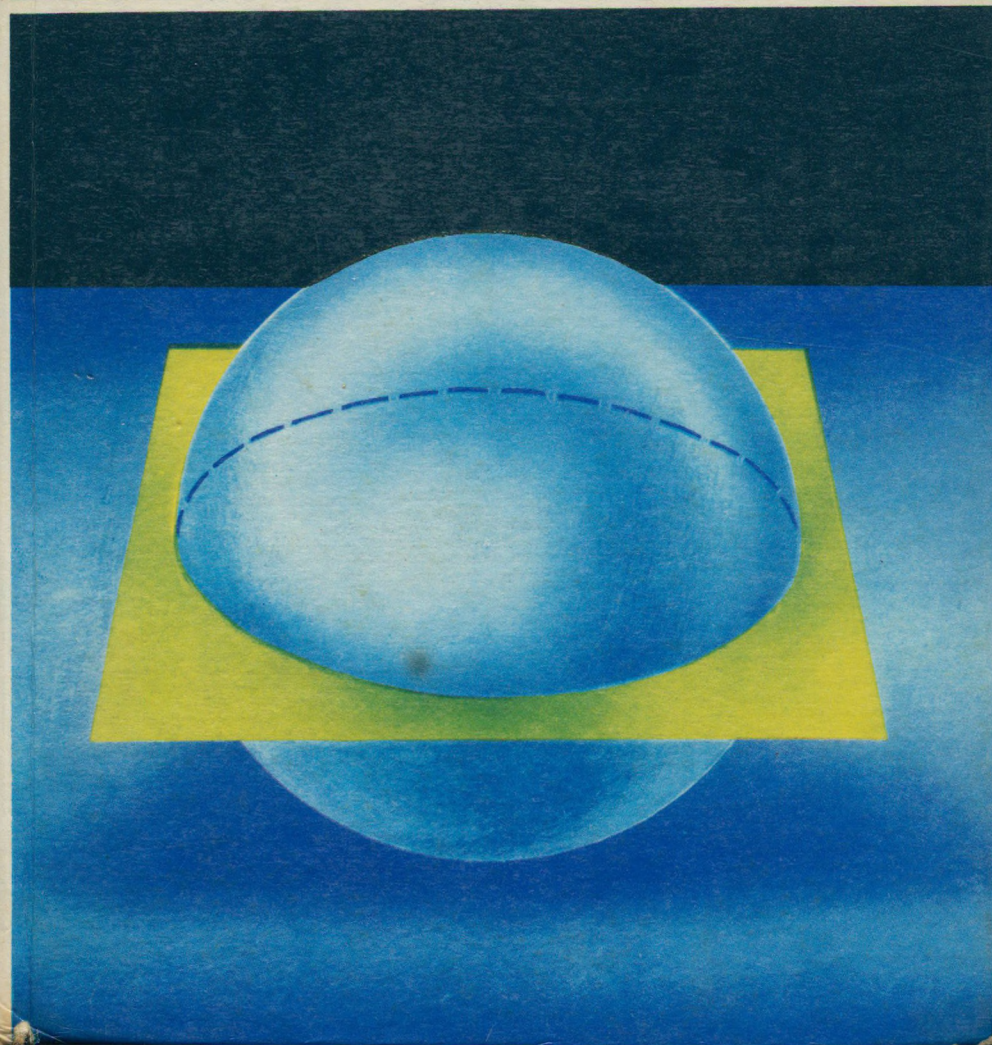
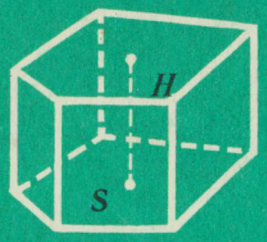
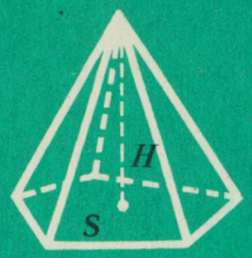
ГЕАМЕТРЫЯ
7-11



АБ'ЁМЫ І ПАВЕРХНІ ЦЕЛ

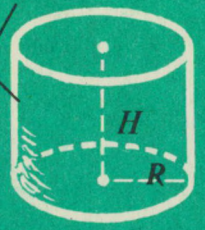


$V = SH$



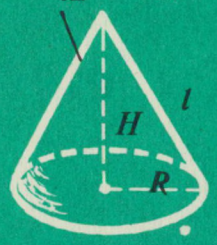
$V = \frac{1}{3}SH$

$S_{бак} = 2\pi RH$



$V = \pi R^2 H$

$S_{бак} = \pi Rl$



$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$

$S = 4\pi R^2$



$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

$S = 2\pi RH$



$V = \pi H^2 (R - \frac{H}{3})$

ЛАЦІНСКІ АЛФАВІТ

ДРУКАВАНЫЯ ЛІТАРЫ	РУКАПІСНЫЯ ЛІТАРЫ	НАЗВЫ ЛІТАР
Aa	*Aa*	а
Bb	*Bb*	бэ
Cc	*Cc*	цэ
Dd	*Dd*	дэ
Ee	*Ee*	э
Ff	*Ff*	эф
Gg	*Gg*	жэ
Hh	*Hh*	аш
Ii	*Ii*	і
Jj	*Jj*	ёт (жы)
Kk	*Kk*	ка
Ll	*Ll*	эль
Mm	*Mm*	эм

ДРУКАВАНЫЯ ЛІТАРЫ	РУКАПІСНЫЯ ЛІТАРЫ	НАЗВЫ ЛІТАР
Nn	*Nn*	эн
Oo	*Oo*	о
Pp	*Pp*	пэ
Qq	*Qq*	ку
Rr	*Rr*	эр
Ss	*Ss*	эс
Tt	*Tt*	тэ
Uu	*Uu*	у
Vv	*Vv*	вэ
Ww	*Ww*	дубль-вэ
Xx	*Xx*	ікс
Yy	*Yy*	ігрэк
Zz	*Zz*	зэт

НЕКАТОРЫЯ ЛІТАРЫ ГРЭЧАСКАГА АЛФАВІТА

ЛІТАРЫ	α	β	γ	δ	λ	μ
НАЗВЫ	альфа	бэта	гама	дэльта	лямбда	мю

ЛІТАРЫ	π	ϱ	τ	φ	ψ	ω
НАЗВЫ	пі	ро	тау	фі	псі	амега

А. В. ПАГАРЭЛАЎ

ГЕАМЕТРЫЯ

ПАДРУЧНІК
ДЛЯ 7—11 КЛАСАЎ
СЯРЭДНЯЙ ШКОЛЫ

Дапушчана
Міністэрствам
адукацыі Расійскай Федэрацыі

Рэкамендавана
Міністэрствам адукацыі і навукі
Рэспублікі Беларусь

Выданне пятае

МІНСК «НАРОДНАЯ АСВЕТА» 1995

ББК 22.151я721
П12
УДК 514.11(075.3)

Падручнік заняў прызавое месца
на Усесаюзным конкурсе падручнікаў па матэматыцы
для сярэдняй агульнаадукацыйнай школы

Пераклад зроблены па выданню: Погорелов А. В. Геометрия: Учебник для 7—11-х кл. сред. шк.— М.: Просвещение, 1990.— 303 с.

Перакладчыкі:
Б. А. Кімбар, А. М. Круглей, Ю. М. Сувораў

Пагарэлаў А. В.
П 12 Геаметрыя: Падруч. для 7—11-х кл. сярэд. шк.— 5-е выд.— Мн.: Нар. асвета, 1995.— 383 с.: іл.
ISBN 985-03-0171-6.
Погорелов А. В. Геометрия: Учеб. для 7—11-х кл. сред. шк.

П $\frac{5140110000—160}{М\ 303(03)—95}$ 117—95

ББК 22.151я721

© А. В. Погорелов, 1990
© Пераклад на беларускую мову, Б. А. Кімбар, А. М. Круглей. Ю. М. Сувораў, 1990

ISBN 985-03-0171-6

7 клас

ПЛАНІМЕТРЫЯ

§ 1. АСНОЎНЫЯ ЎЛАСЦІВАСЦІ НАЙПРАСЦЕЙШЫХ ГЕАМЕТРЫЧНЫХ ФІГУР

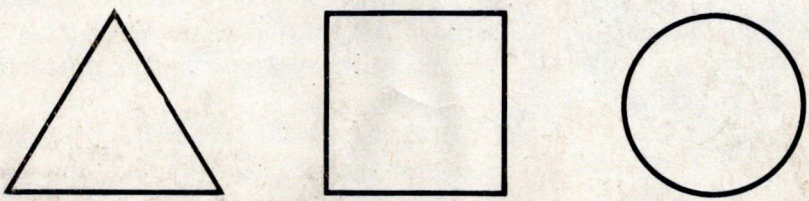
1. ГЕАМЕТРЫЧНЫЯ ФІГУРЫ

Геаметрыя — гэта навука аб уласцівасцях геаметрычных фігур. Слова «геаметрыя» — грэчаскае, у перакладзе на беларускую мову азначае «землямер'е». Такая назва звязана з прымяненнем геаметрыі для вымярэнняў на мясцовасці.

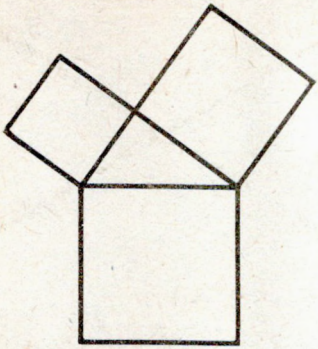
Прыклады геаметрычных фігур: трохвугольнік, квадрат, акружнасць (рыс. 1).

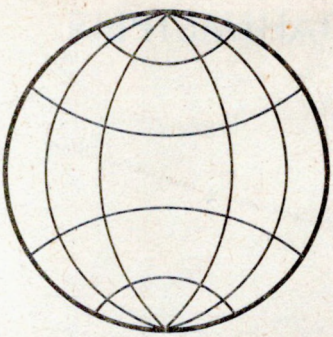
Геаметрычныя фігуры бываюць вельмі разнастайнымі. Частка любой геаметрычнай фігуры з'яўляецца геаметрычнай фігурай. Аб'яднанне некалькіх геаметрычных фігур ёсць зноў геаметрычная фігура. На рысунку 2 фігура злева складаецца з трохвугольніка і трох квадратаў, а фігура справа складаецца з акружнасці і частак акружнасці. Усякую геаметрычную фігуру мы ўяўляем сабе складзенай з пунктаў.

Геаметрыя шырока прымяняецца на практыцы. Яе трэба ве-



Рыс. 1





Рыс. 2

даць і рабочаму, і інжынеру, і архітэктару, і мастаку. Адным словам, геаметрыю трэба ведаць усім.

Геаметрыя, што вывучаецца ў школе, называецца еўклідавай, па імю Еўкліда, які стварыў дапаможнік па матэматыцы пад назвай «Пачаткі». На працягу доўгага часу геаметрыю вывучалі па гэтай кнізе.

Мы пачнём вывучэнне геаметрыі з планіметрыі. *Планіметрыя* — гэта раздзел геаметрыі, у якім вывучаюцца фігуры на плоскасці.



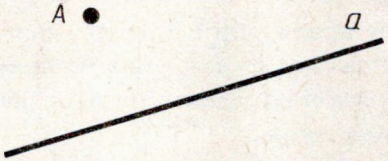
Еўклід — старажытнагрэчаскі вучоны (III ст. да н. э.)

2. ПУНКТ І ПРАМАЯ

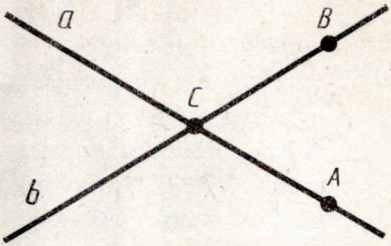
Асноўнымі геаметрычнымі фігурамі на плоскасці з'яўляюцца *пункт* і *прамая*. Пункты прынята абазначаць вялікімі лацінскімі літарамі: A, B, C, D, ... Прамыя абазначаюцца малымі лацінскімі літарамі: a, b, c, d, ...

На рысунку 3 вы бачыце пункт A і прамую a.

Прамая бесканечная. На рысунку мы паказваем толькі частку прамой, але ўяўляем яе сабе неабмежавана прадоўжанай у абодва бакі.



Рыс. 3



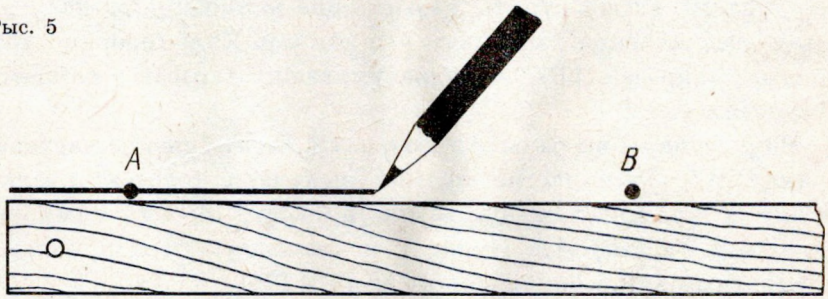
Рыс. 4

Паглядзіце на рысунак 4. Вы бачыце прамыя a, b і пункты A, B, C. Пункты A і C *ляжаць* на прамой a. Можна сказаць таксама, што пункты A і C *належаць* прамой a або што прамая a *праходзіць* праз пункты A і C.

Пункт B ляжыць на прамой b. Ён не ляжыць на прамой a. Пункт C ляжыць і на прамой a, і на прамой b. Прамыя a і b *перасякаюцца* ў пункце C. Пункт C з'яўляецца *пунктам перасячэння* прамых a і b.

На рысунку 5 вы бачыце, як з дапамогай лінейкі будуецца прамая, што праходзіць праз два зададзеныя пункты A і B.

Рыс. 5



Асноўнымі ўласцівасцямі прыналежнасці пунктаў і прамых на плоскасці мы будзем называць наступныя ўласцівасці:

I. ***Якая б ні была прамая, існуюць пункты, што належаць гэтай прамой, і пункты, што не належаць ёй.***

Праз любыя два пункты можна правесці прамую, і толькі адну.

Прамую можна абазначаць двума пунктамі, якія ляжаць на ёй. Напрыклад, прамую a на рысунку 4 можна абазначыць AC, а прамую b можна абазначыць BC.

Задача (3)[1]. Ці могуць дзве прамыя мець два пункты перасячэння? Растлумачце адказ.

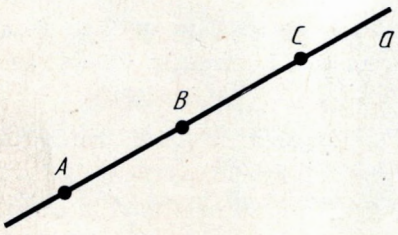
Рашэнне. Калі б дзве прамыя мелі два пункты перасячэння, то праз гэтыя пункты праходзілі б дзве прамыя. А гэта немагчыма, таму што праз два пункты можна правесці толькі адну прамую. Значыць, дзве прамыя не могуць мець два пункты перасячэння.

3. АДРЭЗАК

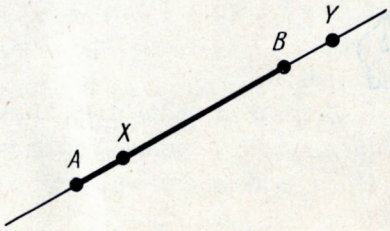
Паглядзіце на рысунак 6. Вы бачыце прамую a і тры пункты A, B, C на гэтай прамой. Пункт B ляжыць *паміж* пунктамі A і C, ён *падзяляе* пункты A і C. Можна таксама сказаць, што пункты A і C ляжаць *па розныя бакі* ад пункта B. Пункты B і C ляжаць *па адзін бок* ад пункта A, яны не падзяляюцца пунктам A. Пункты A і B ляжаць па адзін бок ад пункта C.

Адрэзкам называецца частка прамой, што складаецца з усіх пунктаў гэтай прамой, якія ляжаць паміж двума дадзенымі яе пунктамі. Гэтыя пункты называюцца *канцамі адрэзка*. Адрэзак абазначаецца ўказаннем яго канцоў. Калі гавораць або пішуць: «адрэзак AB», то падразумяваюць адрэзак з канцамі ў пунктах A і B.

На рысунку 7 вы бачыце адрэзак AB. Ён з'яўляецца часткай прамой AB. Гэта частка прамой вылучана тоўстай лініяй. Пункт X прамой ляжыць паміж пунктамі A і B, таму ён належыць адрэзку AB. Пункт Y не ляжыць паміж пунктамі A і B. Таму ён не належыць адрэзку AB.



Рыс. 6



Рыс. 7

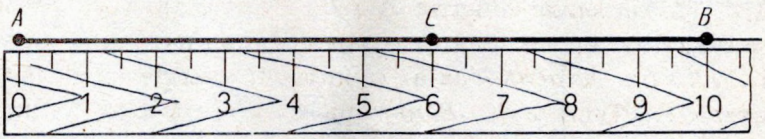
[1] Лік у дужках паказвае нумар задачы ў спісе задач, якія прыведзены ў канцы параграфа.

Асноўнай уласцівасцю размяшчэння пунктаў на прамой мы будзем называць наступную ўласцівасць:

II. ***З трох пунктаў на прамой адзін і толькі адзін ляжыць паміж двума другімі.***

4. ВЫМЯРЭННІ АДРЭЗКАЎ

Для вымярэння адрэзкаў прымяняюцца розныя вымяральныя інструменты. Найпрасцейшым такім інструментам з'яўляецца лінейка з дзяленнямі на ёй. На рысунку 8 адрэзак AB роўны 10 см, адрэзак AC роўны 6 см, а адрэзак BC роўны 4 см. Даўжыня адрэзка AB роўная суме даўжынь адрэзкаў AC і BC.



Рыс. 8

Асноўнымі ўласцівасцямі вымярэнняў адрэзкаў мы будзем называць наступныя ўласцівасці:

III. ***Кожны адрэзак мае пэўную даўжыню, большую за нуль. Даўжыня адрэзка роўная суме даўжынь частак, на якія ён разбіваецца любым яго пунктам.***

Гэта значыць, што калі на адрэзку AB узяць любы пункт C, то даўжыня адрэзка AB роўная суме даўжынь адрэзкаў AC і BC. Даўжыню адрэзка AB называюць таксама *адлегласцю паміж пунктамі* A і B.

Задача (9). Тры пункты A, B, C ляжаць на адной прамой. Вядома, што $AB = 4{,}3$ см, $AC = 7{,}5$ см, $BC = 3{,}2$ см. Ці можа пункт A ляжаць паміж пунктамі B і C? Ці можа пункт C ляжаць паміж пунктамі A і B? Які з трох пунктаў A, B, C ляжыць паміж двума другімі?

Рашэнне. Калі пункт A ляжыць паміж пунктамі B і C, то па ўласцівасці вымярэння адрэзкаў павінна быць: $AB + AC = BC$. Але $4{,}3 + 7{,}5 \neq 3{,}2$. Значыць, пункт A не ляжыць паміж пунктамі B і C.

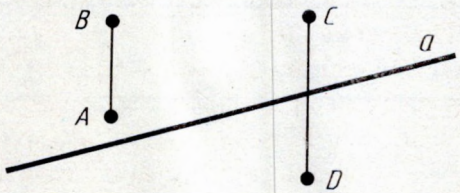
Калі пункт C ляжыць паміж пунктамі A і B, то павінна

быць: $AC + BC = AB$. Але $7{,}5 + 3{,}2 \neq 4{,}3$. Значыць, пункт C не ляжыць паміж пунктамі A і B.

З трох пунктаў на прамой A, B, C адзін пункт ляжыць паміж двума другімі. Значыць, гэтым пунктам з'яўляецца B.

5. ПАЎПЛОСКАСЦІ

Паглядзіце на рысунак 9. Прамая *a разбівае* плоскасць на дзве паўплоскасці. Гэта разбіўка валодае наступнай уласцівасцю. Калі канцы якога-небудзь адрэзка належаць адной паўплоскасці, то адрэзак не перасякае прамую. Калі канцы адрэзка належаць розным паўплоскасцям, то адрэзак перасякае прамую.



Рыс. 9

На рысунку 9 пункты A і B ляжаць у адной з паўплоскасцей, на якія прамая a разбівае плоскасць. Таму адрэзак AB не перасякае прамую a. Пункты C і D ляжаць у розных паўплоскасцях. Таму адрэзак CD перасякае прамую a.

Асноўнай уласцівасцю размяшчэння пунктаў адносна прамой на плоскасці мы будзем называць наступную ўласцівасць:

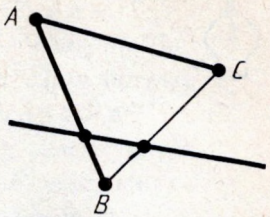
IV. ***Прамая разбівае плоскасць на дзве паўплоскасці.***

Задача (17). Дадзены прамая і тры пункты A, B, C, якія не ляжаць на гэтай прамой. Вядома, што адрэзак AB перасякае прамую, а адрэзак AC не перасякае яе. Ці перасякае прамую адрэзак BC? Растлумачце адказ.

Рашэнне. Прамая разбівае плоскасць на дзве паўплоскасці (рыс. 10). Пункт A належыць адной з іх. Адрэзак AC не перасякае прамую. Значыць, пункт C ляжыць у той жа паўплоскасці, што і пункт A.

Адрэзак AB перасякае прамую. Значыць, пункт B ляжыць у другой паўплоскасці.

Такім чынам, пункты B і C ляжаць у розных паўплоскасцях. А гэта значыць, што адрэзак BC перасякае нашу прамую.

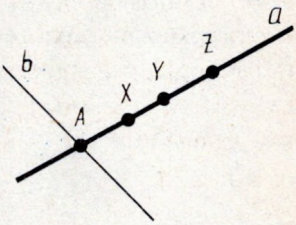


Рыс. 10

6. ПАЎПРАМАЯ



Задача (20). Дадзены прамая a і пункты A, X, Y, Z на гэтай прамой (рыс. 11). Вядома, што пункты X і Y ляжаць па адзін бок ад пункта A, пункты X і Z таксама ляжаць па адзін бок ад пункта A. Як размешчаны пункты Y і Z адносна пункта A: па адзін бок ці па розныя бакі? Растлумачце адказ.

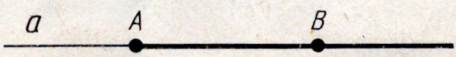


Рыс. 11

Рашэнне. Правядзём праз пункт A якую-небудзь прамую b, адрозную ад a. Яна разбівае плоскасць на дзве паўплоскасці. Адной з іх належыць пункт X. У той жа паўплоскасці ляжаць пункты Y і Z, таму што адрэзкі XY і XZ не перасякаюць прамую b. Паколькі пункты Y і Z ляжаць у адной паўплоскасці, то адрэзак YZ не перасякае прамую b, а значыць, не змяшчае пункт A. Гэта значыць пункты Y і Z ляжаць па адзін бок ад пункта A.

Паўпрамой або *праменем* называецца частка прамой, якая складаецца з усіх пунктаў гэтай прамой, што ляжаць па адзін бок ад дадзенага яе пункта. Гэты пункт называецца *пачатковым пунктам* паўпрамой. Розныя паўпрамыя адной і той жа прамой з агульным пачатковым пунктам называюцца *дадатковымі*.

Паўпрамыя, таксама як і прамыя, абазначаюцца малымі лацінскімі літарамі. Можна абазначаць паўпрамую двума пунктамі: пачатковым і яшчэ якім-небудзь пунктам, што належыць паўпрамой. Пры гэтым пачатковы пункт ставіцца на першым месцы. Напрыклад, паўпрамую, якая вылучана тлустай лініяй на рысунку 12, можна абазначыць AB.

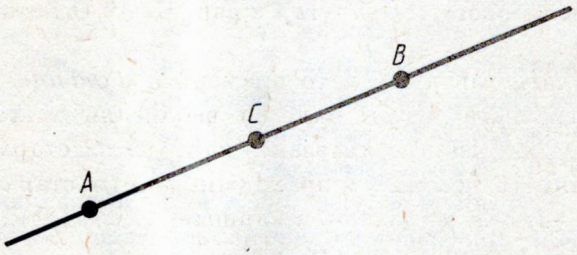


Рыс. 12

Задача (22). На адрэзку AB узяты пункт C. Сярод паўпрамых AB, AC, CA і CB назавіце пары супадаючых паўпрамых, дадатковых паўпрамых. Растлумачце адказ.

Рашэнне (рыс. 13). Дадзеныя паўпрамыя маюць пачатковым пунктам або пункт A, або пункт C.

Разгледзім спачатку паўпрамыя з пачатковым пунктам A (паўпрамыя AB і AC). Пункт C ляжыць паміж пунктамі A і B, паколькі па ўмове задачы ён належыць адрэзку AB. Значыць, пункт A не ляжыць паміж пунктамі B і C, г. зн. пункты B і C ляжаць па адзін бок ад пункта A. Таму паўпрамыя AB і AC супадаючыя.



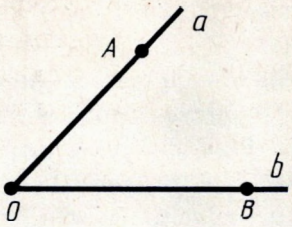
Рыс. 13

Разгледзім цяпер паўпрамыя з пачатковым пунктам C (паўпрамыя CA і CB). Пункт C падзяляе пункты A і B. Таму пункты A і B не могуць належаць адной паўпрамой, а значыць, паўпрамыя CA і CB дадатковыя.

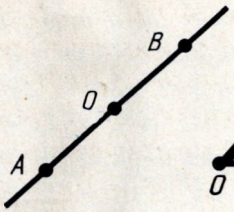
7. ВУГАЛ

Вуглом называецца фігура, што складаецца з пункта — *вяршыні вугла* — і дзвюх розных паўпрамых, выходзячых з гэтага пункта,— *старон вугла*.

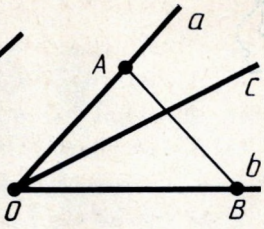
На рысунку 14 вы бачыце вугал з вяршыняй O і старанамі a, b. Вугал абазначаецца або ўказаннем яго вяршыні, або ўказаннем яго старон, або ўказаннем трох пунктаў: вяршыні і двух пунктаў на старанах вугла. Слова «вугал» часам замяняюць значком $\angle$. Вугал на рысунку 14 можна абазначыць трыма спосабамі: $\angle O$, $\angle (ab)$, $\angle AOB$. У трэцім спосабе абазначэння вугла літара, якая абазначае вяршыню, ставіцца пасярэдзіне.



Рыс. 14



Рыс. 15



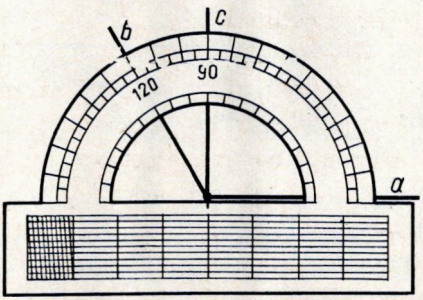
Рыс. 16

Калі стораны вугла з'яўляюцца дадатковымі паўпрамымі адной прамой, то вугал называецца *разгорнутым*. На рысунку 15 вы бачыце разгорнуты вугал з вяршыняй O і старанамі OA і OB.

Мы будзем гаварыць, што прамень *праходзіць паміж* старанамі дадзенага вугла, калі ён выходзіць з яго вяршыні і перасякае які-небудзь адрэзак з канцамі на старанах вугла. На рысунку 16 прамень c праходзіць паміж старанамі вугла (ab), таму што ён выходзіць з вяршыні вугла (ab) і перасякае адрэзак AB з канцамі на яго старанах.

У выпадку разгорнутага вугла мы лічым, што любы прамень, які выходзіць з яго вяршыні і адрозны ад яго старон, праходзіць паміж старанамі вугла.

Вуглы вымяраюцца ў градусах пры дапамозе транспарціра. На рысунку 17 вугал (ab) роўны 120°. Паўпрамая c праходзіць паміж старанамі вугла (ab). Вугал (ac) роўны 90°, а вугал (bc) роўны 30°. Вугал (ab) роўны суме вуглоў (ac) і (bc).



Рыс. 17

Асноўнымі ўласцівасцямі вымярэння вуглоў мы будзем называць наступныя ўласцівасці:

V. ***Кожны вугал мае пэўную градусную меру, большую за нуль. Разгорнуты вугал роўны 180°. Градусная мера вугла роўна суме градусных мер вуглоў, на якія ён разбіваецца любым праменем, што праходзіць паміж яго старанамі.***

Гэта значыць, што калі прамень c праходзіць паміж старанамі вугла (ab), то вугал (ab) роўны суме вуглоў (ac) і (bc).

Задача (25). Ці можа прамень c праходзіць паміж старанамі вугла (ab), калі $\angle(ac) = 30°$, $\angle(cb) = 80°$, $\angle(ab) = 50°$?

Рашэнне. Калі прамень c праходзіць паміж старанамі вугла (ab), то па ўласцівасці вымярэння вуглоў павінна быць:

$$\angle(ac) + \angle(bc) = \angle(ab).$$

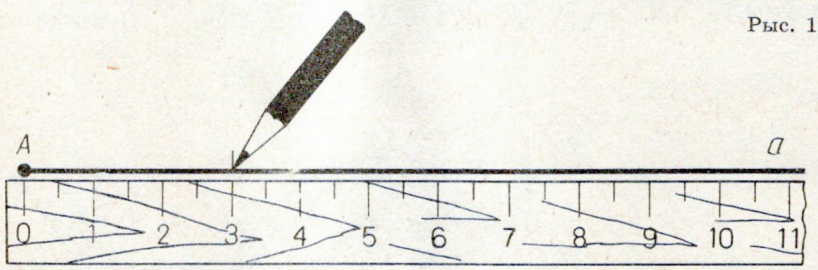
Але $30° + 80° \neq 50°$.

Значыць, прамень c не можа праходзіць паміж старанамі вугла (ab).

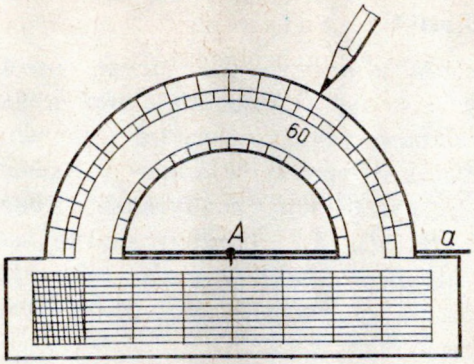
8. АДКЛАДВАННЕ АДРЭЗКАЎ І ВУГЛОЎ

На рысунку 18 паказана, як з дапамогай лінейкі на паўпрамой a з пачатковым пунктам A можна адкласці адрэзак дадзенай даўжыні (3 см).

Рыс. 18



Паглядзіце на рысунак 19. Паўпрамая a, калі яе прадоўжыць за пачатковы пункт A, разбівае плоскасць на дзве паўплоскасці. На рысунку паказана, як з дапамогай транспарціра адкласці ад паўпрамой a ў верхнюю паўплоскасць вугал з дадзенай градуснай мерай (60°).



Рыс. 19

Асноўнымі ўласцівасцямі адкладвання адрэзкаў і вуглоў мы будзем называць наступныя ўласцівасці:

VI. ***На любой паўпрамой ад яе пачатковага пункта можна адкласці адрэзак зададзенай даўжыні, і толькі адзін.***

VII. ***Ад любой паўпрамой у зададзеную паўплоскасць можна адкласці вугал з зададзенай градуснай мерай, меншай за 180°, і толькі адзін.***

Задача (30). На прамені AB адкладзены адрэзак AC, меншы за адрэзак AB. Які з трох пунктаў A, B, C ляжыць паміж двума другімі? Растлумачце адказ.

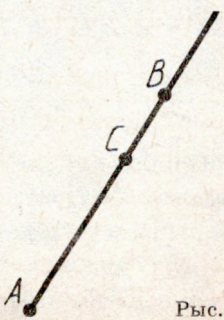
Рашэнне (рыс. 20). Паколькі пункты B і C ляжаць на адной паўпрамой з пачатковым пунктам A, то яны не падзяляюцца пунктам A, г. зн. пункт A не ляжыць паміж пунктамі B і C.

Ці можа пункт B ляжаць паміж пунктамі A і C? Калі б ён ляжаў паміж пунктамі A і C, то было б

$$AB + BC = AC.$$

Але гэта немагчыма, паколькі па ўмове адрэзак AC меншы за адрэзак AB. Значыць, пункт B не ляжыць паміж пунктамі A і C.

З трох пунктаў A, B, C адзін ляжыць паміж двума другімі. Таму пункт C ляжыць паміж пунктамі A і B.



Рыс. 20

9. ТРОХВУГОЛЬНІК

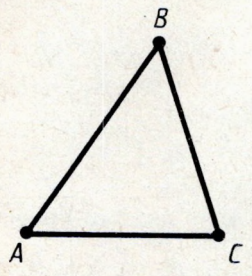
Трохвугольнікам называецца фігура, якая складаецца з трох пунктаў, што не ляжаць на адной прамой, і трох адрэзкаў, якія парамі злучаюць гэтыя пункты. Пункты называюцца *вяршынямі* трохвугольніка, а адрэзкі — *старанамі*.

На рысунку 21 вы бачыце трохвугольнік з вяршынямі A, B, C і старанамі AB, BC, AC. Трохвугольнік абазначаецца ўказаннем яго вяршынь. Замест слова «трохвугольнік» часам ужываюць значок $\triangle$. Напрыклад, трохвугольнік на рысунку 21 абазначаецца так: $\triangle ABC$.

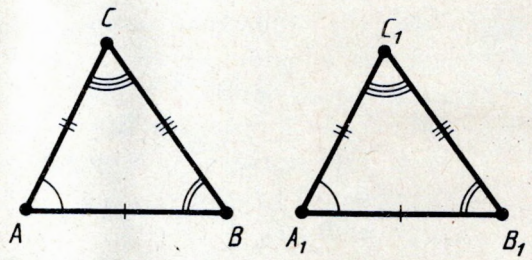
Вуглом трохвугольніка ABC пры вяршыні A называецца вугал, утвораны паўпрамымі AB і AC. Гэтак жа вызначаюцца вуглы трохвугольніка пры вяршынях B і C.

Два адрэзкі называюцца *роўнымі*, калі яны маюць аднолькавую даўжыню. Два вуглы называюцца *роўнымі*, калі яны маюць аднолькавую вуглавую меру ў градусах.

Трохвугольнікі называюцца *роўнымі*, калі ў іх адпаведныя стораны роўныя і адпаведныя вуглы роўныя. Пры гэтым адпаведныя вуглы павінны ляжаць супраць адпаведных старон.



Рыс. 21



Рыс. 22

На рысунку 22 вы бачыце два роўныя трохвугольнікі ABC і $A_1B_1C_1$. У іх

$$AB = A_1B_1,\ AC = A_1C_1,\ BC = B_1C_1,$$
$$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1.$$

На чарцяжы роўныя адрэзкі звычайна адзначаюць адной, дзвюма або трыма рысачкамі, а роўныя вуглы — адной, дзвюма або трыма дужкамі.

Для абазначэння роўнасці трохвугольнікаў выкарыстоўваецца звычайны знак роўнасці: $=$. Запіс $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

чытаецца так: «Трохвугольнік ABC роўны трохвугольніку $A_1B_1C_1$». Пры гэтым мае значэнне парадак, у якім запісваюцца вяршыні трохвугольніка. Роўнасць $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ азначае, што $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, ... А роўнасць $\triangle ABC = \triangle B_1A_1C_1$ азначае зусім іншае: $\angle A = \angle B_1$, $\angle B = \angle A_1$, ...



З а д а ч а (38). Трохвугольнікі ABC і PQR роўныя. Вядома, што старана AB роўна 10 м, а вугал C роўны 90°. Чаму роўна старана PQ і вугал R? Растлумачце адказ.

Р а ш э н н е. Паколькі трохвугольнікі ABC і PQR роўныя, то ў іх $AB = PQ$, $\angle C = \angle R$. Значыць, $PQ = 10$ м, $\angle R = 90°$.

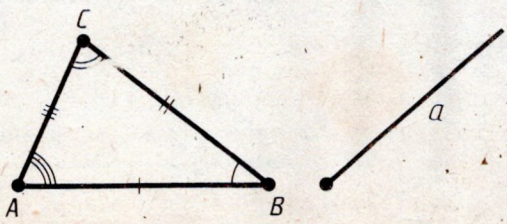
10. ІСНАВАННЕ ТРОХВУГОЛЬНІКА, РОЎНАГА ДАДЗЕНАМУ

Няхай мы маем трохвугольнік ABC і прамень a (рыс. 23, *а*). Перамесцім трохвугольнік ABC так, каб яго вяршыня A сумясцілася з пачаткам прамяня a, вяршыня B трапіла на прамень a, а вяршыня C аказалася ў зададзенай паўплоскасці адносна прамяня a і яго прадаўжэння. Вяршыні нашага трохвугольніка ў гэтым новым становішчы абазначым $A_1B_1C_1$ (рыс. 23, *б*).

Трохвугольнік $A_1B_1C_1$ роўны трохвугольніку ABC.

Існаванне трохвугольніка $A_1B_1C_1$, роўнага трохвугольніку ABC і размешчанага ўказаным спосабам адносна зададзенага прамяня a, мы адносім да ліку а с н о ў н ы х у л а с ц і в а с ц е й найпрасцейшых фігур. Гэту ўласцівасць мы будзем фармуляваць так:

VIII. ***Які б ні быў трохвугольнік, існуе роўны яму трохвугольнік у зададзеным размяшчэнні адносна дадзенай паўпрамой.***



а) *б*) Рыс. 23

11. ПАРАЛЕЛЬНЫЯ ПРАМЫЯ

Дзве прамыя называюцца *паралельнымі*, калі яны не перасякаюцца.

На рысунку 24 паказана, як з дапамогай вугольніка і лінейкі правесці праз дадзены пункт B прамую b, паралельную дадзенай прамой a.

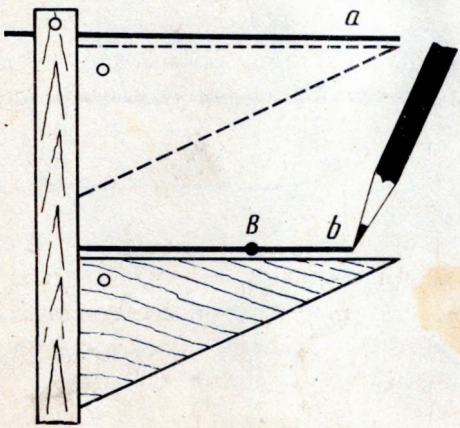
Для абазначэння паралельнасці прамых выкарыстоўваецца значок $\parallel$. Запіс $a \parallel b$ чытаецца: «Прамая a паралельная прамой b».

Асноўная ўласцівасць паралельных прамых заключаецца ў наступным:

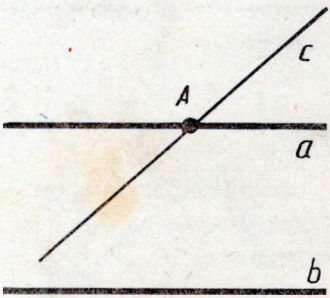
IX. ***Праз пункт, які не ляжыць на дадзенай прамой, можна правесці на плоскасці не больш за адну прамую, паралельную дадзенай.***

Задача (41). Ці можа прамая, якая перасякае адну з дзвюх паралельных прамых, не перасякаць другую? Растлумачце адказ.

Рашэнне. Няхай a і b — паралельныя прамыя і няхай прамая c перасякае прамую a ў пункце A (рыс. 25). Калі б прамая c не перасякала прамую b, то праз пункт A праходзілі б дзве прамыя, якія не перасякаюць прамую b: прамая a і прамая c. Але па ўласцівасці паралельных прамых гэта немагчыма. Значыць, прамая c, перасякаючы прамую a, павінна перасякаць і паралельную ёй прамую b.



Рыс. 24



Рыс. 25

12. ТЭАРЭМЫ І ДОКАЗЫ

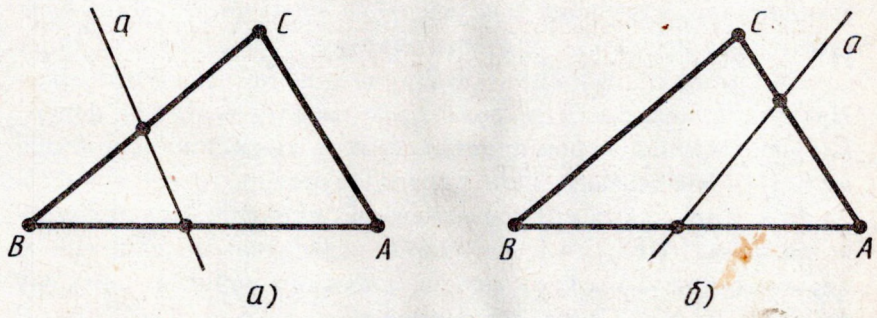
Правільнасць сцверджання аб уласцівасці той ці іншай геаметрычнай фігуры ўстанаўліваецца шляхам разважання. Гэта разважанне называецца *доказам*. А само сцверджанне, якое даказваецца, называецца *тэарэмай*. Прывядзём прыклад.

Тэарэма 1.1. ***Калі прамая, якая не праходзіць ні праз адну з вяршынь трохвугольніка, перасякае адну з яго старон, то яна перасякае толькі адну з дзвюх другіх старон.***

Доказ. Няхай прамая a не праходзіць ні праз адну з вяршынь трохвугольніка ABC і перасякае яго старану AB (рыс. 26). Прамая a разбівае плоскасць на дзве паўплоскасці. Пункты A і B ляжаць у розных паўплоскасцях, таму што адрэзак AB перасякаецца з прамой a. Пункт C ляжыць у адной з гэтых паўплоскасцей.

Калі пункт C ляжыць у адной паўплоскасці з пунктам A, то адрэзак AC не перасякае прамую a, а адрэзак BC перасякае гэту прамую (рыс. 26, *а*). Калі пункт C ляжыць у адной паўплоскасці з пунктам B, то адрэзак AC перасякае прамую a, а адрэзак BC не перасякае (рыс. 26, *б*).

У абодвух выпадках прамая a перасякае толькі адзін з адрэзкаў AC або BC. Вось і ўвесь доказ.



Рыс. 26

Фармулёўка тэарэмы звычайна складаецца з дзвюх частак. У адной частцы гаворыцца пра тое, што дадзена. Гэта частка называецца *ўмовай* тэарэмы. У другой частцы гаворыцца аб тым, што павінна быць даказана. Гэта частка называецца *заключэннем* тэарэмы.

Умова тэарэмы 1.1 заключаецца ў тым, што прамая не

праходзіць ні праз адну з вяршынь трохвугольніка і перасякае адну з яго старон. Заключэнне тэарэмы — у тым, што гэта прамая перасякае толькі адну з дзвюх другіх старон трохвугольніка.

13. АКСІЁМЫ

Сцверджанні, якія змяшчаюцца ў фармулёўках асноўных уласцівасцей найпрасцейшых фігур, не даказваюцца і называюцца *аксіёмамі*. Слова «аксіёма» паходзіць ад грэчаскага *аксіос* і азначае сцверджанне, якое не выклікае сумненняў.

Пры доказе тэарэм дазваляецца карыстацца асноўнымі ўласцівасцямі найпрасцейшых фігур, г. зн. аксіёмамі, а таксама ўласцівасцямі, ужо даказанымі, г. зн. даказанымі тэарэмамі. Ніякімі іншымі ўласцівасцямі фігур, нават калі яны нам здаюцца відавочнымі, карыстацца нельга.

Пры доказе тэарэм дазваляецца карыстацца чарцяжом як геаметрычным запісам таго, што мы выражаем словамі. Не дазваляецца выкарыстоўваць у разважанні ўласцівасці фігуры, якія відаць на чарцяжы, калі мы не можам абгрунтаваць іх, абапіраючыся на аксіёмы і тэарэмы, даказаныя раней.

У геаметрыі побач з такімі словамі, як «аксіёма» і «тэарэма», выкарыстоўваецца таксама слова «азначэнне». Даць *азначэнне* чаму-небудзь — значыць растлумачыць, што гэта такое.

Напрыклад, гавораць: «Дайце азначэнне трохвугольніка». На гэта адказваюць: «Трохвугольнікам называецца фігура, якая складаецца з трох пунктаў, што не ляжаць на адной прамой, і трох адрэзкаў, якія парамі злучаюць гэтыя пункты».

Другі прыклад: «Дайце азначэнне паралельных прамых». Адказваем: «Прамыя называюцца паралельнымі, калі яны не перасякаюцца». Вы ўжо ведаеце азначэнні роўнасці адрэзкаў, роўнасці вуглоў і трохвугольнікаў.

КАНТРОЛЬНЫЯ ПЫТАННІ

1. Прывядзіце прыклады геаметрычных фігур.
2. Назавіце асноўныя геаметрычныя фігуры на плоскасці.
3. Як абазначаюцца пункты і прамыя?
4. Сфармулюйце асноўныя ўласцівасці прыналежнасці пунктаў і прамых.

5. Растлумачце, што такое адрэзак з канцамі ў дадзеных пунктах.
6. Сфармулюйце асноўную ўласцівасць узаемнага размяшчэння пунктаў на прамой.
7. Сфармулюйце асноўную ўласцівасць вымярэння адрэзкаў.
8. Што называецца адлегласцю паміж двума дадзенымі пунктамі?
9. Якімі ўласцівасцямі валодае разбіццё плоскасці на дзве паўплоскасці.
10. Сфармулюйце асноўную ўласцівасць размяшчэння пунктаў адносна прамой на плоскасці.
11. Што такое паўпрамая або прамень? Якія паўпрамыя называюцца дадатковымі?
12. Як абазначаюцца паўпрамыя?
13. Якая фігура называецца вуглом?
14. Як абазначаецца вугал?
15. Які вугал называецца разгорнутым?
16. Растлумачце, што азначае выраз «Паўпрамая праходзіць паміж старанамі вугла».
17. У якіх адзінках вымяраюцца вуглы і з дапамогай якога інструмента? Растлумачце, як праводзіцца вымярэнне.
18. Сфармулюйце асноўныя ўласцівасці вымярэння вуглоў.
19. Сфармулюйце асноўныя ўласцівасці адкладвання адрэзкаў і вуглоў.
20. Што такое трохвугольнік?
21. Што такое вугал трохвугольніка пры дадзенай вяршыні?
22. Якія адрэзкі называюцца роўнымі?
23. Якія вуглы называюцца роўнымі?
24. Якія трохвугольнікі называюцца роўнымі?
25. Як на рысунку адзначаюцца ў роўных трохвугольнікаў адпаведныя стораны і вуглы?
26. Растлумачце па рысунку 23 існаванне трохвугольніка, роўнага дадзенаму.
27. Якія прамыя называюцца паралельнымі? Якім значком абазначаецца паралельнасць прамых?
28. Сфармулюйце асноўную ўласцівасць паралельных прамых.

ЗАДАЧЫ[1]

1. 1) Правядзіце прамую. Адзначце які-небудзь пункт A, які ляжыць на прамой, і пункт B, што не ляжыць на прамой.
2) Правядзіце дзве прамыя a і b, якія перасякаюцца.

[1] Многія задачы гэтага падручніка ўзяты са школьных падручнікаў мінулых гадоў, у асаблівасці з «Геаметрыі» А. П. Кісялёва і «Зборніка задач па геаметрыі» М. А. Рыбкіна.



Рыс. 27

Адзначце пункт C перасячэння прамых; пункт A на прамой a, што не ляжыць на прамой b; пункт D, які не ляжыць ні на адной з прамых a і b.

2. Адзначце на лісце паперы два пункты. Правядзіце праз іх ад рукі прамую. З дапамогай лінейкі праверце правільнасць пабудавання.
3. Ці могуць дзве прамыя мець два пункты перасячэння? Растлумачце адказ.
4. Для праверкі правільнасці лінейкі прымяняюць такі спосаб. Праз два пункты з дапамогай лінейкі праводзяць лінію (рыс. 27). Затым лінейку пераварочваюць і праз тыя ж пункты зноў праводзяць лінію. Калі лініі не супадаюць, то лінейка няправільная. На якой уласцівасці прамых заснаваны гэты спосаб праверкі правільнасці лінейкі?
5. Правядзіце прамую a. Адзначце на прамой два якія-небудзь пункты A і B. Адзначце цяпер пункт C так, каб пункт A ляжаў паміж пунктамі B і C.
6. Правядзіце прамую a. Адзначце на прамой два якія-небудзь пункты A і B. Адзначце цяпер які-небудзь пункт C адрэзка AB.
7. Пункт M ляжыць на прамой CD паміж пунктамі C і D. Знайдзіце даўжыню адрэзка CD, калі: 1) $CM = 2{,}5$ см, $MD = 3{,}5$ см; 2) $CM = 3{,}1$ дм, $MD = 4{,}6$ дм; 3) $CM = 12{,}3$ м, $MD = 5{,}8$ м.
8. Адзначце на прамой два пункты. Адзначце на вока сярэдзіну адрэзка, які злучае гэтыя пункты. Праверце правільнасць пабудавання вымярэння з дапамогай лінейкі.
9. Тры пункты A, B, C ляжаць на адной прамой. Вядома, што $AB = 4{,}3$ см, $AC = 7{,}5$ см, $BC = 3{,}2$ см. Ці можа пункт A ляжаць паміж пунктамі B і C? Ці можа пункт C ляжаць паміж пунктамі A і B? Які з трох пунктаў A, B, C ляжыць паміж двума другімі?
10. Пункты A, B, C ляжаць на адной прамой. Ці належыць пункт B адрэзку AC, калі: 1) $AC = 5$ см, $BC = 7$ см. Растлумачце адказ.
11. Пункты A, B, C ляжаць на адной прамой. Ці можа пункт B падзяляць пункты A і C, калі $AC = 7$ м, $BC = 7{,}6$ м? Растлумачце адказ.
12. Ці могуць пункты A, B, C ляжаць на адной прамой, калі $AB = 1{,}8$ м, $AC = 1{,}3$ м, $BC = 3$ м? Растлумачце адказ.
13. Ці могуць тры пункты A, B, C ляжаць на адной прамой, калі даўжыня большага адрэзка AB меншая за суму даўжынь адрэзкаў AC і BC? Растлумачце адказ.
14. Пункты A, B, C ляжаць на адной прамой. Знайдзіце даў-

жыню адрэзка BC, калі $AB = 2{,}7$ м, $AC = 3{,}2$ м. Колькі рашэнняў мае задача?

15. На адрэзку AB даўжынёй 15 м адзначаны пункт C. Знайдзіце даўжыні адрэзкаў AC і BC, калі: 1) адрэзак AC на 3м даўжэйшы за адрэзак BC; 2) адрэзак AC у два разы даўжэйшы за адрэзак BC; 3) пункт C — сярэдзіна адрэзка AB; 4) даўжыні адрэзкаў AC і BC адносяцца як $2:3$.

16. Правядзіце прамую і адзначце які-небудзь пункт A, што не ляжыць на гэтай прамой. Адзначце цяпер два пункты B і C так, каб адрэзак AB перасякаў прамую, а адрэзак BC не перасякаў яе.

17. Дадзены прамая і тры пункты A, B, C, якія не ляжаць на гэтай прамой. Вядома, што адрэзак AB перасякае прамую, а адрэзак AC не перасякае яе. Ці перасякае прамую адрэзак BC? Растлумачце адказ.

18. Дадзены прамая і чатыры пункты A, B, C і D, якія не ляжаць на гэтай прамой. Ці перасякае прамую адрэзак AD, калі: 1) адрэзкі AB, BC і CD перасякаюць прамую; 2) адрэзкі AC і BC перасякаюць прамую, а адрэзак BD не перасякае; 3) адрэзкі AB і CD перасякаюць прамую, а адрэзак BC не перасякае; 4) адрэзкі AB і CD не перасякаюць прамую, а адрэзак BC перасякае; 5) адрэзкі AB, BC і CD не перасякаюць прамую; 6) адрэзкі AC, BC і BD перасякаюць прамую? Растлумачце адказ.

19. Дадзены пяць пунктаў і прамая, якая не праходзіць ні праз адзін з гэтых пунктаў. Вядома, што тры пункты размешчаны ў адной паўплоскасці адносна гэтай прамой, а два пункты — у другой паўплоскасці. Кожная пара пунктаў злучана адрэзкам. Колькі адрэзкаў перасякаюць прамую? Растлумачце адказ.

20. Дадзена прамая a і пункты A, X, Y, Z на гэтай прамой (гл. рыс. 11). Вядома, што пункты X і Y ляжаць па адзін бок ад пункта A, пункты X і Z таксама ляжаць па адзін бок ад пункта A. Як размешчаны пункты Y і Z адносна пункта A: па адзін бок ці па розныя бакі? Растлумачце адказ.

21. Адзначце два пункты A і B. Правядзіце паўпрамую AB.

22. На адрэзку AB узяты пункт C. Сярод паўпрамых AB, AC, CA, CB назавіце пары супадаючых паўпрамых, дадатковых паўпрамых. Растлумачце адказ.

23. Правядзіце з аднаго пункта тры адвольныя прамені. Вызначце на вока вуглы, якія ўтвараюцца гэтымі праменямі. Праверце вашы адказы, вымяраючы вуглы транспарцірам. Паўтарыце практыкаванне.

24. Прамень a праходзіць паміж старанамі вугла (cd). Знайдзіце вугал (cd), калі: 1) $\angle(ac) = 35°$, $\angle(ad) = 75°$; 2) $\angle(ac) = 57°$, $\angle(ad) = 62°$; 3) $\angle(ac) = 94°$, $\angle(ad) = 85°$.

25. Ці можа прамень c праходзіць паміж старанамі вугла

(ab), калі: 1) $\angle(ac) = 30°$, $\angle(cb) = 80°$, $\angle(ab) = 50°$; 2) $\angle(ac) = 100°$, $\angle(cb) = 90°$; 3) вугал (ac) большы за вугал (ab)?

26. Паміж старанамі вугла (ab), роўнага 60°, праходзіць прамень c. Знайдзіце вуглы (ac) і (bc), калі: 1) вугал (ac) на 30° большы за вугал (bc); 2) вугал (ac) у два разы большы за вугал (bc); 3) прамень c дзеліць вугал (ab) папалам; 4) градусныя меры вуглоў (ac) і (bc) адносяцца як 2:3.

27. Правядзіце прамую. Адзначце на ёй які-небудзь пункт A. Затым адзначце на вока пункт B гэтай прамой так, каб $AB = 5$ см. Праверце дакладнасць пабудавання пункта B лінейкай. Паўтарыце практыкаванне для: 1) $AB = 3$ см; 2) $AB = 7$ см; 3) $AB = 10$ см.

28. Пабудуйце на вока вуглы 30°, 45°, 60°, 90°. Праверце дакладнасць пабудавання транспарцірам. Паўтарыце практыкаванне.

29. Ці існуе на паўпрамой AB такі пункт X, адрозны ад B, што $AX = AB$? Растлумачце адказ.

30. На прамені AB адкладзены адрэзак AC, меншы за адрэзак AB. Які з трох пунктаў A, B, C ляжыць паміж двума другімі? Растлумачце адказ.

31. На прамені AB адзначаны пункт C. Знайдзіце даўжыню адрэзка BC, калі: 1) $AB = 1{,}5$ м, $AC = 0{,}3$ м; 2) $AB = 2$ см, $AC = 4{,}4$ см.

32. Пабудуйце на вока трохвугольнік з роўнымі старанамі (роўнастаронні трохвугольнік). Праверце дакладнасць пабудавання вымярэннем старон.

33. На старане AB трохвугольніка ABC узяты пункт D. Чаму роўна старана AB трохвугольніка, калі $AD = 5$ см, а $BD = 6$ см?

34. На старане AB трохвугольніка ABC узяты пункт D. Чаму роўны вугал C трохвугольніка, калі $\angle ACD = 30°$, а $\angle BCD = 70°$?

35. Начарціце які-небудзь трохвугольнік. Пабудуйце ад рукі на вока роўны яму трохвугольнік. Праверце правільнасць пабудавання, вымяраючы адпаведныя вуглы і стораны. Паўтарыце практыкаванне.

36. Трохвугольнікі ABC і PQR роўныя. Вядома, што $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 7$ см. Знайдзіце стораны трохвугольніка PQR. Растлумачце адказ.

37. Трохвугольнікі ABC і PQR роўныя. Вуглы другога трохвугольніка вядомы: $\angle P = 40°$, $\angle Q = 60°$, $\angle R = 80°$. Знайдзіце вуглы трохвугольніка ABC.

38. Трохвугольнікі ABC і PQR роўныя. Вядома, што старана AB роўна 10 м, а вугал C роўны 90°. Чаму роўны старана PQ і вугал R? Растлумачце адказ.

39. Трохвугольнікі ABC, PQR і XYZ роўныя. Вядома, што

$AB = 5$ см, $QR = 6$ см, $ZX = 7$ см. Знайдзіце астатнія сторны кожнага трохвугольніка.

40. Дадзены трохвугольнік ABC. Ці існуе другі, роўны яму трохвугольнік ABD?

41. Ці можа прамая, якая перасякае адну з дзвюх паралельных прамых, не перасякаць другую? Растлумачце адказ.

