародныя ўраўненні 299
§ 125. Графічны спосаб рашэння трыганаметрычных ураўненняў . . 301
§ 126. Трыганаметрычныя няроўнасці 303
Задачы на паўтарэнне 304

Раздзел VI. **Лікавыя паслядоўнасці**

§ 127. Лікавыя паслядоўнасці і спосабы іх задавання. Канечныя і бесканечныя паслядоўнасці 308
§ 128. Манатонныя паслядоўнасці 310
§ 129. Абмежаваныя і неабмежаваныя лікавыя паслядоўнасці . . . 313
§ 130. Прэдзел бесканечнай лікавай паслядоўнасці 315
§ 131. Прыклады 317

§ 132. Сыходныя і разыходныя лікавыя паслядоўнасці 319
§ 133. Манатонныя і абмежаваныя паслядоўнасці 321
§ 134. Лік e . . . . . 32?
§ 135. Пераменныя велічыні і іх прэдзелы 32
§ 136. Асноўныя тэарэмы аб прэдзелах . . . . . 32?
§ 137. $\lim_{n\to\infty} q^n$ пры $|q|<1$ . . . . . 32?
§ 138. Што такое даўжыня акружнасці 329
§ 139. Формула для знаходжання даўжыні акружнасці . . . . . 33?
§ 140. Знаходжанне набліжаных значэнняў ліку π 332
§ 141. Плошча круга . . . . . 33?
§ 142. Арыфметычная прагрэсія 335
§ 143. Характарыстычная ўласцівасць арыфметычнай прагрэсіі . . . 337
§ 144. Сума членаў арыфметычнай прагрэсіі . . . . . —
§ 145. Геаметрычная прагрэсія. Формула агульнага члена геаметрычнай прагрэсіі 339
§ 146. Характарыстычная ўласцівасць геаметрычнай прагрэсіі з дадатнымі членамі 342
§ 147. Сума членаў геаметрычнай прагрэсіі . . . . . —
§ 148. Сума членаў бесканечна ўбываючай геаметрычнай прагрэсіі . . 344
Задачы на паўтарэнне 346

Раздзел VII. Трыганаметрычныя тэарэмы складання

§ 149. Адлегласць паміж двума пунктамі плоскасці. Сістэма каардынат 351
§ 150. Косінус сумы і рознасці двух вуглоў 353
§ 151. Сінус сумы і рознасці двух вуглоў 356
§ 152. Тангенс сумы і рознасці двух вуглоў 358
§ 153. Трыганаметрычныя функцыі двайнога вугла 360
§ 154. Выражэнне $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ праз тангенс палавіннага вугла . . . 364
§ 155. Суадносіны паміж трыганаметрычнымі функцыямі палавіннага вугла і косінусам цэлага вугла 366
§ 156. Выражэнне тангенса палавіннага вугла праз сінус і косінус цэлага вугла 368
§ 157. Пераўтварэнне здабытку трыганаметрычных функцый у суму . . 369
§ 158. Пераўтварэнне сумы (рознасці) сінусаў двух вуглоў у здабытак 371
§ 159. Пераўтварэнне сумы (рознасці) косінусаў двух вуглоў у здабытак 373
§ 160. Пераўтварэнне сумы (рознасці) тангенсаў двух вуглоў 376
§ 161. Графікі трыганаметрычных функцый кратных вуглоў 378
§ 162. Графікі функцый $y=A\sin\omega x$, $y=A\cos\omega x$, $y=A\operatorname{tg}\omega x$, $y=A\operatorname{ctg}\omega x$ 381
§ 163. Графікі трыганаметрычных функцый $y=A\sin[\omega(x+\alpha)]$, $y=A\cos[\omega(x+\alpha)]$ і г. д. 383
§ 164. Графікі функцый $y=A\sin(\omega x+\alpha)$, $y=A\cos(\omega x+\alpha)$ і г. д. . . 388
§ 165. Гарманічнае ваганне 390
§ 166. Гарманічнае ваганне ў электратэхніцы 392
§ 167. Пераўтварэнне выразу $a\sin x+b\cos x$ шляхам увядзення дапаможнага вугла 394

Алгебра і элементарныя функцыі