42. Дадзены дзве прамыя, якія перасякаюцца. Ці можна правесці трэцюю прамую, паралельную кожнай з дзвюх дадзеных?

43. Ці можа прамая, якая не праходзіць ні праз адну з вяршынь трохвугольніка, перасякаць кожную яго старану? Чаму?

44*.[1] Дадзены чатыры пункты: A, B, C і D. Вядома, што пункты A, B, C ляжаць на адной прамой і пункты B, C, D таксама ляжаць на адной прамой. Дакажыце, што ўсе чатыры пункты ляжаць на адной прамой.

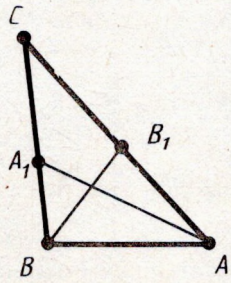
45*. Дадзены чатыры прамыя: a, b, c і d. Вядома, што прамыя a, b, c перасякаюцца ў адным пункце і прамыя b, c, d таксама перасякаюцца ў адным пункце. Дакажыце, што ўсе чатыры дадзеныя прамыя праходзяць праз адзін пункт.

46*. Пункты A, B, C, D не ляжаць на адной прамой. Вядома, што прамая AB перасякае адрэзак CD, а прамая CD перасякае адрэзак AB. Дакажыце, што адрэзкі AB і CD перасякаюцца.

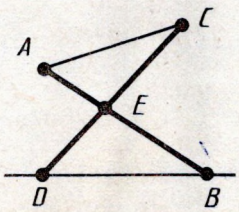
47*. Дадзены трохвугольнік ABC. На старане AC узяты пункт B_1, а на старане BC — пункт A_1. Дакажыце, што адрэзкі AA_1 і BB_1 перасякаюцца (рыс. 28).

48*. Адрэзкі AB і CD, якія не ляжаць на адной прамой, перасякаюцца ў пункце E. Дакажыце, што адрэзак AC не перасякае прамую BD (рыс. 29).

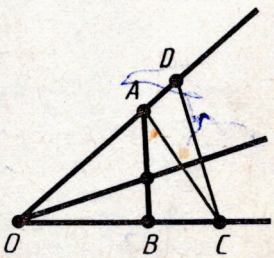
49*. Дакажыце, што калі прамень, які зыходзіць з вяршыні вугла, перасякае адрэзак AB з канцамі на старанах вугла, то ён перасякае: 1) адрэзак AC з канцамі на старанах



Рыс. 28



Рыс. 29



Рыс. 30

[1] Зорачкай (*) адзначаны задачы павышанай цяжкасці.

вугла; 2) любы адрэзак CD з канцамі на старанах вугла (рыс. 30).

50. Дакажыце, што дзве прамыя або паралельныя, або перасякаюцца ў адным пункце.

51*. Пункты A і C належаць прамой a. На паўпрамой CA адкладзены адрэзак CB, большы за адрэзак CA. 1) Які з трох пунктаў A, B, C ляжыць паміж двума другімі? Растлумачце адказ. 2) Дакажыце, што пункт A разбівае прамую a на дзве паўпрамыя: AB і AC.

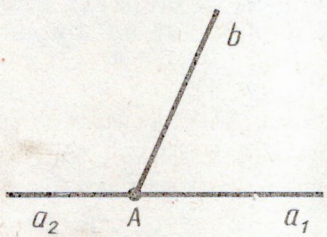
§ 2. СУМЕЖНЫЯ І ВЕРТЫКАЛЬНЫЯ ВУГЛЫ

14. СУМЕЖНЫЯ ВУГЛЫ

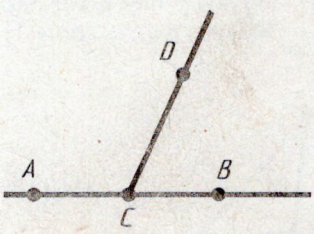
А з н а ч э н н е. Два вуглы называюцца *сумежнымі*, калі ў іх адна старана агульная, а другія стораны гэтых вуглоў з'яўляюцца дадатковымі паўпрамымі.

На рысунку 31 вуглы (a_1b) і (a_2b) сумежныя. У іх старана b агульная, а стораны a_1 і a_2 з'яўляюцца дадатковымі паўпрамымі.

Няхай C — пункт на прамой AB, які ляжыць паміж пунктамі A і B, а D — пункт, які не ляжыць на прамой AB (рыс. 32). Тады вуглы BCD і ACD сумежныя. У іх старана CD агульная. Стораны CA і CB з'яўляюцца дадатковымі паўпрамымі прамой AB, паколькі пункты A і B гэтых паўпрамых падзяляюцца пачатковым пунктам C.



Рыс. 31



Рыс. 32

Т э а р э м а 2.1. ***Сума сумежных вуглоў роўна 180°.***

Д а к а з. Няхай $\angle(a_1b)$ і $\angle(a_2b)$ — дадзеныя сумежныя вуглы (гл. рыс. 31). Прамень b праходзіць паміж старанамі a_1 і a_2 разгорнутага вугла. Таму сума вуглоў (a_1b) і (a_2b) роўна разгорнутаму вуглу, г. зн. 180°. Тэарэма даказана.

З тэарэмы 2.1 вынікае, што ***калі два вуглы роўныя, то сумежныя з імі вуглы роўныя.***

З тэарэмы 2.1 вынікае таксама, што ***калі вугал не разгорнуты, то яго градусная мера меншая за 180°.***

З а д а ч а (3). Знайдзіце сумежныя вуглы, калі адзін з іх у два разы большы за другі.

Р а ш э н н е. Абазначым градусную меру меншага з вуглоў праз x. Тады градусная мера большага вугла будзе $2x$. Сума вуглоў роўна 180°. Такім чынам,

$$x + 2x = 180,\ 3x = 180.$$

Адсюль $x = 60$. Значыць, нашы сумежныя вуглы роўны 60° і 120°.

Вугал, роўны 90°, называецца *прамым вуглом.*

З тэарэмы аб суме сумежных вуглоў вынікае, што ***вугал, сумежны з прамым вуглом, ёсць прамы вугал.***

Вугал, меншы за 90°, называецца *вострым вуглом.* Вугал, большы за 90° і меншы за 180°, называецца *тупым.*



Рыс. 33

Паколькі сума сумежных вуглоў роўна 180°, то вугал, сумежны з вострым, тупы, а вугал, сумежны з тупым, востры. На рысунку 33 паказаны тры віды вуглоў.

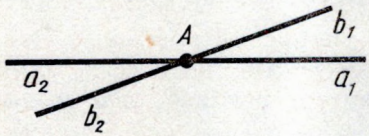
15. ВЕРТЫКАЛЬНЫЯ ВУГЛЫ

А з н а ч э н н е. Два вуглы называюцца *вертыкальнымі*, калі стораны аднаго вугла з'яўляюцца дадатковымі паўпрамымі старон другога.

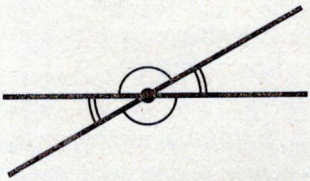
На рысунку 34 вуглы (a_1b_1) і (a_2b_2) вертыкальныя. Стораны a_2 і b_2 другога вугла з'яўляюцца дадатковымі паўпрамымі старон a_1 і b_1 першага вугла.

Тэарэма 2.2. ***Вертыкальныя вуглы роўныя.***

Доказ. Няхай (a_1b_1) і (a_2b_2) — дадзеныя вертыкальныя вуглы (гл. рыс. 34). Вугал (a_1b_2) з'яўляецца сумежным з вуглом (a_1b_1) і з вуглом (a_2b_2). Адсюль па тэарэме аб суме сумежных вуглоў заключаем, што кожны з вуглоў (a_1b_1) і (a_2b_2) дапаўняе вугал (a_1b_2) да 180°, г. зн. вуглы (a_1b_1) і (a_2b_2) роўныя. Тэарэма даказана.



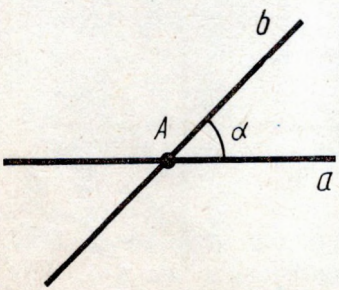
Рыс. 34



Рыс. 35

Задача (9). Сума двух вуглоў, якія атрымліваюцца пры перасячэнні дзвюх прамых, роўна 50°. Знайдзіце гэтыя вуглы.

Рашэнне. Два вуглы, якія атрымліваюцца пры перасячэнні дзвюх прамых, або сумежныя, або вертыкальныя (рыс. 35). Дадзеныя вуглы не могуць быць сумежнымі, паколькі іх сума роўна 50°, а сума сумежных вуглоў роўна 180°. Значыць, яны вертыкальныя. Паколькі вертыкальныя вуглы роўныя і па ўмове іх сума 50°, то кожны з вуглоў роўны 25°.



Рыс. 36

16. ПЕРПЕНДЫКУЛЯРНЫЯ ПРАМЫЯ

Няхай a і b прамыя, што перасякаюцца ў пункце A (рыс. 36). Кожная з гэтых прамых пунктам A дзеліцца на дзве паўпрамыя. Паўпрамыя адной прамой утвараюць з паўпрамымі другой прамой чатыры вуглы. Няхай α — адзін з гэтых

вуглоў. Тады любы з астатніх трох вуглоў будзе або сумежным з вуглом α, або вертыкальным з вуглом α. Адсюль вынікае, што калі адзін з вуглоў прамы, то астатнія вуглы таксама прамыя. У гэтым выпадку мы гаворым, што прамыя перасякаюцца пад прамым вуглом.

А з н а ч э н н е. Дзве прамыя называюцца *перпендыкулярнымі*, калі яны перасякаюцца пад прамым вуглом (рыс. 37).

Перпендыкулярнасць прамых абазначаецца значком $\perp$. Запіс $a \perp b$ чытаецца: «Прамая a перпендыкулярная прамой b».

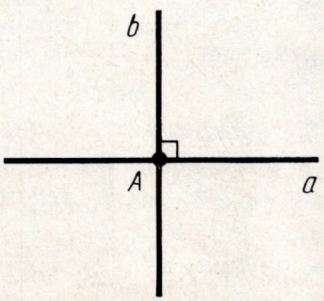
Т э а р э м а 2.3. ***Праз кожны пункт прамой можна правесці перпендыкулярную ёй прамую, і толькі адну.***

Д о к а з. Няхай a — дадзеная прамая і A — дадзены пункт на ёй. Абазначым праз a_1 адну з паўпрамых прамой a з пачатковым пунктам A (рыс. 38). Адкладзём ад паўпрамой a_1 вугал (a_1b_1), роўны 90°. Тады прамая, якая змяшчае прамень b_1, будзе перпендыкулярная прамой a.

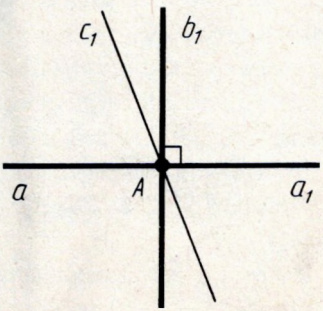
Дапусцім, што існуе другая прамая, якая таксама праходзіць праз пункт A і перпендыкулярная прамой a. Абазначым праз c_1 паўпрамую гэтай прамой, якая ляжыць у адной паўплоскасці з праменем b_1.

Вуглы (a_1b_1) і (a_1c_1), роўныя кожны 90°, адкладзены ў адну паўплоскасць ад паўпрамой a_1. Але ад паўпрамой a_1 ў дадзеную паўплоскасць можна адкласці толькі адзін вугал, роўны 90°. Таму не можа быць другой прамой, якая праходзіць праз пункт A і перпендыкулярная прамой a. Тэарэма даказана.

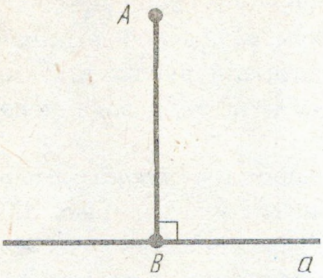
А з н а ч э н н е. *Перпендыкулярам* да дадзенай прамой называецца адрэзак прамой, перпендыкулярнай дадзенай, які мае адным са сваіх канцоў іх пункт перасячэння. Гэты канец адрэзка называецца *асновай* перпендыкуляра.



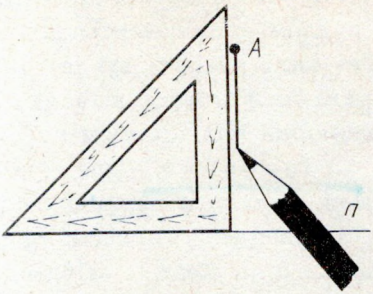
Рыс. 37



Рыс. 38



Рыс. 39



Рыс. 40

На рысунку 39 перпендыкуляр AB праведзены з пункта A да прамой a. Пункт B — аснова перпендыкуляра. Для пабудавання перпендыкуляра карыстаюцца чарцёжным вугольнікам (рыс. 40).

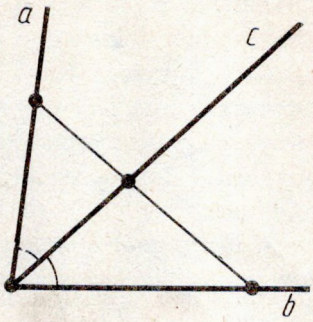
17. ДОКАЗ АД АДВАРОТНАГА

Спосаб доказу, які мы прымянілі ў тэарэме 2.3, называецца доказам ад адваротнага. Гэты спосаб доказу заключаецца ў тым, што мы спачатку робім дапушчэнне, адваротнае таму, што сцвярджаецца тэарэмай. Затым шляхам разважанняў, абапіраючыся на аксіёмы і даказаныя тэарэмы, прыходзім да вываду, які супярэчыць або ўмове тэарэмы, або адной з аксіём, або даказанай раней тэарэме. На гэтай аснове заключаем, што наша дапушчэнне было няправільным, а значыць, правільнае сцверджанне тэарэмы.

Растлумачым гэта на прыкладзе доказу тэарэмы 2.3. Тэарэмай сцвярджаецца, што праз кожны пункт прамой можна правесці толькі адну перпендыкулярную ёй прамую. Дапусціўшы, што такіх прамых можна правесці дзве, мы прыйшлі да вываду, што ад дадзенай паўпрамой у дадзеную паўплоскасць можна адкласці два вуглы з адной і той жа градуснай мерай (90°). А гэта супярэчыць аксіёме адкладвання вуглоў.

Згодна з гэтай аксіёмай ад дадзенай паўпрамой у дадзеную паўплоскасць можна адкласці толькі адзін вугал з дадзенай градуснай мерай.

18. БІСЕКТРЫСА ВУГЛА



Рыс. 41

А з н а ч э н н е[1]. *Бісектрысай* вугла называецца прамень, які выходзіць з яго вяршыні, праходзіць паміж яго старанамі і дзеліць вугал папалам.

На рысунку 41 вы бачыце вугал (ab). Прамень c выходзіць з вяршыні вугла, праходзіць паміж яго старанамі і дзеліць вугал папалам:

$$\angle(ac) = \angle(bc) = \frac{\angle(ab)}{2}.$$

З а д а ч а (17). Дакажыце, што бісектрыса вугла ўтварае з яго старанамі вуглы не большыя за 90°.

Р а ш э н н е. Як мы ведаем, градусная мера любога вугла не большая за 180°. Таму палавіна яе не большая за 90°.

19. ШТО ТРЭБА РАБІЦЬ, КАБ ДОБРА ПАСПЯВАЦЬ ПА ГЕАМЕТРЫІ

Пры вывучэнні геаметрыі няведанне чаго-небудзь з пройдзенага матэрыялу можа быць прычынай неразумення новага матэрыялу. Прывядзём прыклад.

Дапусцім, на ўроку настаўнік даказвае тэарэму аб роўнасці вертыкальных вуглоў. Як вы ведаеце, у гэтым доказе выкарыстоўваецца азначэнне сумежных вуглоў і тэарэма аб суме сумежных вуглоў. Калі вы не ведаеце, якія вуглы называюцца сумежнымі, не ведаеце тэарэмы аб суме сумежных вуглоў, то вы гэты доказ не зразумееце. У выніку гэты ўрок будзе для вас пустой стратай часу. І да вашага няведання сумежных вуглоў дабавіцца няведанне тэарэмы аб роўнасці вертыкальных вуглоў.

Таму, каб добра паспяваць па геаметрыі, трэба ведаць асноўныя вынікі вывучанага матэрыялу. А для гэтага трэба паўтараць пройдзены матэрыял па кантрольных пытаннях.

Паўтараць пройдзены матэрыял па кантрольных пытаннях можна так. Прачытайце пытанне. Усведаміце яго сабе. Калі

[1] У далейшым слова «азначэнне» пісаць не будзем, а вызначаемае паняцце будзем вылучаць *курсівам*.

патрабуецца даць азначэнне якой-небудзь фігуры, мысленна дайце такое азначэнне. Карысна зрабіць ад рукі чарцёж вызначаемай фігуры. Калі ў пытанні гутарка ідзе аб тэарэме, сфармулюйце яе, усведаміце сабе, у чым умова і заключэнне гэтай тэарэмы. Зрабіце ад рукі чарцёж, які ілюструе змест тэарэмы. Доказ тэарэмы пры кожным паўтарэнні даваць неабавязкова.

Паўтарайце пройдзены матэрыял кожны раз, калі пры вывучэнні новага матэрыялу вы выяўляеце няведанне чаго-небудзь.

КАНТРОЛЬНЫЯ ПЫТАННІ

1. Якія вуглы называюцца сумежнымі?
2. Дакажыце, што сума сумежных вуглоў роўна 180°.
3. Дакажыце, што калі два вуглы роўныя, то сумежныя з імі вуглы таксама роўныя.
4. Які вугал называецца прамым (вострым, тупым)?
5. Дакажыце, што вугал, сумежны з прамым, ёсць прамы вугал.
6. Якія вуглы называюцца вертыкальнымі?
7. Дакажыце, што вертыкальныя вуглы роўныя.
8. Дакажыце, што калі пры перасячэнні дзвюх прамых адзін з вуглоў прамы, то астатнія тры вуглы таксама прамыя.
9. Якія прамыя называюцца перпендыкулярнымі? Які значок выкарыстоўваецца для абазначэння перпендыкулярнасці прамых?
10. Дакажыце, што праз любы пункт прамой можна правесці перпендыкулярную да яе прамую, і толькі адну.
11. Што такое перпендыкуляр да прамой?
12. Растлумачце, у чым заключаецца доказ ад адваротнага.
13. Што называецца бісектрысай вугла?

ЗАДАЧЫ

1. Знайдзіце вуглы, сумежныя з вугламі: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°; 4) 90°.
2. Ці могуць два сумежныя вуглы быць абодва: 1) вострымі; 2) тупымі; 3) прамымі? Абгрунтуйце адказ.
3. Знайдзіце сумежныя вуглы, калі адзін з іх у два разы большы за другі.
4. Знайдзіце сумежныя вуглы, калі: 1) адзін з іх на 30° большы за другі; 2) іх рознасць роўна 40°; 3) адзін з іх у 3 разы меншы за другі; 4) яны роўныя.

5. Які вугал утвараюць гадзінная і мінутная стрэлкі гадзінніка, калі яны паказваюць: 1) 6 г; 2) 3 г; 3) 4 г?

6. Знайдзіце сумежныя вуглы, калі іх градусныя меры адносяцца як: 1) 2 : 3; 2) 3 : 7; 3) 11 : 25; 4) 22 : 23.

7. Адзін з вуглоў, якія атрымліваюцца пры перасячэнні дзвюх прамых, роўны 30°. Чаму роўны астатнія вуглы?

8. Чаму роўны вугал, калі два сумежныя з ім вуглы складаюць у суме 100°?

9. Сума двух вуглоў, якія атрымліваюцца пры перасячэнні дзвюх прамых, роўна 50°. Знайдзіце гэтыя вуглы.

10. Адзін з вуглоў, якія атрымліваюцца пры перасячэнні дзвюх прамых, у 4 разы большы за другі. Знайдзіце гэтыя вуглы.

11. Адзін з вуглоў, якія атрымліваюцца пры перасячэнні дзвюх прамых, на 50° меншы за другі. Знайдзіце гэтыя вуглы.

12. Знайдзіце вуглы, якія атрымліваюцца пры перасячэнні дзвюх прамых, калі сума трох з гэтых вуглоў роўна 270°.

13. Дакажыце, што калі роўныя адзін аднаму тры з чатырох вуглоў, якія атрымліваюцца пры перасячэнні дзвюх прамых, то прамыя перпендыкулярныя.

14. Як з дапамогай лінейкі праверыць, ці з'яўляецца прамым вугал у чарцёжным вугольніку (рыс. 42)?

15. Чаму роўны вугал паміж бісектрысай і стараной дадзенага вугла, роўнага: 1) 30°; 2) 52°; 3) 172°?

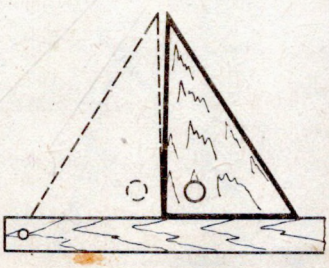
16. Знайдзіце вугал, калі яго бісектрыса ўтварае са стараной вугал, роўны: 1) 60°; 2) 75°; 3) 89°.

17. Дакажыце, што бісектрыса вугла ўтварае з яго старанамі вуглы не большыя за 90°.

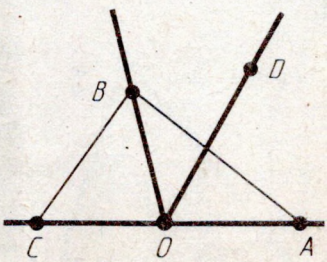
18*. Дакажыце, што калі прамень зыходзіць з вяршыні вугла і ўтварае з яго старанамі роўныя вострыя вуглы, то ён з'яўляецца бісектрысай вугла.

19. Знайдзіце вугал паміж бісектрысамі сумежных вуглоў.

20. Дакажыце, што бісектрысы вертыкальных вуглоў ляжаць на адной прамой.



Рыс. 42



Рыс. 43

21. Знайдзіце вугал паміж бісектрысай і прадаўжэннем адной са старон дадзенага вугла, роўнага: 1) 50°; 2) 90°; 3) 150°.

22*. З вяршыні O сумежных вуглоў AOB і COB праведзены прамень OD у паўплоскасць, дзе праходзіць агульная старана вуглоў OB (рыс. 43). Дакажыце, што прамень OD перасякае або адрэзак AB, або адрэзак BC. Які з адрэзкаў перасякае прамень OD, калі вугал AOD меншы (большы) за вугал AOB? Растлумачце адказ.

23. З вяршыні разгорнутага вугла (aa_1) у адну паўплоскасць праведзены прамені b і c. Чаму роўны вугал (bc), калі: 1) $\angle(ab) = 50°$, $\angle(ac) = 70°$; 2) $\angle(a_1b) = 50°$, $\angle(ac) = 70°$; 3) $\angle(ab) = 60°$, $\angle(a_1c) = 30°$?

24. З вяршыні разгорнутага вугла (aa_1) праведзены прамені b і c у адну паўплоскасць. Вядома, што $\angle(ab) = 60°$, а $\angle(ac) = 30°$. Знайдзіце вуглы (a_1b), (a_1c) і (bc).

25. Ад паўпрамой AB у розныя паўплоскасці адкладзены вуглы BAC і BAD. Знайдзіце вугал CAD, калі: 1) $\angle BAC = 80°$, $\angle BAD = 170°$; 2) $\angle BAC = 87°$, $\angle BAD = 98°$; 3) $\angle BAC = 140°$, $\angle BAD = 30°$; 4) $\angle BAC = 60°$, $\angle BAD = 70°$.

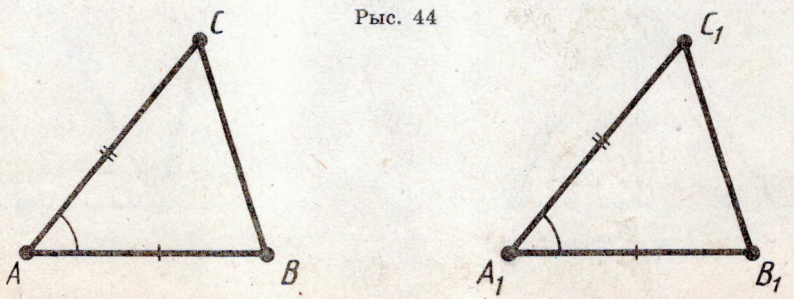
26*. Дадзены тры прамені a, b, c з агульным пачатковым пунктам. Вядома, што $\angle(ab) = \angle(ac) = \angle(bc) = 120°$. 1) Ці праходзіць які-небудзь з гэтых прамяняў паміж старанамі вугла, які ўтвораны двума другімі прамянямі? 2) Ці можа прамая перасякаць усе тры дадзеныя прамені? Растлумачце адказ.

§ 3. ПРЫЗНАКІ РОЎНАСЦІ ТРОХВУГОЛЬНІКАЎ

20. ПЕРШЫ ПРЫЗНАК РОЎНАСЦІ ТРОХВУГОЛЬНІКАЎ

Т э а р э м а 3.1 (прызнак роўнасці трохвугольнікаў па дзвюх старанах і вуглу паміж імі). ***Калі дзве староны і вугал паміж імі аднаго трохвугольніка роўныя адпаведна дзвюм старанам***

Рыс. 44



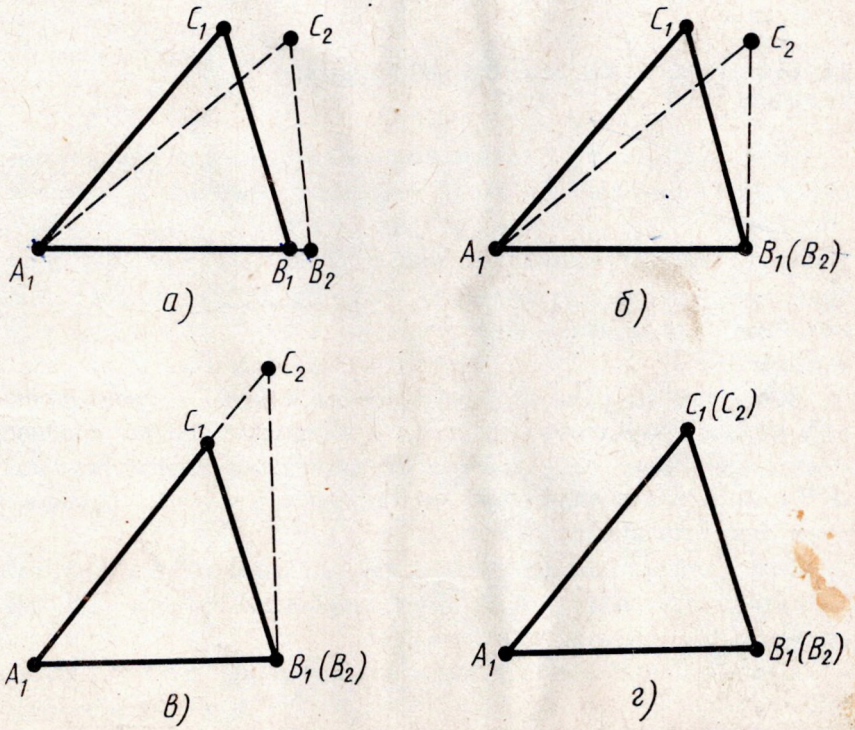
і вуглу паміж імі другога трохвугольніка, то такія трохвугольнікі роўныя.

Доказ. Няхай у трохвугольніках ABC і $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ (рыс. 44). Дакажам, што трохвугольнікі роўныя.

Няхай $A_1B_2C_2$ — трохвугольнік, роўны трохвугольніку ABC, з вяршыняй B_2 на прамені A_1B_1 і вяршыняй C_2 у той жа паўплоскасці адносна прамой A_1B_1, дзе ляжыць вяршыня C_1 (рыс. 45, *а*).

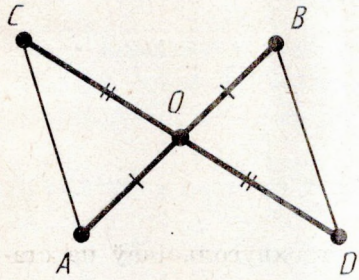
Паколькі $A_1B_1 = A_1B_2$, то вяршыня B_2 супадае з вяршыняй B_1 (рыс. 45, *б*). Паколькі $\angle B_1A_1C_1 = \angle B_2A_1C_2$, то прамень A_1C_2 супадае з праменем A_1C_1 (рыс. 45, *в*). Паколькі $A_1C_1 = A_1C_2$, то вяршыня C_2 супадае з вяршыняй C_1 (рыс. 45, *г*).

Такім чынам, трохвугольнік $A_1B_1C_1$ супадае з трохвугольнікам $A_1B_2C_2$, значыць, роўны трохвугольніку ABC. Тэарэма даказана.



Рыс. 45

Задача (1). Адрэзкі AB і CD перасякаюцца ў пункце O, які з'яўляецца сярэдзінай кожнага з іх. Чаму роўны адрэзак BD, калі адрэзак $AC = 10$ м?



Рыс. 46

Рашэнне. Трохвугольнікі AOC і BOD роўныя па першаму прызнаку роўнасці трохвугольнікаў (рыс. 46). У іх вуглы AOC і BOD роўныя як вертыкальныя, а $OA = OB$ і $OC = OD$ таму, што пункт O з'яўляецца сярэдзінай адрэзкаў AB і CD. З роўнасці трохвугольнікаў AOC і BOD вынікае роўнасць іх старон AC і BD. А паколькі па ўмове задачы $AC = 10$ м, то і $BD = 10$ м.

21. ВЫКАРЫСТАННЕ АКСІЁМ ПРЫ ДОКАЗЕ ТЭАРЭМ

Як мы ведаем, пры доказе тэарэм дазваляецца карыстацца аксіёмамі і даказанымі раней тэарэмамі. Звычайна ў доказе спасылаюцца не на нумар аксіёмы па спісу, а на яе змест. Менавіта такім чынам мы рабілі ў доказе першага прызнака роўнасці трохвугольнікаў (тэарэма 3.1). Разбяром яшчэ раз гэты доказ, указваючы аксіёмы, якія ў ім выкарыстоўваюцца.

Доказ пачынаецца словамі: «Няхай $A_1B_2C_2$ — трохвугольнік, роўны трохвугольніку ABC, з вяршыняй B_2 на прамені A_1B_1 і вяршыняй C_2 у той жа паўплоскасці адносна прамой A_1B_1, дзе ляжыць вяршыня C_1». Такі трохвугольнік, як мы ведаем, існуе па аксіёме VIII.

Далей сцвярджаецца супадзенне вяршынь B_1 і B_2 на той падставе, што $A_1B_1 = A_1B_2$. Тут выкарыстоўваецца аксіёма адкладвання адрэзкаў (аксіёма VI).

Затым сцвярджаецца супадзенне прамяняў A_1C_2 і A_1C_1 на той падставе, што $\angle B_1A_1C_1 = \angle B_2A_1C_2$. Тут выкарыстоўваецца аксіёма адкладвання вуглоў (аксіёма VII).

Нарэшце, сцвярджаецца супадзенне вяршынь C_1 і C_2, паколькі $A_1C_1 = A_2C_2$. Тут зноў выкарыстоўваецца аксіёма VI.

Мы бачым, што дадзены доказ тэарэмы 3.1 абапіраецца толькі на аксіёмы.

22. ДРУГІ ПРЫЗНАК РОЎНАСЦІ ТРОХВУГОЛЬНІКАЎ

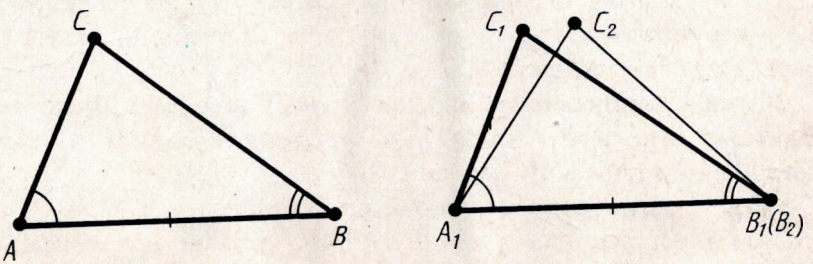
Тэарэма 3.2 (прызнак роўнасці трохвугольнікаў па старане і прылеглых да яе вуглах). ***Калі старана і прылеглыя да яе вуглы аднаго трохвугольніка роўны адпаведна старане і прылеглым да яе вуглам другога трохвугольніка, то такія трохвугольнікі роўныя.***

Доказ. Няхай ABC і $A_1B_1C_1$ — два трохвугольнікі, у якіх $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$ і $\angle B = \angle B_1$ (рыс. 47). Дакажам, што трохвугольнікі роўныя.

Няхай $A_1B_2C_2$ — трохвугольнік, роўны трохвугольніку ABC, з вяршыняй B_2 на прамені A_1B_1 і з вяршыняй C_2 у той жа паўплоскасці адносна прамой A_1B_1, дзе ляжыць вяршыня C_1.

Паколькі $A_1B_2 = A_1B_1$, то вяршыня B_2 супадае з вяршыняй B_1. Паколькі $\angle B_1A_1C_2 = \angle B_1A_1C_1$ і $\angle A_1B_1C_2 = \angle A_1B_1C_1$, то прамень A_1C_2 супадае з праменем A_1C_1, а прамень B_1C_2 супадае з праменем B_1C_1. Адсюль вынікае, што вяршыня C_2 супадае з вяршыняй C_1.

Такім чынам, трохвугольнік $A_1B_1C_1$ супадае з трохвугольнікам $A_1B_2C_2$, а значыць, роўны трохвугольніку ABC. Тэарэма даказана.



Рыс. 47

23. РАЎНАБЕДРАНЫ ТРОХВУГОЛЬНІК

Трохвугольнік называецца *раўнабедраным*, калі ў яго дзве стараны роўныя. Гэтыя роўныя стораны называюцца *бакавымі старанамі*, а трэцяя старана называецца *асновай* трохвугольніка.

На рысунку 48 паказаны раўнабедраны трохвугольнік ABC. У яго бакавыя стораны AC і BC, а аснова AB.

Тэарэма 3.3. (уласцівасць вуглоў раўнабедранага трохвугольніка). ***У раўнабедраным трохвугольніку вуглы пры аснове роўныя.***

Доказ. Няхай ABC — раўнабедраны трохвугольнік з асновай AB (рыс. 48). Дакажам, што ў яго $\angle A = \angle B$.

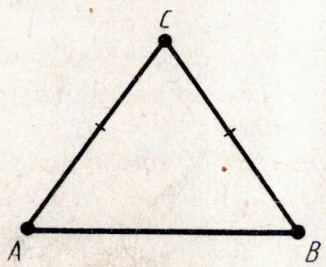
Трохвугольнік CAB роўны трохвугольніку CBA па першаму прызнаку роўнасці трохвугольнікаў. Сапраўды, $CA = CB$, $CB = CA$, $\angle C = \angle C$. З роўнасці трохвугольнікаў вынікае, што $\angle A = \angle B$. Тэарэма даказана.

Трохвугольнік, у якога ўсе стораны роўныя, называецца *роўнастароннім*.

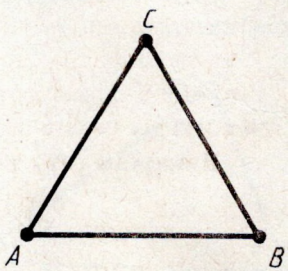
Задача (12). Дакажыце, што ў роўнастаронняга трохвугольніка ўсе вуглы роўныя.

Рашэнне. Няхай ABC — дадзены трохвугольнік з роўнымі старанамі: $AB = BC = CA$ (рыс. 49). Паколькі $AB = BC$, то гэты трохвугольнік раўнабедраны з асновай AC. Па тэарэме 3.3 $\angle C = \angle A$. Паколькі $BC = CA$, то трохвугольнік ABC раўнабедраны з асновай AB. Па тэарэме 3.3 $\angle A = \angle B$.

Такім чынам, $\angle C = \angle A = \angle B$, г. зн. усе вуглы трохвугольніка роўныя.

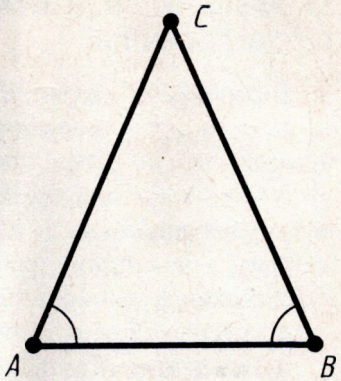


Рыс. 48



Рыс. 49

24. АДВАРОТНАЯ ТЭАРЭМА



Рыс. 50

Тэарэма 3.4 (прызнак раўнабедранага трохвугольніка). ***Калі ў трохвугольніку два вуглы роўныя, то ён раўнабедраны.***

Доказ. Няхай ABC — трохвугольнік, у якога $\angle A = \angle B$ (рыс. 50). Дакажам, што ён раўнабедраны з асновай AB.

Трохвугольнік ABC роўны трохвугольніку BAC па другому прызнаку роўнасці трохвугольнікаў. Сапраўды, $AB = BA$, $\angle B = \angle A$, $\angle A = \angle B$. З роўнасці трохвугольнікаў вынікае, што $AC = BC$.

Значыць, па азначэнню трохвугольнік ABC — раўнабедраны. Тэарэма даказана.

Тэарэма 3.4 называецца *адваротнай* тэарэме 3.3. Заключэнне тэарэмы 3.3 з'яўляецца ўмовай тэарэмы 3.4. А ўмова тэарэмы 3.3 з'яўляецца заключэннем тэарэмы 3.4. Не ўсякая тэарэма мае адваротную, г. зн. калі дадзеная тэарэма правільная, то адваротная тэарэма можа быць няправільнай. Растлумачым гэта на прыкладзе тэарэмы аб вертыкальных вуглах. Гэту тэарэму можна сфармуляваць так: калі два вуглы вертыкальныя, то яны роўныя. Адваротная ёй тэарэма была б такой: калі два вуглы роўныя, то яны вертыкальныя. Але два роўныя вуглы зусім не абавязаны быць вертыкальнымі.

Задача (16). Сфармулюйце і дакажыце тэарэму, адваротную сцверджанню задачы 12.

Рашэнне. У задачы 12 умова заключаецца ў тым, што трохвугольнік роўнастаронні, а заключэнне — у тым, што ўсе вуглы трохвугольніка роўныя. Таму адваротная тэарэма павінна фармулявацца так. Калі ў трохвугольніка ўсе вуглы роўныя, то ён роўнастаронні.

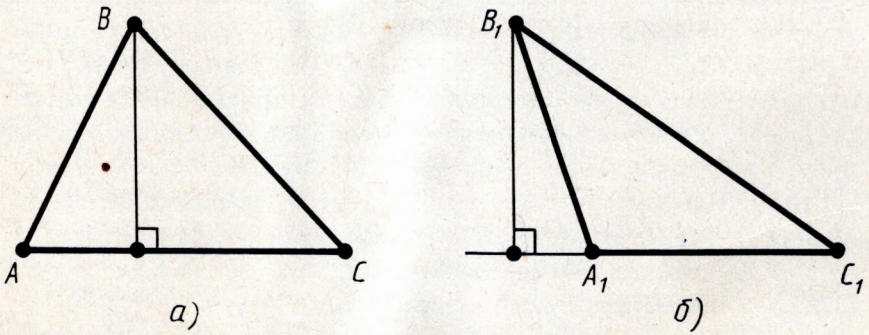
Дакажам гэту тэарэму. Няхай ABC — трохвугольнік з роўнымі вугламі: $\angle A = \angle B = \angle C$. Паколькі $\angle A = \angle B$, то па тэарэме 3.4 $AC = CB$. Паколькі $\angle B = \angle C$, то па тэарэме 3.4 $AC = AB$. Такім чынам, $AB = AC = CB$, г. зн. усе стораны трохвугольніка роўныя. Значыць, па азначэнню трохвугольнік ABC — роўнастаронні.

25. ВЫШЫНЯ, МЕДЫЯНА І БІСЕКТРЫСА ТРОХВУГОЛЬНІКА

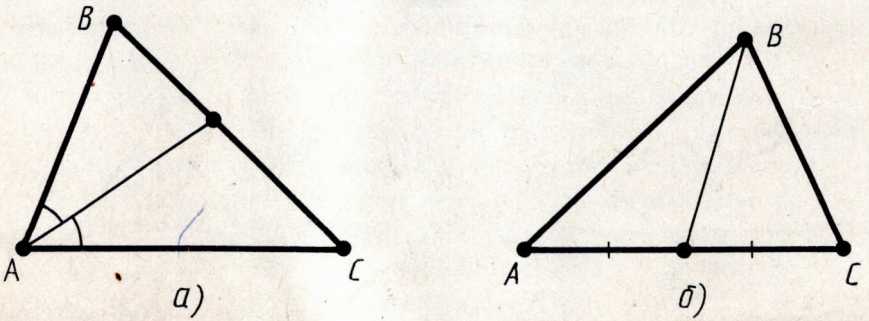
Вышынёй трохвугольніка, апушчанай з дадзенай вяршыні, называецца перпендыкуляр, праведзены з гэтай вяршыні да прамой, што змяшчае процілеглую старану трохвугольніка. На рысунку 51 вы бачыце два трохвугольнікі, у якіх праведзены вышыні з вяршынь B і B_1. На рысунку 51, *а* аснова вышыні ляжыць на старане трохвугольніка, на рысунку 51, *б* — на прадаўжэнні стараны трохвугольніка.

Бісектрысай трохвугольніка, праведзенай з дадзенай вяршыні, называецца адрэзак бісектрысы вугла трохвугольніка, які злучае гэту вяршыню з пунктам на процілеглай старане (рыс. 52, *а*).

Медыянай трохвугольніка, праведзенай з дадзенай вяршыні, называецца адрэзак, які злучае гэту вяршыню з сярэдзінай процілеглай стараны трохвугольніка (рыс. 52, *б*).



Рыс. 51



Рыс. 52

26. УЛАСЦІВАСЦЬ МЕДЫЯНЫ РАЎНАБЕДРАНАГА ТРОХВУГОЛЬНІКА

Т э а р э м а 3.5 (уласцівасць медыяны раўнабедранага трохвугольніка). ***У раўнабедраным трохвугольніку медыяна, праведзеная да асновы, з'яўляецца бісектрысай і вышынёй.***

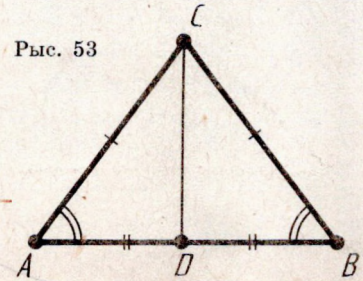
Д о к а з. Няхай ABC — дадзены раўнабедраны трохвугольнік з асновай AB і CD — медыяна, праведзеная да асновы (рыс. 53).

Трохвугольнікі CAD і CBD роўныя па першаму прызнаку роўнасці трохвугольнікаў. (У іх стораны AC і BC роўныя, таму што трохвугольнік ABC раўнабедраны. Вуглы CAD і CBD роўныя як вуглы пры аснове раўнабедранага трохвугольніка. Стораны AD і BD роўныя, таму што D — сярэдзіна адрэзка AB.) З роўнасці трохвугольнікаў вынікае роўнасць вуглоў: $\angle ACD = \angle BCD$, $\angle ADC = \angle BDC$. Паколькі вуглы ACD і BCD роўныя, то CD — бісектрыса. Паколькі вуглы ADC і BDC сумежныя і роўныя, то яны прамыя, таму CD — вышыня трохвугольніка. Тэарэма даказана.

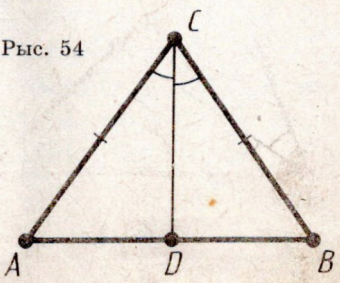
З а д а ч а (28). Дакажыце, што бісектрыса раўнабедранага трохвугольніка, праведзеная з вяршыні, процілеглай аснове, з'яўляецца медыянай і вышынёй.

Р а ш э н н е. Няхай ABC — раўнабедраны трохвугольнік з асновай AB і CD — яго бісектрыса (рыс. 54). Трохвугольнікі ACD і BCD роўныя па першаму прызнаку. У іх старана CD агульная; стораны AC і BC роўныя як бакавыя стораны раўнабедранага трохвугольніка, а вуглы пры вяршыні C роўныя таму, што CD — бісектрыса. З роўнасці трохвугольнікаў вынікае роўнасць іх старон AD і BD. Значыць, CD — медыяна трохвугольніка ABC. А па ўласцівасці медыяны раўнабедранага трохвугольніка яна з'яўляецца і вышынёй.

Рыс. 53



Рыс. 54



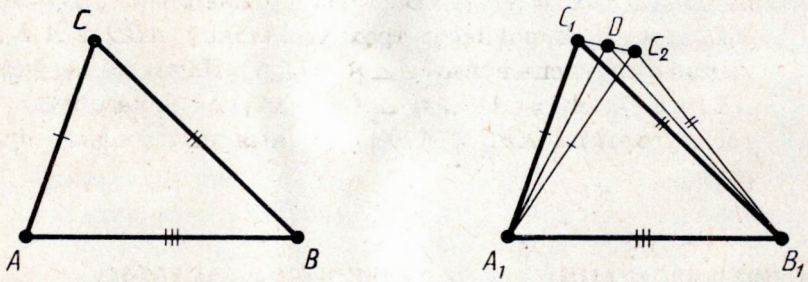
27. ТРЭЦІ ПРЫЗНАК РОЎНАСЦІ ТРОХВУГОЛЬНІКАЎ

Тэарэма 3.6 (прызнак роўнасці трохвугольнікаў па трох старанах). ***Калі тры стараны аднаго трохвугольніка роўныя адпаведна тром старанам другога трохвугольніка, то такія трохвугольнікі роўныя.***

Доказ. Няхай ABC і $A_1B_1C_1$ — два трохвугольнікі, у якіх $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ (рыс. 55). Патрабуецца даказаць, што трохвугольнікі роўныя.

Дапусцім, трохвугольнікі не роўныя. Тады ў іх $\angle A \neq \angle A_1$, $\angle B \neq \angle B_1$, $\angle C \neq \angle C_1$. Інакш яны былі б роўныя па першаму прызнаку.

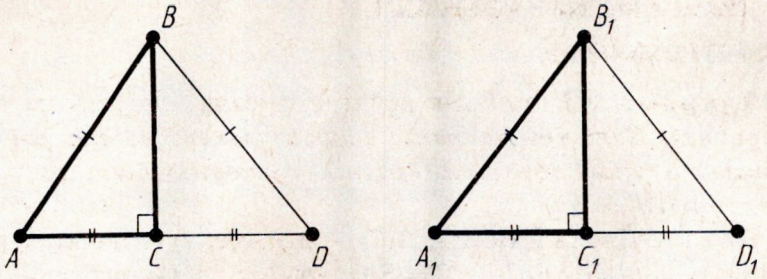
Няхай $A_1B_1C_2$ — трохвугольнік, роўны трохвугольніку ABC, у якога вяршыня C_2 ляжыць у адной паўплоскасці з вяршыняй C_1 адносна прамой A_1B_1 (гл. рыс. 55).



Рыс. 55

Няхай D — сярэдзіна адрэзка C_1C_2. Трохвугольнікі $A_1C_1C_2$ і $B_1C_1C_2$ — раўнабедраныя з агульнай асновай C_1C_2. Таму іх медыяны A_1D і B_1D з'яўляюцца вышынямі. Такім чынам, прамыя A_1D і B_1D перпендыкулярныя прамой C_1C_2. Прамыя A_1D і B_1D не супадаюць, паколькі пункты A_1, B_1, D не ляжаць на адной прамой. Але праз пункт D прамой C_1C_2 можна правесці толькі адну перпендыкулярную ёй прамую. Мы прыйшлі да супярэчнасці. Тэарэма даказана.

Задача (29). У трохвугольнікаў ABC і $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$. Дакажыце, што $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.



Рыс. 56

Р а ш э н н е. Няхай ABC і $A_1B_1C_1$ — дадзеныя трохвугольнікі (рыс. 56). Пабудуем трохвугольнік CBD, роўны трохвугольніку CBA, і трохвугольнік $C_1D_1B_1$, роўны трохвугольніку $C_1A_1B_1$.

Трохвугольнікі ABD і $A_1B_1D_1$ роўныя па трэцяму прызнаку. У іх $AB = A_1B_1$ па ўмове задачы; $AD = A_1D_1$, паколькі $AC = A_1C_1$; $BD = B_1D_1$, паколькі $BD = AB$, $B_1D_1 = A_1B_1$. З роўнасці трохвугольнікаў ABD і $A_1B_1D_1$ вынікае роўнасць вуглоў: $\angle A = \angle A_1$. Паколькі па ўмове $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, а $\angle A = \angle A_1$ па даказанаму, то трохвугольнікі ABC і $A_1B_1C_1$ роўныя па першаму прызнаку.

28. ЯК РЫХТАВАЦЦА ПА ПАДРУЧНІКУ САМАСТОЙНА

Дапусцім, па якой-небудзь прычыне, напрыклад па хваробе, вы не былі на ўроку. Тады матэрыял гэтага ўрока вам давядзецца вывучыць самастойна па падручніку. Тэкст падручніка трэба чытаць не спяшаючыся, па сказах, не пераходзячы да наступнага сказа, не зразумеўшы сэнсу папярэдняга. Разгледзім канкрэтны прыклад — доказ трэцяга прызнака роўнасці трохвугольнікаў. Такім чынам, чытаем тэкст падручніка:

«Калі тры стараны аднаго трохвугольніка роўныя адпаведна тром старанам другога трохвугольніка...»

Каб зразумець сэнс гэтага сказа, трэба ведаць: што такое трохвугольнік, яго стораны і роўнасць старон. Вы ўсё гэта ведаеце, таму сэнс прачытанага сказа вам зразумелы. Чытаем далей: «...то такія трохвугольнікі роўныя».

Каб зразумець сэнс гэтага сказа, трэба ведаць, якія трох-

вугольнікі называюцца роўнымі. Але вы і гэта ведаеце. Такім чынам, сэнс тэарэмы вам зразумелы. Чытаем доказ.

Доказ. «Няхай ABC і $A_1B_1C_1$ — два трохвугольнікі, у якіх $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ (гл. рыс. 55). Патрабуецца даказаць, што трохвугольнікі роўныя».

Тут усё зразумела. Абазначаюцца трохвугольнікі, якія задавальняюць умове тэарэмы і роўнасць якіх трэба даказаць.

«Дапусцім, трохвугольнікі не роўныя».

Вы бачыце, што робіцца меркаванне, процілеглае сцвярджанню тэарэмы. Значыць, у ходзе далейшага разважання мы павінны прыйсці да супярэчнасці (доказ ад адваротнага).

«Тады ў іх $\angle A \neq \angle A_1$, $\angle B \neq \angle B_1$, $\angle C \neq C_1$. Інакш яны былі б роўныя па першаму прызнаку».

Успомніце першы прызнак роўнасці трохвугольнікаў. Пераканайцеся ў тым, што калі выканана хаця б адна з роўнасцей $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, то трохвугольнікі ABC і $A_1B_1C_1$ роўныя, а гэта супярэчыць зробленаму меркаванню.

«Няхай $A_1B_1C_2$ — трохвугольнік, роўны трохвугольніку ABC, у якога вяршыня C_2 ляжыць у адной паўплоскасці з вяршыняй C_1 адносна прамой A_1B_1 (гл. рыс. 55)».

Тут усё зразумела. Гэтай фразай пачынаўся доказ і першага і другога прызнакаў.

«Няхай D — сярэдзіна адрэзка C_1C_2.

Вы ведаеце, што такое сярэдзіна адрэзка.

«Трохвугольнікі $A_1C_1C_2$ і $B_1C_1C_2$ раўнабедраныя з агульнай асновай C_1C_2».

Каб зразумець сэнс гэтага сцвярджання, трэба ведаць, які трохвугольнік называецца раўнабедраным і якая яго старана называецца асновай.

«Таму іх медыяны A_1D і B_1D з'яўляюцца вышынямі».

Сэнс гэтага сказа вам зразумелы. Вы ведаеце, што такое медыяна і вышыня, і ведаеце ўласцівасці медыяны раўнабедранага трохвугольніка.

«Значыць, прамыя A_1D і B_1D перпендыкулярныя прамой C_1C_2».

Зразумела. «Прамыя A_1D і B_1D не супадаюць, паколькі пункты A_1B_1D не ляжаць на адной прамой».

Зразумела. Калі б пункт D ляжаў на прамой A_1B_1, то пункты C_1 і C_2 былі б у розных паўплоскасцях адносна прамой A_1B_1.

«Але праз пункт D прамой C_1C_2 можна правесці толькі адну перпендыкулярную ёй прамую».

Зразумела. Вы ведаеце такую тэарэму.

«Мы прыйшлі да супярэчнасці».

Зразумела.

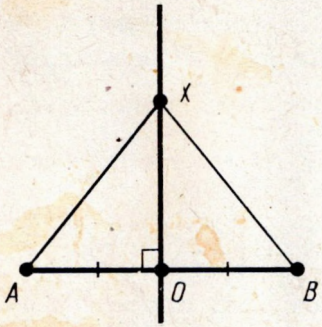
Тэарэма даказана».

КАНТРОЛЬНЫЯ ПЫТАННІ

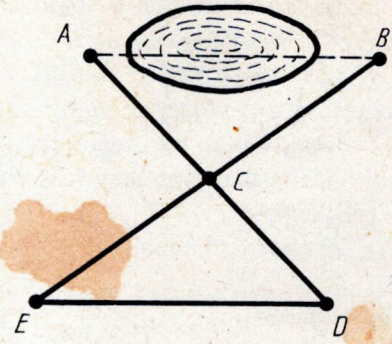
1. Дакажыце першы прызнак роўнасці трохвугольнікаў. Якія аксіёмы выкарыстоўваюцца пры доказе тэарэмы 3.1?
2. Сфармулюйце і дакажыце другі прызнак роўнасці трохвугольнікаў.
3. Які трохвугольнік называецца раўнабедраным? Якія стораны раўнабедранага трохвугольніка называюцца бакавымі старанамі? Якая старана называецца асновай?
4. Дакажыце, што ў раўнабедраным трохвугольніку вуглы пры аснове роўныя.
5. Які трохвугольнік называецца роўнастароннім?
6. Дакажыце, што калі ў трохвугольніку два вуглы роўныя, то ён раўнабедраны.
7. Растлумачце, што такое адваротная тэарэма. Прывядзіце прыклад. Ці для кожнай тэарэмы правільная адваротная?
8. Што такое вышыня трохвугольніка?
9. Што такое бісектрыса трохвугольніка?
10. Што такое медыяна трохвугольніка?
11. Дакажыце, што ў раўнабедраным трохвугольніку медыяна, праведзеная да асновы, з'яўляецца бісектрысай і вышынёй.
12. Дакажыце трэці прызнак роўнасці трохвугольнікаў.

ЗАДАЧЫ

1. Адрэзкі AB і CD перасякаюцца ў пункце O, які з'яўляецца сярэдзінай кожнага з іх. Чаму роўны адрэзак BD, калі адрэзак $AC = 10$ м?
2. Праз сярэдзіну O адрэзка AB праведзена прамая, перпенды-



Рыс. 57

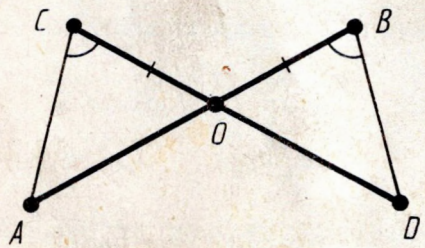


Рыс. 58

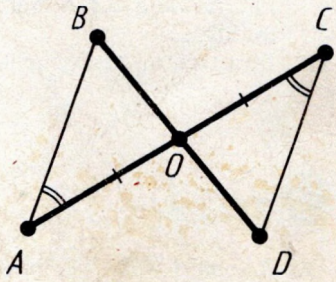
кулярная прамой AB (рыс. 57). Дакажыце, што кожны пункт X гэтай прамой аднолькава аддалены ад пунктаў A і B.

3. На старане AB трохвугольніка ABC узяты пункт D, а на старане A_1B_1 трохвугольніка $A_1B_1C_1$ узяты пункт D_1. Вядома, што трохвугольнікі ADC і $A_1D_1C_1$ роўныя і адрэзкі DB і D_1B_1 роўныя. Дакажыце роўнасць трохвугольнікаў ABC і $A_1B_1C_1$.

4. Каб вымераць на мясцовасці адлегласць паміж двума пунктамі A і B, паміж якімі нельга прайсці па прамой (рыс. 58), выбіраюць такі пункт C, з якога можна прайсці і да пункта A, і да пункта B і з якога відаць абодва гэтыя пункты. Пратычкоўваюць[1] адлегласці AC і BC, прадаўжаюць іх за пункт C і адмяраюць $CD = AC$ і $EC = CB$. Тады адрэзак ED роўны шукаемай адлегласці. Растлумачце чаму.



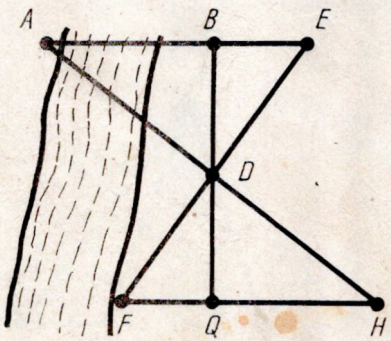
Рыс. 59



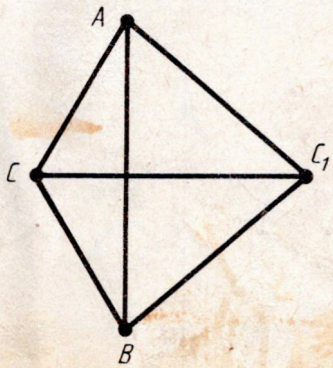
Рыс. 60

[1] Адзначаюць напрамак шастамі-тычкамі.

5. Адрэзкі AB і CD перасякаюцца ў пункце O (рыс. 59). Дакажыце роўнасць трохвугольнікаў ACO і DBO, калі вядома, што вугал ACO роўны вуглу DBO і $BO = CO$.
6. Адрэзкі AC і BD перасякаюцца ў пункце O (рыс. 60). Дакажыце роўнасць трохвугольнікаў BAO і DCO, калі вядома, што вугал BAO роўны вуглу DCO і $AO = CO$.
7*. Дакажыце роўнасць трохвугольнікаў па медыяне і вуглах, на якія медыяна разбівае вугал трохвугольніка.
8. Каб вымераць на мясцовасці адлегласць паміж двума пунктамі A і B, з якіх адзін (пункт A) недаступны, пратычкоўваюць напрамак адрэзка AB (рыс. 61) і на яго прадаўжэнні адмяраюць адвольны адрэзак BE. Выбіраюць на мясцовасці пункт D, з якога відаць пункт A і можна прайсці да пунктаў B і E. Пратычкоўваюць прамыя BDQ і EDF і адмяраюць $FD = DE$ і $DQ = BD$. Затым ідуць па прамой FQ, гледзячы на пункт A, пакуль не знойдуць пункт H, які ляжыць на прамой AD. Тады HQ роўна шукаемай адлегласці. Дакажыце.
9. Перыметр (сума даўжынь старон) раўнабедранага трохвугольніка роўны 1 м, а аснова роўна 0,4 м. Знайдзіце даўжыню бакавой стараны.
10. Перыметр раўнабедранага трохвугольніка роўны 7,5 м, а бакавая старана роўна 2 м. Знайдзіце аснову.
11. Перыметр раўнабедранага трохвугольніка роўны 15,6 м. Знайдзіце яго стораны, калі: 1) аснова меншая за бакавую старану на 3 м; 2) аснова большая за бакавую старану на 3 м.
12. Дакажыце, што ў роўнастаронняга трохвугольніка ўсе вуглы роўныя.
13. Ад вяршыні C раўнабедранага трохвугольніка ABC з асновай AB адкладзены роўныя адрэзкі: CA_1 — на старане



Рыс. 61



Рыс. 62

CA і CB_1 — на старане CB. Дакажыце роўнасць трохвугольнікаў: 1) CAB_1 і CBA_1; 2) ABB_1 і BAA_1.

14. На аснове AB раўнабедранага трохвугольніка ABC дадзены пункты A_1 і B_1. Вядома, што $AB_1 = BA_1$. Дакажыце, што трохвугольнікі AB_1C і BA_1C роўныя.

15. Трохвугольнікі ACC_1 і BCC_1 роўныя. Іх вяршыні A і B ляжаць па розныя бакі ад прамой CC_1. Дакажыце, што трохвугольнікі ABC і ABC_1 раўнабедраныя (рыс. 62).

16. Сфармулюйце і дакажыце тэарэму, адваротную сцвярджанню задачы 12.

17. На старанах AC і BC трохвугольніка ABC узяты пункты C_1 і C_2. Дакажыце, што трохвугольнік ABC раўнабедраны, калі трохвугольнікі ABC_1 і BAC_2 роўныя (рыс. 63).

18. 1) Дакажыце, што сярэдзіны старон раўнабедранага трохвугольніка з'яўляюцца таксама вяршынямі раўнабедранага трохвугольніка.

2) Дакажыце, што сярэдзіны старон роўнастаронняга трохвугольніка з'яўляюцца таксама вяршынямі роўнастаронняга трохвугольніка.

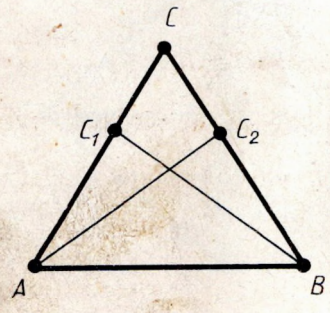
19. 1) Начарціце трохвугольнік з вострымі вугламі. З дапамогай чарцёжнага вугольніка і лінейкі правядзіце ў ім вышыні. Паўтарыце практыкаванне для трохвугольніка, у якога адзін вугал тупы.

2) Начарціце трохвугольнік. З дапамогай транспарціра і лінейкі правядзіце ў ім бісектрысы.

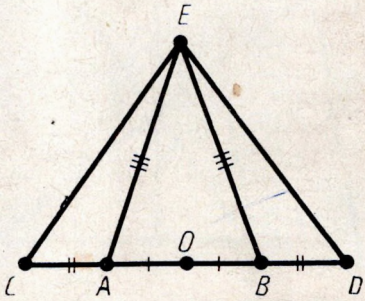
3) Начарціце трохвугольнік. З дапамогай лінейкі з дзяленнямі правядзіце ў ім медыяны.

20. Дакажыце, што ў раўнабедранага трохвугольніка: 1) бісектрысы, праведзеныя з вяршынь пры аснове, роўныя; 2) медыяны, праведзеныя з тых жа вяршынь, таксама роўныя.

21. Дакажыце, што ў роўных трохвугольнікаў ABC і $A_1B_1C_1$: 1) медыяны, праведзеныя з вяршынь A і A_1, роўныя; 2) бісектрысы, праведзеныя з вяршынь A і A_1, роўныя.



Рыс. 63



Рыс. 64

22. Пункты A, B, C, D ляжаць на адной прамой, прычым адрэзкі AB і CD маюць агульную сярэдзіну. Дакажыце, што калі трохвугольнік ABE раўнабедраны з асновай AB, то трохвугольнік CDE таксама раўнабедраны з асновай CD (рыс. 64).

23. Дакажыце роўнасць трохвугольнікаў па вуглу, бісектрысе гэтага вугла і старане, прылеглай да гэтага вугла.

24. У раўнабедраным трохвугольніку ABC з асновай AC праведзена медыяна BM. На ёй узяты пункт D. Дакажыце роўнасць трохвугольнікаў: 1) ABD і CBD; 2) AMD і CMD.

25. Дакажыце, што трохвугольнік ABC раўнабедраны, калі ў яго: 1) медыяна BD з'яўляецца вышынёй; 2) вышыня BD з'яўляецца бісектрысай; 3) бісектрыса BD з'яўляецца медыянай.

26. Дадзены два раўнабедраныя трохвугольнікі з агульнай асновай. Дакажыце, што іх медыяны, праведзеныя да асновы, ляжаць на адной прамой.

27. У раўнабедраным трохвугольніку ABC з асновай AC праведзена медыяна BD. Знайдзіце яе даўжыню, калі перыметр трохвугольніка ABC роўны 50 м, а трохвугольніка ABD 40 м.

28. Дакажыце, што бісектрыса раўнабедранага трохвугольніка, праведзеная з вяршыні, процілеглай аснове, з'яўляецца медыянай і вышынёй.

29. У трохвугольніках ABC і $A_1B_1C_1$: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$. Дакажыце, што $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

30. Дакажыце, што ў раўнабедранага трохвугольніка вышыня, апушчаная на аснову, з'яўляецца медыянай і бісектрысай.

31. Трохвугольнікі ABC і ABC_1 раўнабедраныя з агульнай асновай AB. Дакажыце роўнасць трохвугольнікаў ACC_1 і BCC_1.

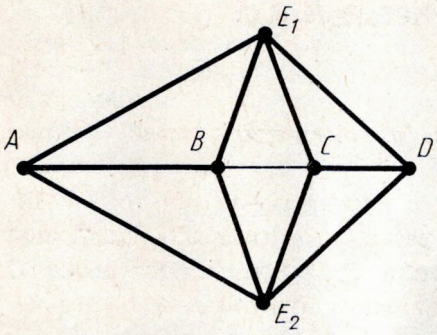
32*. Пункты A, B, C, D ляжаць на адной прамой. Дакажыце, што калі трохвугольнікі ABE_1 і ABE_2 роўныя, то трохвугольнікі CDE_1 і CDE_2 таксама роўныя (рыс. 65).

33. Два адрэзкі AB і CD перасякаюцца ў пункце O, які з'яўляецца сярэдзінай кожнага з іх. Дакажыце роўнасць трохвугольнікаў ACD і BDC.

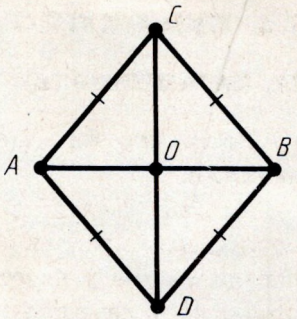
34. Дакажыце роўнасць трохвугольнікаў па дзвюх старанах і медыяне, праведзенай да адной з іх.

35. Адрэзкі AB і CD перасякаюцца. Дакажыце, што калі адрэзкі AC, CB, BD і AD роўныя, то прамень AB з'яўляецца бісектрысай вугла CAD і прамень CD — бісектрысай вугла ACB (рыс. 66).

36*. Дакажыце, што ў задачы 35 прамыя AB і CD перпендыкулярныя.



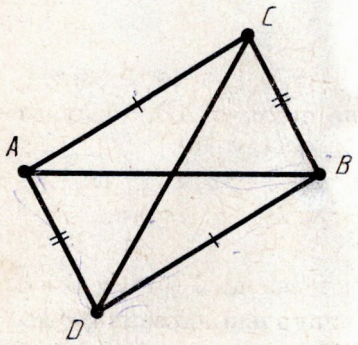
Рыс. 65



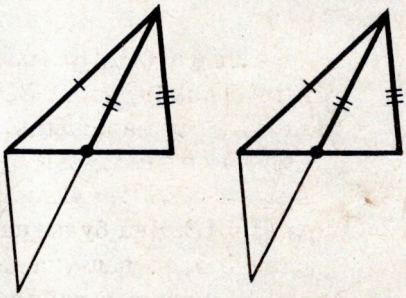
Рыс. 66

37. Трохвугольнікі ABC і BAD роўныя, прычым пункты C і D ляжаць па розныя бакі ад прамой AB (рыс. 67). Дакажыце, што: 1) трохвугольнікі CBD і DAC роўныя; 2) прамая CD дзеліць адрэзак AB папалам.

38. Адрэзкі роўнай даўжыні AB і CD перасякаюцца ў пункце O так, што $AO = OD$. Дакажыце роўнасць трохвугольнікаў ABC і DCB.



Рыс. 67



Рыс. 68

39. Дакажыце роўнасць трохвугольнікаў па дзвюх старанах і медыяне, якія зыходзяць з адной вяршыні (рыс. 68).

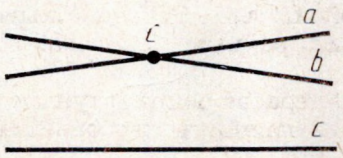
40. Дакажыце роўнасць трохвугольнікаў па старане, медыяне, праведзенай да гэтай стараны, і вуглах, якія ўтварае з ёй медыяна.

§ 4. СУМА ВУГЛОЎ ТРОХВУГОЛЬНІКА

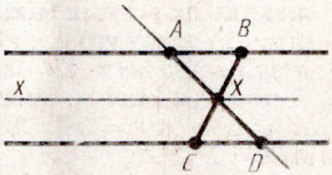
29. ПАРАЛЕЛЬНАСЦЬ ПРАМЫХ

Тэарэма 4.1. ***Дзве прамыя, паралельныя трэцяй,— паралельныя.***

Доказ. Няхай прамыя a і b паралельныя прамой c. Дапусцім, што прамыя a і b не паралельныя (рыс. 69). Тады яны перасякаюцца ў некаторым пункце C. Значыць, праз пункт C праходзяць дзве прамыя, паралельныя прамой c. Але гэта немагчыма, паколькі праз пункт, які не ляжыць на дадзенай прамой, можна правесці не больш за адну прамую, паралельную дадзенай. Тэарэма даказана.



Рыс. 69



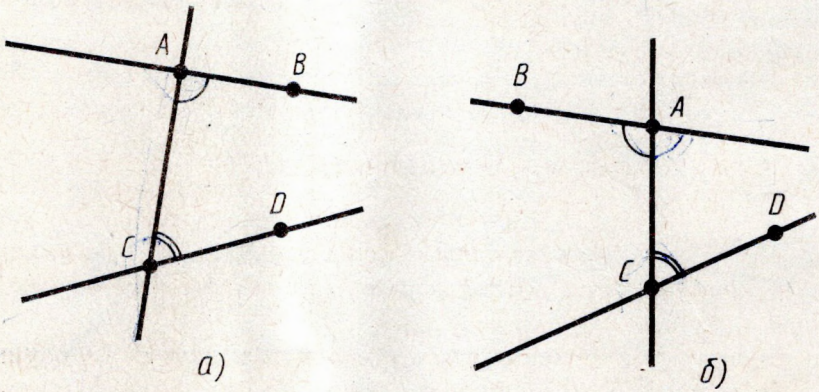
Рыс. 70

Задача (4). Прамыя AB і CD паралельныя. Дакажыце, што калі адрэзак BC перасякае прамую AD, то пункт перасячэння належыць адрэзку AD (рыс. 70).

Рашэнне. Няхай X — пункт перасячэння адрэзка BC з прамой AD. Правядзём праз яе прамую x, паралельную прамой AB. Яна будзе паралельная і прамой CD. Прамая x разбівае плоскасць на дзве паўплоскасці. Пункты B і C ляжаць у розных паўплоскасцях, паколькі адрэзак BC перасякае прамую x (у пункце X). Пункт A ляжыць у той жа паўплоскасці, што і B, а пункт D — у той жа паўплоскасці, што і C. Таму адрэзак AD перасякае прамую x. А пунктам перасячэння з'яўляецца пункт X адрэзка BC.

30. ВУГЛЫ, УТВОРАНЫЯ ПРЫ ПЕРАСЯЧЭННІ ДЗВЮХ ПРАМЫХ СЯКУЧАЙ

Няхай AB і CD — дзве прамыя і AC — трэцяя прамая, што перасякае прамыя AB і CD (рыс. 71). Прамая AC у адносінах да прамых AB і CD называецца *сякучай*.



Рыс. 71

Пары вуглоў, якія ўтвараюцца пры перасячэнні прамых AB і CD сякучай AC, маюць спецыяльныя назвы. Калі пункты B і D ляжаць у адной паўплоскасці адносна прамой AC, то вуглы BAC і DCA называюцца *ўнутранымі аднастароннімі* (рыс. 71, *а*).

Калі пункты B і D ляжаць у розных паўплоскасцях адносна прамой AC, то вуглы BAC і DCA называюцца *ўнутранымі накрыж ляжачымі* (рыс. 71, *б*).

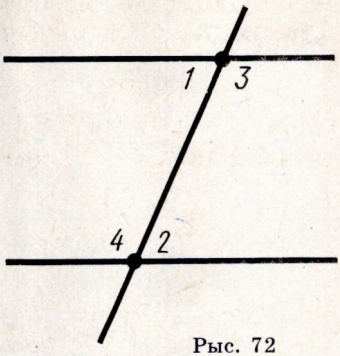
Сякучая AC утварае з прамымі AB і CD дзве пары ўнутраных аднастаронніх і дзве пары ўнутраных накрыж ляжачых вуглоў. Унутраныя накрыж ляжачыя вуглы адной пары, напрыклад $\angle 1$ і $\angle 2$, з'яўляюцца сумежнымі ўнутраным накрыж ляжачым вуглам другой пары: $\angle 3$ і $\angle 4$ (рыс. 72).

Таму калі ўнутраныя накрыж ляжачыя вуглы адной пары роўныя, то ўнутраныя накрыж ляжачыя вуглы другой пары таксама роўныя.

Пара ўнутраных накрыж ляжачых вуглоў, напрыклад $\angle 1$ і $\angle 2$, і пара ўнутраных аднастаронніх вуглоў, напрыклад

$\angle 2$ і $\angle 3$, маюць адзін вугал агульны — $\angle 2$, а два другія вуглы сумежныя: $\angle 1$ і $\angle 3$.

Таму калі ўнутраныя накрыж ляжачыя вуглы роўныя, то сума ўнутраных аднастаронніх вуглоў роўна 180°. І наадварот: калі сума ўнутраных аднастаронніх вуглоў роўна 180°, то ўнутраныя накрыж ляжачыя вуглы роўныя.

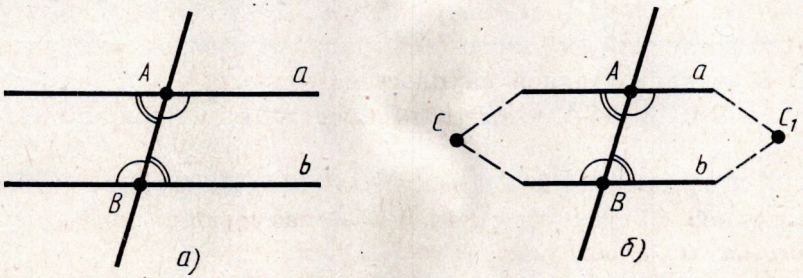


Рыс. 72

31. ПРЫЗНАК ПАРАЛЕЛЬНАСЦІ ПРАМЫХ

Тэарэма 4.2. (прызнак паралельнасці прамых). ***Калі ўнутраныя накрыж ляжачыя вуглы роўныя або сума ўнутраных аднастаронніх вуглоў роўна 180°, то прамыя паралельныя.***

Доказ. Няхай прамыя a і b утвараюць з сякучай AB роўныя ўнутраныя накрыж ляжачыя вуглы (рыс. 73, *а*). Дапусцім, прамыя a і b не паралельныя, а значыць, перасякаюцца ў некаторым пункце C (рыс. 73, *б*).



Рыс. 73

Сякучая AB разбівае плоскасць на дзве паўплоскасці. У адной з іх ляжыць пункт C. Пабудуем трохвугольнік BAC_1, роўны трохвугольніку ABC, з вяршыняй C_1 у другой паўплоскасці. Па ўмове ўнутраныя накрыж ляжачыя вуглы пры паралельных a, b і сякучай AB роўныя. Паколькі адпаведныя вуглы трохвугольнікаў ABC і BAC з вяршынямі A і B роўныя, то яны супадаюць з унутранымі накрыж ляжачымі вугламі. Значыць, прамая AC_1 супадае з прамой a, а прамая BC_1 супадае

з прамой b. Атрымліваецца, што праз пункты C і C_1 праходзяць дзве розныя прамыя a і b. А гэта немагчыма. Значыць, прамыя a і b — паралельныя.

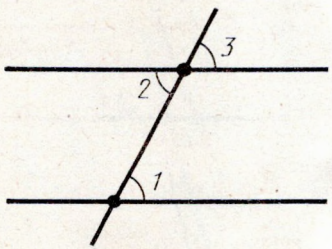
Калі ў прамых a і b і сякучай AB сума ўнутраных аднастаронніх вуглоў роўна 180°, то, як мы ведаем, унутраныя накрыж ляжачыя вуглы роўныя. Значыць, па даказанаму вышэй, прамыя a і b паралельныя. Тэарэма даказана.

З тэарэмы 4.2 вынікае, што ***дзве прамыя, перпендыкулярныя трэцяй, паралельныя.***

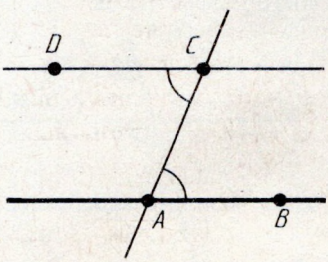
Калі ў пары ўнутраных накрыж ляжачых вуглоў адзін вугал замяніць вертыкальным яму, то атрымаецца пара вуглоў, якія называюцца *адпаведнымі вугламі* дадзеных прамых з сякучай.

Вуглы 1 і 2 на рысунку 74 унутраныя накрыж ляжачыя, а вуглы 1 і 3 адпаведныя.

З роўнасці ўнутраных накрыж ляжачых вуглоў вынікае роўнасць адпаведных вуглоў, і наадварот. Адсюль атрымліваецца прызнак паралельнасці прамых па адпаведных вуглах. Менавіта: ***прамыя паралельныя, калі адпаведныя вуглы роўныя.***



Рыс. 74



Рыс. 75



З а д а ч а (8). Дадзены прамая AB і пункт C, які не ляжыць на гэтай прамой. Дакажыце, што праз пункт C можна правесці прамую, паралельную прамой AB.

Р а ш э н н е. Прамая AC разбівае плоскасць на дзве паўплоскасці (рыс. 75). Пункт B ляжыць у адной з іх. Адкладзём ад паўпрамой CA ў другую паўплоскасць вугал ACD, роўны вуглу CAB. Тады прамыя AB і CD будуць

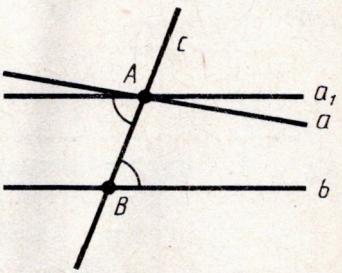
паралельныя. На самай справе, для гэтых прамых і сякучай AC вуглы BAC і DCA ўнутраныя накрыж ляжачыя. А паколькі яны роўныя, то прамыя AB і CD паралельныя.

Супастаўляючы сцверджанне задачы 8 і аксіёмы IX (асноўнай уласцівасці паралельных прамых), прыходзім да важнага вываду: ***праз пункт, які не ляжыць на дадзенай прамой, можна правесці паралельную ёй прамую, і толькі адну.***

32. УЛАСЦІВАСЦЬ ВУГЛОЎ, УТВОРАНЫХ ПРЫ ПЕРАСЯЧЭННІ ПАРАЛЕЛЬНЫХ ПРАМЫХ СЯКУЧАЙ

Тэарэма 4.3. (адваротная тэарэме 4.2). ***Калі дзве паралельныя прамыя перасечаны трэцяй прамой, то ўнутраныя накрыж ляжачыя вуглы роўныя, а сума ўнутраных аднастаронніх вуглоў роўна 180°.***

Доказ. Няхай a і b — паралельныя прамыя і c — прамая, якая перасякае іх у пунктах A і B. Правядзём праз пункт A прамую a_1 так, каб унутраныя накрыж ляжачыя вуглы, утвораныя сякучай c з прамымі a_1 і b, былі роўныя (рыс. 76).



Рыс. 76

Па прызнаку паралельнасці прамых прамыя a_1 і b паралельныя. А паколькі праз пункт A праходзіць толькі адна прамая, паралельная прамой b, то прамая a супадае з прамой a_1.

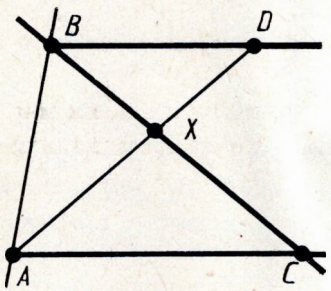
Значыць, унутраныя накрыж ляжачыя вуглы, утвораныя сякучай з паралельнымі прамымі a і b, роўныя. Тэарэма даказана.

З уласцівасці вуглоў, утвораных пры перасячэнні паралельных прамых сякучай, вынікае, што ***калі прамая перпендыкулярная адной з паралельных прамых, то яна перпендыкулярная і другой.***



Задача (13). Прамыя AC і BD паралельныя, прычым пункты A і D ляжаць па розныя бакі ад сякучай BC (рыс. 77). Дакажыце, што: 1) вуглы DBC і ACB унутраныя накрыж ляжачыя адносна сякучай BC; 2) прамень BC праходзіць паміж старанамі вугла ABD; 3) вуглы CAB і DBA ўнутраныя аднастароннія адносна сякучай AB.

Рашэнне. 1) Вуглы DBC і ACB унутраныя накрыж ляжачыя таму, што пункты A і D ляжаць па розныя бакі ад сякучай BC.



Рыс. 77

2) Прамень BC праходзіць паміж старанамі вугла ABD таму, што ён перасякае адрэзак AD з канцамі на старанах вугла (задача 4).

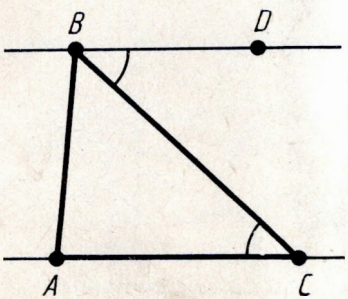
3) Вуглы CAB і DBA ўнутраныя аднастароннія таму, што пункты C і D ляжаць па адзін бок ад сякучай AB, а менавіта ў паўплоскасці, дзе ляжыць пункт X перасячэння адрэзкаў BC і AD.

33. СУМА ВУГЛОЎ ТРОХВУГОЛЬНІКА

Тэарэма 4.4. ***Сума вуглоў трохвугольніка роўна 180°.***

Доказ. Няхай ABC — дадзены трохвугольнік.

Правядзём праз вяршыню B прамую, паралельную прамой AC. Адзначым на ёй пункт D так, каб пункты A і D ляжалі па розныя бакі ад прамой BC (рыс. 78).



Рыс. 78

Вуглы DBC і ACB роўныя як унутраныя накрыж ляжачыя, утвораныя сякучай BC з паралельнымі прамымі AC і BD.

Таму сума вуглоў трохвугольніка пры вяршынях B і C роўная вуглу ABD.

А сума ўсіх трох вуглоў трохвугольніка роўная суме вуглоў ABD і BAC. Паколькі гэтыя вуглы ўнутраныя аднастароннія для паралельных AC і BD і сякучай AB, то іх сума роўна 180°. Тэарэма даказана.

З тэарэмы 4.4 вынікае, што ***ў любога трохвугольніка хаця б два вуглы вострыя.***

Сапраўды, дапусцім, што ў трохвугольніка толькі адзін востры вугал або наогул няма вострых вуглоў. Тады ў гэтага трохвугольніка ёсць два вуглы, кожны з якіх не меншы за 90°. Сума гэтых двух вуглоў ужо не меншая за 180°. А гэта немагчыма, паколькі сума ўсіх трох вуглоў трохвугольніка роўна 180°. Што і трэба было даказаць.



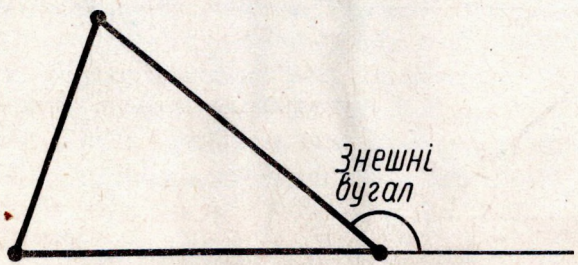
Задача (30). Чаму роўны вуглы роўнастаронняга трохвугольніка?

Рашэнне. У роўнастаронняга трохвугольніка, як мы ведаем, усе вуглы роўныя. Паколькі яны ў суме даюць 180°, то кожны з іх роўны 60°.

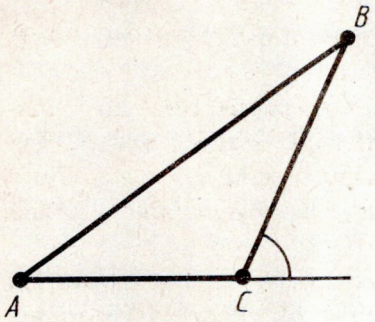
34. ЗНЕШНІЯ ВУГЛЫ ТРОХВУГОЛЬНІКА

Знешнім вуглом трохвугольніка пры дадзенай вяршыні называецца вугал, сумежны з вуглом трохвугольніка пры гэтай вяршыні (рыс. 79).

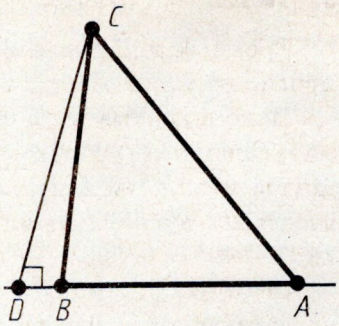
Каб не блытаць вугал трохвугольніка пры дадзенай вяршыні са знешнім вуглом пры гэтай жа вяршыні, яго часам называюць *унутраным вуглом.*



Рыс. 79



Рыс. 80



Рыс. 81

Т э а р э м а 4.5. ***Знешні вугал трохвугольніка роўны суме двух унутраных вуглоў, не сумежных з ім.***

Д о к а з. Няхай ABC — дадзены трохвугольнік (рыс. 80). Па тэарэме аб суме вуглоў трохвугольніка

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ.$$

Адсюль вынікае, што

$$\angle A + \angle B = 180^\circ - \angle C.$$

У правай частцы гэтай роўнасці стаіць градусная мера знешняга вугла трохвугольніка пры вяршыні C. Тэарэма даказана.

З тэарэмы 4.5 вынікае, што ***знешні вугал трохвугольніка большы за любы ўнутраны вугал, не сумежны з ім.***

З а д а ч а (35). У трохвугольніку ABC праведзена вышыня CD. Які з трох пунктаў A, B, D ляжыць паміж двума другімі, калі вуглы A і B трохвугольніка вострыя?

Р а ш э н н е. Пункт B не можа ляжаць паміж пунктамі A і D. Калі б ён ляжаў паміж пунктамі A і D (рыс. 81), то вострый вугал ABC як знешні вугал трохвугольніка CBD быў бы большы за прамы вугал CDB. Гэтак жа даказваецца, што і пункт A не можа ляжаць паміж пунктамі B і D. Значыць, пункт D ляжыць паміж пунктамі A і B.

35. ПРАМАВУГОЛЬНЫ ТРОХВУГОЛЬНІК

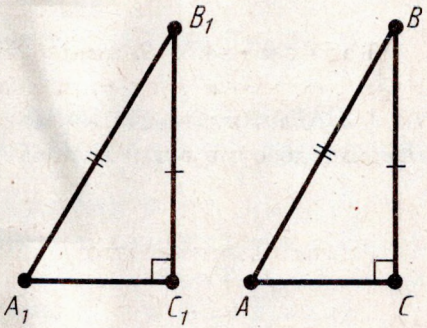
Трохвугольнік называецца *прамавугольным*, калі ў яго ёсць прамы вугал.

Паколькі сума вуглоў трохвугольніка роўна 180°, то ў прамавугольнага трохвугольніка толькі адзін прамы вугал. Два другія вуглы прамавугольнага трохвугольніка вострыя. Сума вострых вуглоў прамавугольнага трохвугольніка роўна $180° - 90° = 90°$.

Старана прамавугольнага трохвугольніка, процілеглая прамому вуглу, называецца *гіпатэнузай*, дзве другія стараны называюцца *катэтамі* (рыс. 82).



Рыс. 82



Рыс. 83

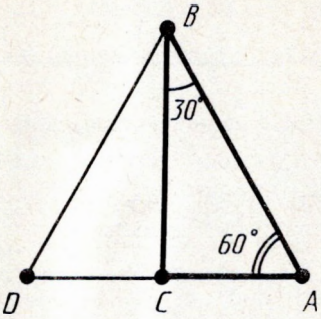
Адзначым наступны прызнак роўнасці прамавугольных трохвугольнікаў па гіпатэнузе і катэту.

Калі гіпатэнуза і катэт аднаго прамавугольнага трохвугольніка адпаведна роўныя гіпатэнузе і катэту другога трохвугольніка, то такія трохвугольнікі роўныя (рыс. 83).

Доказ гэтага прызнака дадзены ў выглядзе рашэння задачы 29 да § 3.

З а д а ч а (43). Дакажыце, што ў прамавугольным трохвугольніку з вуглом 30° катэт, процілеглы гэтаму вуглу, роўны палавіне гіпатэнузы.

Р а ш э н н е. Няхай ABC — прамавугольны трохвугольнік з прамым вуглом C і вуглом B, роўным 30° (рыс. 84). Пабудуем трохвугольнік DBC, роўны трохвугольніку ABC, як паказана на рысунку 84.



Рыс. 84

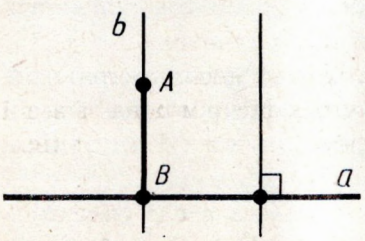
У трохвугольніка ABD усе вуглы роўныя (60°), таму ён роўнастаронні. Паколькі $AC = \frac{1}{2}AD$, а $AD = AB$, то $AC = \frac{1}{2}AB$. Што і трэба было даказаць.

36. ІСНАВАННЕ І АДЗІНАСЦЬ ПЕРПЕНДЫКУЛЯРА ДА ПРАМОЙ

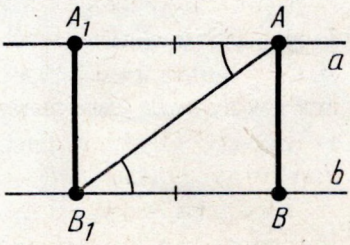
Тэарэма 4.6. ***З любога пункта, які не ляжыць на дадзенай прамой, можна апусціць на гэту прамую перпендыкуляр, і толькі адзін.***

Доказ. Няхай a — дадзеная прамая і A — пункт, які не ляжыць на ёй (рыс. 85). Правядзём праз які-небудзь пункт прамой a перпендыкулярную прамую. А цяпер правядзём праз пункт A паралельную ёй прамую b. Яна будзе перпендыкулярная прамой a, паколькі прамая a, будучы перпендыкулярнай адной з паралельных прамых, перпендыкулярная і другой. Адрэзак AB прамой b ёсць перпендыкуляр, праведзены з пункта A да прамой a.

Дакажам адзінасць перпендыкуляра AB. Дапусцім, існуе



Рыс. 85



Рыс. 86

другі перпендыкуляр AC. Тады ў трохвугольніка ABC будуць два прамыя вуглы. А гэта, як мы ведаем, немагчыма. Тэарэма даказана.

Даўжыня перпендыкуляра, апушчанага з дадзенага пункта на прамую, называецца *адлегласцю ад пункта да прамой*.



Задача (50). Дакажыце, што адлегласці ад любых двух пунктаў прамой да паралельнай прамой роўныя.

Рашэнне. Няхай a і b — паралельныя прамыя і A, A_1 — любыя пункты на прамой a (рыс. 86). Апусцім з пункта A_1 перпендыкуляр A_1B_1 на прамую b. Адкладзём з пункта B_1 на прамой b адрэзак B_1B, роўны адрэзку AA_1 так, каб пункты A_1 і B былі па розныя бакі прамой AB_1.

Тады трохвугольнікі AB_1A_1 і B_1AB роўныя па першаму прызнаку. У іх старана AB_1 агульная, $AA_1 = BB_1$ па пабудаванню, а вуглы B_1AA_1 і AB_1B роўныя як унутраныя накрыж ляжачыя паралельных прамых a і b з сякучай AB_1.

З роўнасці трохвугольнікаў вынікае, што AB ёсць перпендыкуляр да прамой b і $AB = A_1B_1$, што і трэба было даказаць.

Як бачым, адлегласці ад усіх пунктаў прамой да паралельнай прамой роўныя.

Адлегласцю паміж паралельнымі прамымі называецца адлегласць ад якога-небудзь пункта адной прамой да другой прамой.

37. З ГІСТОРЫІ ЎЗНІКНЕННЯ ГЕАМЕТРЫІ

Першапачатковыя звесткі аб уласцівасцях геаметрычных фігур людзі знайшлі, назіраючы за навакольным светам, і ў выніку практычнай дзейнасці. З часам вучоныя заўважылі, што некаторыя ўласцівасці геаметрычных фігур можна вывесці з іншых уласцівасцей шляхам разважання. Так узніклі тэарэмы і доказы.

З'явілася натуральнае жаданне па магчымасці скараціць колькасць тых уласцівасцей геаметрычных фігур, якія бяруцца непасрэдна з вопыту. Сцверджанні ўласцівасцей, якія засталіся



М. І. Лабачэўскі — рускі матэматык (1792—1856)

без доказу, сталі аксіёмамі. Такім чынам, аксіёмы маюць вопытнае паходжанне.

Геаметрыя ў ранні перыяд свайго развіцця дасягнула асабліва высокага ўзроўню ў Егіпце. У першым тысячагоддзі да нашай эры геаметрычныя звесткі ад егіпцян перайшлі да грэкаў. За перыяд з VII па III стагоддзе да нашай эры грэчаскія геометры не толькі ўзбагацілі геаметрыю шматлікімі новымі тэарэмамі, але зрабілі таксама сур'ёзныя крокі да дакладнага яе абгрунтавання. Шматвяковая работа грэчаскіх геометраў за гэты перыяд была падсумавана Еўклідам (330—275 гг. да н. э.) у яго славутай працы «Пачаткі».

Выкладанне геаметрыі ў «Пачатках» Еўкліда пабудавана на сістэме аксіём. Гэта сістэма аксіём адрозніваецца ад сістэмы аксіём, прынятай у дадзеным падручніку. Але ў ёй ёсць таксама аксіёма паралельных.

Аксіёма паралельных у адрозненне ад іншых аксіём не падмацоўваецца наглядными меркаваннямі. Можа быць, таму з часоў Еўкліда матэматыкі многіх краін спрабавалі даказаць яе як тэарэму. Але гэта нікому не ўдавалася. Нарэшце, у XIX ст. было даказана, што гэта немагчыма зрабіць. Першым, хто абгрунтавана выказаў гэта сцверджанне, быў вялікі рускі матэматык Мікалай Іванавіч Лабачэўскі.

КАНТРОЛЬНЫЯ ПЫТАННІ

1. Дакажыце, што дзве прамыя, паралельныя трэцяй, паралельныя.
2. Растлумачце, якія вуглы называюцца ўнутранымі аднастароннімі. Якія вуглы называюцца ўнутранымі накрыж ляжачымі?
3. Дакажыце, што калі ўнутраныя накрыж ляжачыя вуглы адной пары роўныя, то ўнутраныя накрыж ляжачыя вуглы другой пары таксама роўныя, а сума ўнутраных аднастаронніх вуглоў кожнай пары роўна 180°.

4. Дакажыце прызнак паралельнасці прамых.
5. Растлумачце, якія вуглы называюцца адпаведнымі. Дакажыце, што калі ўнутраныя накрыж ляжачыя вуглы роўныя, то адпаведныя вуглы таксама роўныя, і наадварот.
6. Дакажыце, што праз пункт, які не ляжыць на дадзенай прамой, можна правесці паралельную ёй прамую. Колькі прамых, паралельных дадзенай, можна правесці праз пункт, які не ляжыць на гэтай прамой?
7. Дакажыце, што калі дзве паралельныя прамыя перасякаюцца трэцяй прамой, то ўнутраныя накрыж ляжачыя вуглы роўныя, а сума ўнутраных аднастаронніх вуглоў роўна 180°.
8. Дакажыце, што дзве прамыя, перпендыкулярныя трэцяй, паралельныя. Калі прамая перпендыкулярная адной з дзвюх паралельных прамых, то яна перпендыкулярная і другой.
9. Дакажыце, што сума вуглоў трохвугольніка роўна 180°.
10. Дакажыце, што ў любога трохвугольніка прынамсі два вуглы вострыя.
11. Што такое знешні вугал трохвугольніка?
12. Дакажыце, што знешні вугал трохвугольніка роўны суме двух унутраных вуглоў, не сумежных з ім.
13. Дакажыце, што знешні вугал трохвугольніка большы за любы ўнутраны вугал, не сумежны з ім.
14. Які трохвугольнік называецца прамавугольным?
15. Чаму роўна сума вострых вуглоў прамавугольнага трохвугольніка?
16. Якая старана прамавугольнага трохвугольніка называецца гіпатэнузай? Якія стораны называюцца катэтамі?
17. Сфармулюйце прызнак роўнасці прамавугольных трохвугольнікаў па гіпатэнузе і катэту.
18. Дакажыце, што з любога пункта, які не ляжыць на дадзенай прамой, можна апусціць на гэту прамую перпендыкуляр, і толькі адзін.
19. Што называецца адлегласцю ад пункта да прамой?
20. Растлумачце, што такое адлегласць паміж паралельнымі прамымі.

ЗАДАЧЫ

1. Дакажыце, што калі некаторая прамая перасякае адну з дзвюх паралельных прамых, то яна перасякае і другую.
2. Дакажыце, што калі дзве прамыя перасякаюцца, то любая трэцяя прамая перасякае прынамсі адну з гэтых прамых.
3. Дадзена: $a \parallel b \parallel c \parallel d$. Дакажыце, што $a \parallel d$.

4. Прамыя AB і CD паралельныя. Дакажыце, што калі адрэзак BC перасякае прамую AD, то пункт перасячэння належыць адрэзку AD (гл. рыс. 70).
5. Дадзены трохвугольнік ABC. На старане AB адзначаны пункт B_1, а на старане AC — пункт C_1 (рыс. 87). Назавіце ўнутраныя аднастароннія і ўнутраныя накрыж ляжачыя вуглы пры прамых AB, AC і сякучай B_1C_1.
6. Назавіце ўнутраныя накрыж ляжачыя і ўнутраныя аднастароннія вуглы на рысунку 72.
7. Адрэзкі AD і BC перасякаюцца. Для прамых AC і BD і сякучай BC назавіце пару ўнутраных накрыж ляжачых вуглоў. Для тых жа прамых і сякучай AB назавіце пару ўнутраных аднастаронніх вуглоў. Растлумачце адказ.
8. Дадзены прамая AB і пункт C, які не ляжыць на гэтай прамой. Дакажыце, што праз пункт C можна правесці прамую, паралельную прамой AB.
9. Дакажыце, што бісектрысы ўнутраных накрыж ляжачых вуглоў, утвораных паралельнымі і сякучай, паралельныя, г. зн. ляжаць на паралельных прамых.
10. Адрэзкі AB і CD перасякаюцца ў пункце E і дзеляцца гэтым пунктам папалам. Дакажыце, што прамыя AC і BD паралельныя.
11. Трохвугольнікі ABC і BAD роўныя. Пункты C і D ляжаць па розныя бакі ад прамой AB. Дакажыце, што прамыя AC і BD паралельныя.
12. Вугал ABC роўны 80°, а вугал BCD роўны 120°. Ці могуць прамыя AB і CD быць паралельнымі? Абгрунтуйце адказ.
13. Прамыя AC і BD паралельныя, прычым пункты A і D ляжаць па розныя бакі ад сякучай BC (рыс. 77). Дакажыце, што: 1) вуглы DBC і ACB унутраныя накрыж ляжачыя адносна сякучай BC; 2) прамень BC праходзіць паміж старанамі вугла ABD; 3) вуглы CAB і DBA ўнутраныя аднастароннія адносна сякучай AB.
14. 1) Рознасць двух унутраных аднастаронніх вуглоў пры дзвюх паралельных прамых і сякучай роўна 30°. Знайдзіце гэтыя вуглы.

    2) Сума двух унутраных накрыж ляжачых вуглоў пры дзвюх паралельных прамых і сякучай роўна 150°. Чаму роўны гэтыя вуглы?
15. Адзін з вуглоў, якія атрымліваюцца пры перасячэнні дзвюх паралельных прамых сякучай, роўны 72°. Знайдзіце астатнія сем вуглоў.
16. Адзін з вуглоў, якія атрымліваюцца пры перасячэнні дзвюх паралельных прамых сякучай, роўны 30°. Ці можа адзін з астатніх сямі вуглоў быць роўным 70°? Растлумачце адказ.

17. Дакажыце, што дзве прамыя, паралельныя перпендыкулярным прамым, самі перпендыкулярныя.

18. Знайдзіце невядомы вугал трохвугольніка, калі ў яго два вуглы роўны: 1) 50° і 30°; 2) 40° і 75°; 3) 65° і 80°; 4) 25° і 120°.

19. Знайдзіце вуглы трохвугольніка, калі яны прапарцыянальныя лікам: 1) 1, 2, 3; 2) 2, 3, 4; 3) 3, 4, 5; 4) 4, 5, 6; 5) 5, 6, 7.

20. Ці можа ў трохвугольніку быць: 1) два тупыя вуглы; 2) тупы і прамы вуглы; 3) два прамыя вуглы?

21. Ці можа быць тупым вугал пры аснове раўнабедранага трохвугольніка?

22. Знайдзіце вугал паміж бакавымі старанамі раўнабедранага трохвугольніка, калі вугал пры аснове ў яго роўны: 1) 40°; 2) 55°; 3) 72°.

23. Знайдзіце вугал пры аснове раўнабедранага трохвугольніка, калі вугал паміж бакавымі старанамі роўны: 1) 80°; 2) 120°; 3) 30°.

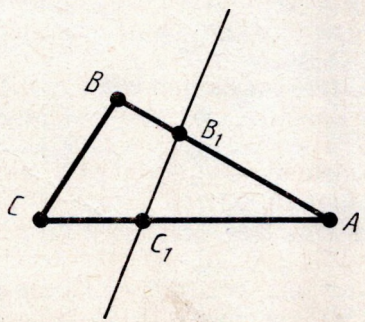
24. Адзін з вуглоў раўнабедранага трохвугольніка роўны 100°. Знайдзіце астатнія вуглы.

25. Адзін з вуглоў раўнабедранага трохвугольніка роўны 70°. Знайдзіце астатнія вуглы. Колькі рашэнняў мае задача?

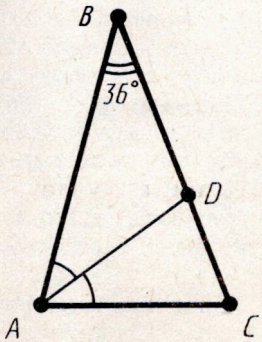
26. Дакажыце, што калі адзін з вуглоў раўнабедранага трохвугольніка роўны 60°, то гэты трохвугольнік — роўнастаронні.

27. У раўнабедраным трохвугольніку ABC з асновай AC праведзена бісектрыса CD. Знайдзіце вуглы трохвугольніка ABC, калі вугал ADC роўны: 1) 60°; 2) 75°; 3) α.

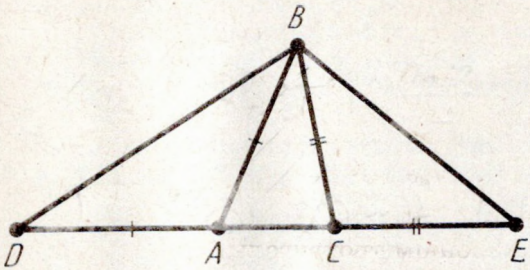
28. У раўнабедраным трохвугольніку ABC з асновай AC і вуглом пры вяршыні B, роўным 36°, праведзена бісектрыса AD. Дакажыце, што трохвугольнікі CDA і ADB раўнабедраныя (рыс. 88).



Рыс. 87



Рыс. 88



Рыс. 89

29. У трохвугольніку ABC праведзены бісектрысы з вяршынь A і B. Пункт іх перасячэння абазначаны D. Знайдзіце вугал ADB, калі: 1) $\angle A = 50°$, $\angle B = 100°$; 2) $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$; 3) $\angle C = 130°$; 4) $\angle C = \gamma$.
30. Чаму роўныя вуглы роўнастаронняга трохвугольніка?
31. Пад якім вуглом перасякаюцца бісектрысы двух унутраных аднастаронніх вуглоў пры паралельных прамых?
32. Адзін са знешніх вуглоў раўнабедранага трохвугольніка роўны 70°. Знайдзіце вуглы трохвугольніка.
33. Знайдзіце вуглы трохвугольніка, ведаючы, што знешнія вуглы пры дзвюх яго вяршынях роўны 120° і 150°.
34. Два знешнія вуглы трохвугольніка роўны 100° і 150°. Знайдзіце трэці знешні вугал.
35. У трохвугольніку ABC праведзена вышыня CD. Які з трох пунктаў A, B, D ляжыць паміж двума другімі, калі вуглы A і B трохвугольніка вострыя?
36. У трохвугольніку ABC праведзена вышыня CD. Які з трох пунктаў A, B, D ляжыць паміж двума іншымі, калі вугал A тупы? Абгрунтуйце адказ.
37. Дакажыце, што бісектрыса знешняга вугла пры вяршыні раўнабедранага трохвугольніка паралельна аснове.
38. Сума знешніх вуглоў трохвугольніка ABC пры вяршынях A і B, узятых па аднаму для кожнай вяршыні, роўна 240°. Чаму роўны вугал C трохвугольніка?
39. Дадзены трохвугольнік ABC. На прадаўжэнні стараны AC адкладзены адрэзкі $AD = AB$ і $CE = CB$ (рыс. 89). Як знайсці вуглы трохвугольніка DBE, ведаючы вуглы трохвугольніка ABC?
40. У трохвугольніка адзін з унутраных вуглоў роўны 30°, а адзін са знешніх 40°. Знайдзіце астатнія ўнутраныя вуглы трохвугольніка.
41. З вяршыні прамога вугла трохвугольніка ABC праведзена вышыня BD. Знайдзіце вугал CBD, ведаючы, што: 1) $\angle A = 20°$; 2) $\angle A = 65°$; 3) $\angle A = \alpha$.

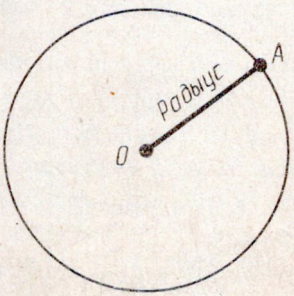
42. З вяршыні тупога вугла B трохвугольніка ABC праведзена вышыня BD. Знайдзіце вуглы трохвугольнікаў ABD і CBD, ведаючы, што $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$.
43. Дакажыце, што ў прамавугольным трохвугольніку з вуглом 30° катэт, процілеглы гэтаму вуглу, роўны палавіне гіпатэнузы.
44. Знайдзіце вуглы прамавугольнага раўнабедранага трохвугольніка.
45. У роўнастароннім трохвугольніку ABC праведзена медыяна AD. Знайдзіце вуглы трохвугольніка ABD.
46. Вышыні трохвугольніка ABC, праведзеныя з вяршынь A і C, перасякаюцца ў пункце M. Знайдзіце $\angle AMC$, калі $\angle A = 70°$, $\angle C = 80°$.
47*. У трохвугольніку ABC медыяна BD роўна палавіне старанны AC. Знайдзіце вугал B трохвугольніка.
48. Прамая a перасякае адрэзак BC у яго сярэдзіне. Дакажыце, што пункты B і C знаходзяцца на аднолькавай адлегласці ад прамой a.
49. Адрэзак BC перасякае прамую a ў пункце O. Адлегласці ад пунктаў B і C да прамой a роўныя. Дакажыце, што пункт O з'яўляецца сярэдзінай адрэзка BC.
50. Дакажыце, што адлегласці ад любых двух пунктаў прамой да паралельнай прамой роўныя.
51. Дакажыце, што адлегласці ад вяршынь роўнастаронняга трохвугольніка да прамых, якія змяшчаюць процілеглыя ім стораны, роўныя.

§ 5. ГЕАМЕТРЫЧНЫЯ ПАБУДАВАННІ

38. АКРУЖНАСЦЬ

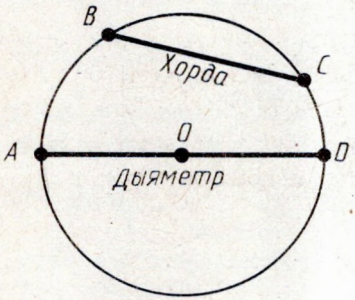
Акружнасцю называецца фігура, якая складаецца з усіх пунктаў плоскасці, роўнааддаленых ад дадзенага пункта. Гэты пункт называецца *цэнтрам* акружнасці.

Адлегласць ад пунктаў акружнасці да яе цэнтра называецца *радыусам* акружнасці. Радыусам называецца таксама любы адрэзак, які злучае пункт акружнасці з яе цэнтрам (рыс. 90).

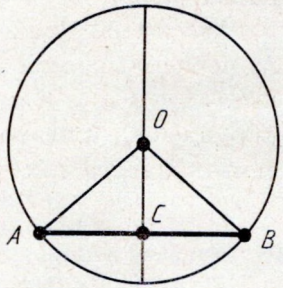


Рыс. 90

Адрэзак, які злучае два пункты акружнасці, называецца *хордай*. Хорда, якая праходзіць праз цэнтр, называецца *дыяметрам*. На рысунку 91 BC — хорда, AD — дыяметр.



Рыс. 91



Рыс. 92

Задача (3). Дакажыце, што дыяметр акружнасці, якая праходзіць праз сярэдзіну хорды, перпендыкулярны ёй.

Рашэнне. Няхай AB — хорда акружнасці і C — яе сярэдзіна (рыс. 92). Трохвугольнік AOB раўнабедраны з асновай AB. У яго стораны OA і OB роўныя як радыусы акружнасці. Па ўласцівасці медыяны раўнабедранага трохвугольніка, праведзенай да асновы, адрэзак OC з'яўляецца вышынёй. Таму дыяметр акружнасці, праведзены праз сярэдзіну хорды, перпендыкулярны хордзе.

39. АКРУЖНАСЦЬ, АПІСАНАЯ КАЛЯ ТРОХВУГОЛЬНІКА

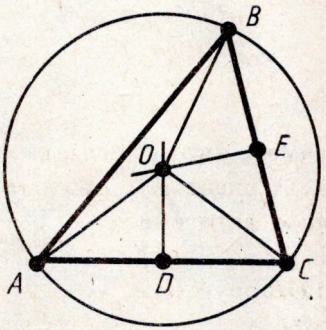
Акружнасць называецца *апісанай* каля трохвугольніка, калі яна праходзіць праз усе яго вяршыні.

Тэарэма 5.1. ***Цэнтр акружнасці, апісанай каля трохвугольніка, з'яўляецца пунктам перасячэння перпендыкуляраў да старон трохвугольніка, праведзеных праз сярэдзіны гэтых старон.***

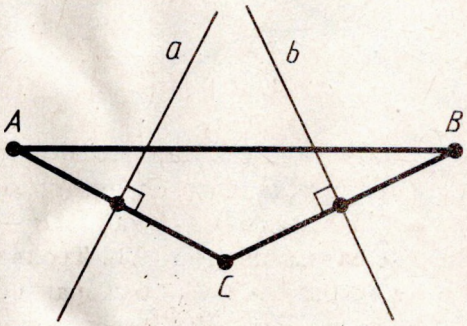
Доказ. Няхай ABC — дадзены трохвугольнік і O — цэнтр апісанай каля яго акружнасці (рыс. 93). Трохвугольнік AOC — раўнабедраны: у яго стораны OA і OC роўныя як радыусы.

Медыяна OD гэтага трохвугольніка адначасова з'яўляецца яго вышынёй. Таму цэнтр акружнасці ляжыць на прамой, якая перпендыкулярная старане AC і праходзіць праз яе сярэдзіну. Гэтак жа даказваецца, што цэнтр акружнасці ляжыць на перпендыкулярах да дзвюх другіх старон трохвугольніка. Тэарэма даказана.

З а ў в а г а. Прамую, якая праходзіць праз сярэдзіну адрэзка перпендыкулярна да яго, часта называюць *пасярэднім перпендыкулярам*. У сувязі з гэтым часам гавораць, што цэнтр акружнасці, апісанай каля трохвугольніка, ляжыць на перасячэнні пасярэдніх перпендыкуляраў да старон трохвугольніка.



Рыс. 93



Рыс. 94

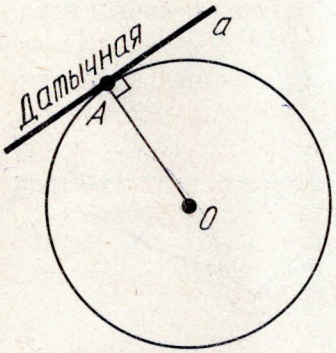
З а д а ч а (6). Дакажыце, што пасярэднія перпендыкуляры да дзвюх старон трохвугольніка перасякаюцца.

Р а ш э н н е. Няхай ABC — трохвугольнік і a, b — пасярэднія перпендыкуляры да яго старон AC і BC (рыс. 94). Дапусцім, прамыя a і b не перасякаюцца, а значыць, паралельныя. Прамая AC перпендыкулярная прамой a. Прамая BC перпендыкулярная прамой b, а значыць, і прамой a, паколькі прамыя a і b паралельныя. Такім чынам, абедзве прамыя AC і BC перпендыкулярныя прамой a, а значыць, паралельныя. Але гэта няправільна. Прамыя AC і BC перасякаюцца ў пункце C. Мы прыйшлі да супярэчнасці. Сцверджанне даказана.

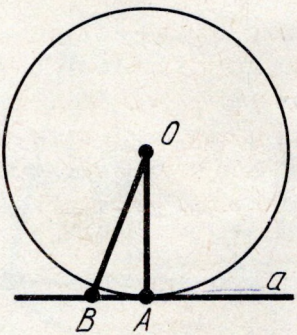
40. ДАТЫЧНАЯ ДА АКРУЖНАСЦІ

Прамая, якая праходзіць праз пункт акружнасці перпендыкулярна да радыуса, праведзенага ў гэты пункт, называецца *датычнай*. Пры гэтым дадзены пункт акружнасці называецца *пунктам дотыку*.

На рысунку 95 прамая a праведзена праз пункт акружнасці A перпендыкулярна да радыуса OA. Прамая a з'яўляецца датычнай да акружнасці. Пункт A з'яўляецца пунктам дотыку. Можна сказаць таксама, што акружнасць датыкаецца да прамой a ў пункце A.



Рыс. 95



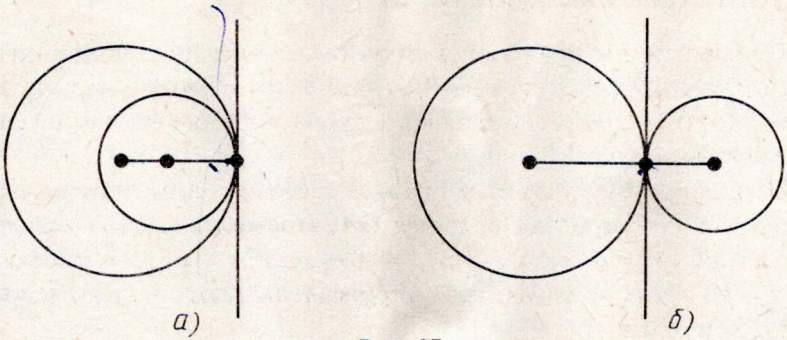
Рыс. 96

Задача (8). Дакажыце, што датычная да акружнасці не мае з ёй другіх агульных пунктаў, апрача пункта дотыку.

Рашэнне. Няхай a — датычная да акружнасці ў пункце A (рыс. 96).

Дапусцім, датычная і акружнасць маюць, апрача пункта A, агульны пункт B, адрозны ад A. Трохвугольнік AOB раўнабедраны з асновай AB. У яго бакавыя стораны OA і OB — радыусы акружнасці.

Паколькі ў раўнабедранага трохвугольніка вуглы пры аснове роўныя, а вугал пры вяршыні A прамы, то ў гэтага трохвугольніка два прамыя вуглы. А гэта немагчыма. Мы прыйшлі да супярэчнасці. Сцверджанне даказана.



Рыс. 97

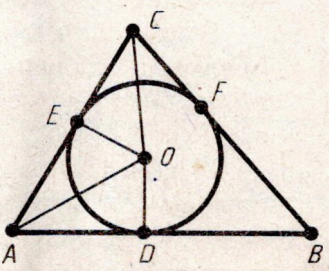
Гавораць, што дзве акружнасці, якія маюць агульны пункт, *датыкаюцца* ў гэтым пункце, калі яны маюць у гэтым пункце агульную датычную (рыс. 97). Дотык акружнасцей называецца *ўнутраным*, калі цэнтры акружнасцей ляжаць па адзін бок ад іх агульнай датычнай (рыс. 97, *а*). Дотык акружнасцей называецца *знешнім*, калі цэнтры акружнасцей ляжаць па розныя бакі ад іх агульнай датычнай (рыс. 97, *б*).

41. АКРУЖНАСЦЬ, УПІСАНАЯ Ў ТРОХВУГОЛЬНІК

Акружнасць называецца *ўпісанай* у трохвугольнік, калі яна датыкаецца да ўсіх яго старон.

Т э а р э м а 5.2. ***Цэнтр акружнасці, упісанай у трохвугольнік, з'яўляецца пунктам перасячэння яго бісектрыс.***

Д о к а з. Няхай ABC — дадзены трохвугольнік, O — цэнтр упісанай у яго акружнасці, D, E і F — пункты дотыку акружнасці са старанамі (рыс. 98). Прамавугольныя трохвугольнікі AOD і AOE роўны па гіпатэнузе і катэту. У іх гіпатэнуза AO агульная, а катэты OD і OE роўныя як радыусы. З роўнасці трохвугольнікаў вынікае роўнасць вуглоў OAD і OAE. А гэта значыць, што пункт O ляжыць на бісектрысе трохвугольніка, праведзенай з вяршыні A. Гэтак жа даказваецца, што пункт O ляжыць на дзвюх другіх бісектрысах трохвугольніка. Тэарэма даказана.



Рыс. 98

42. ШТО ТАКОЕ ЗАДАЧЫ НА ПАБУДАВАННЕ

У задачах на пабудаванне ідзе гаворка пра пабудаванне геаметрычнай фігуры з дапамогай дадзеных чарцёжных інструментаў. Такімі інструментамі часцей за ўсё з'яўляюцца лінейка і цыркуль. Рашэнне задачы заключаецца не столькі ў пабудаванні фігуры, колькі ў рашэнні пытання аб тым, як гэта зрабіць, і адпаведным доказе. Задача лічыцца рэшанай, калі дадзены спосаб пабудавання фігуры і даказана, што ў выніку выканання дадзеных пабудаванняў сапраўды атрымліваецца фігура з патрабуемымі ўласцівасцямі.

З дапамогай лінейкі як інструмента геаметрычных пабудаванняў можна правесці адвольную прамую; адвольную прамую, якая праходзіць праз дадзены пункт; прамую, якая праходзіць праз два дадзеныя пункты. Ніякіх іншых аперацый выконваць лінейкай нельга. У прыватнасці, нельга адкладваць лінейкай адрэзкі, нават калі на ёй ёсць дзяленні.

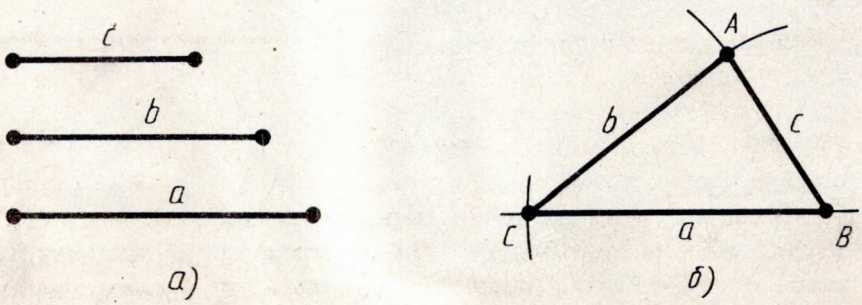
Цыркуль як інструмент геаметрычных пабудаванняў дазваляе апісаць з дадзенага цэнтра акружнасць дадзенага радыуса. У прыватнасці, цыркулем можна адкласці дадзены адрэзак на дадзенай прамой ад дадзенага пункта.

Разгледзім найпрасцейшыя задачы на пабудаванне.

43. ПАБУДАВАННЕ ТРОХВУГОЛЬНІКА З ДАДЗЕНЫМІ СТАРАНАМІ

Задача 5.1. ***Пабудаваць трохвугольнік з дадзенымі старанамі a, b, c*** (рыс. 99, *а*).

Рашэнне. З дапамогай лінейкі праводзім адвольную пра-



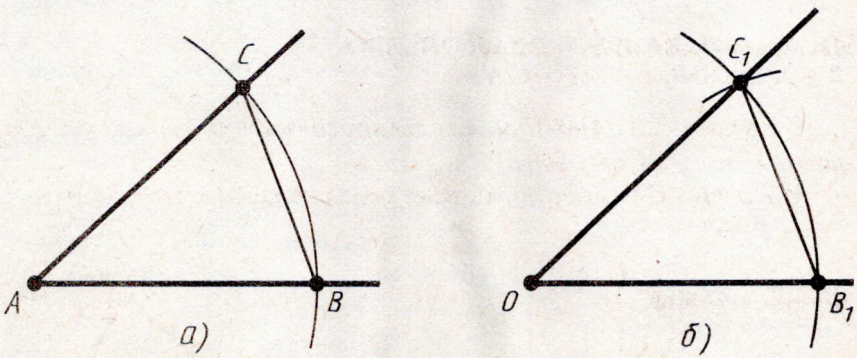
Рыс. 99

мую і адзначаем на ёй адвольны пункт B (рыс. 99, *б*). Ростулам цыркуля, роўным a, апісваем акружнасць з цэнтрам B і радыусам a. Няхай C — пункт яе перасячэння з прамой. Цяпер ростулам цыркуля, роўным c, апісваем акружнасць з цэнтра B, а ростулам цыркуля, роўным b, апісваем акружнасць з цэнтра C. Няхай A — пункт перасячэння гэтых акружнасцей. Правядзём адрэзкі AB і AC. Трохвугольнік ABC мае стораны, роўныя a, b, c.

44. ПАБУДАВАННЕ ВУГЛА, РОЎНАГА ДАДЗЕНАМУ

Задача 5.2. ***Адкласці ад дадзенай паўпрамой у дадзеную паўплоскасць вугал, роўны дадзенаму вуглу.***

Рашэнне. Правядзём адвольную акружнасць з цэнтрам у вяршыні A дадзенага вугла (рыс. 100, *а*). Няхай B і C — пункты перасячэння акружнасці са старанамі вугла. Радыусам AB правядзём акружнасць з цэнтрам у пункце O — пачатковым пункце дадзенай паўпрамой (рыс. 100, *б*). Пункт перасячэння гэтай акружнасці з дадзенай паўпрамой абазначым B_1. Апішам акружнасць з цэнтрам B_1 і радыусам BC. Пункт C_1 перасячэння пабудаваных акружнасцей у дадзенай паўплоскасці ляжыць на старане шукаемага вугла.



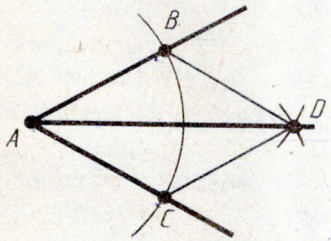
Рыс. 100

Для доказу дастаткова заўважыць, што трохвугольнікі ABC і OB_1C_1 роўныя як трохвугольнікі з адпаведна роўнымі старанамі. Вуглы A і O з'яўляюцца адпаведнымі вугламі гэтых трохвугольнікаў.

45. ПАБУДАВАННЕ БІСЕКТРЫСЫ ВУГЛА

Задача 5.3. ***Пабудаваць бісектрысу дадзенага вугла.***

Рашэнне. З вяршыні A дадзенага вугла, як з цэнтра, апісваем акружнасць адвольнага радыуса (рыс. 101). Няхай B і C — пункты яе перасячэння са старанамі вугла. З пунктаў B і C тым жа радыусам апісваем акружнасці. Няхай D — пункт іх перасячэння, адрозны ад A. Праводзім паўпрамую AD.



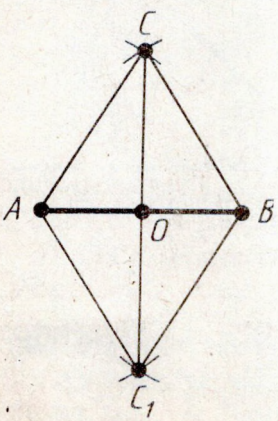
Рыс. 101

Прамень AD з'яўляецца бісектрысай, паколькі дзеліць вугал BAC папалам. Гэта вынікае з роўнасці трохвугольнікаў ABD і ACD, у якіх вуглы DAB і DAC з'яўляюцца адпаведнымі.

46. ДЗЯЛЕННЕ АДРЭЗКА ПАПАЛАМ

Задача 5.4. ***Падзяліць адрэзак папалам.***

Рашэнне. Няхай AB — дадзены адрэзак (рыс. 102). З пунктаў A і B радыусам AB апісваем акружнасці. Няхай C і C_1 — пункты перасячэння гэтых акружнасцей. Яны ляжаць у розных паўплоскасцях адносна прамой AB. Адрэзак CC_1 перасякае прамую AB у некаторым пункце O. Гэты пункт і ёсць сярэдзіна адрэзка AB.



Рыс. 102

Сапраўды, трохвугольнікі CAC_1 і CBC_1 роўныя па трэцяму прызнаку роўнасці трохвугольнікаў. Адсюль вынікае роўнасць вуглоў ACO і BCO. Трохвугольнікі ACO і BCO роўныя па першаму прызнаку роўнасці трохвугольнікаў. Сторны AO і BO гэтых трохвугольнікаў з'яўляюцца адпаведнымі, а таму яны роўныя. Такім чынам, O — сярэдзіна адрэзка AB.

47. ПАБУДАВАННЕ ПЕРПЕНДЫКУЛЯРНАЙ ПРАМОЙ

Задача 5.5. ***Праз дадзены пункт O правесці прамую, перпендыкулярную дадзенай прамой a.***

Рашэнне. Магчымы два выпадкі:

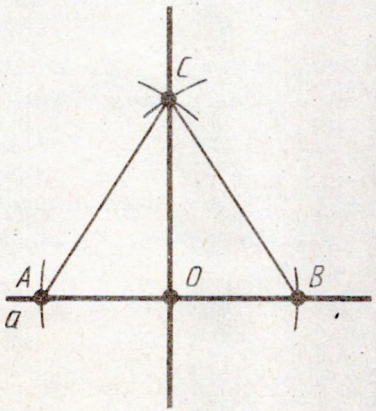
1) пункт O ляжыць на прамой a;

2) пункт O не ляжыць на прамой a.

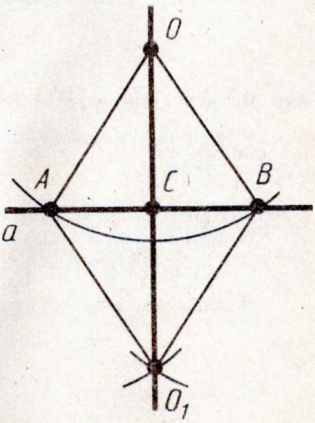
Разгледзім першы выпадак (рыс. 103).

З пункта O праводзім адвольным радыусам акружнасць. Яна перасякае прамую a ў двух пунктах: A і B. З пунктаў A і B праводзім акружнасці радыусам AB. Няхай C — пункт іх перасячэння. Шукаемая прамая праходзіць праз пункты O і C.

Перпендыкулярнасць прамых OC і AB вынікае з роўнасці вуглоў пры вяршыні O трохвугольнікаў ACO і BCO. Гэтыя трохвугольнікі роўныя па трэцяму прызнаку роўнасці трохвугольнікаў.



Рыс. 103



Рыс. 104

Разгледзім другі выпадак (рыс. 104).

З пункта O праводзім акружнасць, якая перасякае прамую a. Няхай A і B — пункты яе перасячэння з прамой a. З пунктаў A і B тым жа радыусам праводзім акружнасці. Няхай O_1 — пункт іх перасячэння, які ляжыць у паўплоскасці, адрознай ад той, у якой ляжыць пункт O. Шукаемая прамая праходзіць праз пункты O і O_1. Дакажам гэта.

Абазначым праз C пункт перасячэння прамых AB і OO_1. Трохвугольнікі AOB і AO_1B роўныя па трэцяму прызнаку.

Таму вугал OAC роўны вуглу O_1AC. А тады трохвугольнікі OAC і O_1AC роўныя па першаму прызнаку. Значыць, іх вуглы ACO і ACO_1 роўныя. А паколькі яны сумежныя, то яны прамыя. Такім чынам, OC — перпендыкуляр, апушчаны з пункта O на прамую a.

48. ГЕАМЕТРЫЧНАЕ МЕСЦА ПУНКТАЎ

Адным з метадаў рашэння задач на пабудаванне з'яўляецца метад геаметрычных месц.

Геаметрычным месцам пунктаў называецца фігура, якая складаецца з усіх пунктаў плоскасці, што валодаюць пэўнай уласцівасцю.

Напрыклад, акружнасць можна вызначыць як геаметрычнае месца пунктаў, роўнаддаленых ад дадзенага пункта.

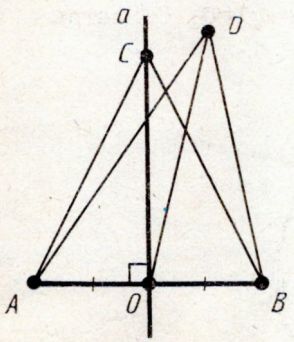
Важнае геаметрычнае месца пунктаў дае наступная тэарэма.

Тэарэма 5.6. ***Геаметрычнае месца пунктаў, роўнаддаленых ад двух дадзеных пунктаў, ёсць прамая, якая перпендыкулярная да адрэзка, што злучае гэтыя пункты, і праходзіць праз яго сярэдзіну.***

Доказ. Няхай A і B — дадзеныя пункты, a — прамая, што праходзіць праз сярэдзіну O адрэзка AB перпендыкулярна да яго (рыс. 105). Мы павінны даказаць, што:

1) кожны пункт прамой a роўнаддалены ад пунктаў A і B;

2) кожны пункт D плоскасці, роўнаддалены ад пунктаў A і B, ляжыць на прамой a.



Рыс. 105

Тое, што кожны пункт C прамой a знаходзіцца на аднолькавай адлегласці ад пунктаў A і B, вынікае з роўнасці трохвугольнікаў AOC і BOC. У гэтых трохвугольнікаў вуглы пры вяршыні O прамыя, старана OC агульная, а $AO = OB$, паколькі O — сярэдзіна адрэзка AB.

Пакажам цяпер, што кожны пункт D плоскасці, роўнаддалены ад пунктаў A і B, ляжыць на прамой a.

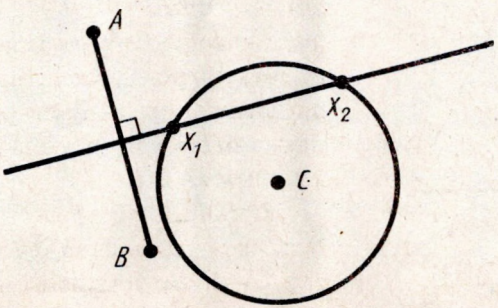
Разгледзім трохвугольнік ADB. Ён раўнабедраны, паколькі $AD = BD$. У ім DO — медыяна. Па ўласцівасці раўнабедранага трохвугольніка медыяна, праведзеная да асновы, з'яўляецца вышынёй. Значыць, пункт D ляжыць на прамой a. Тэарэма даказана.

49. МЕТАД ГЕАМЕТРЫЧНЫХ МЕСЦ

Сутнасць метаду геаметрычных месц, які выкарыстоўваецца пры рашэнні задач на пабудаванне, заключаецца ў наступным. Няхай, рашаючы задачу на пабудаванне, нам трэба знайсці пункт X, які задавальняе дзвюм умовам. Геаметрычнае месца пунктаў, якія задавальняюць першай умове, ёсць некаторая фігура F_1, а геаметрычнае месца пунктаў, якія задавальняюць другой умове, ёсць некаторая фігура F_2. Шукаемы пункт X належыць F_1 і F_2, г. зн. з'яўляецца іх пунктам перасячэння. Калі гэтыя геаметрычныя месцы простыя (скажам, складаюцца з прамых і акружнасцей), то мы можам іх пабудаваць і знайсці пункт X, які нас цікавіць. Прывядзём прыклад.

З а д а ч а (43). Дадзены тры пункты A, B, C. Пабудуйце пункт X, які аднолькава аддалены ад пунктаў A і B і знаходзіцца на дадзенай адлегласці ад пункта C.

Р а ш э н н е. Шукаемы пункт X задавальняе дзвюм умовам: 1) ён аднолькава аддалены ад пунктаў A і B; 2) ён знаходзіцца на дадзенай адлегласці ад пункта C. Геаметрычнае месца пунктаў, што задавальняюць першай умове, ёсць прамая, якая перпендыкулярная адрэзку AB і праходзіць праз яго сярэдзіну (рыс. 106). Геаметрыч-



Рыс. 106

нае месца пунктаў, якія задавальняюць другой умове, ёсць акружнасць дадзенага радыуса з цэнтрам у пункце C. Шукаемы пункт X ляжыць на перасячэнні гэтых геаметрычных месц.

КАНТРОЛЬНЫЯ ПЫТАННІ

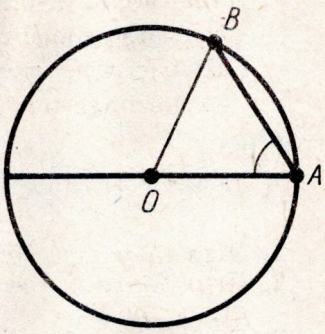
1. Што такое акружнасць, цэнтр акружнасці, радыус?
2. Што такое хорда акружнасці? Якая хорда называецца дыяметрам?
3. Якая акружнасць называецца апісанай каля трохвугольніка?
4. Дакажыце, што цэнтр акружнасці, апісанай каля трохвугольніка, ляжыць на перасячэнні пасярэдніх перпендыкуляраў да старон трохвугольніка.
5. Якая прамая называецца датычнай да акружнасці?
6. Што значыць: акружнасці датыкаюцца ў дадзеным пункце?
7. Які дотык акружнасцей называецца знешнім, які — унутраным?
8. Якая акружнасць называецца ўпісанай у трохвугольнік?
9. Дакажыце, што цэнтр акружнасці, упісанай у трохвугольнік, ляжыць на перасячэнні яго бісектрыс.
10. Растлумачце, як пабудаваць трохвугольнік па трох старанах.
11. Растлумачце, як адкласці ад дадзенай паўпрамой у дадзеную паўплоскасць вугал, роўны дадзенаму вуглу.
12. Растлумачце, як падзяліць дадзены вугал напалам.
13. Растлумачце, як падзяліць адрэзак напалам.
14. Растлумачце, як праз дадзены пункт правесці прамую, перпендыкулярную дадзенай прамой.
15. Што ўяўляе сабой геаметрычнае месца пунктаў, роўнаадаленых ад двух дадзеных пунктаў?

ЗАДАЧЫ

1. Дакажыце, што любы прамень які зыходзіць з цэнтра акружнасці, перасякае акружнасць у адным пункце.
2. Дакажыце, што прамая, якая праходзіць праз цэнтр акружнасці, перасякае акружнасць у двух пунктах.
3. Дакажыце, што дыяметр акружнасці, які праходзіць праз сярэдзіну хорды, перпендыкулярны ёй.
4. Сфармулюйце і дакажыце тэарэму, адваротную сцверджанню задачы 3.

5. 1) З пункта дадзенай акружнасці праведзены дыяметр і хорда, роўная радыусу. Знайдзіце вугал паміж імі (рыс. 107).

2) З пункта дадзенай акружнасці праведзены дзве хорды, роўныя радыусу. Знайдзіце вугал паміж імі.



Рыс. 107

6. Дакажыце, што пасярэднія перпендыкуляры да дзвюх старон трохвугольніка перасякаюцца.

7. Ці можа акружнасць датыкацца да прамой у двух пунктах? Растлумачце адказ.

8. Дакажыце, што датычная да акружнасці не мае з ёй другіх агульных пунктаў, акрамя пункта дотыку.

9. Якія вуглы ўтварае хорда AB, роўная радыусу акружнасці, з датычнай у пункце A?

10. Знайдзіце вуглы, пад якімі перасякаюцца прамыя, якія датыкаюцца да акружнасці ў канцах хорды, роўнай радыусу.

11. Акружнасці з радыусамі 30 см і 40 см датыкаюцца. Знайдзіце адлегласць паміж цэнтрамі акружнасцей у выпадках знешняга і ўнутранага дотыкаў.

12. Ці могуць датыкацца дзве акружнасці, калі іх радыусы роўны 25 см і 50 см, а адлегласць паміж цэнтрамі 60 см?

13*. 1) Пункты A, B, C ляжаць на прамой, а пункт O — па-за прамой. Ці могуць два трохвугольнікі AOB і BOC быць раўнабедранымі з асновамі AB і BC? Абгрунтуйце адказ.

2) Ці могуць акружнасць і прамая перасякацца больш чым у двух пунктах?

14*. 1) Акружнасці з цэнтрамі O і O_1 перасякаюцца ў пунктах A і B. Дакажыце, што прамая AB перпендыкулярная прамой OO_1.

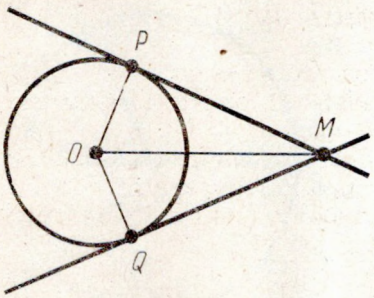
2) Дакажыце, што дзве акружнасці не могуць перасякацца больш чым у двух пунктах.

15*. 1) Праз пункт A акружнасці з цэнтрам O праведзена прамая, якая не датыкаецца да акружнасці. OB — перпендыкуляр, апушчаны на прамую. На прадаўжэнні адрэзка AB адкладзены адрэзак $BC = AB$. Дакажыце, што пункт C ляжыць на акружнасці.

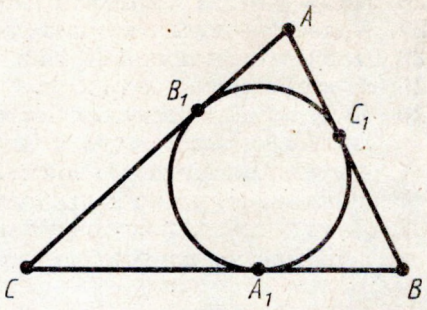
2) Дакажыце, што калі прамая мае з акружнасцю толькі адзін агульны пункт, то яна з'яўляецца датычнай да акружнасці ў гэтым пункце.

3) Дакажыце, што калі дзве акружнасці маюць толькі адзін агульны пункт, то яны датыкаюцца ў гэтым пункце.

16*. 1) З аднаго пункта праведзены дзве датычныя да акруж-



Рыс. 108



Рыс. 109

насці (рыс. 108). Дакажыце, што адрэзкі датычных MP і MQ роўныя.

2) Дакажыце, што праз адзін пункт не можа праходзіць больш за дзве датычныя да акружнасці.

17. Адна акружнасць апісана вакол роўнастаронняга трохвугольніка, а другая ўпісана ў яго. Дакажыце, што цэнтры гэтых акружнасцей супадаюць.

18. Акружнасць, упісаная ў трохвугольнік ABC, датыкаецца да яго старон у пунктах A_1, B_1, C_1 (рыс. 109). Дакажыце, што $AC_1 = \frac{AB + AC - BC}{2}$.

19. Пабудуйце трохвугольнік па трох старанах a, b і c: 1) $a = 2$ см, $b = 3$ см, $c = 4$ см; 2) $a = 3$ см, $b = 4$ см, $c = 5$ см; 3) $a = 4$ см, $b = 5$ см, $c = 6$ см.

20. Дадзены трохвугольнік ABC. Пабудуйце другі роўны яму трохвугольнік ABD.

21. Пабудуйце акружнасць дадзенага радыуса, якая праходзіць праз два дадзеныя пункты.

22. Пабудуйце трохвугольнік па дзвюх старанах і радыусу апісанай акружнасці.

23. Пабудуйце трохвугольнік ABC па наступных даных:

1) па дзвюх старанах і вуглу паміж імі:

а) $AB = 5$ см, $AC = 6$ см, $\angle A = 40°$;

б) $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $\angle B = 70°$;

2) па старане і вуглу, які да яе прылягае:

а) $AB = 6$ см, $\angle A = 30°$, $\angle B = 50°$;

б) $AB = 4$ см, $\angle A = 45°$, $\angle B = 60°$.

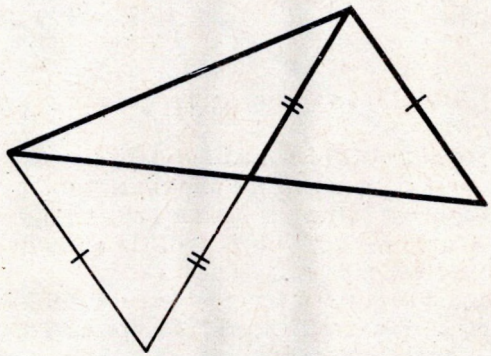
24. Пабудуйце трохвугольнік па дзвюх старанах і вуглу, процілегламу большай з іх:

1) $a = 6$ см, $b = 4$ см, $\alpha = 70°$;

2) $a = 4$ см, $b = 6$ см, $\beta = 100°$.

25. Пабудуйце раўнабедраны трохвугольнік па бакавой старане і вуглу пры аснове.

26. Пабудуйце акружнасць, упісаную ў дадзены трохвугольнік.
27. Падзяліце вугал на чатыры роўныя часткі.
28. Пабудуйце вуглы 60° і 30°.
29. Дадзен трохвугольнік. Пабудуйце яго медыяны.
30. Пабудуйце трохвугольнік па дзвюх старанах і медыяне, праведзенай да адной з іх.
31. Пабудуйце трохвугольнік па старане, медыяне, праведзенай да гэтай стараны, і радыусу апісанай акружнасці.
32. Пабудуйце трохвугольнік па дзвюх старанах і медыяне, праведзенай да трэцяй стараны (рыс. 110).



Рыс. 110

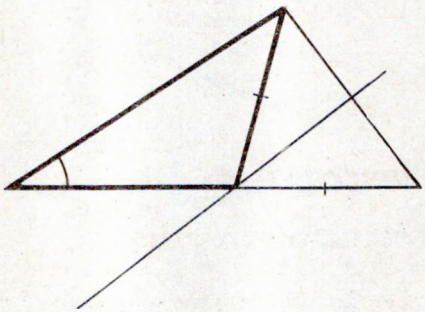
33. Дадзены трохвугольнік. Пабудуйце яго вышыні.
34. Пабудуйце акружнасць, апісаную вакол дадзенага трохвугольніка.
35. Пабудуйце прамавугольны трохвугольнік па гіпатэнузе і катэту.
36. Пабудуйце раўнабедраны трохвугольнік па бакавой старане і вышыні, апушчанай на аснову.
37. Пабудуйце трохвугольнік па дзвюх старанах і вышыні, апушчанай на трэцюю старану.
38. Пабудуйце трохвугольнік па дзвюх старанах і вышыні, апушчанай на адну з іх.
39. Пабудуйце трохвугольнік па старане і праведзеных да яе медыяне і вышыні.
40. Пабудуйце раўнабедраны трохвугольнік па аснове і радыусу апісанай акружнасці.
41. Дакажыце, што геаметрычнае месца пунктаў, аддаленых ад дадзенай прамой на адлегласць h, складаецца з дзвюх прамых, якія паралельныя дадзенай і знаходзяцца да яе на адлегласці h.
42. На дадзенай прамой знайдзіце пункт, які знаходзіцца на дадзенай адлегласці ад другой дадзенай прамой.

43. Дадзены тры пункты: A, B, C. Пабудуйце пункт X, які аднолькава аддалены ад пунктаў A і B і знаходзіцца на дадзенай адлегласці ад пункта C.

44. На дадзенай прамой знайдзіце пункт, роўнааддалены ад двух дадзеных пунктаў.

45. Дадзены чатыры пункты A, B, C, D. Знайдзіце пункт X, які аднолькава аддалены ад пунктаў A і B і аднолькава аддалены ад пунктаў C і D.

46*. Пабудуйце трохвугольнік, калі зададзены старана, прылеглы да яе вугал і сума дзвюх другіх старон (рыс. 111).



Рыс. 111

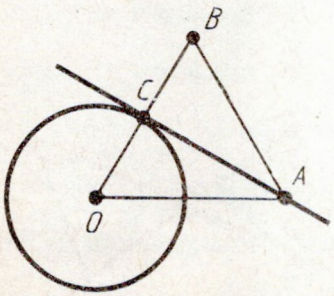
47*. Пабудуйце трохвугольнік, калі зададзены старана, прылеглы да яе вугал і рознасць дзвюх другіх старон.

48*. Пабудуйце прамавугольны трохвугольнік па катэту і суме другога катэта і гіпатэнузы.

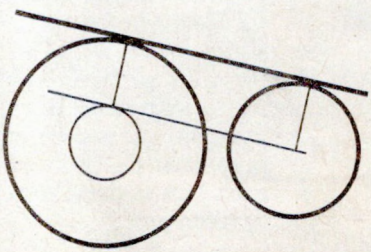
49*. 1) З пункта A да акружнасці з цэнтрам O і радыусам R праведзена датычная (рыс. 112). Дакажыце, што пункт C дотыку ляжыць на аснове раўнабедранага трохвугольніка OAB, у якога $OA = AB$, $OB = 2R$.

2) Правядзіце датычную да акружнасці, якая праходзіць праз дадзены пункт па-за акружнасцю.

50*. Правядзіце агульную датычную да дзвюх дадзеных акружнасцей (рыс. 113).



Рыс. 112



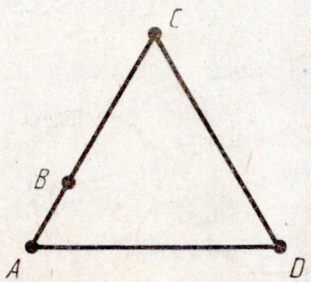
Рыс. 113

§ 6. ЧАТЫРОХВУГОЛЬНІКІ

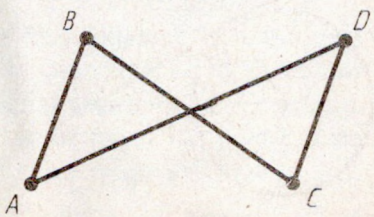
50. АЗНАЧЭННЕ ЧАТЫРОХВУГОЛЬНІКА

Чатырохвугольнікам называецца фігура, якая складаецца з чатырох пунктаў і чатырох адрэзкаў, што паслядоўна іх злучаюць. Пры гэтым ніякія тры з дадзеных пунктаў не павінны ляжаць на адной прамой, а адрэзкі, што іх злучаюць, не павінны перасякацца. Дадзеныя пункты называюцца *вяршынямі* чатырохвугольніка, а адрэзкі, якія іх злучаюць,— *старанамі* чатырохвугольніка.

Задача (1). На рысунках 114—116 дадзены тры фігуры, кожная з якіх складаецца з чатырох пунктаў і чатырох адрэзкаў, што паслядоўна іх злучаюць. Якая з гэтых фігур з'яўляецца чатырохвугольнікам?

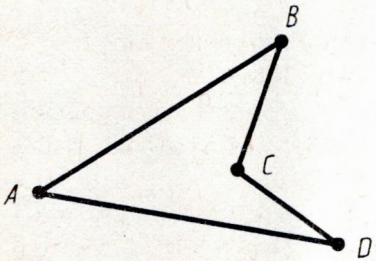


Рыс. 114

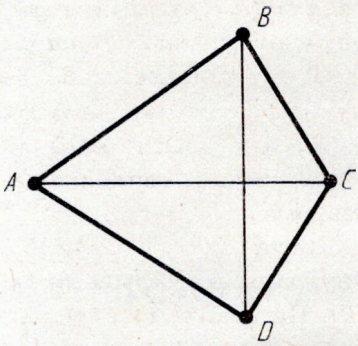


Рыс. 115

Р а ш э н н е. Чатырохвугольнікам з'яўляецца толькі фігура на рысунку 116, таму што ў фігуры на рысунку 114 пункты A, B, C ляжаць на адной прамой, а ў фігуры на рысунку 115 адрэзкі BC і AD перасякаюцца.



Рыс. 116



Рыс. 117

Вяршыні чатырохвугольніка называюцца *суседнімі*, калі яны з'яўляюцца канцамі адной з яго старон. Вяршыні, якія не з'яўляюцца суседнімі, называюцца *процілеглымі*. Адрэзкі, якія злучаюць процілеглыя вяршыні чатырохвугольніка, называюцца *дыяганалямі*.

У чатырохвугольніка на рысунку 117 дыяганалямі з'яўляюцца дрэзкі AC і BD.

Стораны чатырохвугольніка, якія зыходзяць з адной вяршыні, называюцца *суседнімі* старанамі. Стораны, якія не маюць агульнага канца, называюцца *процілеглымі* старанамі.

У чатырохвугольніка на рысунку 117 процілеглымі з'яўляюцца стораны AB і CD, BC і AD.

Чатырохвугольнік абазначаецца ўказаннем яго вяршынь. Напрыклад, чатырохвугольнік на рысунку 117 абазначаецца так: $ABCD$. У абазначэнні чатырохвугольніка вяршыні, якія стаяць побач, павінны быць суседнімі. Чатырохвугольнік $ABCD$ на рысунку 117 можна таксама абазначыць $BCDA$ або $CDBA$. Але нельга абазначыць $ABDC$ (B і D — не суседнія вяршыні).

Сума даўжынь усіх старон чатырохвугольніка называецца *перыметрам*.

51. ПАРАЛЕЛАГРАМ

Паралелаграм — гэта чатырохвугольнік, у якога процілеглыя стораны паралельныя, г. зн. ляжаць на паралельных прамых (рыс. 118).

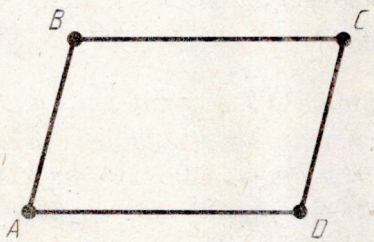
Тэарэма 6.1. ***Калі дыяганалі чатырохвугольніка перасякаюцца і пунктам перасячэння дзеляцца папалам, то гэты чатырохвугольнік — паралелаграм.***

Доказ. Няхай $ABCD$ — дадзены чатырохвугольнік і O — пункт перасячэння яго дыяганалей (рыс. 119).

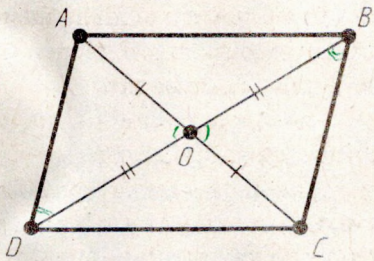
Трохвугольнікі AOD і COB роўныя. У іх вуглы пры вяршыні O роўныя як вертыкальныя, а $OD = OB$ і $OA = OC$ па ўмове тэарэмы.

Значыць, вуглы OBC і ODA роўныя. А яны з'яўляюцца ўнутранымі накрыж ляжачымі для прамых AD і BC і сякучай BD. Па прызнаку паралельнасці прамых прамыя AD і BC паралельныя. Гэтак жа даказваецца паралельнасць прамых AB і CD з дапамогай роўнасці трохвугольнікаў AOB і COD.

Паколькі процілеглыя стораны чатырохвугольніка паралельныя, то па азначэнню гэты чатырохвугольнік — паралелаграм. Тэарэма даказана.



Рыс. 118



Рыс. 119

52. УЛАСЦІВАСЦЬ ДЫЯГАНАЛЕЙ ПАРАЛЕЛАГРАМА

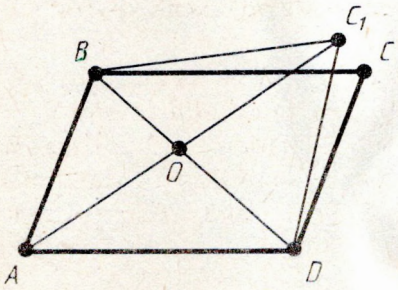
Тэарэма 6.2 (адваротная тэарэме 6.1). ***Дыяганалі паралелаграма перасякаюцца і пунктам перасячэння дзеляцца папалам.***

Доказ. Няхай $ABCD$ — дадзены паралелаграм (рыс. 120). Правядзём яго дыяганаль BD. Адзначым на ёй сярэдзіну O

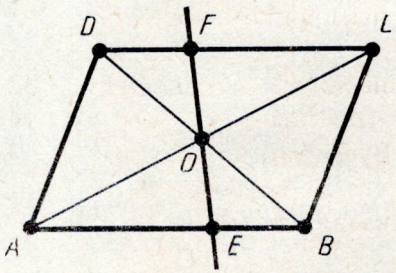
і на прадаўжэнні адрэзка AO адкладзём адрэзак OC_1, роўны AO.

Па тэарэме 6.1 чатырохвугольнік ABC_1D ёсць паралелаграм. Значыць, прамая BC_1 паралельная AD. Але праз пункт B можна правесці толькі адну прамую, паралельную AD. Значыць, прамая BC_1 супадае з прамой BC.

Гэтак жа даказваецца, што прамая DC_1 супадае з прамой DC. Значыць, пункт C_1 супадае з пунктам C. Паралелаграм $ABCD$ супадае з ABC_1D. Таму яго дыяганалі перасякаюцца і пунктам перасячэння дзеляцца папалам. Тэарэма даказана.



Рыс. 120



Рыс. 121

З а д а ч а (6). Праз пункт перасячэння дыяганалей паралелаграма праведзена прамая. Дакажыце, што адрэзак яе, заключаны паміж паралельнымі старанамі, дзеліцца ў гэтым пункце папалам.

Р а ш э н н е. Няхай $ABCD$ — дадзены паралелаграм і EF — прамая, якая перасякае паралельныя стораны AB і CD (рыс. 121). Трохвугольнікі OAE і OCF роўныя па другому прызнаку. У іх стораны OA і OC роўныя, паколькі O — сярэдзіна дыяганалі AC. Вуглы пры вяршыні O роўныя як вертыкальныя, а вуглы EAO і FCO роўныя як унутраныя накрыж ляжачыя пры паралельных AB, CD і сякучай AC.

З роўнасці трохвугольнікаў вынікае роўнасць старон: $OE = OF$. Што і трэба было даказаць.

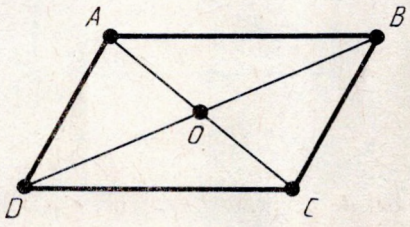
53. УЛАСЦІВАСЦЬ ПРОЦІЛЕГЛЫХ СТАРОН І ВУГЛОЎ ПАРАЛЕЛАГРАМА

Тэарэма 6.3. ***У паралелаграма процілеглыя стораны роўныя, процілеглыя вуглы роўныя.***

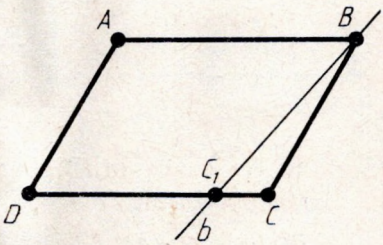
Доказ. Няхай $ABCD$ — дадзены паралелаграм (рыс. 122). Правядзём дыяганалі паралелаграма. Няхай O — пункт іх перасячэння.

Роўнасць процілеглых старон AB і CD вынікае з роўнасці трохвугольнікаў AOB і COD. У іх вуглы пры вяршыні O роўныя як вертыкальныя, а $OA = OC$ і $OB = OD$ па ўласцівасці дыяганалей паралелаграма. Зусім гэтак жа з роўнасці трохвугольнікаў AOD і COB вынікае роўнасць другой пары процілеглых старон — AD і BC.

Роўнасць процілеглых вуглоў ABC і CDA вынікае з роўнасці трохвугольнікаў ABC і CDA (па трох старанах). У іх $AB = CD$ і $BC = DA$ па даказанаму, а старана AC агульная. Зусім гэтак жа роўнасць процілеглых вуглоў BCD і DAB вынікае з роўнасці трохвугольнікаў BCD і DAB. Тэарэма даказана поўнасцю.



Рыс. 122



Рыс. 123

Задача (18). Дакажыце, што калі ў чатырохвугольніка дзве стараны паралельныя і роўныя, то ён з'яўляецца паралелаграмам.

Рашэнне. Няхай $ABCD$ — дадзены чатырохвугольнік, у якога стораны AB і CD паралельныя і роўныя (рыс. 123). Правядзём праз вяршыню B прамую b, паралельную старане AD. Гэта прамая перасякае прамень DC у некаторым пункце C_1. Чатырохвугольнік ABC_1D ёсць

паралелаграм. Паколькі ў паралелаграма процілеглыя стораны роўныя, то $C_1D = AB$. А па ўмове $AB = CD$. Значыць, $DC = DC_1$. Адсюль вынікае, што пункты C і C_1 супадаюць.

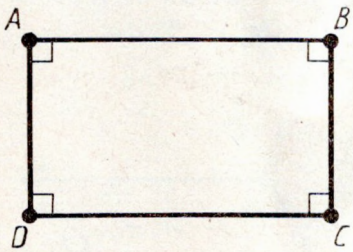
Такім чынам, чатырохвугольнік $ABCD$ супадае з паралелаграмам ABC_1D, а значыць, з'яўляецца паралелаграмам.

54. ПРАМАВУГОЛЬНІК

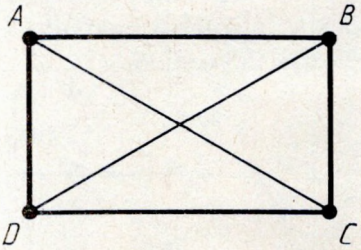
Прамавугольнік — гэта паралелаграм, у якога ўсе вуглы прамыя (рыс. 124).

Тэарэма 6.4. ***Дыяганалі прамавугольніка роўныя.***

Доказ. Няхай $ABCD$ — дадзены прамавугольнік (рыс. 125).



Рыс. 124

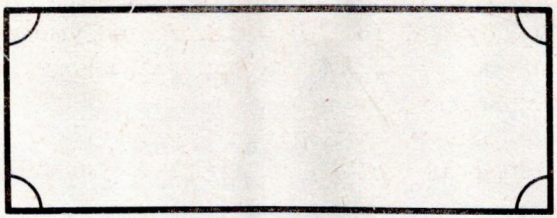


Рыс. 125

Сцверджанне тэарэмы вынікае з роўнасці прамавугольных трохвугольнікаў BAD і CDA. У іх вуглы BAD і CDA прамыя, катэт AD агульны, а катэты AB і CD роўныя як процілеглыя стораны паралелаграма. З роўнасці трохвугольнікаў вынікае, што іх гіпатэнузы роўныя. А гіпатэнузы з'яўляюцца дыяганалямі прамавугольніка. Тэарэма даказана.

Задача (24). Дакажыце, што калі ў паралелаграма ўсе вуглы роўныя, то ён з'яўляецца прамавугольнікам.

Рашэнне. Вуглы паралелаграма, якія прылягаюць да адной стараны, з'яўляюцца ўнутранымі аднастароннімі (рыс. 126), таму іх сума роўна 180°. Паколькі па ўмове

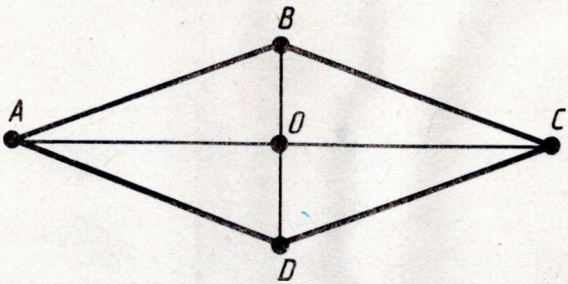


Рыс. 126

задачы гэтыя вуглы роўныя, то кожны з іх прамы. А паралелаграм, у якога ўсе вуглы прамыя, ёсць прамавугольнік.

55. РОМБ

Ромб — гэта паралелаграм, у якога ўсе стораны роўныя (рыс. 127).



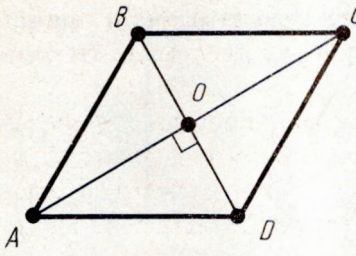
Рыс. 127

Тэарэма 6.5. ***Дыяганалі ромба перасякаюцца пад прамым вуглом. Дыяганалі ромба з'яўляюцца бісектрысамі яго вуглоў.***

Доказ. Няхай $ABCD$ — дадзены ромб (гл. рыс. 127), O — пункт перасячэння яго дыяганалей. Па ўласцівасці паралелаграма $AO = OC$. Значыць, у трохвугольніку ABC адрэзак BO з'яўляецца медыянай.

Паколькі $ABCD$ — ромб, то $AB = BC$ і трохвугольнік ABC — раўнабедраны. Па ўласцівасці раўнабедранага трохвугольніка медыяна, праведзеная да яго асновы, з'яўляецца бісектрысай і вышынёй. А гэта значыць, што дыяганаль BD з'яўляецца бісектрысай вугла B і перпендыкулярная дыяганалі AC. Тэарэма даказана.

Задача (33). Дакажыце, што калі ў паралелаграма дыяганалі перпендыкулярныя, то ён з'яўляецца ромбам.



Рыс. 128

Р а ш э н н е. Няхай $ABCD$ — паралелаграм з перпендыкулярнымі дыяганалямі і O — пункт перасячэння дыяганалей (рыс. 128). Трохвугольнікі AOB і AOD роўныя па першаму прызнаку роўнасці трохвугольнікаў. У іх вуглы пры вяршыні O па ўмове прамыя, старана AO агульная, а $OB = OD$ па ўласцівасці дыяганалей паралелаграма. З роўнасці трохвугольнікаў вынікае роўнасць старон: $AB = AD$. А па ўласцівасці процілеглых старон паралелаграма $AD = BC$, $AB = CD$.

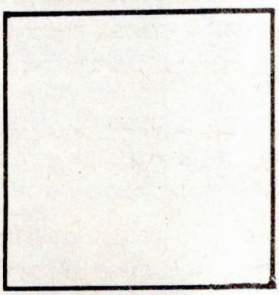
Такім чынам, усе стораны паралелаграма роўныя, а значыць, ён ёсць ромб.

56. КВАДРАТ

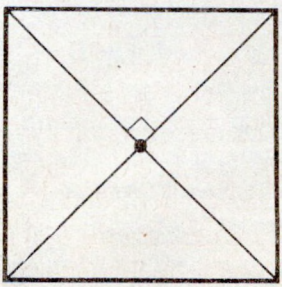
Квадрат — гэта прамавугольнік, у якога ўсе стораны роўныя (рыс. 129).

Паколькі стораны квадрата роўныя, то ён з'яўляецца таксама ромбам. Таму квадрат валодае ўласцівасцямі прамавугольніка і ромба:

1. ***У квадрата ўсе вуглы прамыя.***
2. ***Дыяганалі квадрата роўныя.***
3. ***Дыяганалі квадрата перасякаюцца пад прамым вуглом і з'яўляюцца бісектрысамі яго вуглоў.***



Рыс. 129



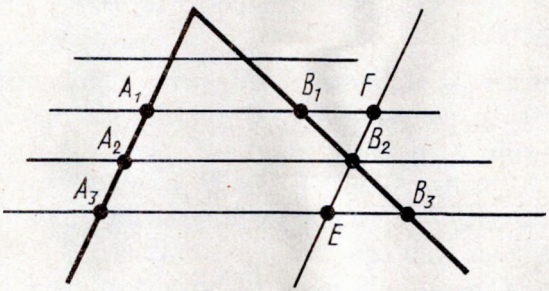
Рыс. 130

З а д а ч а (40). Дакажыце, што калі дыяганалі прамавугольніка перасякаюцца пад прамым вуглом, то ён ёсць квадрат.

Р а ш э н н е. Паколькі прамавугольнік ёсць паралелаграм, а паралелаграм з перпендыкулярнымі дыяганалямі ёсць ромб (задача 33), то ў разглядаемага прамавугольніка ўсе стораны роўныя (рыс. 130). Па азначэнню такі прамавугольнік ёсць квадрат.

57. ТЭАРЭМА ФАЛЕСА

Т э а р э м а 6.6 (тэарэма Фалеса). ***Калі паралельныя прамыя, якія перасякаюць стораны вугла, адсякаюць на адной яго старане роўныя адрэзкі, то яны адсякаюць роўныя адрэзкі і на другой яго старане*** (рыс. 131).



Рыс. 131

Д о к а з. Няхай A_1, A_2, A_3 — пункты перасячэння паралельных прамых з адной са старон вугла і A_2 ляжыць паміж A_1 і A_3 (рыс. 131). Няхай B_1, B_2, B_3 — адпаведныя пункты перасячэння гэтых прамых з другой стараной вугла. Дакажам, што калі $A_1A_2 = A_2A_3$, то $B_1B_2 = B_2B_3$.

Правядзём праз пункт B_2 прамую EF, паралельную прамой A_1A_3. Па ўласцівасці паралелаграма $A_1A_2 = FB_2$, $A_2A_3 = B_2E$. І паколькі $A_1A_2 = A_2A_3$, то $FB_2 = B_2E$.

Трохвугольнікі B_2B_1F і B_2B_3E роўныя па другому прызнаку. У іх $B_2F = B_2E$ па даказанаму. Вуглы пры вяршыні B_2 роўныя як вертыкальныя, а вуглы B_2FB_1 і B_2EB_3 роўныя як унутраныя накрыж ляжачыя пры паралельных A_1B_1 і A_3B_3 і сякучай EF.



Фалес Мілецкі — старажытнагрэчаскі вучоны (VI ст. да н. э.)

З роўнасці трохвугольнікаў вынікае роўнасць старон: $B_1B_2 = B_2B_3$. Тэарэма даказана.

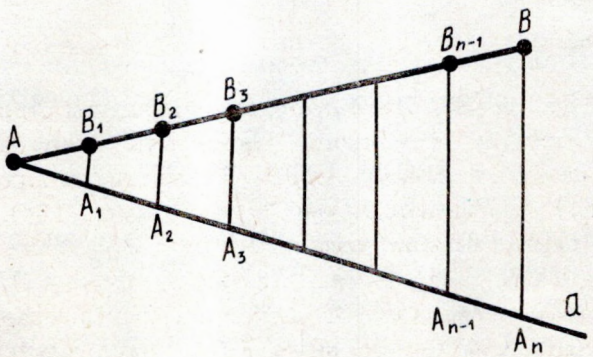
З а ў в а г а. Ва ўмове тэарэмы Фалеса замест старон вугла можна ўзяць любыя дзве прамыя, пры гэтым заключэнне тэарэмы будзе тое ж:

паралельныя прамыя, якія перасякаюць дзве дадзеныя прамыя і адсякаюць на адной прамой роўныя адрэзкі, адсякаюць роўныя адрэзкі і на другой прамой.

Часам тэарэма Фалеса будзе прымяняцца і ў такой форме.

З а д а ч а (48). Падзяліце дадзены адрэзак AB на n роўных частак.

Р а ш э н н е. Правядзём з пункта A паўпрамую a, якая не ляжыць на прамой AB (рыс. 132). Адкладзём на паўпрамой a роўныя адрэзкі: AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$. Злучым пункты A_n і B. Правядзём праз пункты A_1, A_2, ..., A_{n-1} прамыя, паралельныя прамой A_nB. Яны перасякаюць адрэзак AB у пунктах B_1, B_2, ..., B_{n-1}, якія дзеляць адрэзак AB на n роўных адрэзкаў (па тэарэме Фалеса).



Рыс. 132

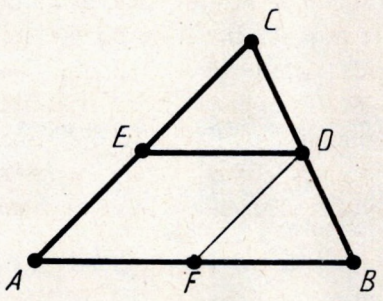
58. СЯРЭДНЯЯ ЛІНІЯ ТРОХВУГОЛЬНІКА

Сярэдняй лініяй трохвугольніка называецца адрэзак, які злучае сярэдзіны дзвюх яго старон.

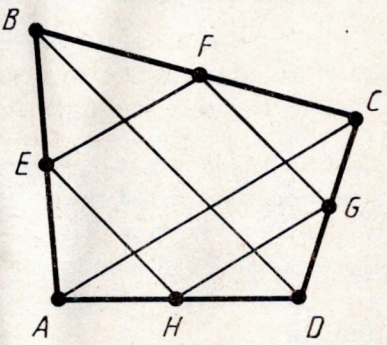
Тэарэма 6.7. ***Сярэдняя лінія трохвугольніка, якая злучае сярэдзіны дзвюх дадзеных старон, паралельная трэцяй старане і роўная яе палавіне.***

Доказ. Няхай DE — сярэдняя лінія трохвугольніка ABC (рыс. 133). Правядзём праз пункт D прамую, паралельную старане AB. Па тэарэме Фалеса яна перасякае адрэзак AC у яго сярэдзіне, г. зн. змяшчае сярэднюю лінію DE. Значыць, сярэдняя лінія DE паралельная старане AB.

Правядзём цяпер сярэднюю лінію DF. Яна паралельная старане AC. Чатырохвугольнік $AEDF$ — паралелаграм. Па ўласцівасці паралелаграма $ED = AF$, а паколькі $AF = FB$ па тэарэме Фалеса, то $ED = \frac{1}{2}AB$. Тэарэма даказана.



Рыс. 133



Рыс. 134

Задача (55). Дакажыце, што сярэдзіны старон чатырохвугольніка з'яўляюцца вяршынямі паралелаграма.

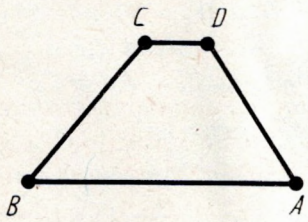
Рашэнне. Няхай $ABCD$ — дадзены чатырохвугольнік і E, F, G, H — сярэдзіны яго старон (рыс. 134). Адрэзак EF — сярэдняя лінія трохвугольніка ABC. Таму $EF \parallel AC$. Адрэзак GH — сярэдняя лінія трохвугольніка ADC. Таму $GH \parallel AC$. Такім чынам, $EF \parallel GH$, г. зн. процілеглыя стораны EF і GH чатырохвугольніка $EFGH$ паралельныя. Зусім гэтак жа даказваецца паралельнасць другой пары процілеглых старон. Значыць, чатырохвугольнік $EFGH$ — паралелаграм.

59. ТРАПЕЦЫЯ

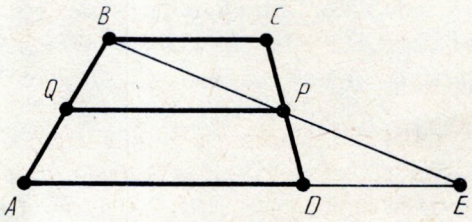
Трапецыяй называецца чатырохвугольнік, у якога толькі дзве процілеглыя стараны паралельныя. Гэтыя паралельныя стораны называюцца *асновамі* трапецыі. Дзве другія стараны называюцца *бакавымі* старанамі.

На рысунку 135 вы бачыце трапецыю $ABCD$ з асновамі AB і CD і бакавымі старанамі BC і AD.

Трапецыя, у якой бакавыя стораны роўныя, называецца *раўнабокай*. Адрэзак, які злучае сярэдзіны бакавых старон, называецца *сярэдняй лініяй* трапецыі.



Рыс. 135



Рыс. 136

Тэарэма 6.8. ***Сярэдняя лінія трапецыі паралельная асновам і роўная іх паўсуме.***

Доказ. Няхай $ABCD$ — дадзеная трапецыя (рыс. 136). Правядзём праз вяршыню B і сярэдзіну P бакавой стараны CD прамую. Яна перасякае прамую AD у некаторым пункце E.

Трохвугольнікі PBC і PED роўныя па другому прызнаку роўнасці трохвугольнікаў. У іх $CP = DP$ па пабудаванню, вуглы пры вяршыні P роўныя як вертыкальныя, а вуглы PCB і PDE роўныя як унутраныя накрыж ляжачыя пры паралельных прамых BC і AD і сякучай CD. З роўнасці трохвугольнікаў вынікае роўнасць старон: $PB = PE$, $BC = ED$.

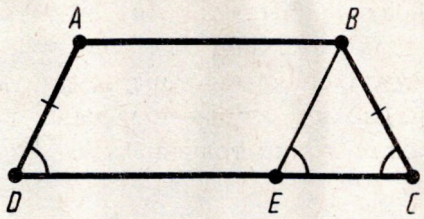
Значыць, сярэдняя лінія PQ трапецыі з'яўляецца сярэдняй лініяй трохвугольніка ABE. Па ўласцівасці сярэдняй лініі трохвугольніка $PQ \parallel AE$ і адрэзак

$$PQ = \frac{1}{2} AE = \frac{1}{2}(AD + BC).$$

Тэарэма даказана.

Задача (60). Дакажыце, што ў раўнабокай трапецыі вуглы пры аснове роўныя.

Рашэнне. Няхай $ABCD$ — раўнабокая трапецыя (рыс. 137). Дакажам, што вуглы трапецыі пры аснове CD роўныя.



Рыс. 137

Правядзём праз вяршыню B прамую, паралельную старане AD. Яна перасячэ прамень CD у некаторым пункце E. Чатырохвугольнік $ABED$ — паралелаграм. Па ўласцівасці паралелаграма $BE = AD$. Па ўмове $AD = BC$ (трапецыя раўнабокая), значыць, трохвугольнік BCE раўнабедраны з асновай EC. Вуглы трохвугольніка і трапецыі пры вяршыні C супадаюць, а вуглы пры вяршынях E і D роўныя як адпаведныя вуглы пры перасячэнні паралельных прамых сякучай. Таму $\angle ADC = \angle BCD$. Сцверджанне даказана.

60. ТЭАРЭМА АБ ПРАПАРЦЫЯНАЛЬНЫХ АДРЭЗКАХ

Тэарэма 6.9. ***Паралельныя прамыя, якія перасякаюць стораны вугла, адсякаюць ад старон вугла прапарцыянальныя адрэзкі.***

Доказ. Няхай стораны вугла A перасякаюцца паралельнымі прамымі ў пунктах B, C і B_1, C_1 адпаведна (рыс. 138). Тэарэмай сцвярджаецца, што

$$\frac{AC_1}{AC} = \frac{AB_1}{AB}. \qquad (*)$$

Дакажам спачатку роўнасць (*) у выпадку, калі існуе адрэзак такой даўжыні δ, які ўкладваецца цэлы лік разоў і на адрэзку AC, і на адрэзку AC_1. Няхай $AC = n\delta$, $AC_1 = m\delta$ і $n > m$. Разаб'ём адрэзак AC на n роўных частак (даўжыні δ). Пры гэ-

тым пункт C_1 будзе адным з пунктаў дзялення. Правядзём праз пункты дзялення прамыя, паралельныя прамой BC. Па тэарэме Фалеса гэтыя прамыя разбіваюць адрэзак AB на роўныя адрэзкі некаторай даўжыні δ_1. Маем:

$$AB = n\delta_1,\ AB_1 = m\delta_1.$$

Мы бачым, што

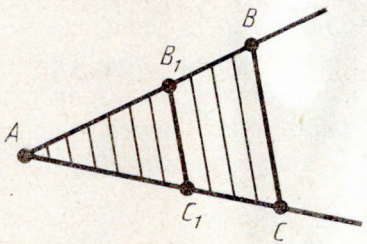
$$\frac{AC_1}{AC} = \frac{m}{n} \text{ і } \frac{AB_1}{AB} = \frac{m}{n}.$$

Значыць,

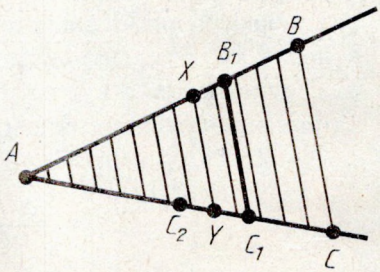
$$\frac{AC_1}{AC} = \frac{AB_1}{AB},$$

што і трэба было даказаць.

Дакажам тэарэму ў агульным выпадку (не для запамінання). Дапусцім, што $\frac{AC_1}{AC} \neq \frac{AB_1}{AB}$, напрыклад, што $\frac{AC_1}{AC} > \frac{AB_1}{AB}$.



Рыс. 138



Рыс. 139

Адкладзём на прамені AC адрэзак $AC_2 = \frac{AC}{AB} \cdot AB_1$ (рыс. 139). Пры гэтым $AC_2 < AC_1$. Разаб'ём адрэзак AC на вялікі лік n роўных частак і правядзём праз пункты дзялення прамыя, паралельныя BC.

Пры дастаткова вялікім n на адрэзку C_1C_2 будуць пункты дзялення. Абазначым адзін з іх праз Y, а адпаведны пункт на адрэзку AB_1 праз X. Па даказанаму

$$\frac{AY}{AC} = \frac{AX}{AB}.$$

Заменім у гэтай роўнасці велічыню AY меншай велічынёй AC_2, а велічыню AX большай велічынёй AB_1. Атрымаем:

$$\frac{AC_2}{AC} < \frac{AB_1}{AB}.$$

Адсюль $AC_2 < \frac{AC}{AB} \cdot AB_1$. Але $AC_2 = \frac{AC}{AB} \cdot AB_1$. Мы прыйшлі да супярэчнасці. Тэарэма даказана.

61. ПАБУДАВАННЕ ЧАЦВЁРТАГА ПРАПАРЦЫЯНАЛЬНАГА АДРЭЗКА

Задача 6.1. ***Дадзены адрэзкі*** a, b, c. ***Пабудаваць адрэзак*** $x = \frac{bc}{a}$.

Рашэнне. Будуем любы неразгорнуты вугал з вяршыняй O (рыс. 140). Адкладваем на адной старане вугла адрэзкі $OA = a$ і $OB = b$, а на другой старане — адрэзак $OC = c$. Злучаем пункты A і C прамой і праводзім паралельную ёй прамую BD праз пункт B. Адрэзак $OD = x$.

Сапраўды, па тэарэме аб прапарцыянальных адрэзках

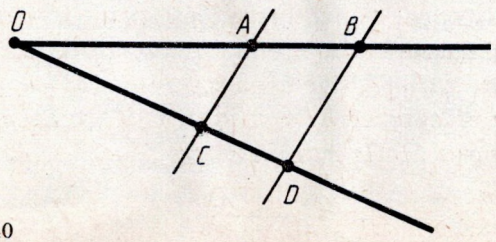
$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}.$$

Адсюль

$$OD = \frac{OB \cdot OC}{OA} = \frac{b \cdot c}{a}.$$

Такім чынам, адрэзак OD ёсць шукаемы адрэзак x.

Заўвага. Пабудаваны адрэзак x называецца чацвёртым прапарцыянальным. Гэта назва звязана з тым, што ён з'яўляецца чацвёртым членам прапорцыі $a : b = c : x$.



Рыс. 140

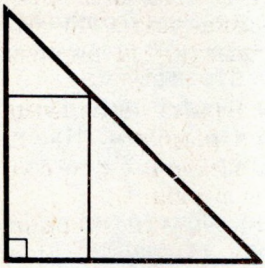
КАНТРОЛЬНЫЯ ПЫТАННІ

1. Якая фігура называецца чатырохвугольнікам?
2. Якія вяршыні чатырохвугольніка называюцца суседнімі, якія — процілеглымі?
3. Што такое дыяганалі чатырохвугольніка?
4. Якія стораны чатырохвугольніка называюцца суседнімі? Якія называюцца процілеглымі?
5. Як абазначаецца чатырохвугольнік?
6. Што такое паралелаграм?
7. Дакажыце, што калі дыяганалі чатырохвугольніка перасякаюцца і пунктам перасячэння дзеляцца папалам, то ён з'яўляецца паралелаграмам.
8. Дакажыце, што дыяганалі паралелаграма перасякаюцца і пунктам перасячэння дзеляцца папалам.
9. Дакажыце, што ў паралелаграма процілеглыя стораны роўныя, процілеглыя вуглы роўныя.
10. Што такое прамавугольнік?
11. Дакажыце, што дыяганалі прамавугольніка роўныя.
12. Што такое ромб?
13. Дакажыце, што дыяганалі ромба перасякаюцца пад прамым вуглом; дыяганалі ромба з'яўляюцца бісектрысамі яго вуглоў.
14. Што такое квадрат? Пералічыце ўласцівасці квадрата.
15. Дакажыце тэарэму Фалеса.
16. Дакажыце, што сярэдняя лінія трохвугольніка роўная палавіне адпаведнай стараны.
17. Які чатырохвугольнік называецца трапецыяй?
18. Якая трапецыя называецца раўнабокай?
19. Дакажыце, што сярэдняя лінія трапецыі роўна паўсуме асноў.
20. Дакажыце тэарэму аб прапарцыянальных адрэзках.

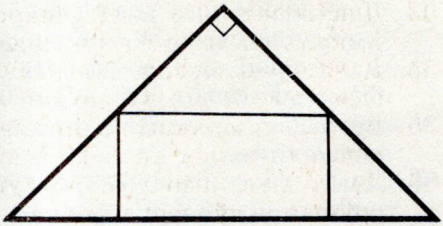
ЗАДАЧЫ

1. На рысунках 114—116 дадзены тры фігуры, кожная з якіх складаецца з чатырох пунктаў і чатырох адрэзкаў, што паслядоўна злучаюць іх. Якая з гэтых фігур з'яўляецца чатырохвугольнікам?
2. Пабудуйце які-небудзь чатырохвугольнік $PQRS$. Пакажыце яго процілеглыя стораны і вяршыні.
3. Колькі можна пабудаваць паралелаграмаў з вяршынямі ў трох зададзеных пунктах, якія не ляжаць на адной прамой? Пабудуйце іх.

4. Бакавая старана раўнабедранага трохвугольніка роўна 5 м. З пункта, узятага на аснове гэтага трохвугольніка, праведзены дзве прамыя, паралельныя бакавым старанам. Знайдзіце перыметр паралелаграма, які атрымаўся.
5. Адлегласці ад пункта перасячэння дыяганалей паралелаграма да дзвюх яго вяршынь роўны 3 см і 4 см. Чаму роўныя адлегласці ад яе да дзвюх другіх вяршынь? Растлумачце адказ.
6. Праз пункт перасячэння дыяганалей паралелаграма праведзена прамая. Дакажыце, што адрэзак яе, заключаны паміж паралельнымі старанамі, дзеліцца гэтым пунктам папалам.
7. У паралелаграме $ABCD$ праз пункт перасячэння дыяганалей праведзена прамая, якая адсякае на старанах BC і AD адрэзкі $BE = 2$ м і $AF = 2{,}8$ м. Знайдзіце стораны BC і AD.
8. У паралелаграма $ABCD$ $AB = 10$ см, $BC = 15$ см. Чаму роўныя стораны AD і CD? Растлумачце адказ.
9. У паралелаграма $ABCD$ $\angle A = 30°$. Чаму роўныя вуглы B, C, D? Растлумачце адказ.
10. Перыметр паралелаграма $ABCD$ роўны 10 см. Знайдзіце даўжыню дыяганалі BD, ведаючы, што перыметр трохвугольніка ABD роўны 8 см.
11. Адзін з вуглоў паралелаграма роўны 40°. Знайдзіце астатнія вуглы.
12. Знайдзіце вуглы паралелаграма, ведаючы, што адзін з іх большы за другі на 50°.
13. Ці можа адзін вугал паралелаграма быць роўны 40°, а другі — 50°?
14. Дыяганаль паралелаграма ўтварае з дзвюма яго старанамі вуглы 25° і 35°. Знайдзіце вуглы паралелаграма.
15. Знайдзіце ўсе вуглы паралелаграма, калі сума двух з іх роўна: 1) 80°; 2) 100°; 3) 160°.
16. Знайдзіце ўсе вуглы паралелаграма, калі рознасць двух з іх роўна: 1) 70°; 2) 110°; 3) 140°.
17. У паралелаграме $ABCD$ пункт E — сярэдзіна стараны BC, а F — сярэдзіна стараны AD. Дакажыце, што чатырохвугольнік $BEDF$ — паралелаграм.
18. Дакажыце, што калі ў чатырохвугольніка дзве стараны паралельныя і роўныя, то ён з'яўляецца паралелаграмам.
19. У паралелаграме $ABCD$ праведзена бісектрыса вугла A, якая перасякае старану BC у пункце E. Чаму роўны адрэзкі BE і EC, калі $AB = 9$ см, $AD = 15$ см?
20. Дзве стараны паралелаграма адносяцца як 3 : 4, а перыметр яго роўны 2,8 м. Знайдзіце стораны.



Рыс. 141



Рыс. 142

21. У паралелаграме $ABCD$ перпендыкуляр, апушчаны з вяршыні B на старану AD, дзеліць яе папалам. Знайдзіце дыяганаль BD і стораны паралелаграма, калі вядома, што перыметр паралелаграма роўны 3,8 м, а перыметр трохвугольніка ABD роўны 3 м.

22. Пабудуйце паралелаграм: 1) па дзвюх старанах і дыяганалі; 2) па старане і дзвюх дыяганалях.

23. Пабудуйце паралелаграм: 1) па дзвюх старанах і вуглу; 2) па дыяганалях і вуглу паміж імі.

24. Дакажыце, што калі ў паралелаграма ўсе вуглы роўныя, то ён з'яўляецца прамавугольнікам.

25. Дакажыце, што калі ў паралелаграма хаця б адзін вугал прамы, то ён з'яўляецца прамавугольнікам.

26. Дакажыце, што калі ў паралелаграма дыяганалі роўныя, то ён з'яўляецца прамавугольнікам.

27. Бетонная пліта з прамалінейнымі краямі павінна мець форму прамавугольніка. Як пры дапамозе вяроўкі праверыць правільнасць формы пліты?

28. Бісектрыса аднаго з вуглоў прамавугольніка дзеліць старану прамавугольніка папалам. Знайдзіце перыметр прамавугольніка, калі яго меншая старана роўна 10 см.

29. У прамавугольніку пункт перасячэння дыяганалей знаходзіцца на адлегласці ад меншай стараны на 4 см далей, чым ад большай стараны. Перыметр прамавугольніка роўны 56 см. Знайдзіце стораны прамавугольніка.

30. З аднаго пункта акружнасці праведзены дзве ўзаемна перпендыкулярныя хорды, якія аддалены ад цэнтра на 6 см і 10 см. Знайдзіце іх даўжыні.

31. У прамавугольны трохвугольнік, кожны катэт якога роўны 6 см, упісаны прамавугольнік, які мае з трохвугольнікам агульны вугал (рыс. 141). Знайдзіце перыметр прамавугольніка.

32. У раўнабедраны прамавугольны трохвугольнік упісаны прамавугольнік так, што дзве яго вяршыні знаходзяцца на гіпатэнузе, а дзве другія — на катэтах (рыс. 142). Чаму роў-

ны стораны прамавугольніка, калі вядома, што яны адносяцца як 5 : 2, а гіпатэнуза трохвугольніка роўна 45 см?

33. Дакажыце, што калі ў паралелаграма дыяганалі перпендыкулярныя, то ён з'яўляецца ромбам.

34. Дакажыце, што калі дыяганаль паралелаграма з'яўляецца бісектрысай яго вуглоў, то ён з'яўляецца ромбам.

35. Вуглы, утвараемыя дыяганалямі ромба з адной з яго старон, адносяцца як 4 : 5. Знайдзіце вуглы ромба.

36. Дакажыце, што чатырохвугольнік, у якога ўсе стораны роўныя, з'яўляецца ромбам.

37. У ромбе адна з дыяганалей роўна старане. Знайдзіце вуглы ромба.

38. Пабудуйце ромб: 1) па вуглу і дыяганалі, якая зыходзіць з вяршыні гэтага вугла; 2) па дыяганалі і процілегламу вуглу.

39. Пабудуйце ромб: 1) па старане і дыяганалі; 2) па дзвюх дыяганалях.

40. Дакажыце, што калі дыяганалі прамавугольніка перасякаюцца пад прамым вуглом, то ён ёсць квадрат.

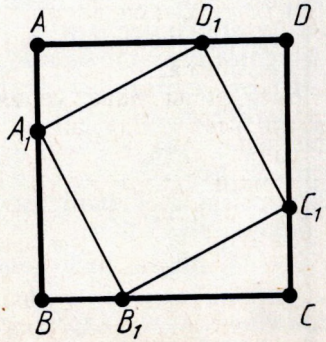
41. У раўнабедраны прамавугольны трохвугольнік, кожны катэт якога 2 м, упісаны квадрат, які мае з ім агульны вугал. Знайдзіце перыметр квадрата.

42. Дадзены квадрат $ABCD$. На кожнай з яго старон адкладзены роўныя адрэзкі: $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$. Дакажыце, што чатырохвугольнік $A_1B_1C_1D_1$ ёсць квадрат (рыс. 143).

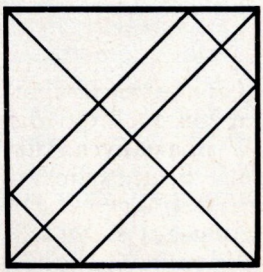
43. Дыяганаль квадрата роўна 4 м. Старана яго роўна дыяганалі другога квадрата. Знайдзіце старану апошняга.

44. Дадзены квадрат, старана якога 1 м, дыяганаль яго роўна старане другога квадрата. Знайдзіце дыяганаль апошняга.

45. У квадрат (рыс. 144) упісаны прамавугольнік так, што на кожнай старане квадрата знаходзіцца адна вяршыня прамавугольніка і стораны прамавугольніка паралельныя дыя-



Рыс. 143



Рыс. 144

ганалям квадрата. Знайдзіце стораны прамавугольніка, ведаючы, што адна з іх удвая большая за другую і што дыяганаль квадрата роўна 12 м.

46. У раўнабедраны прамавугольны трохвугольнік упісаны квадрат так, што дзве яго вяршыні знаходзяцца на гіпатэнузе, а другія дзве — на катэтах. Знайдзіце старану квадрата, калі вядома, што гіпатэнуза роўна 3 м.

47. З дадзенага пункта праведзены да акружнасці дзве ўзаемна перпендыкулярныя датычныя, радыус акружнасці 10 см. Знайдзіце даўжыні датычных (адлегласць ад дадзенага пункта да пункта дотыку).

48. Падзяліце дадзены адрэзак AB на n роўных частак.

49. Падзяліце дадзены адрэзак на дадзены лік роўных частак: 1) 3; 2) 5; 3) 6.

50. Стораны трохвугольніка роўны 8 см, 10 см, 12 см. Знайдзіце стораны трохвугольніка, вяршынямі якога з'яўляюцца сярэдзіны старон дадзенага трохвугольніка.

51. Перыметр трохвугольніка роўны 12 см; сярэдзіны старон злучаны адрэзкамі. Знайдзіце перыметр атрыманага трохвугольніка.

52. Сярэдняя лінія раўнабедранага трохвугольніка, паралельная аснове, роўна 3 см. Знайдзіце стораны трохвугольніка, калі яго перыметр роўны 16 см.

53. Як пабудаваць трохвугольнік, калі зададзены сярэдзіны яго старон?

54. Дакажыце, што вяршыні трохвугольніка роўнааддалены ад прамой, якая праходзіць праз сярэдзіны дзвюх яго старон.

55. Дакажыце, што сярэдзіны старон чатырохвугольніка з'яўляюцца вяршынямі паралелаграма.

56. Знайдзіце стораны паралелаграма з папярэдняй задачы, калі вядома, што дыяганалі чатырохвугольніка роўны 10 м і 12 м.

57. У чатырохвугольніка дыяганалі роўны a і b. Знайдзіце перыметр чатырохвугольніка, вяршынямі якога з'яўляюцца сярэдзіны старон дадзенага чатырохвугольніка.

58. Дакажыце, што сярэдзіны старон прамавугольніка з'яўляюцца вяршынямі ромба. І наадварот, сярэдзіны старон ромба з'яўляюцца вяршынямі прамавугольніка.

59. Бакавая старана трапецыі падзелена на тры роўныя часткі, з пунктаў дзялення праведзены да другой стараны адрэзкі, паралельныя асновам. Знайдзіце даўжыні гэтых адрэзкаў, калі асновы трапецыі роўны 2 м і 5 м.

60. Дакажыце, што ў раўнабокай трапецыі вуглы пры аснове роўныя.

61. Чаму роўны вуглы раўнабокай трапецыі, калі вядома, што рознасць процілеглых вуглоў роўна 40°?

62. У раўнабокай трапецыі большая аснова роўна 2,7 м, бакавая старана роўна 1 м, вугал паміж імі 60°. Знайдзіце меншую аснову.

63. У раўнабокай трапецыі вышыня праведзеная з вяршыні тупога вугла, дзеліць большую аснову на адрэзкі 6 см і 30 см. Знайдзіце асновы трапецыі.

64*. Меншая аснова раўнабокай трапецыі роўна бакавой старане, а дыяганаль перпендыкулярная бакавой старане (рыс. 145). Знайдзіце вуглы трапецыі.

65. Па адзін бок ад прамой a дадзены два пункты A і B на адлегласцях 10 м і 20 м ад яе. Знайдзіце адлегласць ад сярэдзіны адрэзка AB да прамой a.

66. Па розныя бакі ад прамой a дадзены два пункты A і B на адлегласцях 10 см і 4 см ад яе. Знайдзіце адлегласць ад сярэдзіны адрэзка AB да прамой a.

67. Асновы трапецыі адносяцца як 2 : 3, а сярэдняя лінія роўна 5 м. Знайдзіце асновы.

68. Канцы дыяметра аддалены ад датычнай да акружнасці на 1,6 м і 0,6 м. Знайдзіце даўжыню дыяметра.

69. Сярэдняя лінія трапецыі роўна 7 см, а адна з яе асноў большая за другую на 4 см. Знайдзіце асновы трапецыі.

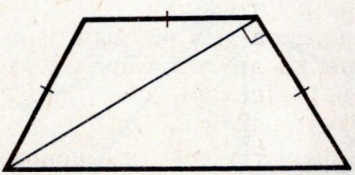
70. Вышыня, праведзеная з вяршыні тупога вугла раўнабокай трапецыі, дзеліць большую аснову на часткі, якія маюць даўжыні a і $b (a > b)$. Знайдзіце сярэднюю лінію трапецыі.

71*. Пабудуйце трапецыю па асновах і бакавых старанах.

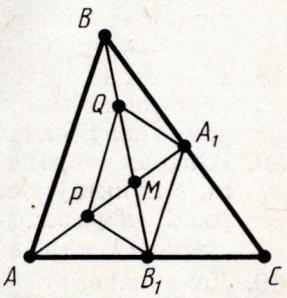
72*. Пабудуйце трапецыю па асновах і дыяганалях.

73*. Дадзены адрэзкі a, b, c, d, e. Пабудуйце адрэзак $x = \frac{abc}{de}$.

74*. 1) У трохвугольніку ABC праведзены медыяны AA_1 і BB_1, якія перасякаюцца ў пункце M (рыс. 146). У трохвугольніку AMB праведзена сярэдняя лінія PQ. Дакажыце, што



Рыс. 145



Рыс. 146

чатырохвугольнік A_1B_1PQ — паралелаграм.

2) Дакажыце, што любыя дзве медыяны трохвугольніка ў пункце перасячэння дзеляцца ў адносіне 2 : 1, лічачы ад вяршыні.

3) Дакажыце, што ўсе тры медыяны трохвугольніка перасякаюцца ў адным пункце.

§ 7. ТЭАРЭМА ПІФАГОРА

62. КОСІНУС ВУГЛА

Косінусам вострага вугла прамавугольнага трохвугольніка называецца адносіна прылеглага катэта да гіпатэнузы.

Косінус вугла α абазначаецца так: $\cos\alpha$. На рысунку 147 паказаны прамавугольны трохвугольнік ABC з вуглом A, роўным α. Косінус вугла α роўны адносіне катэта AC, прылеглага да гэтага вугла, да гіпатэнузы AB, г. зн.

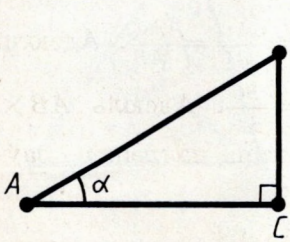
$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB}.$$

Тэарэма 7.1. ***Косінус вугла залежыць толькі ад градуснай меры вугла і не залежыць ад размяшчэння і памераў трохвугольніка.***

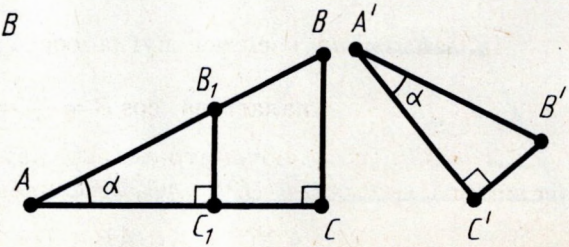
Гэта азначае, што ў двух прамавугольных трохвугольнікаў з адным і тым жа вострым вуглом косінусы гэтага вугла роўныя.

Доказ. Няхай ABC і $A'B'C'$ — два прамавугольныя трохвугольнікі з адным і тым жа вуглом пры вяршынях A і A', роўным α (рыс. 148). Трэба даказаць, што

$$\frac{A'C'}{A'B'} = \frac{AC}{AB}.$$



Рыс. 147



Рыс. 148

Пабудуем трохвугольнік AB_1C_1, роўны трохвугольніку $A'B'C'$, як паказана на рысунку 148. Паколькі прамыя BC і B_1C_1 перпендыкулярныя прамой AC, то яны паралельныя. Па тэарэме аб прапарцыянальных адрэзках

$$\frac{AC_1}{AB_1} = \frac{AC}{AB}.$$

Паколькі па пабудаванню $AC_1 = A'C'$, $AB_1 = A'B'$, то

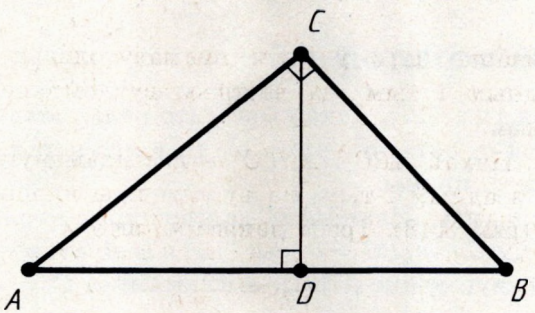
$$\frac{A'C'}{A'B'} = \frac{AC}{AB}.$$

Тэарэма даказана.

63. ТЭАРЭМА ПІФАГОРА

Тэарэма 7.2 (тэарэма Піфагора). ***У прамавугольным трохвугольніку квадрат гіпатэнузы роўны суме квадратаў катэтаў.***

Доказ. Няхай ABC — дадзены прамавугольны трохвугольнік з прамым вуглом C. Правядзём вышыню CD з вяршыні прамога вугла C (рыс. 149).



Рыс. 149

Па азначэнню косінуса вугла $\cos A = \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$. Адсюль $AB \cdot AD = AC^2$. Аналагічна $\cos B = \frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}$. Адсюль $AB \times \times BD = BC^2$. Складаючы атрыманыя роўнасці пачленна і заўважаючы, што $AD + DB = AB$, атрымаем:

$$AC^2 + BC^2 = AB(AD + DB) = AB^2.$$

Тэарэма даказана.

З тэарэмы Піфагора вынікае, што ***ў прамавугольным трохвугольніку любы з катэтаў меншы за гіпатэнузу.*** Адсюль, у сваю чаргу, вынікае, што $\cos\alpha < 1$ ***для любога вострага вугла*** α.

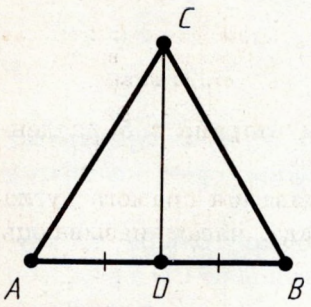
З а д а ч а (11). Знайдзіце медыяну раўнабедранага трохвугольніка з асновай a і бакавой стараной b, праведзеную да асновы.

Р а ш э н н е. Няхай ABC — раўнабедраны трохвугольнік з асновай AB і CD — яго медыяна, праведзеная да асновы (рыс. 150). Як мы ведаем, медыяна раўнабедранага трохвугольніка, праведзеная да асновы, з'яўляецца вышынёй. Таму трохвугольнік ACD прамавугольны з прамым вуглом D. Па тэарэме Піфагора

$$AD^2 + CD^2 = AC^2,\ \left(\frac{a}{2}\right)^2 + CD^2 = b^2.$$

Адсюль

$$CD = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

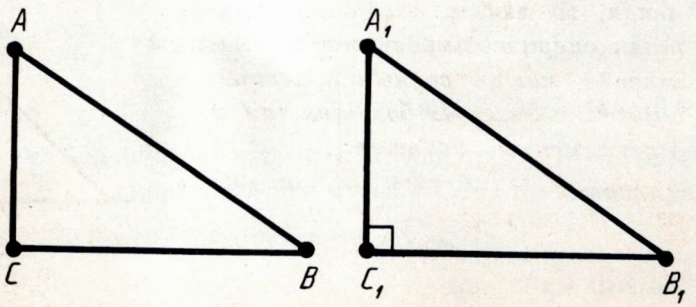


Рыс. 150

64. ЕГІПЕЦКІ ТРОХВУГОЛЬНІК

З а д а ч а (17). Дакажыце, што калі трохвугольнік мае стораны a, b, c і $a^2 + b^2 = c^2$, то ў яго вугал, процілеглы старане c, прамы.

Р а ш э н н е. Няхай ABC дадзены трохвугольнік, у якога $AB = c$, $AC = a$, $BC = b$ (рыс. 151). Пабудуем прамавугольны трохвугольнік $A_1B_1C_1$ з катэтамі $A_1C_1 = a$ і $B_1C_1 = b$.



Рыс. 151

Па тэарэме Піфагора ў яго гіпатэнуза $A_1B_1 = \sqrt{a^2 + b^2} = c$. Такім чынам, трохвугольнікі ABC і $A_1B_1C_1$ роўныя па трэцяму прызнаку. З роўнасці трохвугольнікаў вынікае, што вугал трохвугольніка ABC пры вяршыні C прамы.



Піфагор — старажытнагрэчаскі вучоны (VI ст. да н. э.)

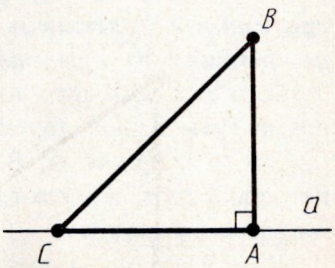
Землямеры Старажытнага Егіпта для пабудавання прамога вугла карысталіся наступным прыёмам. Вяроўку вузламі дзялілі на 12 роўных частак і канцы звязвалі. Затым вяроўку расцягвалі на зямлі так, каб атрымліваўся трохвугольнік са старанамі 3, 4 і 5 дзяленняў. Вугал трохвугольніка, процілеглы старане з 5 дзяленнямі, быў прамы ($3^2 + 4^2 = 5^2$).

У сувязі з дадзеным спосабам пабудавання прамога вугла трохвугольнік са старанамі 3, 4 і 5 адз. часам называюць *егіпецкім*.

65. ПЕРПЕНДЫКУЛЯР І НАХІЛЕНАЯ

Няхай BA — перпендыкуляр, апушчаны з пункта B на прамую a, і C — любы пункт прамой a, адрозны ад A. Адрэзак BC называецца *нахіленай*, праведзенай з пункта B да прамой a (рыс. 152). Пункт C называецца *асновай нахіленай*. Адрэзак AC называецца *праекцыяй нахіленай*.

З тэарэмы Піфагора вынікае, што ***калі да прамой з аднаго пункта праведзены перпендыкуляр і нахіленая, то любая нахіленая большая за перпендыкуляр, роўныя нахіленыя маюць роўныя праекцыі, з дзвюх нахіленых большая тая, у якой праекцыя большая.***



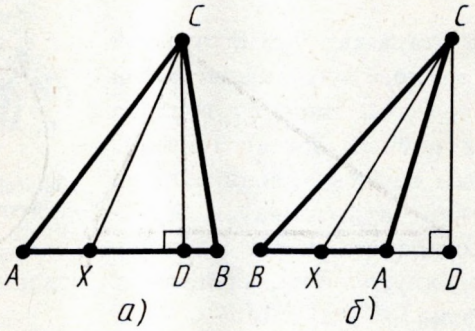
Рыс. 152

Сапраўды (гл. рыс. 152), па тэарэме Піфагора

$$AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

Адсюль відаць, што $BC > AB$. Пры дадзеным AB чым больш AC, тым больш BC.

З а д а ч а (19). На старане AB трохвугольніка ABC узяты пункт X. Дакажыце, што адрэзак CX меншы прынамсі за адну са старон AC ці BC.



Рыс. 153

Р а ш э н н е. Правядзём вышыню CD трохвугольніка. У любым выпадку адрэзак DX меншы або AD (рыс. 153, *а*), або BD (рыс. 153, *б*). Па ўласцівасці нахіленых, праведзеных з аднаго пункта, адсюль вынікае, што адрэзак CX меншы прынамсі за адзін з адрэзкаў AC ці BC. Што і трэба было даказаць.

66. НЯРОЎНАСЦЬ ТРОХВУГОЛЬНІКА

Калі пункты A і B розныя, то *адлегласцю* паміж імі называецца даўжыня адрэзка AB. Калі пункты A і B супадаюць, то адлегласць паміж імі прымаецца роўнай нулю.

Т э а р э м а 7.3 (няроўнасць трохвугольніка). ***Якія б ні былі тры пункты, адлегласць паміж любымі двума з гэтых пунктаў не большая за суму адлегласцей ад іх да трэцяга пункта.***

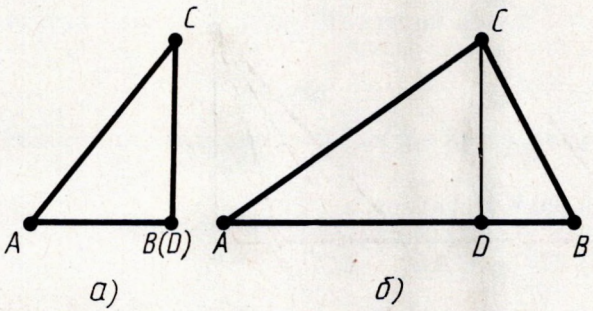
Гэта значыць, што кожная з гэтых адлегласцей меншая або роўна суме дзвюх другіх.

Д о к а з. Няхай A, B, C — тры дадзеныя пункты. Калі два пункты з трох або ўсе тры пункты супадаюць, то сцверджанне тэарэмы відавочна.

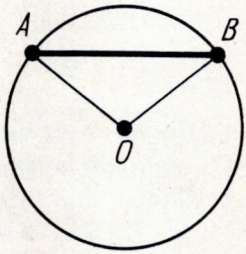
Калі ўсе пункты розныя і ляжаць на адной прамой, то адзін з іх ляжыць паміж двума другімі, напрыклад B. У гэтым

выпадку $AB + BC = AC$. Адсюль відаць, што кожная з трох адлегласцей не большая за суму дзвюх другіх.

Дапусцім цяпер, што пункты не ляжаць на адной прамой (рыс. 154). Дакажам, што $AB < AC + BC$. Апусцім перпендыкуляр CD на прамую AB. Па даказанаму $AB \leqslant AD + BD$. І паколькі $AD < AC$ і $BD < BC$, то $AB < AC + BC$. Тэарэма даказана.



Рыс. 154



Рыс. 155

Заўважым, што ў выпадку, калі пункты не ляжаць на адной прамой, у няроўнасці трохвугольніка строгая няроўнасць. Адсюль вынікае, што ***ў любым трохвугольніку кожная старана меншая за суму дзвюх другіх старон.***

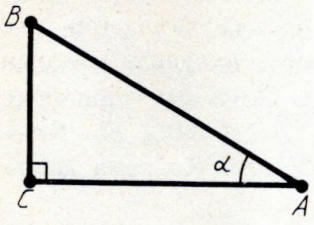


Задача (23). Дакажыце, што любая хорда акружнасці не большая за дыяметр і роўна дыяметру толькі тады, калі сама з'яўляецца дыяметрам.

Рашэнне (рыс. 155). Па няроўнасці трохвугольніка $AB \leqslant OA + OB = 2R$, прычым калі цэнтр O не ляжыць на адрэзку AB, то няроўнасць строгая. Роўнасць мае месца толькі ў выпадку, калі хорда праходзіць праз цэнтр, г. зн. з'яўляецца дыяметрам.

67. СУАДНОСІНЫ ПАМІЖ СТАРАНАМІ І ВУГЛАМІ Ў ПРАМАВУГОЛЬНЫМ ТРОХВУГОЛЬНІКУ

Няхай ABC — прамавугольны трохвугольнік з прамым вуглом C і вострым вуглом пры вяршыні A, роўным α (рыс. 156). Згодна з азначэннем $\cos\alpha$ роўны адносіне катэта, прылеглага да вугла α, да гіпатэнузы.



Рыс. 156

Сінусам вугла α (абазначаецца $\sin\alpha$) называецца адносіна процілеглага катэта BC да гіпатэнузы AB:

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB}.$$

Тангенсам вугла α (абазначаецца $\operatorname{tg}\alpha$) называецца адносіна процілеглага катэта BC да прылеглага катэта AC:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC}.$$

Сінус і тангенс вугла, гэтак жа як і косінус, залежаць толькі ад велічыні вугла.

Сапраўды, па тэарэме Піфагора

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}.$$

Па азначэнню

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB}.$$

Падставім значэнне BC:

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{AB^2 - AC^2}}{AB} = \sqrt{1 - \left(\frac{AC}{AB}\right)^2} = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}.$$

Паколькі $\cos\alpha$ залежыць толькі ад велічыні вугла, то і $\sin\alpha$ залежыць толькі ад велічыні вугла. Па азначэнню

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC}.$$

Падзелім лічнік і назоўнік на AB:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AB} : \frac{AC}{AB} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Адсюль відаць, што і $\operatorname{tg}\alpha$ залежыць толькі ад велічыні вугла.

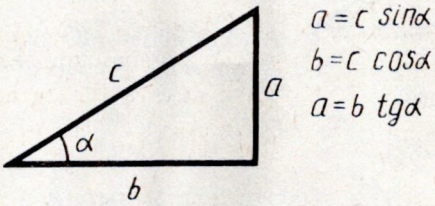
З азначэння $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$ атрымліваем наступныя правілы:

Катэт, процілеглы вуглу α, роўны здабытку гіпатэнузы на $\sin\alpha$.

Катэт, прылеглы да вугла α, роўны здабытку гіпатэнузы на $\cos\alpha$.

Катэт, процілеглы вуглу α, роўны здабытку другога катэта на $\operatorname{tg}\alpha$.

Гэтыя правілы дазваляюць, ведаючы адну са старон прамавугольнага трохвугольніка і востры вугал, знаходзіць дзве другія стараны; ведаючы дзве стараны, знаходзіць вострыя вуглы (рыс. 157).



Рыс. 157

Задача (47). У прамавугольным трохвугольніку дадзены гіпатэнуза c і вострый вугал α. Знайдзіце катэты, іх праекцыі на гіпатэнузу і вышыню, апушчаную на гіпатэнузу.

Рашэнне (рыс. 158).

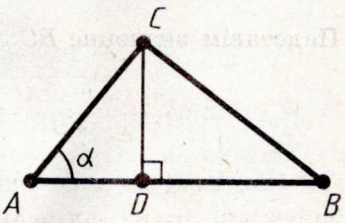
$AC = AB \cos\alpha = c\cos\alpha;$

$BC = AB \sin\alpha = c\sin\alpha;$

$BD = BC \sin\alpha = c\sin^2\alpha;$

$AD = AC \cos\alpha = c\cos^2\alpha;$

$CD = AC \sin\alpha = c\sin\alpha\cos\alpha.$



Рыс. 158

Для $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$ складзены спецыяльныя табліцы. Гэтыя табліцы дазваляюць па дадзенаму вуглу α знайсці $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$ або па значэннях $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ знайсці адпаведны вугал. Цяпер для гэтай мэты звычайна прымяняюць мікракалькулятары.

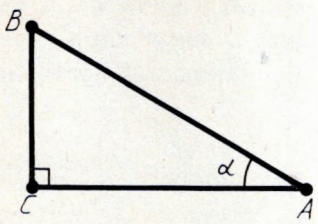
68. АСНОЎНЫЯ ТРЫГАНАМЕТРЫЧНЫЯ ТОЕСНАСЦІ

Адну тоеснасць вы ўжо ведаеце:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Дакажам наступныя тоеснасці:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,\quad 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha},\quad 1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$



Рыс. 159

Возьмем любы прамавугольны трохвугольнік ABC з вуглом пры вяршыні A, роўным α (рыс. 159). Па тэарэме Піфагора

$$BC^2 + AC^2 = AB^2.$$

Падзелім абедзве часткі роўнасці на AB^2. Атрымаем:

$$\left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = 1.$$

Але $\frac{BC}{AB} = \sin\alpha$, $\frac{AC}{AB} = \cos\alpha$. Такім чынам,

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Гэта роўнасць ёсць тоеснасць. Яна правільная для любога вострага вугла α.

Каб атрымаць другую тоеснасць, падзелім абедзве часткі атрыманай тоеснасці на $\cos^2\alpha$. Атрымаем:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \text{ або } 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Калі абедзве часткі тоеснасці $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ падзяліць на $\sin^2\alpha$, то атрымаем трэцюю тоеснасць:

$$1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Значэнне гэтых тоеснасцей заключаецца ў тым, што яны дазваляюць, ведаючы адну з велічынь $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ або $\operatorname{tg}\alpha$, знайсці дзве другія.

З а д а ч а (63). Вылічыце значэнні $\sin\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$, калі $\cos\alpha = \frac{5}{13}$.

Р а ш э н н е. Паколькі $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, то

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{12}{5}.$$

69. ЗНАЧЭННІ СІНУСА, КОСІНУСА І ТАНГЕНСА НЕКАТОРЫХ ВУГЛОЎ

Тэарэма 7.4. *Для любога вострага вугла* α

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha,\ \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha.$$

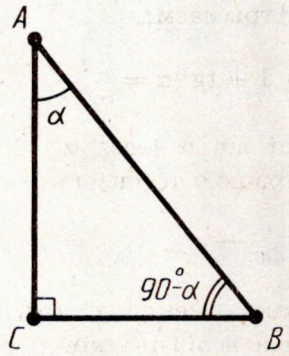
Доказ. Няхай ABC — прамавугольны трохвугольнік з вострым вуглом α пры вяршыні A (рыс. 160). Тады востры вугал пры вяршыні B роўны $90^\circ - \alpha$. Па азначэнню

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB},\ \cos\alpha = \frac{AC}{AB}.$$

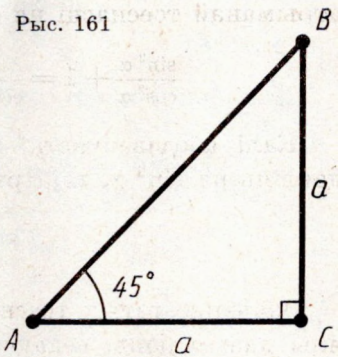
$$\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{AC}{AB},\ \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{BC}{AB}.$$

З другой і трэцяй роўнасцей атрымліваем: $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$. З першай і чацвёртай роўнасцей атрымліваем: $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$. Тэарэма даказана.

Рыс. 160



Рыс. 161

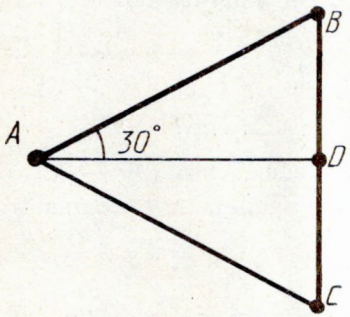


Знойдзем сінус, косінус і тангенс вугла 45°. Для гэтага пабудуем прамавугольны трохвугольнік з вострым вуглом 45° (рыс. 161). Другі яго востры вугал таксама роўны 45°, таму трохвугольнік раўнабедраны. Няхай катэты трохвугольніка роўны a. Па тэарэме Піфагора гіпатэнуза будзе $a\sqrt{2}$. Знаходзім:

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};\quad \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1.$$

Знойдзем сінус, косінус і тангенс вугла 30°. Возьмем роўнастаронні трохвугольнік ABC (рыс. 162). Правядзём у ім медыяну AD. Яна будзе бісектрысай і вышынёй. Таму трохвугольнік ABD — прамавугольны з вострым вуглом пры вяршыні A, роўным 30°. Няхай a — старана роўнастаронняга трохвугольніка. Тады $BD=\frac{a}{2}$. Па тэарэме Піфагора



Рыс. 162

$$AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Значыць,

$$\sin 30^\circ=\frac{a}{2}:a=\frac{1}{2};$$

$$\cos 30^\circ=\frac{a\sqrt{3}}{2}:a=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ=\frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}=\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}.$$

Паколькі $\sin\alpha=\cos(90^\circ-\alpha)$, то

$$\sin 60^\circ=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2};\ \cos 60^\circ=\sin 30^\circ=\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ=\frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}=\sqrt{3}.$$

70. ЗМЯНЕННЕ СІНУСА, КОСІНУСА І ТАНГЕНСА ПРЫ ЎЗРАСТАННІ ВУГЛА

Тэарэма 7.5. ***Пры ўзрастанні вострага вугла*** $\sin\alpha$ ***і*** $\operatorname{tg}\alpha$ ***узрастаюць, а*** $\cos\alpha$ ***убывае.***

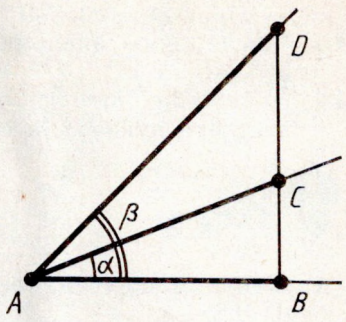
Доказ. Няхай α і β — вострыя вуглы, прычым $\alpha<\beta$. Адкладзём вуглы α і β ад паўпрамой AB у адну паўплоскасць (рыс. 163). Правядзём праз пункт B прамую, перпендыкулярную AB. Яна перасякае стораны нашых вуглоў у пунктах C і D.

Паколькі $\alpha<\beta$, то пункт C ляжыць паміж пунктамі B і D. Таму $BC<BD$. А значыць, па ўласцівасці нахіленых, праведзеных з аднаго пункта да прамой, $AC<AD$.

Паколькі $\cos\alpha = \frac{AB}{AC}$, $\cos\beta = \frac{AB}{AD}$, то $\cos\alpha > \cos\beta$, г. зн. пры ўзрастанні вугла косінус убывае.

Паколькі $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$, а $\cos\alpha$ ўбывае пры ўзрастанні вугла, то $\sin\alpha$ ўзрастае.

Паколькі $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ і $\sin\alpha$ ўзрастае, а $\cos\alpha$ ўбывае пры ўзрастанні α, то $\operatorname{tg}\alpha$ ўзрастае пры ўзрастанні α. Тэарэма даказана.



Рыс. 163

КАНТРОЛЬНЫЯ ПЫТАННІ

1. Дайце азначэнне косінуса вострага вугла прамавугольнага трохвугольніка.
2. Дакажыце, што косінус вугла залежыць толькі ад градуснай меры вугла і не залежыць ад размяшчэння і памераў трохвугольніка.
3. Дакажыце тэарэму Піфагора.
4. Дакажыце, што ў прамавугольным трохвугольніку гіпатэнуза большая за любы з катэтаў.
5. Дакажыце, што $\cos\alpha < 1$ для вострага вугла α.
6. Дакажыце, што калі з аднаго пункта да прамой праведзены перпендыкуляр і нахіленая, то любая нахіленая большая за перпендыкуляр. Роўныя нахіленыя маюць роўныя праекцыі, з дзвюх нахіленых большая тая, у якой праекцыя большая.
7. Дакажыце няроўнасць трохвугольніка.
8. Дакажыце, што ў трохвугольніку кожная старана меншая за суму дзвюх другіх старон.
9. Дайце азначэнні сінуса і тангенса вострага вугла. Дакажыце, што яны залежаць толькі ад градуснай меры вугла.
10. Як выражаецца катэт прамавугольнага трохвугольніка праз гіпатэнузу і востры вугал, праз востры вугал і другі катэт?
11. Дакажыце тоеснасці: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha};\quad 1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

12. Дакажыце, што для любога вострага вугла α $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$.
13. Чаму роўны значэнні сінуса, косінуса і тангенса вуглоў 30°, 45°, 60°?
14. Дакажыце, што $\sin\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$ ўзрастаюць пры ўзрастанні вострага вугла α, а $\cos\alpha$ ўбывае.

ЗАДАЧЫ

1. Пабудуйце вугал, косінус якога роўны: 1) $\frac{3}{5}$; 2) $\frac{4}{9}$; 3) 0,5, 4) 0,8.
2. У прамавугольнага трохвугольніка зададзены катэты a і b. Знайдзіце гіпатэнузу, калі: 1) $a = 3$; $b = 4$; 2) $a = 1$; $b = 1$; 3) $a = 5$, $b = 6$.
3. У прамавугольнага трохвугольніка зададзены гіпатэнуза c і катэт a. Знайдзіце другі катэт, калі: 1) $c = 5$, $a = 3$; 2) $c = 13$, $a = 5$; 3) $c = 6$, $a = 5$.
4. Дзве стараны прамавугольнага трохвугольніка роўны 3 м і 4 м. Знайдзіце трэцюю старану. (Два выпадкі.)
5. Ці могуць стораны прамавугольнага трохвугольніка быць прапарцыянальныя лікам 5, 6, 7?
6. Знайдзіце старану ромба, калі яго дыяганалі роўны: 1) 6 см і 8 см; 2) 16 дм і 30 дм; 3) 5 м і 12 м.
7. Стораны прамавугольніка 60 см і 91 см. Чаму роўна дыяганаль?
8. Дыяганаль квадрата a. Чаму роўна старана квадрата?
9. Ці можна з круглага ліста жалеза дыяметрам 1,4 м выразаць квадрат са стараной 1 м?
10. Знайдзіце вышыню раўнабокай трапецыі, у якой асновы 5 м і 11 м, а бакавая старана 4 м.
11. Знайдзіце медыяну раўнабедранага трохвугольніка з асновай a і бакавой стараной b, праведзеную да асновы.
12. У раўнабедраным трохвугольніку бакавая старана 17 см, а аснова 16 см. Знайдзіце вышыню, апушчаную на аснову.
13. У роўнастароннім трохвугольніку са стараной a знайдзіце вышыню.
14. Дадзены адрэзкі a і b. Як пабудаваць адрэзак:
1) $\sqrt{a^2 + b^2}$; 2) $\sqrt{a^2 - b^2}$, $a > b$?

15*. Дадзены адрэзкі a і b. Як пабудаваць адрэзак $x = \sqrt{ab}$?

16. Паміж двума фабрычнымі будынкамі зроблены пакаты жолаб для перадачы матэрыялаў. Адлегласць паміж будынкамі роўна 10 м, а канцы жолаба размешчаны на вышыні 8 м і 4 м над зямлёй. Знайдзіце даўжыню жолаба.
17. Дакажыце, што калі трохвугольнік мае стораны a, b, c і

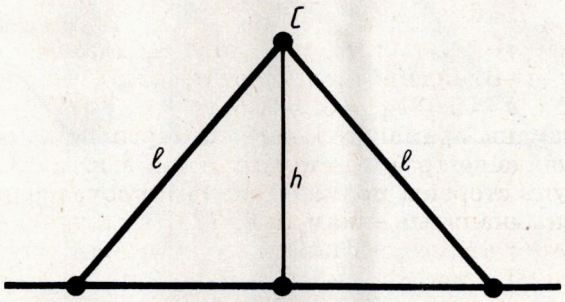
$a^2 + b^2 = c^2$, то ў яго вугал, процілеглы старане c, прамы.

18. Чаму роўны вугал трохвугольніка са старанамі 5, 12, 13, процілеглы старане 13?

19. На старане AB трохвугольніка ABC узяты пункт X. Дакажыце, што адрэзак CX меншы прынамсі за адну са старон AC ці BC.

20. Дакажыце, што адлегласць паміж любымі двума пунктамі на старанах трохвугольніка не большая за большую з яго старон.

21. Дадзена прамая і пункт C на адлегласці h ад гэтай прамой. Дакажыце, што з пункта C можна правесці дзве і толькі дзве нахіленыя даўжынёй l, калі $l > h$ (рыс. 164).



Рыс. 164

22*. Дакажыце, што прамая, якая знаходзіцца ад цэнтра акружнасці на адлегласці, меншай за радыус, перасякае акружнасць у двух пунктах.

23. Дакажыце, што любая хорда акружнасці не большая за дыяметр і роўна дыяметру толькі тады, калі сама з'яўляецца дыяметрам.

24. Дакажыце, што пункты A, B, C ляжаць на адной прамой, калі 1) $AB = 5$ м, $BC = 7$ м, $AC = 12$ м; 2) $AB = 10{,}7$, $BC = 17{,}1$, $AC = 6{,}4$.

25. Дакажыце, што любая старана трохвугольніка большая за рознасць дзвюх другіх яго старон.

26. Ці можа ў паралелаграма са старанамі 4 см і 7 см адна з дыяганалей быць роўнай 2 см?

27. У трохвугольніку адна старана роўна 1,9 м, а другая 0,7 м. Знайдзіце трэцюю старану, ведаючы, што яе даўжыня роўна цэламу ліку метраў.

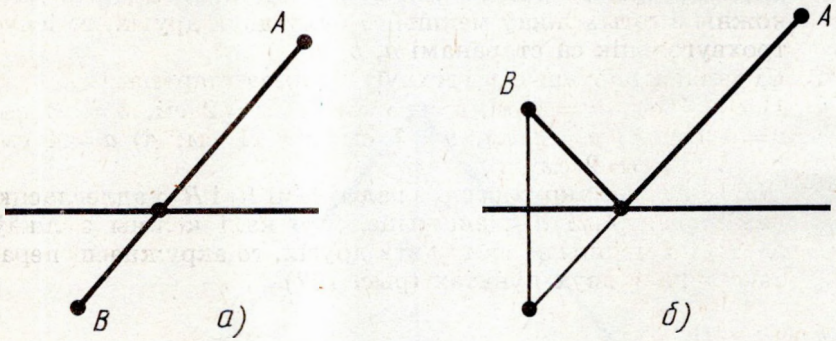
28*. Дакажыце, што медыяна трохвугольніка ABC, праведзеная з вяршыні A, меншая за паўсуму старон AB і AC.

29*. Вядома, што дыяганалі чатырохвугольніка перасякаюцца.

Дакажыце, што сума іх даўжынь меншая за перыметр, але большая за паўперыметр чатырохвугольніка.

30. Адрэзкі AB і CD перасякаюцца ў пункце O. Дакажыце, што сума адлегласцей ад любога пункта плоскасці да пунктаў A, B, C і D не меншая, чым $OA + OB + OC + OD$.

31*. На прамалінейным шасэ патрабуецца адзначыць месца аўтобуснага прыпынку так, каб сума адлегласцей ад яго да населеных пунктаў A і B была найменшай. Разгледзьце два выпадкі: 1) населеныя пункты размешчаны па розныя бакі ад шасэ (рыс. 165, *а*); 2) населеныя пункты размешчаны па адзін бок ад шасэ (рыс. 165, *б*).



Рыс. 165

32. Ці могуць стораны трохвугольніка быць прапарцыянальнымі лікам 1, 2, 3?

33. Дакажыце, што ў трохвугольніку кожная старана меншая за палавіну перыметра.

34. Унутры акружнасці радыуса R узяты пункт на адлегласці d ад цэнтра. Знайдзіце найбольшую і найменшую адлегласць ад гэтага пункта да пунктаў акружнасці.

35. Па-за акружнасцю радыуса R узяты пункт на адлегласці d ад цэнтра. Знайдзіце найбольшыя і найменшыя адлегласці ад гэтага пункта да пунктаў акружнасці.

36. Ці могуць перасякацца акружнасці, цэнтры якіх знаходзяцца на адлегласці 20 см, а радыус 8 см і 11 см? Растлумачце адказ.

37. Ці могуць перасякацца акружнасці, цэнтры якіх знаходзяцца на адлегласці 5 см, а радыусы 6 см і 12 см. Растлумачце адказ.

38*. Дакажыце, што ў задачы 36 акружнасці знаходзяцца адна па-за другой, а ў задачы 37 акружнасці радыуса 6 см знаходзяцца ўнутры акружнасці радыуса 12 см.

39. Ці могуць перасякацца акружнасці з радыусамі R_1 і R_2 і адлегласцю паміж цэнтрамі d, калі $R_1 + R_2 < d$?

40*. Дадзены тры дадатныя лікі a, b, c, якія задавальняюць умовам $a \leqslant b \leqslant c < a + b$. Дакажыце паслядоўна сцвярджанні:

1) $0 < \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} < a$;

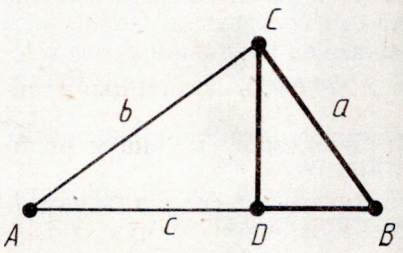
2) існуе прамавугольны трохвугольнік BCD, у якога гіпатэнуза $BC = a$, а катэт $BD = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}$ (рыс. 166).

3) Трохвугольнік ABC, у якога $BC = a$, $AB = c$, а адлегласць BD роўна $\frac{c^2 + a^2 + b^2}{2c}$, мае старану $AC = b$ (рыс. 166).

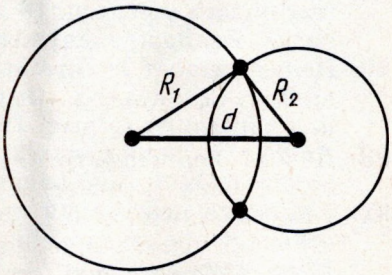
41. Дадзены тры дадатныя лікі a, b, c. Дакажыце, што калі кожны з гэтых лікаў меншы за суму двух другіх, то існуе трохвугольнік са старанамі a, b, c.

42. Ці можна пабудаваць трохвугольнік са старанамі:
1) $a = 1$ см, $b = 2$ см, $c = 3$ см; 2) $a = 2$ см, $b = 3$ см, $c = 4$ см; 3) $a = 3$ см, $b = 7$ см, $c = 11$ см; 4) $a = 4$ см, $b = 5$ см, $c = 9$ см?

43*. Дадзены дзве акружнасці з радыусамі R_1 і R_2 і адлегласцю паміж цэнтрамі d. Дакажыце, што калі кожны з лікаў R_1, R_2 і d меншы за суму двух другіх, то акружнасці перасякаюцца ў двух пунктах (рыс. 167).



Рыс. 166



Рыс. 167

44. У прамавугольнага трохвугольніка адзін катэт роўны 8 см, а сінус процілеглага яму вугла роўны 0,8. Знайдзіце гіпатэнузу і другі катэт.

45. У прамавугольным трохвугольніку гіпатэнуза роўна a, а адзін з вострых вуглоў α. Знайдзіце другі востры вугал і катэты.

46. У прамавугольным трохвугольніку катэт роўны a, а процілеглы яму вугал α. Знайдзіце другі востры вугал, процілеглы яму катэт і гіпатэнузу.

47. У прамавугольным трохвугольніку дадзены гіпатэнуза c і востры вугал α. Знайдзіце катэты, іх праекцыі на гіпатэнузу і вышыню, апушчаную на гіпатэнузу.

48. 1) Знайдзіце: $\sin 22°$, $\sin 22°36'$, $\sin 22°38'$, $\sin 22°41'$; $\cos 68°$, $\cos 68°18'$, $\cos 68°23'$.
2) Знайдзіце вугал x, калі: $\sin x = 0{,}2850$; $\sin x = 0{,}2844$; $\cos x = 0{,}2710$.

49. Знайдзіце значэнні сінуса і косінуса вуглоў: 1) 16°; 2) 24°36′; 3) 70°32′; 4) 88°49′.

50. Знайдзіце велічыню вострага вугла x, калі: 1) $\sin x = 0{,}0175$; 2) $\sin x = 0{,}5015$; 3) $\cos x = 0{,}6814$; 4) $\cos x = 0{,}0670$.

51. Знайдзіце значэнне тангенса вугла: 1) 10°; 2) 40°40′; 3) 50°30′; 4) 70°15′.

52. Знайдзіце востры вугал x, калі: 1) $\operatorname{tg} x = 0{,}3227$; 2) $\operatorname{tg} x = 0{,}7846$; 3) $\operatorname{tg} x = 6{,}152$; 4) $\operatorname{tg} x = 9{,}254$.

53. Вышыня раўнабедранага трохвугольніка роўна 12,4 м, а аснова 40,6 м. Знайдзіце вуглы трохвугольніка і бакавую старану.

54. Адносіна катэтаў прамавугольнага трохвугольніка роўна 19 : 28. Знайдзіце яго вуглы.

55. Стораны прамавугольніка роўны 12,4 і 26. Знайдзіце вугал паміж дыяганалямі.

56. Дыяганалі ромба роўны 4,73 і 2,94. Знайдзіце яго вуглы.

57. Старана ромба 241 м, вышыня 120 м. Знайдзіце вуглы.

58. Радыус акружнасці роўны 5 м. З пункта, які знаходзіцца ад цэнтра на адлегласці 13 м, праведзены датычныя да акружнасці. Знайдзіце даўжыні датычных і вугал паміж імі.

59. Цень ад шаста, які стаіць вертыкальна і вышыня якога роўна 7 м, складае 4 м. Выразіце ў градусах вышыню Сонца над гарызонтам (рыс. 168).

60. Аснова раўнабедранага прамавугольнага трохвугольніка роўна a. Знайдзіце бакавую старану.

61. Знайдзіце невядомыя стораны і вострыя вуглы прамавугольнага трохвугольніка па наступных даных:
1) па двух катэтах:
а) $a = 3$, $b = 4$; б) $a = 9$, $b = 40$;
в) $a = 20$, $b = 21$; г) $a = 11$, $b = 60$;
2) па гіпатэнузе і катэту:
а) $c = 13$, $a = 5$; б) $c = 25$, $a = 7$;
в) $c = 17$, $a = 8$; г) $c = 85$, $a = 84$;
3) па гіпатэнузе і востраму вуглу:
а) $c = 2$, $\alpha = 20°$; б) $c = 4$, $\alpha = 50°20'$;
в) $c = 8$, $\alpha = 70°36'$; г) $c = 16$, $\alpha = 76°21'$;
4) па катэту і процілегламу вуглу:
а) $a = 3$, $\alpha = 30°27'$; б) $a = 5$, $\alpha = 40°48'$;
в) $a = 7$, $\alpha = 60°35'$; г) $a = 9$, $\alpha = 68°$.

62. Спрасціце выразы: 1) $1 - \sin^2 \alpha$;
2) $(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)$; 3) $1 + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$;
4) $\sin \alpha - \sin \alpha \cos^2 \alpha$; 5) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$;

6) $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha \operatorname{tg}^2\alpha$; 7 $\cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha \cos^2\alpha$;

8) $\operatorname{tg}^2\alpha(2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 1)$; 9) $\dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^4\alpha}{\cos^2\alpha}$.

63. Вылічыце значэнні $\sin\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$, калі:

1) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$; 2) $\cos\alpha = \frac{15}{17}$; 3) $\cos\alpha = 0{,}6$.

64. Знайдзіце $\cos\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$, калі:

1) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; 2) $\sin\alpha = \frac{40}{41}$; 3) $\sin\alpha = 0{,}8$.

65. Пабудуйце вугал α, калі вядома, што: 1) $\cos\alpha = \frac{4}{7}$;

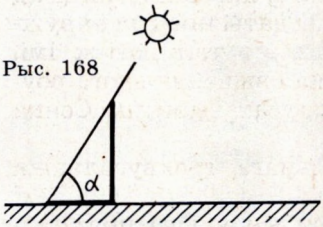
2) $\sin\alpha = \frac{4}{7}$; 3) $\sin\alpha = 0{,}5$; 4) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{5}$; 5) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}7$.

66. У прамавугольным трохвугольніку з гіпатэнузай a і вуглом 60° знайдзіце катэт, процілеглы гэтаму вуглу.

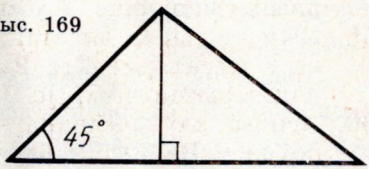
67. Знайдзіце радыус r акружнасці, упісанай у роўнастаронні трохвугольнік са стараной a, і радыус R акружнасці, апісанай каля яго.

68. У трохвугольніку адзін з вуглоў пры аснове роўны 45°, а вышыня дзеліць аснову на часткі 20 см і 21 см. Знайдзіце большую бакавую старану[1] (рыс. 169).

Рыс. 168



Рыс. 169



69. У трохвугольніку адна са старон роўна 1 м, а прылеглыя да яе вуглы роўны 30° і 45°. Знайдзіце іншыя стораны трохвугольніка.

70. Дыяганаль прамавугольніка ў два разы большая за адну з яго старон. Знайдзіце вуглы паміж дыяганалямі.

71. Дыяганалі ромба роўны a і $a\sqrt{3}$. Знайдзіце вуглы ромба.

72. Які з вуглоў большы — α ці β, калі:

1) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $\sin\beta = \frac{1}{4}$; 2) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, $\sin\beta = \frac{3}{4}$;

3) $\cos\alpha = \frac{3}{7}$, $\cos\beta = \frac{2}{5}$; 4) $\cos\alpha = 0{,}75$, $\cos\beta = 0{,}74$;

---

[1] Часам у адвольным трохвугольніку, неабавязкова раўнабедраным, старана, праведзеная гарызантальна, называецца асновай, а дзве другія — бакавымі старанамі, як у дадзенай задачы.

5) $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}1$, $\operatorname{tg}\beta = 2{,}5$; 6) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{3}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{5}{2}$?

73. У прамавугольнага трохвугольніка ABC вугал A большы за вугал B. Які з катэтаў большы: AC ці BC?

74. У прамавугольнага трохвугольніка ABC катэт BC большы за катэт AC. Які вугал большы — A ці B?

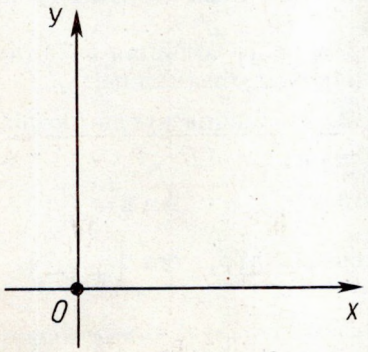
§ 8. ДЭКАРТАВЫ КААРДЫНАТЫ НА ПЛОСКАСЦІ

71. ВЫЗНАЧЭННЕ ДЭКАРТАВЫХ КААРДЫНАТ

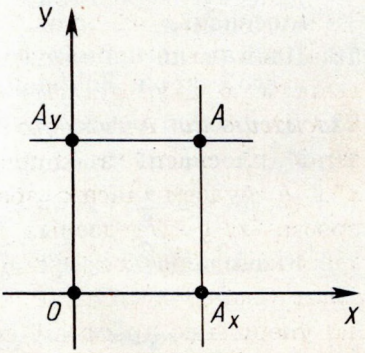
Правядзём на плоскасці праз пункт O дзве ўзаемна перпендыкулярныя прамыя x і y — *восі каардынат* (рыс. 170). Вось x (яна звычайна гарызантальная) называецца *воссю абсцыс*, а вось y — *воссю ардынат*. Пунктам перасячэння O — *пачаткам каардынат* — кожная з восей разбіваецца на дзве паўвосі. Умовімся адну з іх называць *дадатнай*, адзначаючы яе стрэлкай, а другую *адмоўнай*.

Кожнаму пункту A плоскасці мы супаставім пару лікаў — *каардынаты пункта* — абсцысу (x) і ардынату (y) па такому правілу.

Праз пункт A правядзём прамую, паралельную восі ардынат (рыс. 171). Яна перасячэ вось абсцыс x у некаторым пункце A_x. *Абсцысай* пункта A мы будзем называць лік x, абсалютная велічыня якога роўна адлегласці ад пункта O да A_x. Гэты лік будзе дадатным, калі A_x належыць дадатнай паўвосі, адмоўным, калі



Рыс. 170



Рыс. 171

A_x належыць адмоўнай паўвосі. Калі пункт A ляжыць на восі ардынат y, то лічым x роўным нулю.

Ардыната (y) пункта A вызначаецца аналагічна. Праз пункт A правядзём прамую, паралельную восі абсцыс x (гл. рыс. 171). Яна перасячэ вось ардынат y у некаторым пункце A_y. *Ардынатай* пункта A мы будзем называць лік y, абсалютная велічыня якога роўна адлегласці ад пункта O да A_y. Гэты лік будзе дадатным, калі A_y належыць дадатнай паўвосі, адмоўным, калі A_y належыць адмоўнай паўвосі. Калі пункт A ляжыць на восі абсцыс x, то лічым y роўным нулю.



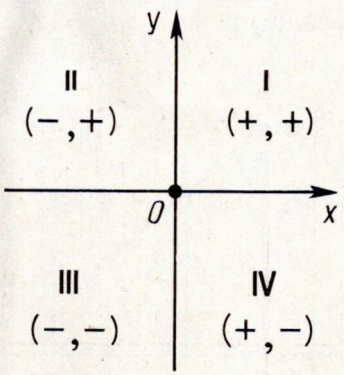
Р. Дэкарт — французскі вучоны (1596—1650)

Каардынаты пункта будзем запісваць у дужках побач з літарным абазначэннем пункта, напрыклад: $A(x, y)$ (на першым месцы — абсцыса, на другім — ардыната).

Восі каардынат разбіваюць плоскасць на чатыры часткі — чвэрці: I, II, III, IV (рыс. 172). У межах адной чвэрці знакі абедзвюх каардынат захоўваюцца і маюць значэнні, дадзеныя на рысунку.

Пункты восі x (восі абсцыс) маюць роўныя нулю ардынаты ($y = 0$), а пункты восі y (восі ардынат) маюць роўныя нулю абсцысы ($x = 0$). У пачатку каардынат абсцыса і ардыната роўны нулю.

Плоскасць, на якой уведзены апісаным вышэй спосабам каардынаты x і y, будзем называць *плоскасцю xy*. Адвольны пункт на гэтай плоскасці з каардынатамі x і y будзем часам абазначаць проста (x, y). Уведзеныя на плоскасці каардынаты x, y называюцца *дэкартавымі*, па імю Р. Дэкарта, які ўпершыню прымяніў іх у сваіх даследаваннях.



Рыс. 172

З а д а ч а (9). Дадзены пункты $A(-3; 2)$ і $B(4, 1)$. Дакажыце, што адрэзак AB перасякае вось y, але не перасякае вось x.

Р а ш э н н е. Вось y разбівае плоскасць xy на дзве паўплоскасці. У адной паўплоскасці абсцысы пунктаў дадатныя, а ў другой адмоўныя. Паколькі ў пунктаў A і B абсцысы процілеглых знакаў, то пункты A і B ляжаць у розных паўплоскасцях. А гэта значыць, што адрэзак AB перасякае вось y.

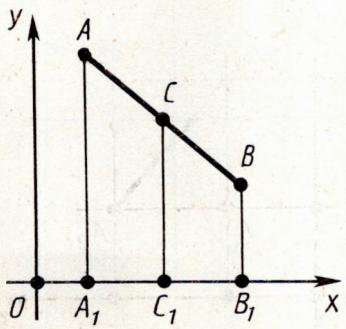
Вось x таксама разбівае плоскасць xy на дзве паўплоскасці. У адной паўплоскасці ардынаты пунктаў дадатныя, а ў другой — адмоўныя. У пунктаў A і B ардынаты аднаго знака (дадатныя). Значыць, пункты A і B ляжаць у адной паўплоскасці. А такім чынам, адрэзак AB не перасякаецца з воссю x.

72. КААРДЫНАТЫ СЯРЭДЗІНЫ АДРЭЗКА

Няхай $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$ — два адвольныя пункты і $C(x, y)$ — сярэдзіна адрэзка AB. Знойдзем каардынаты x, y пункта C. Разгледзім спачатку выпадак, калі адрэзак AB не паралельны восі y, г. зн. $x_1 \neq x_2$. Правядзём праз пункты A, B, C прамыя, паралельныя восі y (рыс. 173). Яны перасякуць вось x у пунктах $A_1(x_1, 0)$, $B_1(x_2, 0)$, $C_1(x, 0)$. Па тэарэме Фалеса пункт C_1 будзе сярэдзінай адрэзка A_1B_1.

Паколькі пункт C_1 — сярэдзіна адрэзка A_1B_1, то $A_1C_1 = B_1C_1$, а значыць, $|x - x_1| = |x - x_2|$. Адсюль вынікае, што ці $x - x_1 = x - x_2$, ці $x - x_1 = -(x - x_2)$. Першая роўнасць немагчыма, таму што $x_1 \neq x_2$. Таму правільная другая. А з яе атрымліваецца формула

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$



Рыс. 173

Калі $x_1 = x_2$, г. зн. адрэзак AB паралельны восі y, то ўсе тры пункты A_1, B_1, C_1 маюць адну і тую ж абсцысу. Значыць, формула застаецца правільнай і ў гэтым выпадку.

Ардыната пункта C знаходзіцца аналагічна. Праз пункты A, B, C праводзяцца прамыя, паралельныя восі x. Атрымліваецца формула

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$



Задача (15). Дадзены тры вяршыні паралелаграма $ABCD$: $A(1, 0)$, $B(2, 3)$, $C(3, 2)$. Знайдзіце каардынаты чацвёртай вяршыні D і пункта перасячэння дыяганалей.

Рашэнне. Пункт перасячэння дыяганалей з'яўляецца сярэдзінай кожнай з іх. Таму ён з'яўляецца сярэдзінай адрэзка AC, а значыць, мае каардынаты

$$x = \frac{1+3}{2} = 2, \quad y = \frac{0+2}{2} = 1.$$

Цяпер, ведаючы каардынаты пункта перасячэння дыяганалей, знаходзім каардынаты x, y чацвёртай вяршыні D. Карыстаючыся тым, што пункт перасячэння дыяганалей з'яўляецца сярэдзінай адрэзка BD, маем:

$$\frac{2+x}{2} = 2, \quad \frac{3+y}{2} = 1. \text{ Адсюль } x = 2, \ y = -1.$$

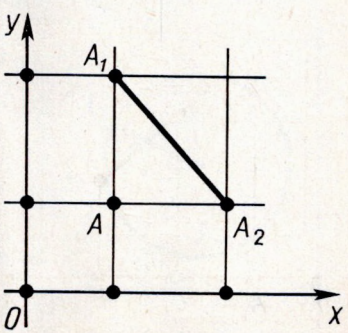
73. АДЛЕГЛАСЦЬ ПАМІЖ ПУНКТАМІ

Няхай на плоскасці xy дадзены два пункты: A_1 з каардынатамі x_1, y_1 і A_2 з каардынатамі x_2, y_2. Выразім адлегласць паміж пунктамі A_1 і A_2 праз каардынаты гэтых пунктаў.

Разгледзім спачатку выпадак, калі $x_1 \neq x_2$ і $y_1 \neq y_2$. Правядзём праз пункты A_1 і A_2 прамыя, паралельныя восям каардынат, і абазначым праз A пункт іх перасячэння (рыс. 174). Адлегласць паміж пунктамі A і A_1 роўна $|y_1 - y_2|$, а адлегласць паміж пунктамі A і A_2 роўна $|x_1 - x_2|$. Прымяняючы да прамавугольнага трохвугольніка AA_1A_2 тэарэму Піфагора, атрымаем:

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2, \quad (*)$$

дзе d — адлегласць паміж пунктамі A_1 і A_2.



Рыс. 174

Хоць формула (*) для адлегласці паміж пунктамі выведзена намі ў дапушчэнні $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, яна застаецца правільнай і ў іншых выпадках. Сапраўды, калі $x_1 = x_2$, $y_1 \neq y_2$, то d роўна $|y_1 - y_2|$. Той жа рэзультат дае і формула (*). Аналагічна разглядаецца выпадак, калі $x_1 \neq x_2$, $y_1 = y_2$. Пры $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ пункты A_1 і A_2 супадаюцць і формула (*) дае $d = 0$.

З а д а ч а (19). Знайдзіце на восі x пункт, роўнаадда-лены ад пунктаў (1, 2) і (2, 3).

Р а ш э н н е. Няхай $(x, 0)$ — шукаемы пункт. Прыраўноўваючы адлегласць ад яго да дадзеных пунктаў, атрымаем:

$$(x - 1)^2 + (0 - 2)^2 = (x - 2)^2 + (0 - 3)^2.$$

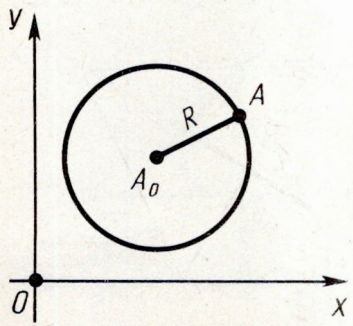
Адсюль знаходзім: $x = 4$. Такім чынам, шукаемы пункт ёсць (4,0).

74. УРАЎНЕННЕ АКРУЖНАСЦІ

Ураўненнем фігуры ў дэкартавых каардынатах на плоскасці называецца ўраўненне з дзвюма невядомымі x і y, якому задавальняюць каардынаты любога пункта фігуры. І наадварот: любыя два лікі, якія задавальняюць гэтаму ўраўненню, з'яўляюцца каардынатамі некаторага пункта фігуры.

Саставім ураўненне акружнасці з цэнтрам у пункце A_0 (a, b) і радыусам R (рыс. 175). Возьмем адвольны пункт $A(x, y)$ на акружнасці. Адлегласць ад яго да цэнтра A_0 роўна R. Квадрат адлегласці ад пункта A да A_0 роўны $(x - a)^2 + (y - b)^2$. Такім чынам, каардынаты x, y кожнага пункта A акружнасці задавальняюць ураўненню

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \qquad (*)$$



Рыс. 175

Наадварот: любы пункт A, каардынаты якога задавальняюць ураўненню (*), належыць акружнасці, паколькі адлегласць ад яе да пункта A_0 роўна R. Адсюль вынікае, што ўраўненне (*) сапраўды з'яўляецца ўраўненнем акружнасці з цэнтрам A_0 і радыусам R.

Заўважым, што калі цэнтрам акружнасці з'яўляецца пачатак каардынат, то ўраўненне акружнасці мае выгляд:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Задача (30). Якая геаметрычная фігура зададзена ўраўненнем

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \ \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c > 0?$$

Рашэнне. Пераўтворым дадзенае ўраўненне наступным чынам:

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} + y^2 + by + \frac{b^2}{4} = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c,$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}\right)^2.$$

Мы бачым, што разглядаемая фігура ёсць акружнасць з цэнтрам $\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$ і радыусам $R = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}$.

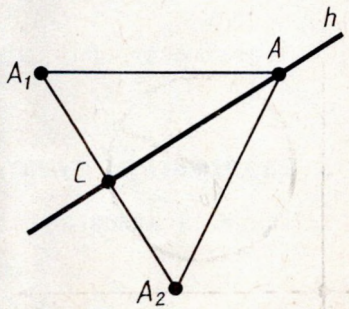
75. УРАЎНЕННЕ ПРАМОЙ

Дакажам, што ***любая прамая ў дэкартавых каардынатах x, y мае ўраўненне віду***

$$ax + by + c = 0, \qquad (*)$$

дзе a, b, c — некаторыя лікі.

Няхай h — адвольная прамая на плоскасці xy. Правядзём якую-небудзь прамую, перпендыкулярную прамой h, і адкладзём на ёй ад пункта перасячэння C з прамой h роўныя адрэзкі CA_1 і CA_2 (рыс. 176).



Рыс. 176

Няхай a_1, b_1 — каардынаты пункта A_1 і a_2, b_2 — каардынаты пункта A_2. Як мы ведаем, любы пункт $A(x, y)$ прамой h роўнааддалены ад пунктаў A_1 і A_2. Таму каардынаты яго задавальняюць ураўненню

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2. \qquad (**)$$

Наадварот, калі каардынаты x і y якога-небудзь пункта задавальняюць ураўненню (**), то гэты пункт роўнаддалены ад пунктаў A_1 і A_2, а значыць, належыць прамой h. Такім чынам, ураўненне (**) з'яўляецца ўраўненнем прамой h. Калі ў гэтым ураўненні раскрыць дужкі і перанесці ўсе члены ўраўнення ў левую яго частку, то яно прыме выгляд (*)

$$2(a_2 - a_1)x + 2(b_2 - b_1)y + (a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 - b_2^2) = 0.$$

Абазначаючы $2(a_2 - a_1) = a$, $2(b_2 - b_1) = b$, $a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 - b_2^2 = c$, атрымліваем ураўненне (*). Сцверджанне даказана.



З а д а ч а (35). Састаўце ўраўненне прамой, якая праходзіць праз пункты $A(-1, 1)$, $B(1, 0)$.

Р а ш э н н е. Як мы ведаем, наша прамая мае ўраўненне віду $ax + by + c = 0$. Пункты A і B ляжаць на прамой, а значыць, іх каардынаты задавальняюць гэтаму ўраўненню.

Падстаўляючы каардынаты пунктаў A і B ва ўраўненне прамой, атрымаем:

$$-a + b + c = 0,\ a + c = 0.$$

З гэтых ураўненняў можна выразіць два каэфіцыенты, напрыклад a і b, праз трэці: $a = -c$, $b = -2c$. Падстаўляючы гэтыя значэнні a і b ва ўраўненне прамой, атрымаем:

$$-cx - 2cy + c = 0.$$

На c можна скараціць. Тады атрымаем:

$$-x - 2y + 1 = 0.$$

Гэта і ёсць ураўненне нашай прамой.

76. КААРДЫНАТЫ ПУНКТА ПЕРАСЯЧЭННЯ ПРАМЫХ

Няхай зададзены ўраўненні дзвюх прамых:

$$ax + by + c = 0,$$
$$a_1x + b_1y + c_1 = 0.$$

Знойдзем каардынаты іх пункта перасячэння.

Паколькі пункт перасячэння $(x; y)$ належыць кожнай з прамых, то яго каардынаты задавальняюць і першаму і другому ўраўненню. Таму каардынаты пункта перасячэння з'яўляюцца рашэннем сістэмы ўраўненняў, якія задаюць прамыя. Разгледзім прыклад.

Няхай ураўненнямі дадзеных прамых будуць:

$$3x - y + 2 = 0,$$
$$5x - 2y + 1 = 0.$$

Рашаючы гэту сістэму ўраўненняў, знаходзім $x = -3$, $y = -7$. Пункт перасячэння прамых $(-3; -7)$.



З а д а ч а (43). Дакажыце, што прамыя, якія задаюцца ўраўненнямі

$$y = kx + l_1, \; y = kx + l_2,$$

пры $l_1 \neq l_2$ паралельныя.

Р а ш э н н е. Дапусцім прамыя не паралельныя, а значыць, перасякаюцца ў некаторым пункце $(x_1; y_1)$. Паколькі пункт перасячэння належыць кожнай з прамых, то для яго

$$y_1 = kx_1 + l_1, \; y_2 = kx_1 + l_2.$$

Адымаючы гэтыя роўнасці пачленна, атрымаем $0 = l_1 - l_2$. А гэта супярэчыць умове $(l_1 \neq l_2)$. Мы прыйшлі да супярэчнасці. Сцверджанне даказана.

77. РАЗМЯШЧЭННЕ ПРАМОЙ АДНОСНА СІСТЭМЫ КААРДЫНАТ

Высветлім, як размешчана прамая адносна восей каардынат, калі яе ўраўненне $ax + by + c = 0$ мае той ці іншы прыватны выгляд.

1. $a = 0$, $b \neq 0$. У гэтым выпадку ўраўненне прамой можна перапісаць так:

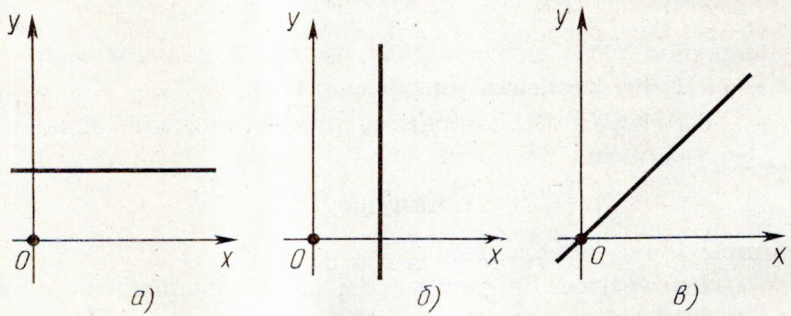
$$y = -\frac{c}{b}.$$

Такім чынам, усе пункты прамой маюць адну і тую ж ардынату $\left(-\frac{c}{b}\right)$; значыць, ***прамая паралельная восі x*** (рыс. 177, *а*).

У прыватнасці, калі і $c = 0$, то прамая супадае з воссю x.

2. $b = 0$, $a \neq 0$. Гэты выпадак разглядаецца аналагічна. ***Прамая паралельная восі y*** (рыс. 177, *б*) і супадае з ёй, калі і $c = 0$.

3. $c = 0$. ***Прамая праходзіць праз пачатак каардынат,*** паколькі яго каардынаты (0; 0) задавальняюць ураўненню прамой (рыс. 177, *в*).



Рыс. 177



З а д а ч а (45). Састаўце ўраўненне прамой, якая паралельная восі x і праходзіць праз пункт (2; — 3).

Р а ш э н н е. Паколькі прамая паралельная восі x, то яна мае ўраўненне віду

$$y + c = 0.$$

Паколькі пункт (2; — 3) ляжыць на прамой, то яго каардынаты задавальняюць гэтаму ўраўненню: $-3 + c = 0$. Адсюль $c = 3$. Значыць, ураўненне прамой

$$y + 3 = 0.$$

78. ВУГЛАВЫ КАЭФІЦЫЕНТ ВА ЎРАЎНЕННІ ПРАМОЙ

Калі ў агульным ураўненні прамой $ax + by + c = 0$ каэфіцыент пры y не роўны нулю, то гэта ўраўненне можна рашыць адносна y. Атрымаем:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Ці, абазначаючы $-\frac{a}{b}=k$, $-\frac{c}{b}=l$, атрымаем:

$$y=kx+l.$$

Высветлім геаметрычны сэнс каэфіцыента k у гэтым ураўненні.

Возьмем два пункты на прамой $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$ $(x_1<x_2)$. Іх каардынаты задавальняюць ураўненню прамой:

$$y_1=kx_1+l,\ y_2=kx_2+l.$$

Адымаючы гэтыя роўнасці пачленна, атрымаем: $y_2-y_1=k(x_2-x_1)$. Адсюль

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

У выпадку, дадзеным на рысунку 178, *а*,

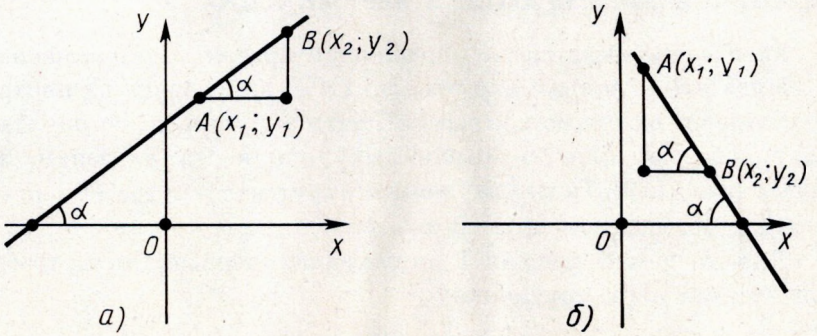
$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\operatorname{tg}\alpha.$$

У выпадку, дадзеным на рысунку 178, *б*,

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\operatorname{tg}\alpha.$$

Такім чынам, каэфіцыент k ва ўраўненні прамой з дакладнасцю да знака роўны тангенсу вострага вугла, які ўтварае прамая з воссю x.

Каэфіцыент k ва ўраўненні прамой называецца *вуглавым каэфіцыентам* прамой.



Рыс. 178

79. ГРАФІК ЛІНЕЙНАЙ ФУНКЦЫІ

Пры пабудаванні графікаў функцый на ўроках алгебры вы, напэўна, заўважылі, што графікам лінейнай функцыі з'яўляецца прамая. Цяпер мы дакажам гэта.

Няхай $y = ax + b$ — дадзеная лінейная функцыя. Дакажам, што яе графікам з'яўляецца прамая.

Для дадзенай функцыі, калі $x = 0$, то $y = b$, калі $x = 1$, то $y = a + b$. Таму графіку функцыі належаць пункты $(0; b)$ і $(1; a + b)$. Саставім ураўненне прамой, якая праходзіць праз гэтыя пункты. Як мы ведаем, яно мае выгляд

$$y = kx + l.$$

Паколькі дадзеныя пункты графіка ляжаць на прамой, то іх каардынаты задавальняюць ураўненню прамой:

$$b = k \cdot 0 + l,$$
$$a + b = k \cdot 1 + l.$$

Адсюль знаходзім $l = b$, $k = a$. Такім чынам, наша прамая мае ўраўненне

$$y = ax + b.$$

Значыць, ураўненню прамой задавальняюць усе пункты графіка. Гэта значыць графікам лінейнай функцыі з'яўляецца прамая.

80. ПЕРАСЯЧЭННЕ ПРАМОЙ З АКРУЖНАСЦЮ

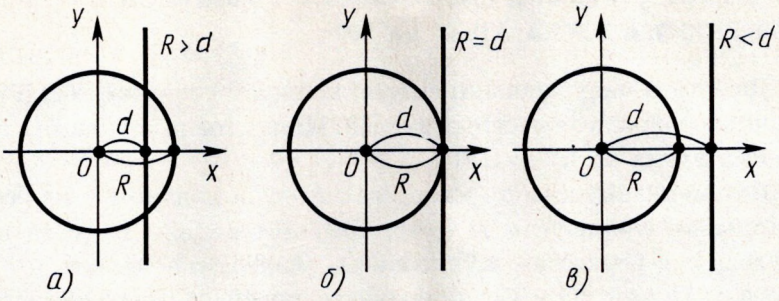
Разгледзім пытанне аб перасячэнні прамой з акружнасцю.

Няхай R — радыус акружнасці і d — адлегласць ад цэнтра акружнасці да прамой. Прымем цэнтр акружнасці за пачатак каардынат, а прамую, перпендыкулярную да дадзенай, за вось x (рыс. 179). Тады ўраўненнем акружнасці будзе $x^2 + y^2 = R^2$, а ўраўненнем прамой $x = d$.

Для таго каб прамая і акружнасць перасякаліся, трэба, каб сістэма двух ураўненняў

$$x^2 + y^2 = R^2,\ x = d$$

мела рашэнне. І наадварот: усякае рашэнне гэтай сістэмы дае



Рыс. 179

каардынаты x, y пункта перасячэння прамой з акружнасцю. Рашаючы гэту сістэму, атрымаем:

$$x = d,\ y = \pm\sqrt{R^2 - d^2}.$$

З выразу для y відаць, што сістэма мае два рашэнні, г. зн. ***акружнасць і прамая маюць два пункты перасячэння, калі*** $R > d$ (рыс. 179, *а*).

Сістэма мае адно рашэнне, ***калі*** $R = d$ (рыс. 179, *б*). У гэтым выпадку ***прамая і акружнасць датыкаюцца.***

Сістэма не мае рашэння, г. зн. ***прамая і акружнасць не перасякаюцца, калі*** $R < d$ (рыс. 179, *в*).

З а д а ч а (50). Знайдзіце пункты перасячэння акружнасці $x^2 + y^2 = 1$ з прамой $y = 2x + 1$.

Р а ш э н н е. Паколькі пункты перасячэння ляжаць на акружнасці і на прамой, то іх каардынаты задавальняюць сістэме ўраўненняў $x^2 + y^2 = 1$, $y = 2x + 1$.

Рэшым гэту сістэму. Падставім y з другога ўраўнення ў першае. Атрымаем ураўненне для x:

$$5x^2 + 4x = 0.$$

Ураўненне мае два карані $x_1 = 0$ і $x_2 = -\frac{4}{5}$. Гэта абсцысы пунктаў перасячэння. Ардынаты гэтых пунктаў атрымаем з ураўнення прамой, падстаўляючы ў яго x_1 і x_2. Атрымаем $y_1 = 1$, $y_2 = -\frac{3}{5}$. Такім чынам, пункты перасячэння прамой і акружнасці $(0;\ 1)$ і $\left(-\frac{4}{5};\ -\frac{3}{5}\right)$.

81. ВЫЗНАЧЭННЕ СІНУСА, КОСІНУСА І ТАНГЕНСА ДЛЯ ЛЮБОГА ВУГЛА АД 0° да 180°

Да гэтага часу значэнні сінуса, косінуса і тангенса былі вызначаны толькі для вострых вуглоў. Цяпер мы вызначым іх для любога вугла ад 0° да 180°.

Возьмем акружнасць на плоскасці xy з цэнтрам у пачатку каардынат і радыусам R (рыс. 180). Адкладзём ад дадатнай паўвосі x у верхнюю паўплоскасць (паўплоскасць, дзе $y > 0$) вугал α. Няхай x і y — каардынаты пункта A. Значэнні $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$ для вострага вугла α выражаюцца праз каардынаты пункта A, менавіта:

$$\cos\alpha = \frac{x}{R},\ \sin\alpha = \frac{y}{R},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}.$$

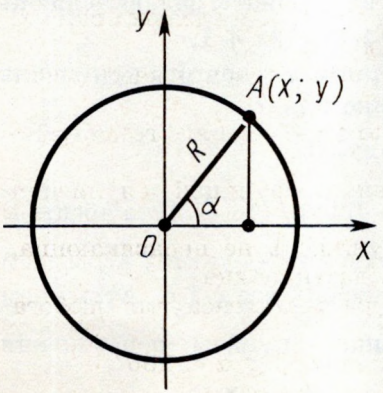
Вызначым цяпер значэнні $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$ гэтымі формуламі для любога вугла α. (Для $\operatorname{tg}\alpha$ вугал $\alpha = 90°$ выключаецца.)

Пры такім вызначэнні $\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$, $\sin 180° = 0$, $\cos 180° = -1$, $\operatorname{tg} 180° = 0$.

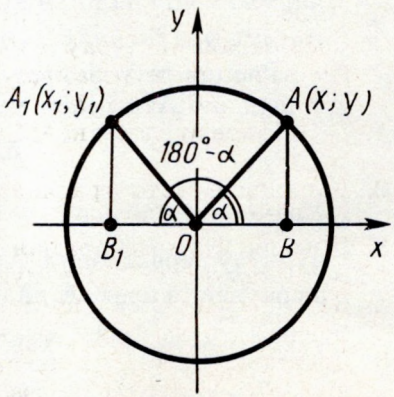
Лічачы, што прамені, якія супадаюць, утвараюць вугал 0°, будзем мець: $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$, $\operatorname{tg} 0° = 0$.

Дакажам, што ***для любога вугла*** α, $\mathbf{0 < \alpha < 180°}$, $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$. ***Для вугла*** $\alpha \neq 90°$ $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.

Сапраўды, трохвугольнікі OAB і OA_1B_1 роўныя па гіпатэнузе і вострому вуглу (рыс. 181). З роўнасці трохвугольнікаў выні-



Рыс. 180



Рыс. 181

кае, што $AB = A_1B_1$, г. зн. $y = y_1$; $OB = OB_1$, значыць, $x = -x_1$. Таму

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{y_1}{R} = \frac{y}{R} = \sin\alpha,$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{x_1}{R} = \frac{-x}{R} = -\cos\alpha.$$

Падзяліўшы пачленна роўнасць $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ на роўнасць $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$, атрымаем:

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Што і трэба было даказаць.

КАНТРОЛЬНЫЯ ПЫТАННІ

1. Растлумачце, як вызначаюцца каардынаты пункта.
2. Якія знакі ў каардынат пункта, калі ён належыць першай (другой, трэцяй, чацвёртай) чвэрці?
3. Чаму роўны абсцысы пунктаў, якія ляжаць на восі ардынат?
   Чаму роўны ардынаты пунктаў, якія ляжаць на восі абсцыс?
   Чаму роўны каардынаты пачатку каардынат?
4. Выведзіце формулы для каардынат сярэдзіны адрэзка.
5. Выведзіце формулы для адлегласці паміж пунктамі.
6. Што такое ўраўненне фігуры ў дэкартавых каардынатах?
7. Выведзіце ўраўненне акружнасці.
8. Дакажыце, што прамая ў дэкартавых каардынатах мае ўраўненне віду $ax + by + c = 0$.
9. Як знайсці каардынаты пункта перасячэння дзвюх прамых, калі зададзены ўраўненні гэтых прамых?
10. Як размешчана прамая, калі ў яе ўраўненні каэфіцыент $a = 0$ ($b = 0$; $c = 0$)?
11. Што такое вуглавы каэфіцыент прамой і які яго геаметрычны сэнс?
12. Дакажыце, што графікам лінейнай функцыі з'яўляецца прамая.
13. Пры якой умове прамая і акружнасць не перасякаюцца, перасякаюцца ў двух пунктах, датыкаюцца?
14. Дайце азначэнне сінуса, косінуса і тангенса для любога вугла ад 0 да 180°.
15. Дакажыце, што для любога вугла α, $0 < \alpha < 180^\circ$,
    $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$,
    $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.

ЗАДАЧЫ

1. Правядзіце восі каардынат, выберыце адзінку даўжыні на восях, пабудуйце пункты з каардынатамі: (1; 2), (— 2; 1), (— 1; — 3), (2; — 1).
2. Вазьміце наўгад чатыры пункты на плоскасці xy. Знайдзіце каардынаты гэтых пунктаў.
3. На прамой, паралельнай восі x, узяты два пункты. У аднаго з іх ардыната $y = 2$. Чаму роўна ардыната другога пункта?
4. На прамой, перпендыкулярнай восі x, узяты два пункты. У аднаго з іх абсцыса $x = 3$. Чаму роўна абсцыса другога пункта?
5. З пункта $A(2; 3)$ апушчаны перпендыкуляр на вось x. Знайдзіце каардынаты асновы перпендыкуляра.
6. Праз пункт $A(2; 3)$ праведзена прамая, паралельная восі x. Знайдзіце каардынаты пункта перасячэння яе з воссю y.
7. Знайдзіце геаметрычнае месца пунктаў плоскасці xy, для якіх абсцыса $x = 3$.
8. Знайдзіце геаметрычнае месца пунктаў плоскасці xy, для якіх $|x| = 3$.
9. Дадзены пункты $A(— 3; 2)$ і $B(4; 1)$. Дакажыце, што адрэзак AB перасякае вось y, але не перасякае вось x.
10. Якую з паўвосей восі y (дадатную ці адмоўную) перасякае адрэзак AB у папярэдняй задачы?
11. Знайдзіце адлегласць ад пункта $(— 3; 4)$ да: 1) восі x; 2) восі y.
12. Знайдзіце каардынаты сярэдзіны адрэзка AB, калі: 1) $A(1; — 2)$, $B(5; 6)$; 2) $A(— 3; 4)$, $B(1; 2)$; 3) $A(5; 7)$, $B(— 3; — 5)$.
13. Пункт C — сярэдзіна адрэзка AB. Знайдзіце каардынаты другога канца адрэзка AB, калі: 1) $A(0; 1)$, $C(— 1; 2)$; 2) $A(— 1; 3)$, $C(1; — 1)$; 3) $A(0; 0)$, $C(— 2; 2)$.
14. Дакажыце, што чатырохвугольнік $ABCD$ з вяршынямі ў пунктах $A(— 1; — 2)$, $B(2; — 5)$, $C(1; — 2)$, $D(— 2; 1)$ з'яўляецца паралелаграмам. Знайдзіце пункт перасячэння яго дыяганалей.
15. Дадзены тры вяршыні паралелаграма $ABCD$: $A(1; 0)$, $B(2; 3)$, $C(3; 2)$. Знайдзіце каардынаты чацвёртай вяршыні D і пункты перасячэння дыяганалей.
16. Знайдзіце сярэдзіны старон трохвугольніка з вяршынямі ў пунктах: $O(0; 0)$, $A(0; 2)$, $B(— 4; 0)$.
17. Дадзены тры пункты $A(4; — 2)$, $B(1; 2)$, $C(— 2; 6)$. Знайдзіце адлегласці паміж гэтымі пунктамі, узятымі парамі.
18. Дакажыце, што пункты A, B, C у задачы 17 ляжаць на адной прамой. Які з іх ляжыць паміж двума іншымі?

19. Знайдзіце на восі x пункт, роўнааддалены ад пунктаў $(1; 2)$ і $(2; 3)$.

20. Знайдзіце пункт, роўнааддалены ад восей каардынат і ад пункта $(3; 6)$.

21*. Дакажыце, што чатырохвугольнік $ABCD$ з вяршынямі ў пунктах $A(4; 1)$, $B(0; 4)$, $C(-3; 0)$, $D(1; -3)$ з'яўляецца квадратам.

22. Дакажыце, што чатыры пункты $(1; 0)$, $(-1; 0)$, $(0; 1)$, $(0; -1)$ з'яўляюцца вяршынямі квадрата.

23. Якія з пунктаў $(1; 2)$, $(3; 4)$, $(-4; 3)$, $(0; 5)$, $(5; -1)$ ляжаць на акружнасці, зададзенай ураўненнем $x^2 + y^2 = 25$?

24. Знайдзіце на акружнасці, зададзенай ураўненнем $x^2 + y^2 = 169$, пункты: 1) з абсцысай 5; 2) з ардынатай -12.

25. Дадзены пункты $A(2; 0)$ і $B(-2; 6)$. Састаўце ўраўненне акружнасці, дыяметрам якой з'яўляецца адрэзак AB.

26. Дадзены пункты $A(-1; -1)$ і $C(-4; 3)$. Састаўце ўраўненне акружнасці з цэнтрам у пункце C, якая праходзіць праз пункт A.

27. Знайдзіце цэнтр акружнасці на восі x, калі вядома, што акружнасць праходзіць праз пункт $(1; 4)$ і радыус акружнасці роўны 5.

28*. Састаўце ўраўненне акружнасці з цэнтрам у пункце $(1; 2)$, якая датыкаецца да восі x.

29. Састаўце ўраўненне акружнасці з цэнтрам $(-3; 4)$, якая праходзіць праз пачатак каардынат.

30*. Якая геаметрычная фігура зададзена ўраўненнем $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c > 0$?

31. Знайдзіце каардынаты пунктаў перасячэння дзвюх акружнасцей: $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 - 2x + y - 2 = 0$.

32. Знайдзіце каардынаты пунктаў перасячэння акружнасці $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 7 = 0$ з воссю x.

33. Дакажыце, што акружнасць $x^2 + y^2 + 2ax + 1 = 0$, $|a| > 1$, не перасякаецца з воссю y.

34. Дакажыце, што акружнасць $x^2 + y^2 + 2ax = 0$ датыкаецца да восі y, $a \neq 0$.

35. Састаўце ўраўненне прамой, якая праходзіць праз пункты $A(-1; 1)$, $B(1; 0)$.

36. Састаўце ўраўненне прамой AB, калі: 1) $A(2; 3)$, $B(3; 2)$; 2) $A(4; -1)$, $B(-6; 2)$; 3) $A(5; -3)$, $B(-1; -2)$.

37. Састаўце ўраўненне прамых, якія змяшчаюць стораны трохвугольніка OAB у задачы 16.

38. Чаму роўны каардынаты a і b ва ўраўненні прамой $ax + by = 1$, калі вядома, што яна праходзіць праз пункты $(1; 2)$ і $(2; 1)$?

39. Знайдзіце пункты перасячэння з восямі каардынат прамой,

зададзенай ураўненнем: 1) $x + 2y + 3 = 0$; 2) $3x + 4y = 12$; 3) $3x - 2y + 6 = 0$; 4) $4x - 2y - 10 = 0$.

40. Знайдзіце пункт перасячэння прамых, зададзеных ураўненнямі:
1) $x + 2y + 3 = 0$, $4x + 5y + 6 = 0$;
2) $3x + y - 2 = 0$, $2x + y - 8 = 0$;
3) $4x + 5y + 8 = 0$, $4x - 2y - 6 = 0$.

41*. Дакажыце, што тры прамыя $x + 2y = 3$, $2x - y = 1$ і $3x + y = 4$ перасякаюцца ў адным пункце.

42*. Знайдзіце каардынаты пункта перасячэння медыян трохвугольніка з вяршынямі (1; 0), (2; 3), (3; 2).

43. Дакажыце, што прамыя, якія задаюцца ўраўненнямі $y = kx + l_1$, $y = kx + l_2$, пры $l_1 \neq l_2$ паралельныя.

44. Сярод прамых, зададзеных ураўненнямі, знайдзіце пары паралельных прамых: 1) $x + y = 1$; 2) $y = x - 1$; 3) $x - y = 2$; 4) $x = 4$; 5) $y = 3$; 6) $2x + 2y + 3 = 0$.

45. Састаўце ўраўненне прамой, якая паралельная восі y і праходзіць праз пункт (2; -3).

46. Састаўце ўраўненне прамой, якая паралельная восі і праходзіць праз пункт (2; 3).

47. Састаўце ўраўненне прамой, якая праходзіць праз пачатак каардынат і пункт (2; 3).

48. Знайдзіце вуглавыя каэфіцыенты прамых з задачы 39.

49. Знайдзіце вострыя вуглы, якія ўтварае зададзеная прамая з воссю x: 1) $2y = 2x + 3$; 2) $x\sqrt{3} - y = 2$; 3) $x + y\sqrt{3} + 1 = 0$.

50. Знайдзіце пункты перасячэння акружнасці $x^2 + y^2 = 1$ з прамой: 1) $y = 2x + 1$; 2) $y = x + 1$; 3) $y = 3x + 1$; 4) $y = kx + 1$.

51*. Пры якіх значэннях c прамая $x + y + c = 0$ і акружнасць $x^2 + y^2 = 1$: 1) перасякаюцца; 2) не перасякаюцца; 3) датыкаюцца?

52. Знайдзіце сінус, косінус і тангенс вуглоў: 1) 120°; 2) 135°; 3) 150°.

53. Знайдзіце: 1) $\sin 160°$; 2) $\cos 140°$; 3) $\operatorname{tg} 130°$.

54. Знайдзіце сінус, косінус і тангенс вуглоў: 1) 40°; 2) 14°36′; 3) 70°20′; 4) 30°16′; 5) 130°; 6) 150°30′; 7) 150°33′; 8) 170°28′.

55. Знайдзіце вуглы, для якіх: 1) $\sin \alpha = 0{,}2$; 2) $\cos \alpha = -0{,}7$; 3) $\operatorname{tg} a = -0{,}4$.

56. Знайдзіце $\sin \alpha$ і $\operatorname{tg} \alpha$ калі: 1) $\cos \alpha = \frac{1}{3}$; 2) $\cos \alpha = -0{,}5$; 3) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

57. Знайдзіце $\cos\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$, калі: 1) $\sin\alpha = 0{,}6$, $0° < \alpha < 90°$; 2) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $90° < \alpha < 180°$; 3) $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $0° < \alpha < 180°$.

58. Вядома, што $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$. Знайдзіце $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$.

59. Пабудуйце вугал α, калі вядома, што $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

60. Пабудуйце вугал α, калі вядома, што $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$.

61*. Дакажыце, што калі $\cos\alpha = \cos\beta$, то $\alpha = \beta$.

62*. Дакажыце, што калі $\sin\alpha = \sin\beta$, то ці $\alpha = \beta$, ці $\alpha = 180° - \beta$.

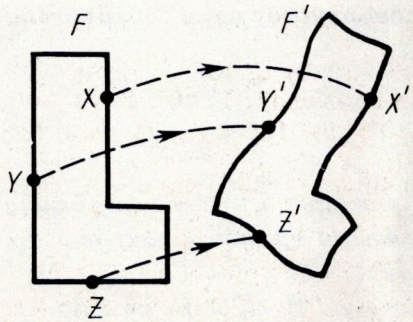
§ 9. РУХ

82. ПЕРАЎТВАРЭННІ ФІГУР

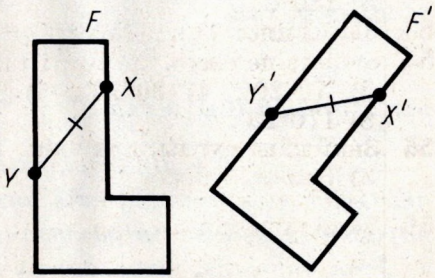
Калі кожны пункт дадзенай фігуры зрушыць якім-небудзь чынам, то мы атрымаем новую фігуру. Гавораць, што гэта фігура атрымана *пераўтварэннем* з дадзенай (рыс. 182).

Пераўтварэнне адной фігуры ў другую называецца *рухам*, калі ён захоўвае адлегласць паміж пунктамі, г. зн. пераводзіць любыя два пункты X і Y адной фігуры ў пункты X', Y' другой фігуры так, што $XY = X'Y'$ (рыс. 183).

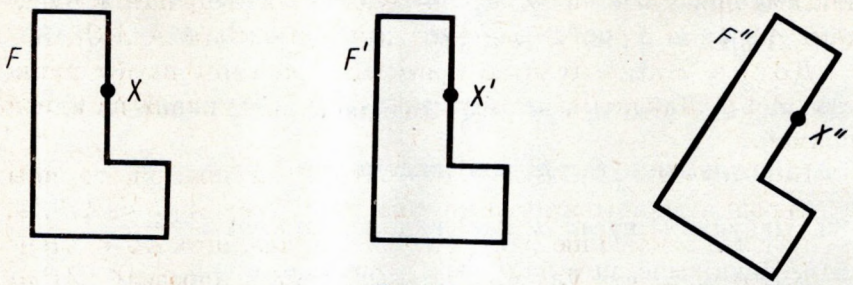
З а ў в а г а. Паняцце руху ў геаметрыі звязана са звычайным уяўленнем аб перамяшчэнні. Але калі, гаворачы аб перамяшчэнні, мы ўяўляем сабе бесперапынны працэс, то ў геаметрыі для нас будзе мець значэнне толькі пачатковае і канечнае становішчы фігуры.



Рыс. 182



Рыс. 183



Рыс. 184

Няхай фігура F пераводзіцца рухам у фігуру F', а фігура F' пераводзіцца рухам у фігуру F'' (рыс. 184). Няхай пры першым руху пункт X фігуры F пераходзіць у пункт X' фігуры F', а пры другім руху пункт X' фігуры F' пераходзіць у пункт X'' фігуры F''. Тады пераўтварэнне фігуры F у фігуру F'', пры якім адвольны пункт X фігуры F пераходзіць у пункт X'' фігуры F'', захоўвае адлегласць паміж пунктамі, а значыць, таксама з'яўляецца рухам.

Гэту ўласцівасць руху выражаюць словамі: ***два рухі, выкананыя паслядоўна, даюць зноў рух.***

Няхай пераўтварэнне фігуры F у фігуру F' пераводзіць розныя пункты фігуры F у розныя пункты фігуры F' (гл. рыс. 182). Няхай адвольны пункт X фігуры F пры гэтым пераўтварэнні пераходзіць у пункт X' фігуры F'. Пераўтварэнне фігуры F' у фігуру F, пры якім пункт X' пераходзіць у пункт X, называецца пераўтварэннем, *адваротным* дадзенаму. Рух захоўвае адлегласць паміж пунктамі, таму пераводзіць розныя пункты ў розныя.

Відавочна, ***пераўтварэнне, адваротнае руху, з'яўляецца таксама рухам.***

83. УЛАСЦІВАСЦІ РУХУ

Тэарэма 9.1. ***Пункты, якія ляжаць на прамой, пры руху пераходзяць у пункты, якія ляжаць на прамой, і захоўваецца парадак іх узаемнага размяшчэння.***

Гэта значыць, што калі пункты A, B, C, якія ляжаць на прамой, пераходзяць у пункты A_1, B_1, C_1, то гэтыя пункты

таксама ляжаць на прамой; калі пункт B ляжыць паміж пунктамі A і C, то пункт B_1 ляжыць паміж пунктамі A_1 і C_1.

Доказ. Няхай пункт B прамой AC ляжыць паміж пунктамі A і C. Дакажам, што пункты A_1, B_1, C_1 ляжаць на адной прамой.

Калі пункты A_1, B_1, C_1 не ляжаць на прамой, то яны з'яўляюцца вяршынямі трохвугольніка. Таму $A_1C_1 < A_1B_1 + B_1C_1$. Па азначэнню руху адсюль вынікае, што $AC < AB + BC$. Аднак па ўласцівасці вымярэння адрэзкаў $AC = AB + BC$.

Мы прыйшлі да супярэчнасці. Значыць, пункт B_1 ляжыць на прамой A_1C_1. Першае сцверджанне тэарэмы даказана.

Пакажам цяпер, што пункт B_1 ляжыць паміж A_1 і C_1. Дапусцім, што пункт A_1 ляжыць паміж пунктамі B_1 і C_1. Тады $A_1B_1 + A_1C_1 = B_1C_1$ і, значыць, $AB + AC = BC$. Але гэта супярэчыць роўнасці $AB + BC = AC$. Такім чынам, пункт A_1 не можа ляжаць паміж пунктамі B_1 і C_1.

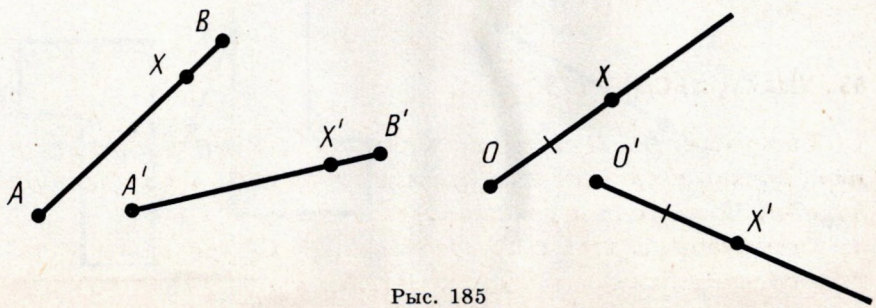
Аналагічна даказваецца, што пункт C_1 не можа ляжаць паміж пунктамі A_1 і B_1.

Паколькі з трох пунктаў A_1, B_1, C_1 адзін ляжыць паміж двума другімі, то гэтым пунктам можа быць толькі B_1. Тэарэма даказана поўнасцю.

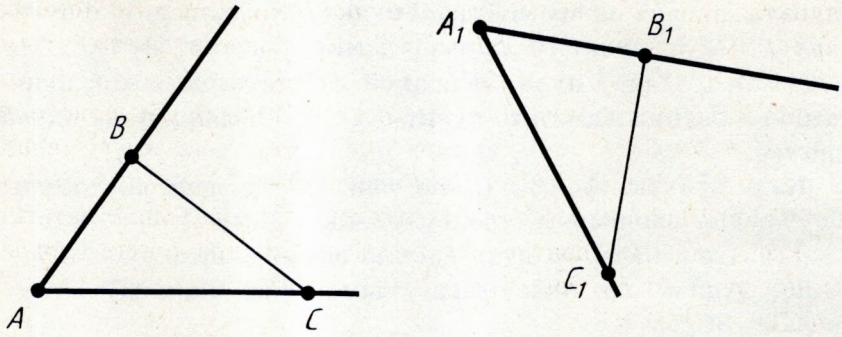
З тэарэмы 9.1 вынікае, што ***пры руху прамыя пераходзяць у прамыя, паўпрамыя — у паўпрамыя, адрэзкі — у адрэзкі*** (рыс. 185).

Дакажам, што ***пры руху захоўваюцца вуглы паміж паўпрамымі.***

Няхай AB і AC — дзве паўпрамыя, якія выходзяць з пункта A і якія не ляжаць на адной прамой (рыс. 186). Пры руху



Рыс. 185



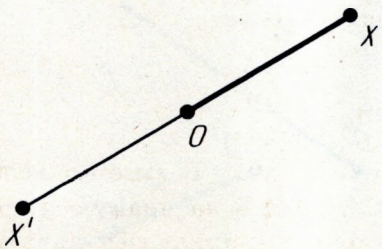
Рыс. 186

гэтыя паўпрамыя пераходзяць у некаторыя паўпрамыя A_1B_1 і A_1C_1. Паколькі рух захоўвае адлегласці, то трохвугольнікі ABC і $A_1B_1C_1$ роўныя па трэцяму прызнаку роўнасці трохвугольнікаў. З роўнасці трохвугольнікаў вынікае роўнасць вуглоў BAC і $B_1A_1C_1$, што і трэба было даказаць.

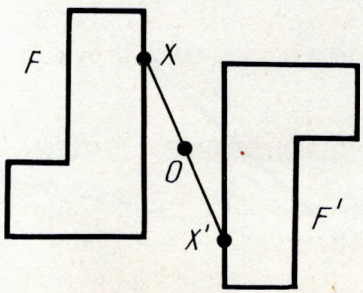
84. СІМЕТРЫЯ АДНОСНА ПУНКТА

Няхай O — фіксаваны пункт і X — адвольны пункт плоскасці (рыс. 187). Адкладзём на прадаўжэнні адрэзка OX за пункт O адрэзак OX', роўны OX. Пункт X' называецца *сіметрычным пункту X адносна пункта O*. Пункт, сіметрычны пункту O, ёсць сам пункт O. Відавочна, што пункт, сіметрычны пункту X', ёсць пункт X.

Пераўтварэнне фігуры F у фігуру F', пры якім кожны яе пункт X пераходзіць у пункт X', сіметрычны адносна дадзенага



Рыс. 187

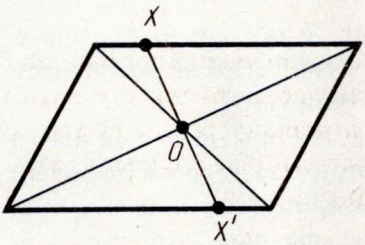


Рыс. 188

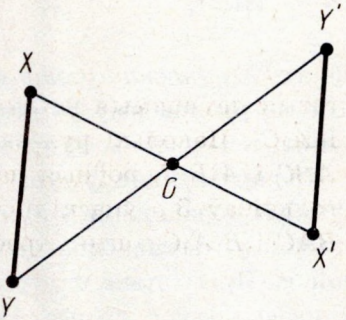
пункта O, называецца *пераўтварэннем сіметрыі адносна пункта* O. Пры гэтым фігуры F і F' называюцца *сіметрычнымі адносна пункта* O (рыс. 188).

Калі пераўтварэнне сіметрыі адносна пункта O пераводзіць фігуру F у сябе, то яна называецца *цэнтральна-сіметрычнай*, а пункт O называецца *цэнтрам сіметрыі*.

Напрыклад, паралелаграм з'яўляецца цэнтральна-сіметрычнай фігурай. Яго цэнтрам сіметрыі з'яўляецца пункт перасячэння дыяганалей (рыс. 189).



Рыс. 189



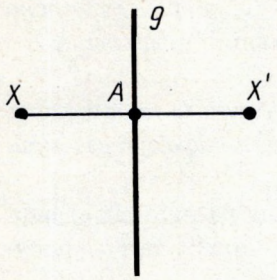
Рыс. 190

Тэарэма 9.2. ***Пераўтварэнне сіметрыі адносна пункта з'яўляецца рухам.***

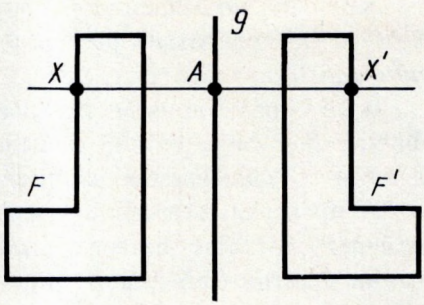
Доказ. Няхай X і Y — два адвольныя пункты фігуры F (рыс. 190). Пераўтварэнне сіметрыі адносна пункта O пераводзіць іх у пункты X' і Y'. Разгледзім трохвугольнікі XOY і $X'O'Y'$. Гэтыя трохвугольнікі роўныя па першаму прызнаку роўнасці трохвугольнікаў. У іх вуглы пры вяршыні O роўныя як вертыкальныя, а $OX = OX'$, $OY = OY'$ па азначэнню сіметрыі адносна пункта O. З роўнасці трохвугольнікаў вынікае роўнасць старон: $XY = X'Y'$. А гэта значыць, што сіметрыя адносна пункта O ёсць рух. Тэарэма даказана.

85. СІМЕТРЫЯ АДНОСНА ПРАМОЙ

Няхай g — фіксаваная прамая (рыс. 191). Возьмем адвольны пункт X і апусцім перпендыкуляр AX на прамую g. На прадаўжэнні перпендыкуляра за пункт A адкладзём адрэзак AX', роўны адрэзку AX. Пункт X' называецца *сіметрычным*



Рыс. 191



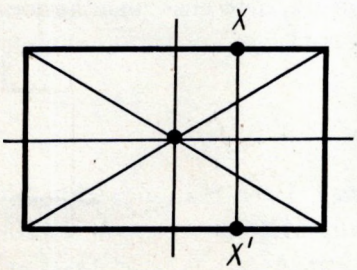
Рыс. 192

пункту X адносна прамой g. Калі пункт X ляжыць на прамой g, то сіметрычны яму пункт ёсць сам пункт X. Відавочна, што пункт, сіметрычны пункту X', ёсць пункт X.

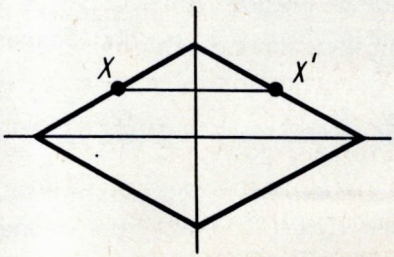
Пераўтварэнне фігуры F у фігуру F', пры якім кожны яе пункт X пераходзіць у пункт X', сіметрычны адносна дадзенай прамой g, называецца пераўтварэннем сіметрыі адносна прамой g. Пры гэтым фігуры F і F' называюцца *сіметрычнымі адносна прамой g* (рыс. 192).

Калі пераўтварэнне сіметрыі адносна прамой g пераводзіць фігуру F у сябе, то гэта фігура называецца *сіметрычнай адносна прамой g*, а прамая g называецца *воссю сіметрыі* фігуры.

Напрыклад, прамыя, якія праходзяць праз пункт перасячэння дыяганалей прамавугольніка паралельна яго старанам, з'яўляюцца восямі сіметрыі прамавугольніка (рыс. 193). Прамыя, на якіх ляжаць дыяганалі ромба, з'яўляюцца яго восямі сіметрыі (рыс. 194).



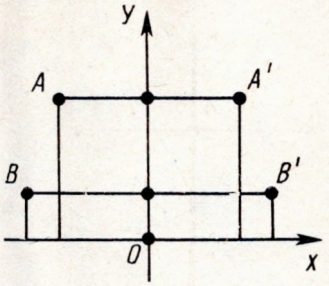
Рыс. 193



Рыс. 194

Тэарэма 9.3. ***Пераўтварэнне сіметрыі адносна прамой з'яўляецца рухам.***

Доказ. Прымем дадзеную прамую за вось y дэкартавай сістэмы каардынат (рыс. 195). Няхай адвольны пункт $A(x;\ y)$ фігуры F пераходзіць у пункт $A'(x';\ y')$ фігуры F'. З азначэння сіметрыі адносна прамой вынікае, што ў пунктаў A і A' роўныя ардынаты, а абсцысы адрозніваюцца толькі знакам: $x' = -x$.



Рыс. 195

Возьмем два адвольныя пункты $A(x_1;\ y_1)$ і $B(x_2;\ y_2)$. Яны пяройдуць у пункты $A'(-x_1;\ y_1)$ і $B(-x_2;\ y_2)$.

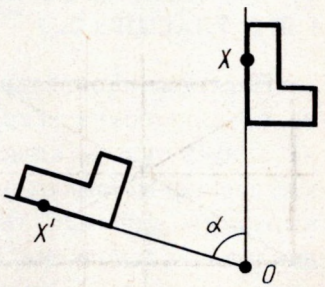
Маем:

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2,$$
$$A'B'^2 = (-x_2 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

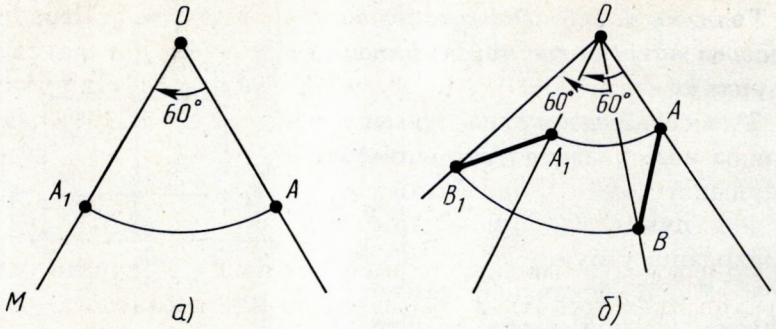
Адсюль відаць, што $AB = A'B'$. А гэта значыць, што пераўтварэнне сіметрыі адносна прамой ёсць рух. Тэарэма даказана.

86. ПАВАРОТ

Паваротам плоскасці каля дадзенага пункта называецца такі рух, пры якім кожны прамень, які выходзіць з гэтага пункта, паварочваецца на адзін і той жа вугал у адным і тым жа напрамку (рыс. 196). Гэта значыць, што калі пры павароце каля пункта O пункт X пераходзіць у пункт X', то прамені OX і OX' утвараюць адзін і той жа вугал, які б ні быў пункт X. Гэты вугал называецца *вуглом павароту*. Пераўтварэнне фігуры пры павароце плоскасці таксама называецца *паваротам*.



Рыс. 196



Рыс. 197

З а д а ч а (25). 1) Пабудуйце пункт A_1, у які пераходзіць пункт A пры павароце каля пункта O на вугал 60° па гадзіннікавай стрэлцы.

2) Пабудуйце фігуру, у якую пераходзіць адрэзак AB пры павароце каля пункта O на вугал 60° па гадзіннікавай стрэлцы.

Р а ш э н н е. 1) Правядзём прамень OA і пабудуем прамень OM так, што $\angle AOM = 60°$ (рыс. 197, *а*). Адкладзём на прамені OM адрэзак OA_1, роўны адрэзку OA. Пункт A_1 з'яўляецца шукаемым.

2) Пабудуем пункты A_1 і B_1, у якія пераходзяць пры зададзеным павароце пункты A і B, якія з'яўляюцца канцамі адрэзка AB (рыс. 197, *б*). Адрэзак A_1B_1 з'яўляецца шукаемым, паколькі пры павароце адрэзак пераходзіць у адрэзак.

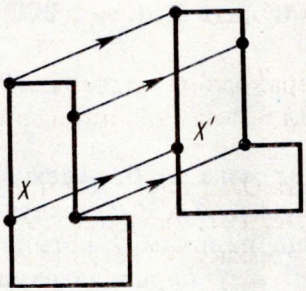
87. ПАРАЛЕЛЬНЫ ПЕРАНОС І ЯГО ЎЛАСЦІВАСЦІ

Наглядна паралельны перанос вызначаецца як пераўтварэнне, пры якім пункты зрушваюцца ў адным і тым жа напрамку на адну і тую ж адлегласць (рыс. 198). Такое азначэнне не з'яўляецца матэматычна строгім, таму што ў ім ужываецца выраз «у адным і тым жа напрамку», які сам патрабуе дакладнага азначэння. У сувязі з гэтым паралельнаму пераносу мы дадзім іншае, адпавядаючае таму ж нагляднаму ўяўленню, але ўжо строгае азначэнне.

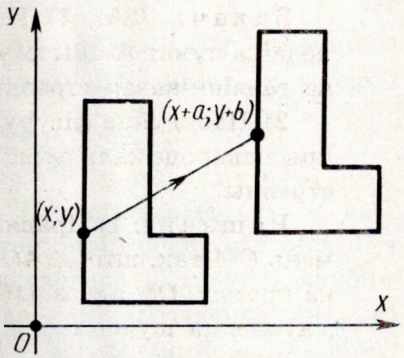
Увядзём на плоскасці дэкартавы каардынаты x, y. Пераўтварэнне фігуры F, пры якім адвольны яе пункт $(x; y)$ пераходзіць у пункт $(x + a; y + b)$, дзе a і b адны і тыя ж для ўсіх пунктаў $(x; y)$, называецца *паралельным пераносам* (рыс. 199). Паралельны перанос задаецца формуламі

$$x' = x + a,\ y' = y + b.$$

Гэтыя формулы выражаюць каардынаты x', y' пункта, у які пераходзіць пункт $(x; y)$ пры паралельным пераносе.



Рыс. 198



Рыс. 199

Паралельны перанос ёсць рух.

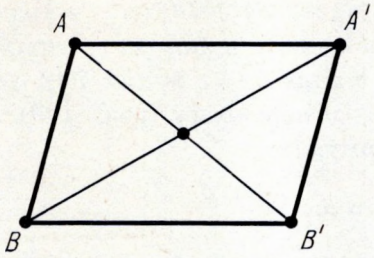
Сапраўды два адвольныя пункты $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ *пераходзяць пры паралельным пераносе ў пункты* $A'(x_1 + a; y_1 + b)$ і $B'(x_2 + a; y_2 + b)$. Таму

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$
$$A'B'^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

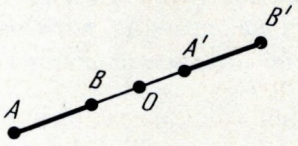
Адсюль $AB = A'B'$. Такім чынам, паралельны перанос захоўвае адлегласці, а значыць, з'яўляецца рухам, што і трэба было даказаць.

Назва «паралельны перанос» апраўдваецца тым, што ***пры паралельным пераносе пункты зрушваюцца па паралельных (ці супадаючых) прамых на адну і тую ж адлегласць.***

Сапраўды, няхай пункты $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ пераходзяць



Рыс. 200



Рыс. 201

у пункты $A'(x_1+a;\ y_1+b)$ і $B'(x_2+a;\ y_2+b)$ (рыс. 200). Сярэдзіна адрэзка AB' мае каардынаты

$$x=\frac{x_1+x_2+a}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2+b}{2}.$$

Тыя ж каардынаты мае і сярэдзіна адрэзка $A'B$. Адсюль вынікае, што дыяганалі чатырохвугольніка $AA'B'B$ перасякаюцца і пунктам перасячэння дзеляцца папалам. Значыць, гэты чатырохвугольнік — паралелаграм. А ў паралелаграма процілеглыя стораны AA' і BB' паралельныя і роўныя.

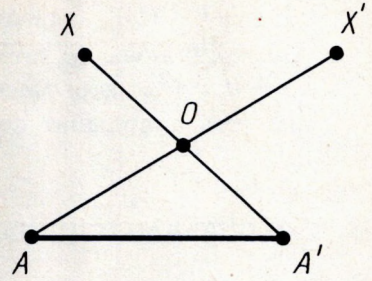
Заўважым, што ў паралелаграма $AA'B'B$ паралельныя і дзве другія процілеглыя стараны AB і $A'B'$. Адсюль вынікае, што ***пры паралельным пераносе прамая пераходзіць у паралельную прамую (ці ў сябе).***

З а ў в а г а. У папярэднім доказе дапускалася, што пункт B не ляжыць на прамой AA'. У выпадку, калі пункт B ляжыць на прамой AA', пункт B' таксама ляжыць на гэтай прамой, паколькі сярэдзіна адрэзка AB' супадае з сярэдзінай адрэзка BA' (рыс. 201). Значыць, усе пункты A, B, A', B' ляжаць на адной прамой. Далей,

$$AA'=\sqrt{(x_1+a-x_1)^2+(y_1+b-y_1)^2}=\sqrt{a^2+b^2},$$
$$BB'=\sqrt{(x_2+a-x_2)^2+(y_2+b-y_2)^2}=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Такім чынам, у гэтым выпадку пункты A і B зрушваюцца па прамой AB на адну і тую ж адлегласць $\sqrt{a^2+b^2}$, а прамая AB пераходзіць у сябе.

88. ІСНАВАННЕ І АДЗІНАСЦЬ ПАРАЛЕЛЬНАГА ПЕРАНОСУ



Рыс. 202

Тэарэма 9.4. ***Якія б ні былі два пункты A і A', існуе адзін і толькі адзін паралельны пераносы, пры якім пункт A пераходзіць у пункт A'.***

Доказ. Пачнём з доказу існавання паралельнага пераносу, які пераводзіць пункт A з A'. Увядзём дэкартавы каардынаты на плоскасці. Няхай a_1, a_2 — каардынаты пункта A і a'_1, a'_2 — каардынаты пункта A'. Паралельны пераносы, зададзены формуламі

$$x' = x + a'_1 - a_1;\ y' = y + a'_2 - a_2,$$

пераводзіць пункт A ў пункт A'. Сапраўды, пры $x = a_1$ і $y = a_2$ атрымаем: $x' = a'_1$, $y' = a'_2$.

Дакажам адзінасць паралельнага пераносу, які пераводзіць пункт A ў пункт A'. Няхай X — адвольны пункт фігуры і X' — пункт, у які ён пераходзіць пры паралельным пераносе (рыс. 202). Як мы ведаем, адрэзкі XA' і AX' маюць агульную сярэдзіну O. Заданне пункта X адназначна вызначае пункт O — сярэдзіну адрэзка $A'X$. А пункты A і O адназначна вызначаюць пункт X', паколькі пункт O з'яўляецца сярэдзінай адрэзка AX'. Адназначнасць у вызначэнні пункта X' і азначае адзінасць паралельнага пераносу.

Тэарэма даказана поўнасцю.

Задача (30). Пры паралельным пераносе пункт (1; 1) пераходзіць у пункт (— 1; 0). У які пункт пераходзіць пачатак каардынат?

Рашэнне. Любы паралельны пераносы задаецца формуламі

$$x' = x + a,\ y' = y + b.$$

Паколькі пункт (1; 1) пераходзіць у пункт (— 1; 0), то $-1 = 1 + a$, $0 = 1 + b$. Адсюль $a = -2$, $b = -1$. Такім чынам, наш паралельны пераносы, які пераводзіць пункт

(1; 1) у (— 1; 0), задаецца формуламі $x' = x - 2$, $y' = y - 1$. Падстаўляючы ў гэтыя формулы каардынаты пачатку ($x = 0$, $y = 0$), атрымаем: $x' = -2$, $y' = -1$. Такім чынам, пачатак каардынат пераходзіць у пункт $(-2; -1)$.

89. СУНАКІРАВАНАСЦЬ ПАЎПРАМЫХ

Дзве паўпрамыя называюцца *аднолькава накіраванымі* ці *сунакіраванымі*, калі яны сумяшчаюцца паралельным пераносам. Гэта значыць існуе паралельны перанос, які пераводзіць адну паўпрамую ў другую.

Калі паўпрамыя a і b аднолькава накіраваны і паўпрамыя b і c аднолькава накіраваны, то паўпрамыя a і c таксама аднолькава накіраваны (рыс. 203).

Сапраўды, няхай паралельны перанос, які задаецца формуламі

$$x' = x + m,\ y' = y + n, \qquad (*)$$

пераводзіць паўпрамую a ў паўпрамую b, а паралельны перанос, які задаецца формуламі

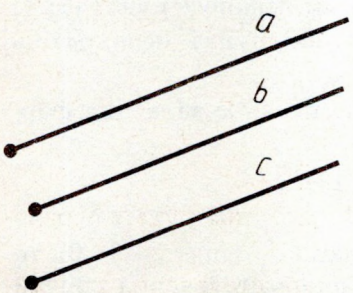
$$x'' = x' + m_1,\ y'' = y' + n_1, \qquad (**)$$

пераводзіць паўпрамую b у паўпрамую c.

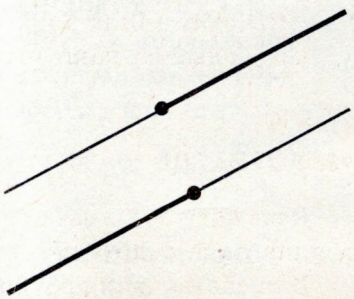
Разгледзім паралельны перанос, які задаецца формуламі

$$x'' = x + m + m_1,\ y'' = y + n + n_1. \qquad (***)$$

Сцвярджаем, што гэты паралельны перанос пераводзіць паўпрамую a ў паўпрамую c. Дакажам гэта.



Рыс. 203

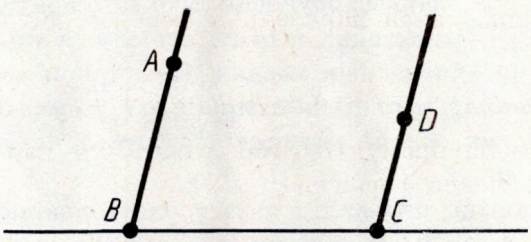


Рыс. 204

Няхай $(x; y)$ — адвольны пункт паўпрамой a. Згодна з формуламі (*) пункт $(x + m; y + n)$ належыць паўпрамой b. Паколькі пункт $(x + m; y + n)$ належыць паўпрамой b, то згодна з формуламі (**) пункт $(x + m + m_1; y + n + n_1)$ належыць паўпрамой c. Такім чынам, паралельны перанос, які задаецца формуламі (***), пераводзіць паўпрамую a ў паўпрамую c. А гэта значыць, што паўпрамыя a і c аднолькава накіраваныя, што і трэба было даказаць.

Дзве паўпрамыя называюцца *процілегла накіраванымі*, калі кожная з іх аднолькава накіравана з паўпрамой, дадатковай да другой (рыс. 204).

З а д а ч а (32). Прамыя AB і CD — паралельныя. Пункты A і D ляжаць па адзін бок ад сякучай BC. Дакажыце, што прамені BA і CD аднолькава накіраваныя.



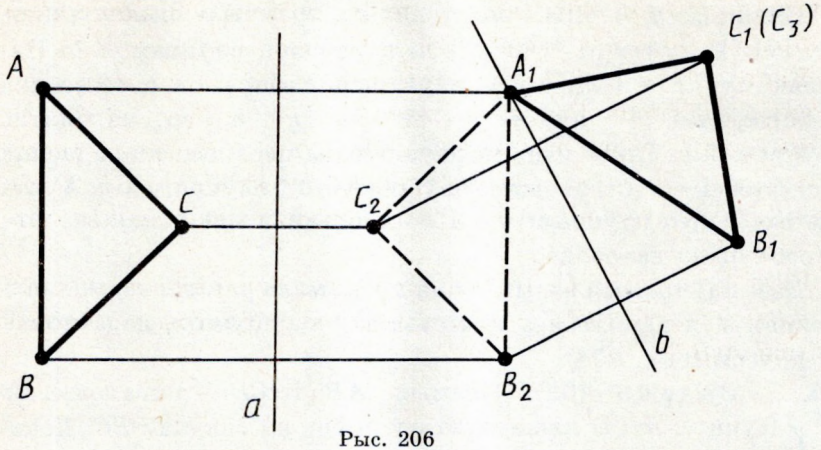
Рыс. 205

Р а ш э н н е. Падвергнем прамень CD паралельнаму пераносу, пры якім пункт C пераходзіць у пункт B (рыс. 205). Пры гэтым прамая CD сумесціцца з прамой BA. Пункт D, зрушваючыся па прамой, паралельнай CB, застаецца ў той жа паўплоскасці адносна прамой BC. Таму прамень CD сумесціцца з праменем BA, а значыць, гэтыя прамені аднолькава накіраваны.

90. РОЎНАСЦЬ ФІГУР

Дзве фігуры называюцца *роўнымі*, калі яны рухам пераводзяцца адна ў другую.

Для абазначэння роўнасці фігур выкарыстоўваецца звычайны знак роўнасці. Запіс $F = F'$ азначае, што фігура F роўна



Рыс. 206

фігуры F'. У запісе роўнасці трохвугольнікаў: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ — мяркуецца, што сумяшчаемыя пры руху вяршыні стаяць на адпаведных месцах. Пры такой умове ***роўнасць трохвугольнікаў, што вызначаецца праз іх сумяшчэнне рухам, і роўнасць, як мы яе разумелі да гэтага часу, выражаюць адно і тое ж.***

Гэта значыць, што калі ў двух трохвугольнікаў адпаведныя стораны роўныя і адпаведныя вуглы роўныя, то гэтыя трохвугольнікі сумяшчаюцца рухам. І наадварот: калі два трохвугольнікі сумяшчаюцца рухам, то ў іх адпаведныя стораны роўныя і адпаведныя вуглы роўныя. Дакажам абодва гэтыя сцверджанні.

Няхай трохвугольнік ABC сумяшчаецца рухам з трохвугольнікам $A_1B_1C_1$, прычым вяршыня A пераходзіць у вяршыню A_1, B — у B_1 і C — у C_1. Паколькі пры руху захоўваюцца адлегласці і вуглы, то для нашых трохвугольнікаў $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

Няхай цяпер у трохвугольнікаў ABC і $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$. Дакажам, што яны сумяшчаюцца рухам, пры якім вяршыня A пераходзіць у вяршыню A_1, B — у B_1 і C — у C_1. Падвергнем трохвугольнік ABC пераўтварэнню сіметрыі адносна прамой a, якая перпендыкулярная да адрэзка AA_1 і праходзіць праз яго сярэдзіну (рыс. 206). Атрымаем трохвугольнік $A_1B_2C_2$. Калі пункты B_1 і B_2 розныя, то падвергнем яго сіметрыі адносна

прамой b, якая праходзіць праз пункт A_1 і перпендыкулярная да прамой B_1B_2. Атрымаем трохвугольнік $A_1B_1C_3$.

Калі пункты C_1 і C_3 ляжаць па адзін бок ад прамой A_1B_1, то яны супадаюць. Сапраўды, паколькі вуглы $B_1A_1C_1$ і $B_1A_1C_3$ роўныя, то прамені A_1C_1 і A_1C_3 супадаюць, а паколькі адрэзкі A_1C_1 і A_1C_3 роўныя, то супадаюць пункты C_1 і C_3. Такім чынам, трохвугольнік ABC рухам пераведзены ў трохвугольнік $A_1B_1C_1$.

Калі пункты C_1 і C_3 ляжаць па розныя бакі ад прамой A_1B_1, то для доказу трэба яшчэ прымяніць сіметрыю адносна прамой A_1B_1.

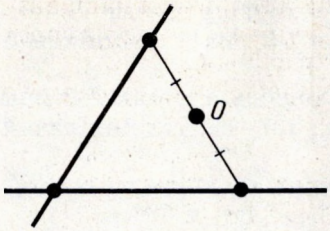
КАНТРОЛЬНЫЯ ПЫТАННІ

1. Якое пераўтварэнне фігуры называецца рухам?
2. Дакажыце, што пункты, якія ляжаць на прамой, пры руху пераходзяць у пункты, што ляжаць на прамой, і захоўваецца парадак іх узаемнага размяшчэння.
3. У што пераходзяць прамыя, паўпрамыя, адрэзкі пры руху?
4. Дакажыце, што пры руху захоўваюцца вуглы.
5. Растлумачце, якія пункты называюцца сіметрычнымі адносна дадзенага пункта.
6. Якое пераўтварэнне называецца сіметрыяй адносна дадзенага пункта?
7. Якая фігура называецца цэнтральна-сіметрычнай?
8. Што такое цэнтр сіметрыі фігуры? Прывядзіце прыклад цэнтральна-сіметрычнай фігуры.
9. Дакажыце, што сіметрыя адносна пункта ёсць рух.
10. Якія пункты называюцца сіметрычнымі адносна дадзенай прамой?
11. Якое пераўтварэнне называецца сіметрыяй адносна дадзенай прамой?
12. Якая фігура называецца сіметрычнай адносна дадзенай прамой?
13. Што такое вось сіметрыі фігуры? Прывядзіце прыклад.
14. Дакажыце, што сіметрыя адносна прамой ёсць рух.
15. Які рух называецца паваротам?
16. Што такое паралельны пераносе?
17. Якія вы ведаеце ўласцівасці паралельнага пераносу?
18. Дакажыце існаванне і адзінасць паралельнага пераносу, які пераводзіць пункт у другі дадзены пункт.
19. Якія паўпрамыя называюцца аднолькава накіраванымі?

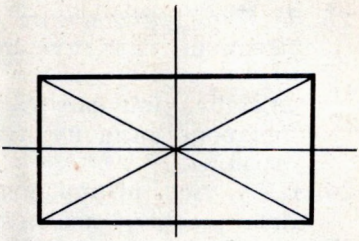
20. Дакажыце, што калі паўпрамыя a і b аднолькава накіраваныя і паўпрамыя b і c аднолькава накіраваныя, то паўпрамыя a і c таксама аднолькава накіраваныя.
21. Якія паўпрамыя называюцца процілегла накіраванымі?
22. Якія фігуры называюцца роўнымі?

ЗАДАЧЫ

1. Дакажыце, што пры руху паралелаграм пераходзіць у паралелаграм.
2. У якую фігуру пераходзіць пры руху квадрат? Растлумачце адказ.
3. Дадзены пункты A і B. Пабудуйце пункт B', сіметрычны пункту B адносна пункта A.
4. Рашыце папярэднюю задачу, карыстаючыся толькі цыркулем.
5. Дакажыце, што цэнтр акружнасці з'яўляецца яе цэнтрам сіметрыі.
6. Пры сіметрыі адносна некаторага пункта пункт X пераходзіць у пункт X'. Пабудуйце пункт, у які пры гэтай сіметрыі пераходзіць пункт Y.
7. Ці можа ў трохвугольніка быць цэнтр сіметрыі?
8. Дакажыце, што ў паралелаграма пункты перасячэння дыяганалей з'яўляюцца цэнтрам сіметрыі.
9. Дакажыце, што чатырохвугольнік, у якога ёсць цэнтр сіметрыі, з'яўляецца паралелаграмам.
10*. Дадзены прамыя, якія перасякаюцца, і пункт, што не ляжыць на гэтых прамых. Пабудуйце адрэзак з канцамі на дадзеных прамых і сярэдзінай у дадзеным пункце (рыс. 207).
11. Што ўяўляе сабой фігура, сіметрычная адносна дадзенага пункта: 1) адрэзку; 2) вуглу; 3) трохвугольніку?
12. Дадзены пункты A, B, C. Пабудуйце пункт C', сіметрычны пункту C адносна прамой AB.
13. Рашыце задачу 12, карыстаючыся толькі цыркулем.
14. Чаму роўны каардынаты пункта, сіметрычнага пункту $(-3; 4)$ адносна 1) восі x; 2) восі y; 3) пачатку каардынат?
15. Пры сіметрыі адносна некаторай прамой пункт X пераходзіць у пункт X'. Пабудуйце пункт, у які пры гэтай сіметрыі пераходзіць пункт Y.
16. Дакажыце, што прамая, якая змяшчае бісектрысу вугла, з'яўляецца яго воссю сіметрыі.



Рыс. 207



Рыс. 208

17. Дакажыце, што прамая, якая змяшчае медыяну раўнабедранага трохвугольніка, праведзеную да асновы, з'яўляецца воссю сіметрыі трохвугольніка.

18. Дакажыце, што калі ў трохвугольніка ёсць вось сіметрыі, то 1) яна праходзіць праз адну з яго вяршынь; 2) трохвугольнік раўнабедраны.

19. Колькі восей сіметрыі ў роўнастаронняга трохвугольніка?

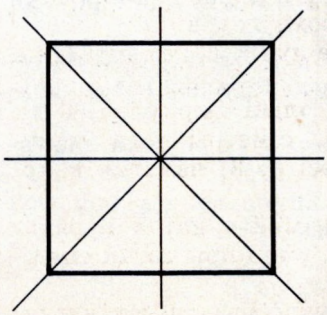
20. Дакажыце, што прамыя, якія праходзяць праз пункт перасячэння дыяганалей прамавугольніка паралельна яго старанам, з'яўляюцца яго восямі сіметрыі (рыс. 208).

21. Дакажыце, што дыяганалі ромба з'яўляюцца яго восямі сіметрыі.

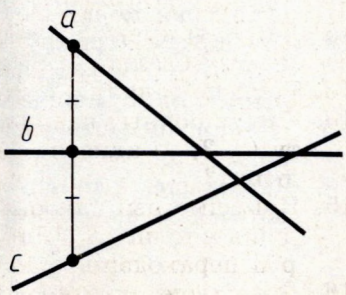
22. Дакажыце, што дыяганалі квадрата і прамыя, якія праходзяць праз пункт іх перасячэння паралельна яго старанам, з'яўляюцца восямі сіметрыі квадрата (рыс. 209).

23. Дакажыце, што прамая, якая праходзіць праз цэнтр акружнасці, з'яўляецца яго воссю сіметрыі.

24*. Дадзены тры прамыя, якія перасякаюцца парамі, a, b, c. Як пабудаваць адрэзак, перпендыкулярны прамой b, з сярэдзінай на прамой b і канцамі на прамых a і c (рыс. 210). Ці заўсёды задача мае рашэнне?



Рыс. 209



Рыс. 210

25. 1) Пабудуйце пункт A_1, у які пераходзіць пункт A пры павароце каля пункта O на вугал 60° па гадзіннікавай стрэлцы.
2) Пабудуйце фігуру, у якую пераходзіць адрэзак AB пры павароце каля пункта O на вугал 60° па гадзіннікавай стрэлцы.

26. Пабудуйце фігуру, у якую пераходзіць трохвугольнік ABC пры павароце яго каля вяршыні C на вугал 60°.

27. Дадзены пункты A, B, C. Пабудуйце пункт C', у які пераходзіць пункт C пры паралельным пераносе, што пераводзіць пункт A ў B.

28. Паралельны перанос задаецца формуламі $x' = x + 1$, $y' = y - 1$. У якія пункты пры гэтым паралельным пераносе пераходзяць пункты (0; 0), (1; 0), (0; 2)?

29. Знайдзіце велічыні a і b у формулах паралельнага пераносу $x' = x + a$, $y' = y + b$, калі вядома, што: 1) пункт (1; 2) пераходзіць у пункт (3; 4); 2) пункт (2; −3) — у пункт (−1; 5); 3) пункт (−1; −3) — у пункт (0; 2).

30. Пры паралельным пераносе пункт (1; 1) пераходзіць у пункт (−1; 0). У які пункт пераходзіць пачатак каардынат?

31. Ці існуе паралельны перанос, пры якім: 1) пункт (1; 2) пераходзіць у пункт (3; 4), а пункт (0; 1) — у пункт (−1; 0); 2) пункт (2; −1) пераходзіць у пункт (1; 0), а пункт (−1; 3) — у пункт (0; 4)?

32. Прамыя AB і CD — паралельныя. Пункты A і D ляжаць па адзін бок ад сякучай BC. Дакажыце, што прамені BA і CD аднолькава накіраваныя.

33. Дакажыце, што ў задачы 32 прамені BA і CD процілегла накіраваныя, калі пункты A і D ляжаць па розныя бакі ад сякучай BC.

34. Чатырохвугольнік $ABCD$ — паралелаграм. Сярод прамяняў AB, BA, BC, CB, DC, AD, DA назавіце пары аднолькава накіраваных і процілегла накіраваных прамяняў.

35. Дакажыце, што адрэзкі роўнай даўжыні і вуглы з роўнай градуснай мерай сумяшчаюцца рухам.

36*. У паралелаграмаў $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ $AB = A_1B_1$, $AD = A_1D_1$ і $\angle A = \angle A_1$. Дакажыце, што паралелаграмы роўныя, г. зн. сумяшчаюцца рухам.

37*. Дакажыце, што ромбы роўныя, калі ў іх роўныя дыяганалі.

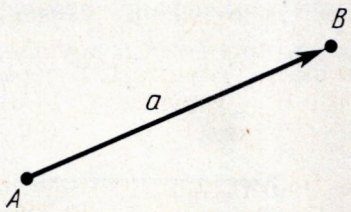
38. Дакажыце, што дзве акружнасці аднолькавага радыуса роўныя, г. зн. сумяшчаюцца рухам.

§ 10. ВЕКТАРЫ

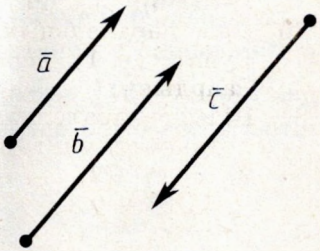
91. АБСАЛЮТНАЯ ВЕЛІЧЫНЯ І НАПРАМАК ВЕКТАРА

Вектарам мы будзем называць накіраваны адрэзак (рыс. 211). Напрамак вектара вызначаецца ўказаннем яго пачатку і канца. На чарцяжы напрамак вектара адзначаецца стрэлкай. Для абазначэння вектараў будзем карыстацца малымі лацінскімі літарамі a, b, c, ... Можна таксама абазначыць вектар паказам яго пачатку і канца. Пры гэтым пачатак вектара ставіцца на першае месца. Замест слова «вектар» над літарным абазначэннем вектара часам ставіцца стрэлка ці рыска. Вектар на рысунку 211 можна абазначыць так:

$$\bar{a},\ \vec{a} \text{ ці } \overline{AB},\ \vec{AB}.$$



Рыс. 211



Рыс. 212

Вектары $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ называюцца *аднолькава накіраванымі*, калі паўпрамыя AB і CD аднолькава накіраваныя. Вектары $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ называюцца *процілегла накіраванымі*, калі паўпрамыя AB і CD процілегла накіраваныя. На рысунку 212 вектары $\bar{a}$ і $\bar{b}$ аднолькава накіраваныя, а вектары $\bar{a}$ і $\bar{c}$ процілегла накіраваныя.

Абсалютнай велічынёй (ці модулем) вектара называецца даўжыня адрэзка, які паказвае вектар. Абсалютная велічыня вектара $\bar{a}$ абазначаецца $|\bar{a}|$.

Пачатак вектара можа супадаць з яго канцом. Такі вектар будзем называць *нулявым* вектарам. Нулявы вектар абазначаецца нулём, з рыскай ($\bar{0}$). Аб напрамку нулявога вектара не гавораць. Абсалютная велічыня нулявога вектара лічыцца роўнай нулю.

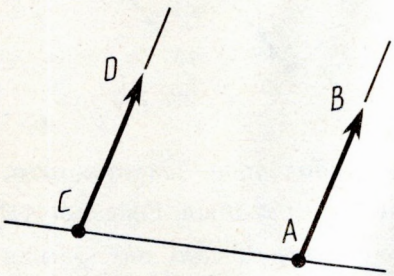
92. РОЎНАСЦЬ ВЕКТАРАЎ

Два вектары называюцца *роўнымі*, калі яны сумяшчаюцца паралельным пераносам. Гэта азначае, што існуе паралельны перанос, які пераводзіць пачатак і канец аднаго вектара адпаведна ў пачатак і канец другога вектара.

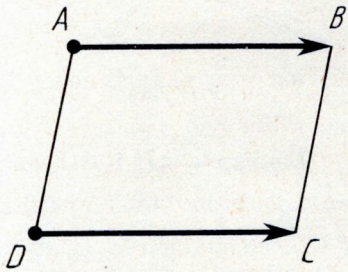
З дадзенага азначэння роўнасці вектараў вынікае, што ***роўныя вектары аднолькава накіраваныя і роўныя па абсалютнай велічыні.***

Наадварот: ***калі вектары аднолькава накіраваныя і роўныя па абсалютнай велічыні, то яны роўныя.***

Сапраўды, няхай $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ — аднолькава накіраваныя вектары, роўныя па абсалютнай велічыні (рыс. 213). Паралельны перанос, які пераводзіць пункт C у пункт A, сумяшчае паўпрамую CD з паўпрамой AB, таму што яны аднолькава накіраваныя. А паколькі адрэзкі AB і CD роўныя, то пры гэтым пункт D сумяшчаецца з пунктам B, г. зн. паралельны перанос пераводзіць вектар $\overline{CD}$ у вектар $\overline{AB}$. Значыць, вектары $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ роўныя, што і трэба было даказаць.



Рыс. 213



Рыс. 214

Задача (2). Чатырохвугольнік $ABCD$ — паралелаграм. Дакажыце роўнасць вектараў $\overline{AB}$ і $\overline{DC}$.

Рашэнне. Падвергнем вектар $\overline{AB}$ паралельнаму пераносу, пры якім пункт A пераходзіць у пункт D (рыс. 214). Пры гэтым пераносе пункт A зрушваецца па прамой AD, а значыць, пункт B зрушваецца па паралельнай прамой BC. Прамая AB пераходзіць у паралельную прамую, а значыць, у прамую DC. Значыць, пункт B пераходзіць

у пункт C. Такім чынам, наш паралельны перанос пераводзіць вектар $\overline{AB}$ у вектар $\overline{DC}$, а значыць, гэтыя вектары роўныя.

Няхай $\bar{a}$ — вектар і A — адвольны пункт. Тады ад пункта A можна адкласці адзін і толькі адзін вектар $\bar{a}'$, роўны вектару $\bar{a}$.

Сапраўды, існуе адзіны паралельны перанос, пры якім пачатак вектара $\bar{a}$ пераходзіць у пункт A. Вектар, у які пераходзіць пры гэтым вектар $\bar{a}$, і ёсць вектар $\bar{a}'$.

Для практычнага адкладвання ад дадзенага пункта (D) вектара, роўнага дадзенаму $(\overline{AB})$, можна выкарыстаць задачу 2.

93. КААРДЫНАТЫ ВЕКТАРА

Няхай вектар $\bar{a}$ мае пачаткам пункт $A_1(x_1;\ y_1)$, а канцом — пункт $A_2(x_2;\ y_2)$. Каардынатамі вектара $\bar{a}$ будзем называць лікі $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$. Каардынаты вектара будзем ставіць побач з літарным абазначэннем вектара, у дадзеным выпадку $\bar{a}(a_1;\ a_2)$, ці проста $(\overline{a_1;\ a_2})$. Каардынаты нулявога вектара роўны нулю.

З формулы, якая выражае адлегласць паміж двума пунктамі праз іх каардынаты, вынікае, што абсалютная велічыня вектара з каардынатамі a_1, a_2 роўна $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Роўныя вектары маюць роўныя адпаведныя каардынаты. І наадварот: ***калі ў вектараў адпаведныя каардынаты роўныя, то вектары роўныя.***

Сапраўды, няхай $A_1(x_1;\ y_1)$ і $A_2(x_2;\ y_2)$ — пачатак і канец вектара $\bar{a}$. Паколькі роўны яму вектар $\bar{a}'$ атрымліваецца з вектара $\bar{a}$ паралельным пераносам, то яго пачаткам і канцом будуць адпаведна: $A_1'(x_1 + c;\ y_1 + d)$, $A_2'(x_2 + c;\ y_2 + d)$. Адсюль відаць, што абодва вектары $\bar{a}$ і $\bar{a}'$ маюць адны і тыя ж каардынаты: $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$.

Дакажам цяпер адваротнае сцверджанне. Няхай адпаведныя каардынаты вектараў $\overline{A_1A_2}$ і $\overline{A_1'A_2'}$ роўныя. Дакажам, што вектары роўныя.

Няхай x_1' і y_1' — каардынаты пункта A_1', а x_2' і y_2' — каардынаты пункта A_2'. Па ўмове тэарэмы $x_2 - x_1 = x_2' - x_1'$, $y_2 - y_1 =$

$= y_2' - y_1'$. Адсюль $x_2' = x_2 + x_1' - x_1$, $y_2' = y_2 + y_1' - y_1$. Паралельны перанос, зададзены формуламі

$$x' = x + x_1' - x_1, \qquad y' = y + y_1' - y_1,$$

пераводзіць пункт A_1 ў пункт A_1', а пункт A_2 ў пункт A_2', г. зн. вектары $\overline{A_1A_2}$ і $\overline{A_1'A_2'}$ роўныя, што і трэба было даказаць.

З а д а ч а (7). Дадзены тры пункты: $A(1; 1)$, $B(-1; 0)$, $C(0; 1)$. Знайдзіце такі пункт $D(x; y)$, каб вектары $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ былі роўныя.

Р а ш э н н е. Вектар $\overline{AB}$ мае каардынаты -2, -1. Вектар $\overline{CD}$ мае каардынаты $x - 0$, $y - 1$. Паколькі $\overline{AB} = \overline{CD}$, то $x - 0 = -2$, $y - 1 = -1$. Адсюль знаходзім каардынаты пункта D: $x = -2$, $y = 0$.

94. СКЛАДАННЕ ВЕКТАРАЎ

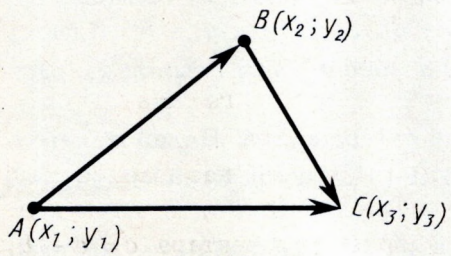
Сумай вектараў $\bar{a}$ і $\bar{b}$ з каардынатамі a_1, a_2 і b_1, b_2 называецца вектар $\bar{c}$ з каардынатамі $a_1 + b_1$, $a_2 + b_2$, г. зн.

$$\bar{a}(a_1; a_2) + \bar{b}(b_1; b_2) = \bar{c}(a_1 + b_1; a_2 + b_2).$$

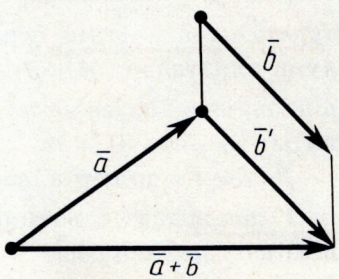
Для любых вектараў $\bar{a}(a_1; a_2)$, $\bar{b}(b_1; b_2)$, $\bar{c}(c_1; c_2)$

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}, \quad \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}.$$

Для доказу дастаткова параўнаць адпаведныя каардынаты вектараў, якія стаяць у правай і левай частках роўнасцей. Мы бачым, што яны роўныя. А вектары з адпаведна роўнымі каардынатамі роўныя.



Рыс. 215



Рыс. 216

Тэарэма 10.1. ***Якія б ні былі пункты A, B, C, мае месца вектарная роўнасць***

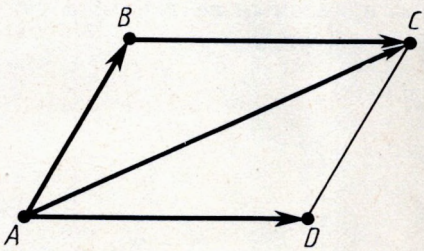
$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

Доказ. Няхай $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$, $C(x_3;\ y_3)$ — дадзеныя пункты (рыс. 215). Вектар $\overline{AB}$ мае каардынаты $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, вектар $\overline{BC}$ мае каардынаты $x_3 - x_2, y_3 - y_2$. Такім чынам, вектар $\overline{AB} + \overline{BC}$ мае каардынаты $x_3 - x_1$, $y_3 - y_1$. А гэта ёсць каардынаты вектара $\overline{AC}$. Значыць, вектары $\overline{AB} + \overline{BC}$ і $\overline{AC}$ роўныя. Тэарэма даказана.

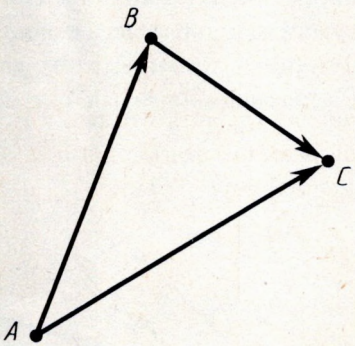
Тэарэма 10.1 дае наступны спосаб пабудавання сумы адвольных вектараў $\bar{a}$ і $\bar{b}$. Трэба ад канца вектара $\bar{a}$ адкласці вектар $\bar{b}'$, роўны вектару $\bar{b}$. Тады вектар, пачатак якога супадае з пачаткам вектара $\bar{a}$, а канец — з канцом вектара $\bar{b}'$, будзе сумай вектараў $\bar{a}$ і $\bar{b}$ (рыс. 216). Такі спосаб атрымання сумы двух вектараў называецца *«правілам трохвугольніка»* складання вектараў.

Для вектараў з агульным пачаткам іх сума паказваецца дыяганаллю паралелаграма, пабудаванага на гэтых вектарах (*«правіла паралелаграма»*, рыс 217). Сапраўды, $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$, а $\overline{BC} = \overline{AD}$. Значыць,

$$\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}.$$



Рыс. 217



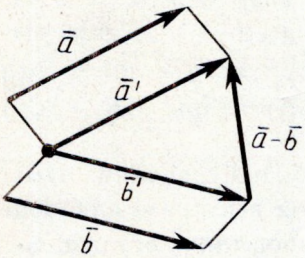
Рыс. 218

Рознасцю вектараў $\bar{a}(a_1;\ a_2)$ і $\bar{b}(b_1;\ b_2)$ называецца такі вектар $\bar{c}(c_1;\ c_2)$, які ў суме з вектарам $\bar{b}$ дае вектар $\bar{a}$: $\bar{b} + \bar{c} = \bar{a}$. Адсюль знаходзім каардынаты вектара $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$;

$$c_1 = a_1 - b_1;\ c_2 = a_2 - b_2.$$

З а д а ч а (11). Дадзены вектары з агульным пачаткам: $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$ (рыс. 218). Дакажыце, што $\overline{AC} - \overline{AB} = \overline{BC}$.

Р а ш э н н е. Маем: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$. А гэта значыць, што $\overline{AC} - \overline{AB} = \overline{BC}$.



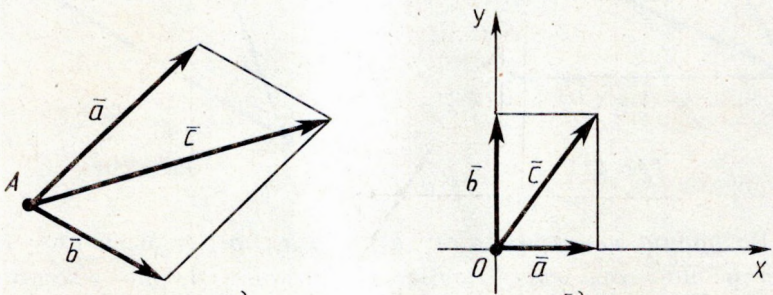
Рыс. 219

Адсюль атрымліваецца наступнае правіла для пабудавання рознасці двух вектараў. Каб пабудаваць вектар роўны рознасці вектараў $\bar{a}$ і $\bar{b}$, трэба адкласці роўныя ім вектары $\bar{a}'$ і $\bar{b}'$ ад аднаго пункта. Тады вектар, пачатак якога супадае з канцом вектара $\bar{b}'$, а канец — з канцом вектара $\bar{a}'$, будзе рознасцю вектараў $\bar{a}$ і $\bar{b}$ (рыс. 219).

95. СКЛАДАННЕ СІЛ

Сілу, прыкладзеную да цела, зручна паказваць вектарам, напрамак якога супадае з напрамкам дзеяння сілы, а абсалютная велічыня прапарцыянальная велічыні сілы. Як паказвае вопыт, пры такім спосабе паказу сіл раўнадзейная дзвюх ці некалькіх сіл, прыкладзеных да цела ў адным пункце, паказваецсумай адпаведных ім вектараў. На рысунку 220, *а* да цела ў пункце A прыкладзены дзве сілы, паказаныя вектарамі $\bar{a}$ і $\bar{b}$. Раўнадзейная гэтых сіл паказваецца вектарам

$$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}.$$

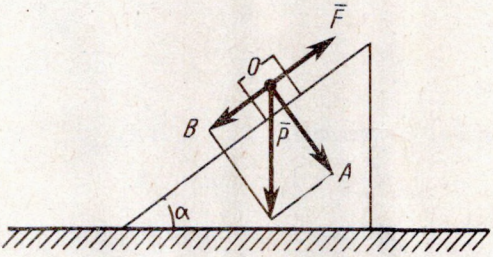


Рыс. 220

Паказ сілы ў выглядзе сумы сіл, якія дзейнічаюць у двух зададзеных напрамках, называецца раскладаннем сілы па гэтых напрамках. Так, на рысунку 220, *а* сіла $\bar{c}$ раскладзена ў суму сіл $\bar{a}$ і $\bar{b}$ — састаўляючыя сілы $\bar{c}$.

Зручна праводзіць раскладанне вектара па дзвюх перпендыкулярных восях. У гэтым выпадку састаўляючыя вектары называюцца *праекцыямі* вектара на вось (рыс. 220, *б*).

Задача (16). З якой сілай F трэба ўтрымліваць груз вагой P на нахіленай плоскасці, каб ён не спаўзаў уніз (рыс. 221)?



Рыс. 221

Рашэнне. Няхай O — цэнтр цяжару грузу, да якога прыкладзена сіла P. Раскладзём вектар $\bar{P}$ па двух узаемна перпендыкулярных напрамках, як паказана на рысунку 221. Сіла $\overline{OA}$ перпендыкулярная нахіленай плоскасці і не выклікае перамяшчэння грузу. Сіла $\bar{F}$, якая ўтрымлівае груз, павінна быць роўнай па велічыні і процілеглай па напрамку сіле $\overline{OB}$. Таму $F = P\sin\alpha$.

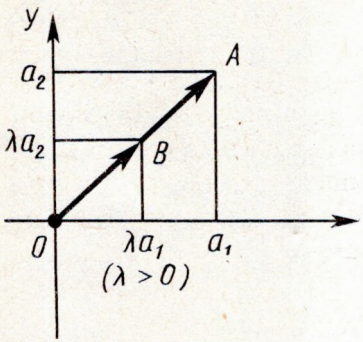
96. МНОЖАННЕ ВЕКТАРА НА ЛІК

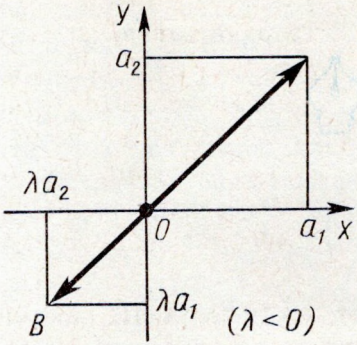
Здабыткам вектара $(\overline{a_1;\ a_2})$ *на лік* λ называецца вектар $(\overline{\lambda a_1;\ \lambda a_2})$, г. зн. $(\overline{a_1;\ a_2})\lambda = (\overline{\lambda a_1;\ \lambda a_2})$.

Па азначэнню $(\overline{a_1;\ a_2})\lambda = \lambda(\overline{a_1;\ a_2})$.

З азначэння аперацыі множання вектара на лік вынікае, што ***для любога вектара*** $\bar{a}$ ***і лікаў*** λ, μ

$$(\lambda + \mu)\bar{a} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{a}.$$





Рыс. 222

Для любых двух вектараў $\bar{a}$ і $\bar{b}$ і ліку λ

$$\lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b}.$$

Тэарэма 10.2. ***Абсалютная велічыня вектара $\lambda\bar{a}$ роўна $|\lambda|\,|\bar{a}|$. Напрамак вектара $\lambda\bar{a}$ пры $\bar{a} \neq \bar{0}$ супадае з напрамкам вектара $\bar{a}$, калі $\lambda > 0$, і процілеглы напрамку вектара $\bar{a}$, калі $\lambda < 0$.***

Доказ. Пабудуем вектары $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$, роўныя $\bar{a}$ і $\lambda\bar{a}$ адпаведна (O — пачатак каардынат). Няхай a_1 і a_2 — каардынаты вектара $\bar{a}$. Тады каардынатамі пункта A будуць лікі a_1 і a_2, а каардынатамі пункта B будуць λa_1, λa_2 (рыс. 222). Ураўненне прамой OA мае выгляд:

$$\alpha x + \beta y = 0.$$

Паколькі ўраўненню задавальняюць каардынаты пункта $A(a_1, a_2)$, то яму задавальняюць і каардынаты пункта $B(\lambda a_1, \lambda a_2)$. Адсюль вынікае, што пункт B ляжыць на прамой OA. Каардынаты c_1 і c_2 любога пункта C, які ляжыць на паўпрамой OA, маюць тыя ж знакі, што і каардынаты a_1 і a_2 пункта A, а каардынаты любога пункта, які ляжыць на паўпрамой, дадатковай да OA, маюць процілеглыя знакі.

Таму калі $\lambda > 0$, то пункт B ляжыць на паўпрамой OA, а значыць, вектары $\bar{a}$ і $\lambda\bar{a}$ аднолькава накіраваныя. Калі $\lambda < 0$, то пункт B ляжыць на дадатковай паўпрамой, вектары $\bar{a}$ і $\lambda\bar{a}$ процілегла накіраваныя.

Абсалютная велічыня вектара $\lambda\bar{a}$ роўна:

$$|\lambda\bar{a}| = \sqrt{(\lambda a_1)^2 + (\lambda a_2)^2} = |\lambda|\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |\lambda|\,|\bar{a}|.$$

Тэарэма даказана.

Задача (17). Дадзены пункты: $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$. Дакажыце, што вектары $\overline{AB}$ і $\overline{BA}$ процілегла накіраваныя.

Рашэнне. Вектар $\overline{AB}$ мае каардынаты $x_2 - x_1$ і $y_2 - y_1$. Вектар $\overline{BA}$ мае каардынаты $x_1 - x_2$ і $y_1 - y_2$. Мы бачым, што $\overline{AB} = (-1)\overline{BA}$. А значыць, вектары $\overline{AB}$ і $\overline{BA}$ процілегла накіраваныя.

97. РАСКЛАДАННЕ ВЕКТАРА ПА ДВУХ НЕКАЛІНЕАРНЫХ ВЕКТАРАХ

Два ненулявыя вектары называюцца *калінеарнымі*, калі яны ляжаць на адной прамой ці на паралельных прамых (рыс. 223). Калінеарныя вектары ці аднолькава накіраваныя, ці процілегла накіраваныя.

Няхай $\bar{a}$ і $\bar{b}$ адрозныя ад нуля калінеарныя вектары. Дакажам, што існуе лік λ такі, што

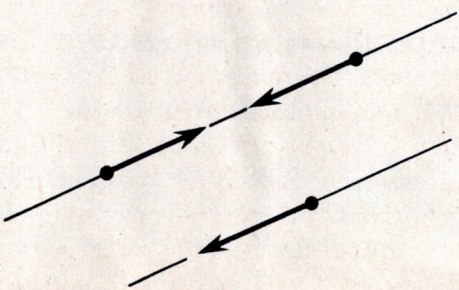
$$\bar{b} = \lambda\bar{a}.$$

Дапусцім, вектары $\bar{a}$ і $\bar{b}$ аднолькава накіраваныя. Вектары

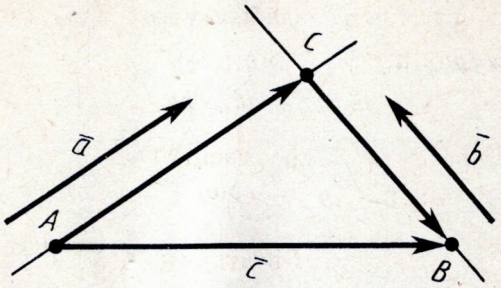
$$\bar{b} \text{ і } \left(\frac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}\right)\bar{a}$$

аднолькава накіраваныя і маюць адну і тую ж абсалютную велічыню $|\bar{b}|$. Значыць, яны роўныя:

$$\bar{b} = \frac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}\bar{a} = \lambda\bar{a},\ \lambda = \frac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|},$$



Рыс. 223



Рыс. 224

У выпадку процілегла накіраваных вектараў $\bar{a}$ і $\bar{b}$ аналагічна заключаем, што

$$\bar{b} = -\frac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}\bar{a} = \lambda\bar{a},\ \lambda = -\frac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|},$$

што і трэба было даказаць.

Няхай $\bar{a}$ і $\bar{b}$ адрозныя ад нуля некалінеарныя вектары. Дакажам, што ***любы вектар $\bar{c}$ можна запісаць у выглядзе***

$$\bar{c} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b}.$$

Няхай A і B пачатак і канец вектара $\bar{c}$ (рыс. 224). Правядзём праз пункты A і B прамыя, паралельныя вектарам $\bar{a}$ і $\bar{b}$. Яны перасякаюцца ў некаторым пункце C. Маем:

$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}.$$

Паколькі вектары $\bar{a}$ і $\overline{AC}$ калінеарныя, то $\overline{AC} = \lambda\bar{a}$. Паколькі вектары $\overline{CB}$ і $\bar{b}$ калінеарныя, то $\overline{CB} = \mu\bar{b}$. Такім чынам,

$$\bar{c} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b},$$

што і трэба было даказаць.

98. СКАЛЯРНЫ ЗДАБЫТАК ВЕКТАРАЎ

Скалярным здабыткам вектараў $\bar{a}(a_1;\ a_2)$ і $\bar{b}(b_1;\ b_2)$ называецца лік $a_1b_1 + a_2b_2$.

Для скалярнага здабытку вектараў скарыстоўваецца такі ж запіс, як і для здабытку лікаў. Скалярны здабытак $\bar{a} \cdot \bar{a}$ абазначаецца $\bar{a}^2$ і называецца скалярным квадратам. Відавочна, $\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$.

З азначэння скалярнага здабытку вектараў вынікае, што

для любых вектараў $\bar{a}(a_1;\ a_2)$, $\bar{b}(b_1;\ b_2)$, $\bar{c}(c_1;\ c_2)$

$$(\bar{a}+\bar{b})\bar{c}=\bar{a}\bar{c}+\bar{b}\bar{c}.$$

Сапраўды, левая частка роўнасці ёсць $(a_1+b_1)c_1+(a_2+b_2)c_2$, а правая $a_1c_1+a_2c_2+b_1c_1+b_2c_2$. Відавочна, яны роўныя.

Вуглом паміж ненулявымі вектарамі $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$ называецца вугал BAC. Вуглом паміж двума ненулявымі вектарамі $\bar{a}$ і $\bar{b}$ называецца вугал паміж роўнымі ім вектарамі з агульным пачаткам. Вугал паміж аднолькава накіраванымі вектарамі лічыцца роўным нулю.

Тэарэма 10.3. ***Скалярны здабытак вектараў роўны здабытку іх абсалютных велічынь на косінус вугла паміж імі.***

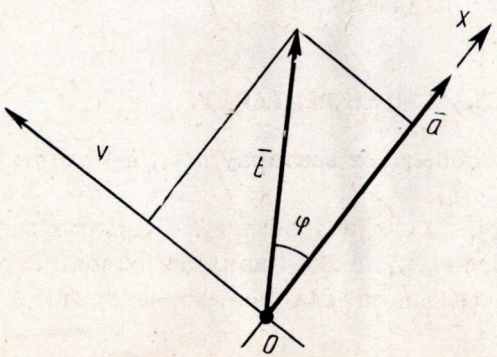
Доказ. Няхай $\bar{a}$ і $\bar{b}$ — дадзеныя вектары і φ — вугал паміж імі. Маем:

$$(\bar{a}+\bar{b})^2=(\bar{a}+\bar{b})(\bar{a}+\bar{b})=(\bar{a}+\bar{b})\bar{a}+(\bar{a}+\bar{b})\bar{b}=$$
$$=\bar{a}\bar{a}+\bar{b}\bar{a}+\bar{a}\bar{b}+\bar{b}\bar{b}=\bar{a}^2+2\bar{a}\bar{b}+\bar{b}^2,$$

або

$$|\bar{a}+\bar{b}|^2=|\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2+2\bar{a}\bar{b}.$$

Адсюль відаць, што скалярны здабытак $\bar{a}\bar{b}$ выражаецца праз даўжыні вектараў $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{a}+\bar{b}$, а таму не залежыць ад выбару сістэмы каардынат, г. зн. скалярны здабытак не зменіцца, калі сістэму каардынат выбраць спецыяльным чынам. Возьмем сістэму каардынат xy так, як паказана на рысунку 225. Пры такім выбары сістэмы каардынат каардынатамі вектара $\bar{a}$ будуць



Рыс. 225

$|\bar{a}|$ і 0, а каардынатамі вектара $\bar{b}$ будуць $|\bar{b}|\cos\varphi$ і $|\bar{b}|\sin\varphi$. Скалярны здабытак

$$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}|\,|\bar{b}|\cos\varphi + 0\,|\bar{b}|\cos\varphi + 0\,|\bar{b}|\sin\varphi = |\bar{a}|\,|\bar{b}|\cos\varphi.$$

Тэарэма даказана.

З тэарэмы 10.3 вынікае, што ***калі вектары перпендыкулярныя, то іх скалярны здабытак роўны нулю.*** І наадварот: ***калі скалярны здабытак адрозных ад нуля вектараў роўны нулю, то вектары перпендыкулярныя.***

Задача (38). Дакажыце, што сума квадратаў дыяганалей паралелаграма роўна суме квадратаў яго старон.

Рашэнне. Няхай чатырохвугольнік $ABCD$ паралелаграм (рыс. 226). Маем вектарныя роўнасці:

$$\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC},$$
$$\overline{AB} - \overline{AD} = \overline{DB}.$$

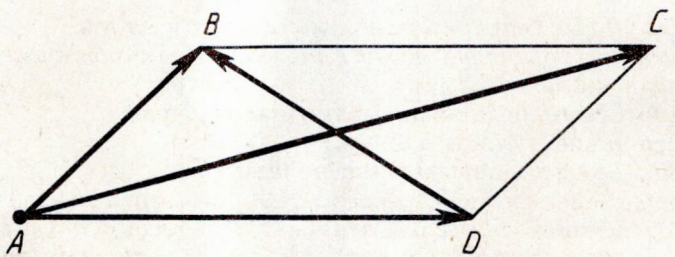
Узвядзём гэтыя роўнасці ў квадрат. Атрымаем:

$$\overline{AB}^2 + 2\overline{AB}\cdot\overline{AD} + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2,$$
$$\overline{AB}^2 - 2\overline{AB}\cdot\overline{AD} + \overline{AD}^2 = \overline{DB}^2.$$

Складзём гэтыя роўнасці пачленна. Атрымаем:

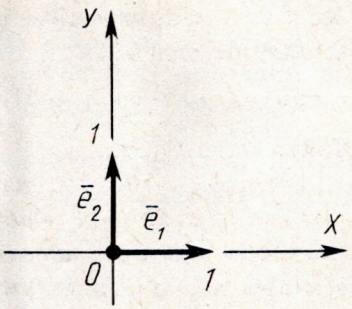
$$2\overline{AB}^2 + 2\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{DB}^2.$$

Паколькі ў паралелаграма процілеглыя стораны роўныя, то гэта роўнасць і азначае, што сума квадратаў дыяганалей паралелаграма роўна суме квадратаў яго старон, што і трэба было даказаць.



Рыс. 226

99. РАСКЛАДАННЕ ВЕКТАРА ПА КААРДЫНАТНЫХ ВОСЯХ



Рыс. 227

Вектар называецца *адзінкавым*, калі яго абсалютная велічыня роўна адзінцы. Адзінкавыя вектары, якія маюць напрамкі дадатных каардынатных паўвосей, называюцца *каардынатнымі вектарамі* ці *ортамі*. Мы будзем іх абазначаць $\bar{e}_1(1; 0)$ на восі x і $\bar{e}_2(0; 1)$ на восі y (рыс. 227).

Паколькі каардынатныя вектары адрозныя ад нуля і некалінеарныя, то любы вектар $\bar{a}(a_1; a_2)$ дапускае раскладанне па гэтых вектарах:

$$\bar{a} = \lambda\bar{e}_1 + \mu\bar{e}_2. \qquad (*)$$

Знойдзем каэфіцыент λ і μ гэтага раскладання. Памножым абедзве часткі роўнасці (*) на вектар $\bar{e}_1$. Паколькі

$$\bar{a}(a_1, a_2)\bar{e}_1 = \bar{a}_1,\ \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 = 1,\ \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1 = 0,\ \text{то}\ \bar{a}_1 = \lambda.$$

Аналагічна, памнажаючы абедзве часткі роўнасці (*) на вектар $\bar{e}_2$, атрымаем $\bar{a}_2 = \mu$.

Такім чынам, для любога вектара $\bar{a} = (a_1; a_2)$ атрымліваецца раскладанне

$$\bar{a} = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2.$$

КАНТРОЛЬНЫЯ ПЫТАННІ

1. Што такое вектар? Як абазначаюцца вектары?
2. Якія вектары называюцца аднолькава накіраванымі (процілегла накіраванымі)?
3. Што такое абсалютная велічыня вектара?
4. Што такое нулявы вектар?
5. Якія вектары называюцца роўнымі?
6. Дакажыце, што роўныя вектары аднолькава накіраваныя і роўныя па абсалютнай велічыні. І наадварот; аднолькава накіраваныя вектары, роўныя па абсалютнай велічыні, роўныя.
7. Дакажыце, што ад любога пункта можна адкласці вектар, роўны дадзенаму вектару, і толькі адзін.

8. Што такое каардынаты вектара? Чаму роўна абсалютная велічыня вектара з каардынатамі a_1, a_2?

9. Дакажыце, што роўныя вектары маюць адпаведныя роўныя каардынаты, а вектары з адпаведна роўнымі каардынатамі роўныя.

10. Дайце азначэнне сумы вектараў.

11. Дакажыце, што для любых вектараў $\bar{a}$ і $\bar{b}$

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}.$$

12. Дакажыце, што для любых трох вектараў $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$

$$\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}.$$

13. Дакажыце вектарную роўнасць $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

14. Дакажыце, што для атрымання сумы вектараў $\bar{a}$ і $\bar{b}$ трэба ад канца вектара $\bar{a}$ адкласці вектар $\bar{b}'$, роўны $\bar{b}$. Тады вектар, пачатак якога супадае з пачаткам вектара $\bar{a}$, а канец — з канцом вектара $\bar{b}'$, роўны $\bar{a} + \bar{b}$.

15. Сфармулюйце «правіла паралелаграма» складання вектараў.

16. Дайце азначэнне рознасці вектараў.

17. Дайце азначэнне множання вектара на лік.

18. Дакажыце, што абсалютная велічыня вектара $\lambda\bar{a}$ роўна $|\lambda|\,|\bar{a}|$, напрамак вектара $\lambda\bar{a}$ пры $\bar{a} \neq 0$ супадае з напрамкам вектара $\bar{a}$, калі $\lambda > 0$, і процілеглы напрамку вектара $\bar{a}$, калі $\lambda < 0$.

19. Якія вектары называюцца калінеарнымі?

20. Дакажыце, што калі вектары $\bar{a}$ і $\bar{b}$ адрозныя ад нулявога вектара і не калінеарныя, то любы вектар $\bar{c}$ можна запісаць у выглядзе $\bar{c} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b}$.

21. Дайце азначэнне скалярнага здабытку вектараў.

22. Дакажыце, што для любых трох вектараў $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$

$$(\bar{a} + \bar{b})\bar{c} = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}.$$

23. Як вызначаецца вугал паміж вектарамі?

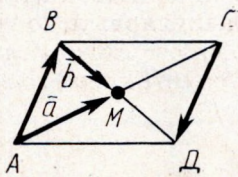
24. Чаму роўны вугал паміж аднолькава накіраванымі вектарамі?

25. Дакажыце, што скалярны здабытак вектараў роўны здабытку іх абсалютных велічынь на косінус вугла паміж імі.

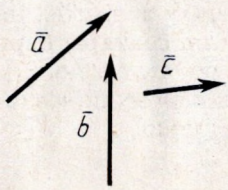
26. Дакажыце, што калі вектары перпендыкулярныя, то іх скалярны здабытак роўны нулю. І наадварот: калі скалярны здабытак адрозных ад нуля вектараў роўны нулю, то вектары перпендыкулярныя.

ЗАДАЧЫ

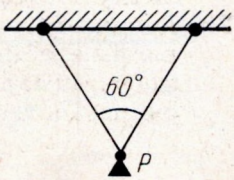
1. На прамой дадзены тры пункты: A, B, C, прычым пункт B ляжыць паміж пунктамі A і C. Сярод вектараў $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BA}$ і $\overline{BC}$ назавіце аднолькава накіраваныя і процілегла накіраваныя.
2. Чатырохвугольнік $ABCD$ — паралелаграм. Дакажыце роўнасць вектараў $\overline{AB}$ і $\overline{DC}$.
3. Дадзены вектар $\overline{AB}$ і пункт C. Адкладзіце ад пункта C вектар, роўны вектару $\overline{AB}$, калі: 1) пункт C ляжыць на прамой AB; 2) пункт C не ляжыць на прамой AB.
4. Вектары $\bar{a}(2; 4)$, $\bar{b}(-1; 2)$ і $c(c_1; c_2)$ адкладзены ад пачатку каардынат. Чаму роўны каардынаты іх канцоў?
5. Абсалютная велічыня вектара $\bar{a}(5; m)$ роўна 13, а вектара $\bar{b}(n; 24)$ роўна 25. Знайдзіце m і n.
6. Дадзены пункты $A(0; 1)$, $B(1; 0)$, $C(1; 2)$, $D(2; 1)$. Дакажыце роўнасць вектараў $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$.
7. Дадзены тры пункты: $A(1; 1)$, $B(-1; 0)$, $C(0; 1)$. Знайдзіце такі пункт $D(x; y)$, каб вектары $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ былі роўнымі.
8. Знайдзіце вектар $\bar{c}$, роўны суме вектараў $\bar{a}$ і $\bar{b}$, і абсалютную велічыню вектара $\bar{c}$, калі: 1) $\bar{a}(1; -4)$, $\bar{b}(-4; 8)$; 2) $\bar{a}(2; 5)$, $\bar{b}(4; 3)$.
9. Дадзены трохвугольнік ABC. Знайдзіце суму вектараў: 1) $\overline{AC}$ і $\overline{CB}$; 2) $\overline{AB}$ і $\overline{CB}$; 3) $\overline{AC}$ і $\overline{AB}$; 4) $\overline{CA}$ і $\overline{CB}$.
10. Знайдзіце вектар $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$ і яго абсалютную велічыню, калі: 1) $\bar{a}(1; -4)$, $\bar{b}(-4; 8)$; 2) $\bar{a}(-2; 7)$, $\bar{b}(4; -1)$.
11. Дадзены вектары з агульным пачаткам: $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$. Дакажыце, што $\overline{AC} - \overline{AB} = \overline{BC}$.
12. У паралелаграме $ABCD$ дыяганалі перасякаюцца ў пункце M. Выразіце вектары $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ праз вектары $\bar{a} = \overline{AM}$, $\bar{b} = \overline{BM}$ (рыс. 228).



Рыс. 228



Рыс. 229



Рыс. 230

13. Начарціце тры адвольныя вектары $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, як на рысунку 229. А цяпер пабудуйце вектары, роўныя: 1) $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$; 2) $\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}$; 3) $-\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$.

14. 1) Дакажыце, што для вектараў $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ і $\overline{AC}$ мае месца няроўнасць $|\overline{AC}| \leqslant |\overline{AB}| + |\overline{BC}|$.

2) Дакажыце, што для любых вектараў $\bar{a}$ і $\bar{b}$ мае месца няроўнасць $|\bar{a}+\bar{b}| \leqslant |\bar{a}| + |\bar{b}|$.

15. Да гарызантальнай бэлькі на дзвюх роўных нітках падвешаны груз вагой P. Вызначце сілы нацяжэння нітак (рыс. 230).

16. З якой сілай F трэба ўтрымліваць груз вагой P на нахіленай плоскасці, каб ён не спаўзаў уніз?

17. Дадзены пункты: $A(x_1;\ y_1)$ і $B(x_2;\ y_2)$. Дакажыце, што вектары $\overline{AB}$ і $\overline{BA}$ процілегла накіраваныя.

18. Дакажыце, што вектары $\bar{a}(1;\ 2)$ і $\bar{b}(0{,}5;\ 1)$ аднолькава накіраваныя, а вектары $\bar{c}(-1;\ 2)$ і $\bar{d}(0{,}5;\ -1)$ процілегла накіраваныя.

19. Дадзены вектары $\bar{a}(3;\ 2)$ і $\bar{b}(0;\ -1)$. Знайдзіце вектар $\bar{c} = -2\bar{a} + 4\bar{b}$ і яго абсалютную велічыню.

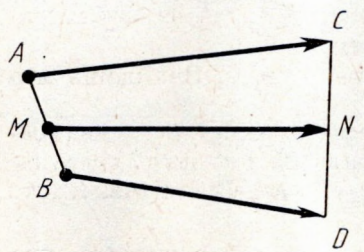
20. Абсалютная велічыня вектара λa роўна 5. Знайдзіце λ, калі: 1) $\bar{a}(-6;\ 8)$; 2) $\bar{a}(3;\ -4)$; 3) $\bar{a}(5;\ 12)$.

21. У трохвугольніку ABC праведзена медыяна AM. Дакажыце, што $\overline{AM} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$.

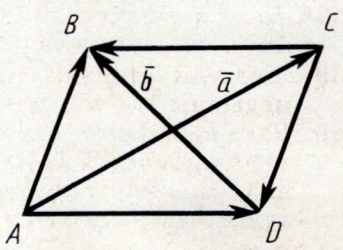
22. Пункты M і N з'яўляюцца сярэдзінамі адрэзкаў AB і CD адпаведна. Дакажыце вектарную роўнасць $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AC} + \overline{BD})$ (рыс. 231).

23. Дадзены паралелаграм $ABCD$, $\overline{AC} = \bar{a}$, $\overline{DB} = \bar{b}$ (рыс. 232). Выразіце вектары $\overline{AB}$, $\overline{CB}$, $\overline{CD}$ і $\overline{AD}$ праз $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

24*. Дакажыце, што ў калінеарных вектараў адпаведныя каардынаты прапарцыянальныя. І наадварот: калі ў двух нену-



Рыс. 231



Рыс. 232

лявых вектараў адпаведныя каардынаты прапарцыянальныя, то гэтыя вектары калінеарныя.

25. Дадзены вектары $\bar{a}=(2;\ -4)$, $\bar{b}(1;\ 1)$, $\bar{c}(1;\ -2)$, $\bar{d}(-2;\ -4)$. Знайдзіце пары калінеарных вектараў. Якія з дадзеных вектараў аднолькава накіраваныя, а якія — процілегла накіраваныя?

26. Вядома, што вектары $\bar{a}(1;\ -1)$ і $\bar{b}(-2;\ m)$ калінеарныя. Знайдзіце, чаму роўна m.

27. Дадзены вектары $\bar{a}(1;\ 0)$, $\bar{b}(1;\ 1)$ і $\bar{c}(-1;\ 0)$. Знайдзіце такія лікі λ і μ, каб мела месца вектарная роўнасць $\bar{c}=\lambda\bar{a}+\mu\bar{b}$.

28. Дакажыце, што для любых вектараў $\bar{a}$ і $\bar{b}$ $(\bar{a}\bar{b})^2\leqslant\bar{a}^2\bar{b}^2$.

29. Знайдзіце вугал паміж вектарамі $\bar{a}(1;\ 2)$ і $\bar{b}\left(1;\ -\frac{1}{2}\right)$.

30*. Дадзены вектары $\bar{a}$ і $\bar{b}$. Знайдзіце абсалютную велічыню вектара $\bar{a}+\bar{b}$, калі вядома, што абсалютная велічыня вектараў $\bar{a}$ і $\bar{b}$ роўна 1, а вугал паміж імі 60°.

31. Знайдзіце вугал паміж вектарамі $\bar{a}$ і $\bar{a}+\bar{b}$ папярэдняй задачы.

32. Дадзены вяршыні трохвугольніка $A(1;\ 1)$, $B(4;\ 1)$, $C(4;\ 5)$. Знайдзіце косінусы вуглоў трохвугольніка.

33. Знайдзіце вуглы трохвугольніка з вяршынямі $A(0;\ \sqrt{3})$, $B(2;\ \sqrt{3})$, $C\left(\frac{3}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

34. Дакажыце, што вектары $\bar{a}(m;\ n)$ і $\bar{b}(-n;\ m)$ перпендыкулярныя ці роўныя нулю.

35. Дадзены вектары $\bar{a}(3;\ 4)$ і $\bar{b}(m;\ 2)$. Пры якім значэнні m гэтыя вектары перпендыкулярныя?

36. Дадзены вектары $\bar{a}(1;\ 0)$ і $\bar{b}(1;\ 1)$. Знайдзіце такі лік λ, каб вектар $\bar{a}+\lambda\bar{b}$ быў перпендыкулярны вектару $\bar{a}$.

37. Дакажыце, што калі $\bar{a}$ і $\bar{b}$ — адзінкавыя некалінеарныя вектары, то вектары $\bar{a}+\bar{b}$ і $\bar{a}-\bar{b}$ адрозныя ад нуля і перпендыкулярныя.

38*. Дакажыце, што сума квадратаў дыяганалей паралелаграма роўна суме квадратаў яго старон.

39*. Дадзены стораны трохвугольніка $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. Знайдзіце яго медыяны m_a, m_b, m_c.

40. Дакажыце, што геаметрычнае месца пунктаў, сума квадратаў адлегласцей ад якіх да двух дадзеных пунктаў пастаянная, ёсць акружнасць з цэнтрам у сярэдзіне адрэзка, што злучае дадзеныя пункты.

41. Вектары $\bar{a}+\bar{b}$ і $\bar{a}-\bar{b}$ перпендыкулярныя. Дакажыце, што $|\bar{a}|=|\bar{b}|$.

42. Дакажыце з дапамогай вектараў, што дыяганалі ромба перпендыкулярныя.

43. Дадзены чатыры пункты: $A(1; 1)$, $B(2; 3)$, $C(0; 4)$, $D(-1; 2)$. Дакажыце, што чатырохвугольнік $ABCD$ — прамавугольнік.

44. Дадзены чатыры пункты: $A(0; 0)$, $B(1; 1)$, $C(0; 2)$, $D(-1; 1)$. Дакажыце, што чатырохвугольнік $ABCD$ — квадрат.

45. Сярод вектараў $\bar{a}\left(-\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$, $\bar{b}\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$, $\bar{c}(0; -1)$, $\bar{d}\left(\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$ знайдзіце адзінкавыя і адзначце, якія з іх некалінеарныя.

46. Знайдзіце адзінкавы вектар e, калінеарны вектару $\bar{a}(6; 8)$ і аднолькава з ім накіраваны.

47. Дадзены каардынатныя вектары $\bar{e}_1(1; 0)$ і $\bar{e}_2(0; 1)$. Чаму роўны каардынаты вектара $2\bar{e}_1 - 3\bar{e}_2$?

48*. 1) Дадзены тры пункты: O, A, B. Пункт X дзеліць адрэзак AB у адносіне $\lambda : \mu$, лічачы ад пункта A. Выразіце вектар $\overline{OX}$ праз вектары $\overline{OA} = \bar{a}$ і $\overline{OB} = \bar{b}$. 2) Дакажыце, што медыяны трохвугольніка перасякаюцца ў адным пункце, які дзеліць іх у адносіне $2:1$, лічачы ад адпаведных вяршынь.

49. Дакажыце, што праекцыя $\bar{a}$ вектара $\bar{c}$ на вось абсцыс з каардынатным вектарам $\bar{e}_1(1; 0)$ задаецца формулай

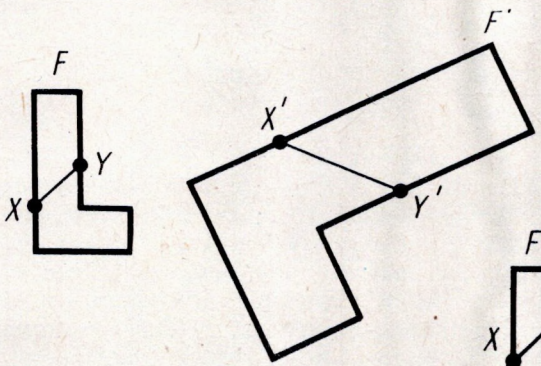
$$\bar{a} = k\bar{e}_1, \text{ дзе } k = \bar{c}\,\bar{e}_1.$$

50. Дакажыце, што праекцыя сумы вектараў на вось роўна суме праекцый складаемых на тую ж вось.

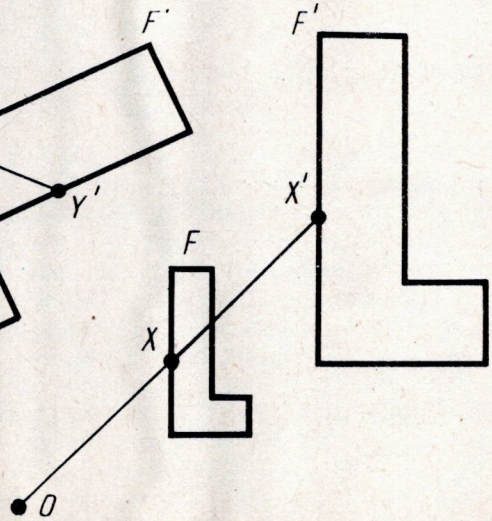
§ 11. ПАДОБНАСЦЬ ФІГУР

100. ПЕРАЎТВАРЭННЕ ПАДОБНАСЦІ

Пераўтварэнне фігуры F у фігуру F' называецца *пераўтварэннем падобнасці*, калі пры гэтым пераўтварэнні адлегласці паміж пунктамі змяняюцца ў адзін і той жа лік разоў (рыс. 233). Гэта значыць, што калі адвольныя пункты X, Y фігуры F пры пераўтварэнні падобнасці пераходзяць у пункты X', Y' фігуры F', то $X'Y' = k \cdot XY$, прычым лік k — адзін і той жа для ўсіх пунктаў X, Y. Лік k называецца *каэфіцыентам падобнасці*. Пры $k = 1$ пераўтварэнне падобнасці, відавочна, з'яўляецца рухам.



Рыс. 233

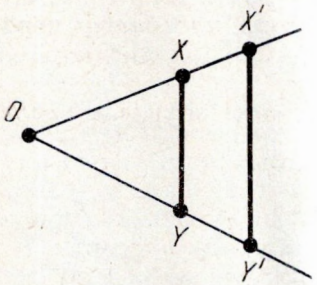


Рыс. 234

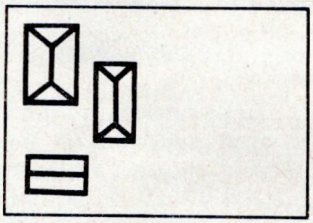
Няхай F — дадзеная фігура і O — фіксаваны пункт (рыс. 234). Правядзём праз адвольны пункт X фігуры F прамень OX і адкладзём на ім адрэзак OX', роўны $k \cdot OX$, дзе k — дадатны лік. Пераўтварэнне фігуры F, пры якім кожны яе пункт X пераходзіць у пункт X', пабудаваны дадзеным спосабам, называецца *гаматэтыяй адносна цэнтра O*. Лік k называецца *каэфіцыентам гаматэтыі* фігуры, F і F' называюцца *гаматэтычнымі*.

Т э а р э м а 11.1. ***Гаматэтыя ёсць пераўтварэнне падобнасці.***

Д о к а з. Няхай O — цэнтр гаматэтыі, k — каэфіцыент гаматэтыі, X і Y — два адвольныя пункты фігуры (рыс. 235).



Рыс. 235



Рыс. 236

Пры гаматэтыі пункты X і Y пераходзяць у пункты X' і Y' на праменях OX і OY адпаведна, прычым $OX' = k \cdot OX$, $OY' = k \cdot OY$. Адсюль вынікаюць вектарныя роўнасці

$$\overrightarrow{OX'} = k \cdot \overrightarrow{OX},\ \overrightarrow{OY'} = k \cdot \overrightarrow{OY}.$$

Адымаючы гэтыя роўнасці пачленна, атрымаем:

$$\overrightarrow{OY'} - \overrightarrow{OX'} = k(\overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX}).$$

Паколькі $\overrightarrow{OY'} - \overrightarrow{OX'} = \overrightarrow{X'Y'}$, $\overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{XY}$, то $\overrightarrow{X'Y'} = k\overrightarrow{XY}$. Значыць, $|X'Y'| = k|XY|$, г. зн. $X'Y' = kXY$. Такім чынам, гаматэтыя ёсць пераўтварэнне падобнасці. Тэарэма даказана.

Пераўтварэнне падобнасці шырока прымяняецца на практыцы пры выкананні чарцяжоў дэталей машын, збудаванняў, планаў мясцовасці і інш. Гэтыя відарысы ўяўляюць сабой падобныя пераўтварэнні ўяўных відарысаў у натуральную велічыню. Каэфіцыент падобнасці пры гэтым называецца маштабам. Напрыклад, калі ўчастак мясцовасці паказваецца ў маштабе 1 : 100, то гэта значыць, што аднаму сантыметру на плане адпавядае 1 м на мясцовасці.

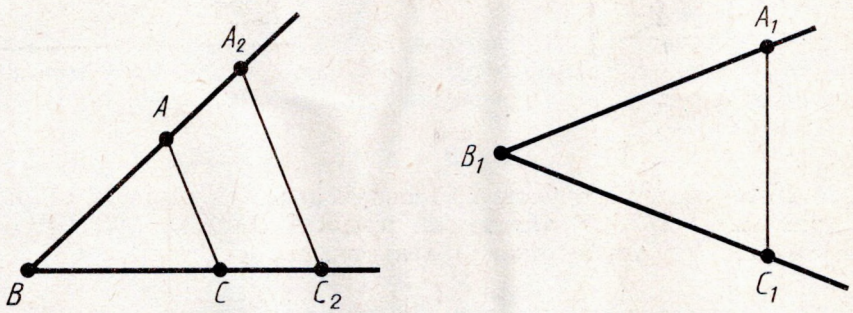
З а д а ч а (4). На рысунку 236 паказаны план сядзібы ў маштабе 1 : 1000. Вызначце размеры сядзібы (даўжыню і шырыню).

Р а ш э н н е. Даўжыня і шырыня сядзібы на плане роўны 4 см і 2,7 см. Паколькі план у маштабе 1 : 1000, то размеры сядзібы роўны адпаведна $2{,}7 \times 1000$ см $= 27$ (м), 4×1000 см $= 40$ (м).

101. УЛАСЦІВАСЦІ ПЕРАЎТВАРЭННЯ ПАДОБНАСЦІ

Гэтак жа, як і для руху, даказваецца, што пры пераўтварэнні падобнасці тры пункты A, B, C, якія ляжаць на адной прамой, пераходзяць у тры пункты A_1, B_1, C_1, што таксама ляжаць на адной прамой. Прычым, калі пункт B ляжыць паміж пунктамі A і C, то пункт B_1 ляжыць паміж пунктамі A_1 і C_1. Адсюль вынікае, што ***пераўтварэнне падобнасці пераводзіць прамыя ў прамыя, паўпрамыя ў паўпрамыя, адрэзкі ў адрэзкі.***

Дакажам, што ***пераўтварэнне падобнасці захоўвае вуглы паміж паўпрамымі.***



Рыс. 237

Сапраўды, няхай вугал ABC пераўтварэннем падобнасці з каэфіцыентам k пераводзіцца ў вугал $A_1B_1C_1$ (рыс. 237). Падвергнем вугал ABC пераўтварэнню гаматэты адносна яго вяршыні B з каэфіцыентам гаматэты k. Пры гэтым пункты A і C пяройдуць у пункты A_2 і C_2. Трохвугольнікі A_2BC_2 і $A_1B_1C_1$ роўныя па трэцяму прызнаку. З роўнасці трохвугольнікаў вынікае роўнасць вуглоў A_2BC_2 і $A_1B_1C_1$. Значыць, вуглы ABC і $A_1B_1C_1$ роўныя, што і трэба было даказаць.

102. ПАДОБНАСЦЬ ФІГУР

Дзве фігуры называюцца *падобнымі*, калі яны пераводзяцца адна ў адну пераўтварэннем падобнасці. Для абазначэння падобнасці фігур выкарыстоўваецца спецыяльны значок: ∞.

Запіс $F \infty F'$ чытаецца так: «Фігура F падобная фігуры F'».

Дакажам, што ***калі фігура F_1 падобная да фігуры F_2, а фігура F_2 падобная да фігуры F_3, то фігура F_1 і F_3 падобныя.***

Няхай X_1 і Y_1 — два адвольныя пункты фігуры F_1. Пераўтварэнне падобнасці, што пераводзіць фігуру F_1 у F_2, пераводзіць гэтыя пункты ў пункты X_2, Y_2, для якіх $X_2Y_2 = k_1X_1Y_1$.

Пераўтварэнне падобнасці, што пераводзіць фігуру F_2 у F_3, пераводзіць пункты X_2, Y_2 у пункты X_3, Y_3, для якіх $X_3Y_3 = k_2X_2Y_2$.

З роўнасцей

$$X_2Y_2 = k_1X_1Y_1,\ X_3Y_3 = k_2X_2Y_2$$

вынікае, што $X_3Y_3 = k_1k_2X_1Y_1$. А гэта значыць, пераўтварэнне фігуры F_1 у F_3, якое атрымліваецца пры паслядоўным выкананні двух пераўтварэнняў падобнасці, ёсць падобнасць. Значыць, фігуры F_1 і F_3 падобныя, што і трэба было даказаць.

У запісе падобнасці трохвугольнікаў $\triangle ABC \infty \triangle A_1B_1C_1$ — дапускаецца, што вяршыні, якія сумяшчаюцца пераўтварэннем падобнасці, стаяць на адпаведных месцах, г. зн. A пераходзіць у A_1, B — у B_1 і C — у C_1

З уласцівасцей пераўтварэння падобнасці вынікае, што ***ў падобных фігур адпаведныя вуглы роўныя, а адпаведныя адрэзкі прапарцыянальныя.*** У прыватнасці, ***у падобных трохвугольнікаў*** ABC і $A_1B_1C_1$

$$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1;$$

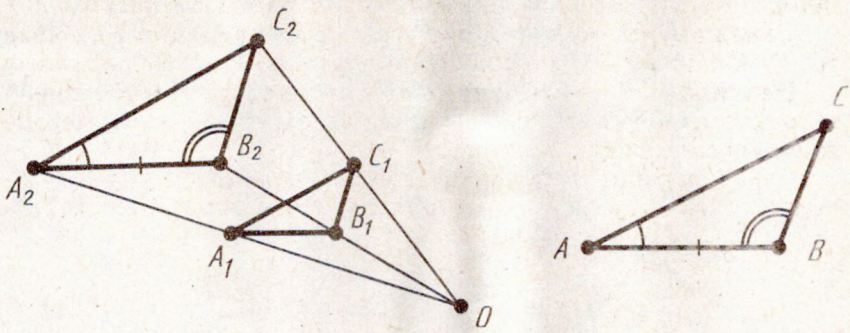
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

103. ПРЫЗНАК ПАДОБНАСЦІ ТРОХВУГОЛЬНІКАЎ ПА ДВУХ ВУГЛАХ

Тэарэма 11.2. ***Калі два вуглы аднаго трохвугольніка роўныя двум вуглам другога трохвугольніка, то такія трохвугольнікі падобныя.***

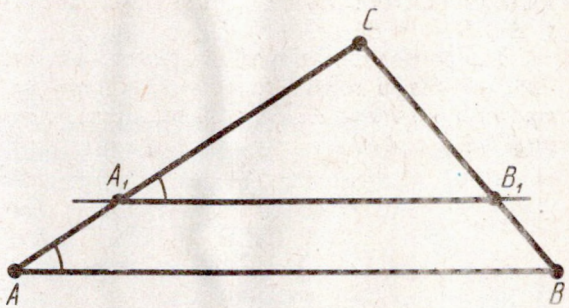
Доказ. Няхай у трохвугольнікаў ABC і $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Дакажам, што $\triangle ABC \infty \triangle A_1B_1C_1$.

Няхай $k = \frac{AB}{A_1B_1}$. Падвергнем трохвугольнік $A_1B_1C_1$ пераўтварэнню падобнасці з каэфіцыентам падобнасці k, напрыклад гаматэтыі (рыс. 238). Пры гэтым атрымаем некаторы трохвугольнік $A_2B_2C_2$, роўны трохвугольніку ABC. Сапраўды, паколькі пераўтварэнне падобнасці захоўвае вуглы, то $\angle A_2 = \angle A_1$, $\angle B_2 = \angle B_1$. А значыць, у трохвугольнікаў ABC і $A_2B_2C_2$ $\angle A = \angle A_2$, $\angle B = \angle B_2$. Далей, $A_2B_2 = kA_1B_1 = AB$. Значыць, трохвугольнікі ABC і $A_2B_2C_2$ роўныя па другому прызнаку (па старане і прылеглых да яе вуглах).



Рыс. 238

Паколькі трохвугольнікі $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$ гаматэтычныя і, значыць, падобныя, а трохвугольнікі $A_2B_2C_2$ і ABC роўныя і таму таксама падобныя, то трохвугольнікі $A_1B_1C_1$ і ABC падобныя. Тэарэма даказана.



Рыс. 239

Задача (15). Прамая, паралельная старане AB трохвугольніка ABC, перасякае яго старану AC у пункце A_1, а старану BC у пункце B_1. Дакажыце, што $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C$.

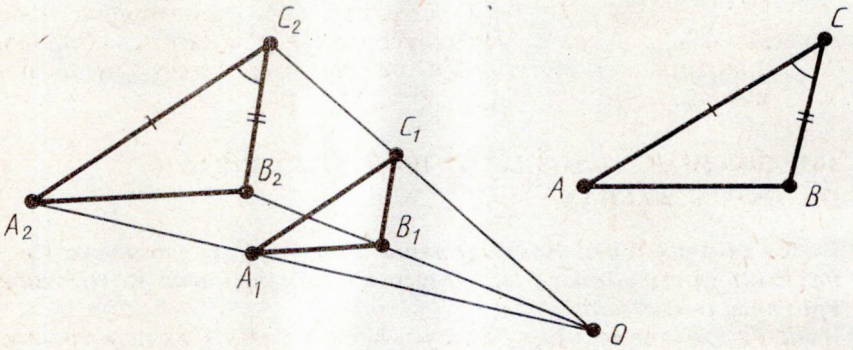
Рашэнне (рыс. 239). У трохвугольнікаў ABC і A_1B_1C вугал пры вяршыні C агульны, а вуглы CA_1B_1 і CAB роўныя як адпаведныя вуглы паралельных AB і A_1B_1 з сякучай AC. Значыць, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C$ па двух вуглах.

104. ПРЫЗНАК ПАДОБНАСЦІ ТРОХВУГОЛЬНІКАЎ ПА ДЗВЮХ СТАРАНАХ І ВУГЛУ ПАМІЖ ІМІ

Тэарэма 11.3. ***Калі дзве стараны аднаго трохвугольніка прапарцыянальныя дзвюм старанам другога трохвугольніка і вуглы, утвораныя гэтымі старанамі, роўныя, то трохвугольнікі падобныя.***

Доказ (аналагічны доказу тэарэмы 11.2). Няхай у трохвугольнікаў ABC і $A_1B_1C_1$ $\angle C = \angle C_1$ і $AC = kA_1C_1$, $BC = kB_1C_1$. Дакажам, што $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

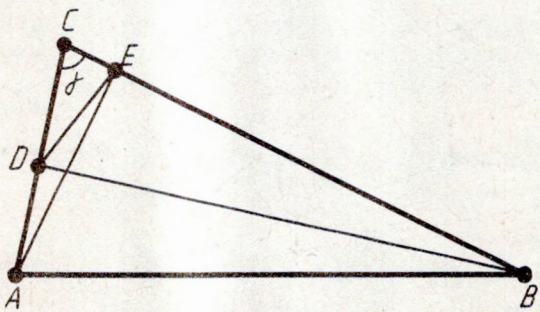
Падвергнем трохвугольнік $A_1B_1C_1$ пераўтварэнню падобнасці з каэфіцыентам падобнасці k, напрыклад гаматэтыі



Рыс. 240

(рыс. 240). Пры гэтым атрымаем некаторы трохвугольнік $A_2B_2C_2$, роўны трохвугольніку ABC. Сапраўды, паколькі пераўтварэнне падобнасці захоўвае вуглы, то $\angle C_2 = \angle C_1$. А значыць, у трохвугольнікаў ABC і $A_2B_2C_2$ $\angle C = \angle C_2$. Далей, $A_2C_2 = kA_1C_1 = AC$, $B_2C_2 = kA_1B_1 = BC$. Значыць, трохвугольнікі ABC і $A_2B_2C_2$ роўныя па першаму прызнаку (па дзвюх старанах і вуглу паміж імі).

Паколькі трохвугольнікі $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$ гаматэтычныя і, значыць, падобныя, а трохвугольнікі $A_2B_2C_2$ і ABC роўныя і таму таксама падобныя, то трохвугольнікі $A_1B_1C_1$ і ABC падобныя. Тэарэма даказана.



Рыс. 241

З а д а ч а (31). У трохвугольніку ABC з вострым вуглом C праведзены вышыні AE і BD (рыс. 241). Дакажыце, што $\triangle ABC \sim \triangle EDC$.

Р а ш э н н е. У трохвугольнікаў ABC і EDC вугал пры вяршыні C агульны. Дакажам прапарцыянальнасць старон трохвугольнікаў, прылеглых да гэтага вугла. Маем: $EC = AC \cos\gamma$, $DC = BC \cos\gamma$. Гэта значыць стораны, прылеглыя да вугла C, у трохвугольнікаў прапарцыянальныя. Значыць, $\triangle ABC \sim \triangle EDC$ па дзвюх старанах і вуглу паміж імі.

105. ПРЫЗНАК ПАДОБНАСЦІ ТРОХВУГОЛЬНІКАЎ ПА ТРОХ СТАРАНАХ

Т э а р э м а 11.4. ***Калі стораны аднаго трохвугольніка прапарцыянальныя старанам другога трохвугольніка, то такія трохвугольнікі падобныя.***

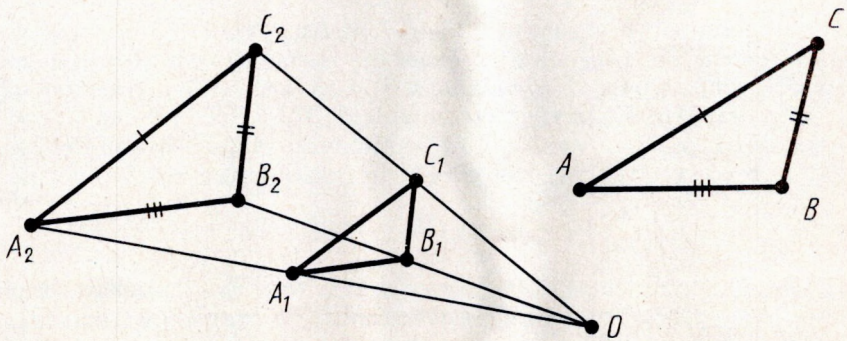
Д о к а з (аналагічны доказу тэарэмы 11.2). Няхай у трохвугольнікаў ABC і $A_1B_1C_1$ $AB = kA_1B_1$, $AC = kA_1C_1$, $BC = kB_1C_1$. Дакажам, што $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Падвергнем трохвугольнік $A_1B_1C_1$ пераўтварэнню падобнасці з каэфіцыентам падобнасці k, напрыклад гаматэтыі (рыс. 242). Пры гэтым атрымаем некаторы трохвугольнік $A_2B_2C_2$, роўны трохвугольніку ABC. Сапраўды, у трохвугольнікаў адпаведныя стораны роўныя:

$$A_2B_2 = kA_1B_1 = AB, \quad A_2C_2 = kA_1C_1 = AC_1, \quad B_2C_2 = kB_1C_1 = BC.$$

Значыць, трохвугольнікі роўныя па трэцяму прызнаку (па трох старанах).

Паколькі трохвугольнікі $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$ гаматэтычныя і, значыць, падобныя, а трохвугольнікі $A_2B_2C_2$ і ABC роўныя і таму таксама падобныя, то трохвугольнікі $A_1B_1C_1$ і ABC падобныя. Тэарэма даказана.



Рыс. 242

З а д а ч а (36). Дакажыце, што ў падобных трохвугольнікаў перыметры адносяцца як адпаведныя стораны.

Р а ш э н н е. Няхай ABC і $A_1B_1C_1$ — падобныя трохвугольнікі. Тады стораны трохвугольніка $A_1B_1C_1$ прапарцыянальныя старанам трохвугольніка ABC, гэта значыць $A_1B_1 = kAB$, $B_1C_1 = kBC$, $A_1C_1 = kAC$. Складваючы гэтыя роўнасці пачленна, атрымаем:

$$A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1 = k(AB + BC + AC).$$

Адсюль $\frac{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1}{AB + BC + AC} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC}$,

гэта значыць перыметры трохвугольнікаў адносяцца як адпаведныя стораны.

106. ПАДОБНАСЦЬ ПРАМАВУГОЛЬНЫХ ТРОХВУГОЛЬНІКАЎ

У прамавугольнага трохвугольніка адзін вугал прамы. Таму па тэарэме 11.2 ***для падобнасці двух прамавугольных трохвугольнікаў дастаткова, каб у іх было па роўнаму востраму вуглу.***

Пры дапамозе гэтага прызнаку падобнасці прамавугольных трохвугольнікаў дакажам некаторыя суадносіны ў трохвугольнікаў.

Няхай ABC — прамавугольны трохвугольнік з прамым вуглом C. Правядзём вышыню CD з вяршыні прамога вугла (рыс. 243).

Трохвугольнікі ABC і CBD маюць агульны вугал пры вяршыні B. Значыць, яны падобныя: $\triangle ABC \sim \triangle CBD$. З падобнасці трохвугольнікаў вынікае прапарцыянальнасць адпаведных старон:

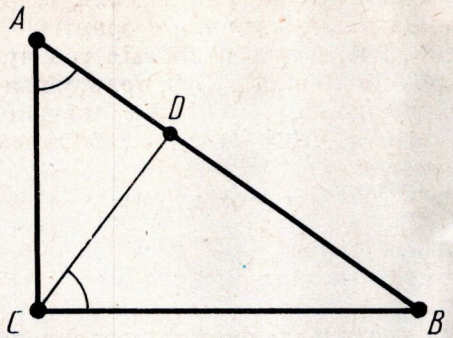
$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD}, \text{ ці } BC = \sqrt{AB \cdot BD}.$$

Гэту суадносіну звычайна фармулююць так: ***катэт прамавугольнага трохвугольніка ёсць сярэдняе прапарцыянальнае паміж гіпатэнузай і праекцыяй гэтага катэта на гіпатэнузу.***

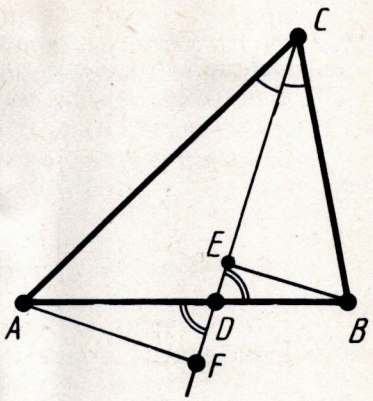
Прамавугольныя трохвугольнікі ACD і CBD таксама падобныя. У іх роўныя вуглы пры вяршынях A і C. З падобнасці гэтых трохвугольнікаў вынікае прапарцыянальнасць іх старон:

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}, \text{ ці } CD = \sqrt{AD \cdot BD}.$$

Гэту суадносіну звычайна фармулююць так: ***вышыня прамавугольнага трохвугольніка, праведзеная з вяршыні прамога вугла, ёсць сярэдняе прапарцыянальнае паміж праекцыямі катэтаў на гіпатэнузу.***



Рыс. 243



Рыс. 244

Дакажам наступную ўласцівасць бісектрысы трохвугольніка: ***бісектрыса трохвугольніка дзеліць процілеглую старану на адрэзкі, прапарцыянальныя дзвюм другім старанам.***

Няхай CD — бісектрыса трохвугольніка ABC (рыс. 244). Калі трохвугольнік ABC раўнабедраны з асновай AB, то дадзеная ўласцівасць бісектрысы відавочная, таму што ў гэтым выпадку бісектрыса CD з'яўляецца і медыянай.

Разгледзім агульны выпадак, калі $AC \neq AB$. Апусцім перпендыкуляры AF і BE з вяршыні A і B на прамую CD.

Прамавугольныя трохвугольнікі ACF і BCE падобныя, таму што ў іх роўныя вострыя вуглы пры вяршыні C. З падобнасці трохвугольнікаў вынікае прапарцыянальнасць старон:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AF}{BE}.$$

Прамавугольныя трохвугольнікі ADF і BDE таксама падобныя. У іх вуглы пры вяршыні D роўныя як вертыкальныя. З падобнасці трохвугольнікаў вынікае прапарцыянальнасць старон:

$$\frac{AF}{BE} = \frac{AD}{BD}.$$

Параўноўваючы гэту роўнасць з папярэдняй, атрымаем:

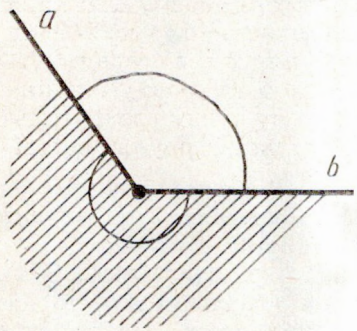
$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD} \text{ ці } \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD},$$

г. зн. адрэзкі AD і BD прапарцыянальныя старанам AC і BC, што і трэба было даказаць.

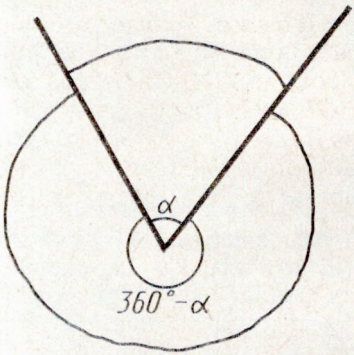
107. ВУГЛЫ, УПІСАНЫЯ Ў АКРУЖНАСЦЬ

Вугал разбівае плоскасць на дзве часткі. Кожная з частак называецца *плоскім* вуглом. На рысунку 245 заштрыхаваны адзін з плоскіх вуглоў са старанамі a і b. Плоскія вуглы з агульнымі старанамі называюцца *дадатковымі*.

Калі плоскі вугал з'яўляецца часткай паўплоскасці, то яго градуснай мерай называецца градусная мера звычайнага вугла з тымі ж старанамі. Калі плоскі вугал змяшчае паўплоскасць, то яго градусная мера прымаецца роўнай $360° - \alpha$, дзе α — градусная мера дадатковага плоскага вугла (рыс. 246).

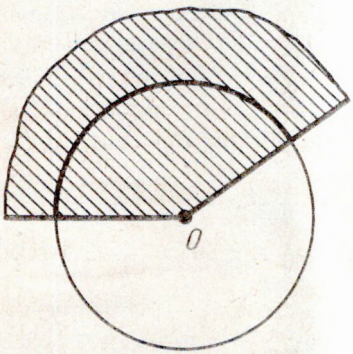


Рыс. 245

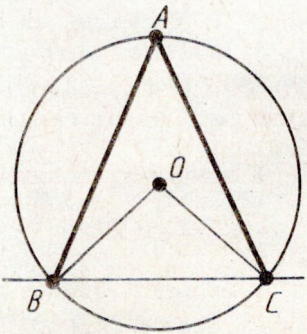


Рыс. 246

Цэнтральным вуглом у акружнасці называецца плоскі вугал з вяршыняй у яе цэнтры. Частка акружнасці, размешчаная ўнутры плоскага вугла, называецца *дугой акружнасці*, якая адпавядае гэтаму цэнтральнаму вуглу (рыс. 247). *Градуснай мерай дугі* акружнасці называецца градусная мера адпаведнага цэнтральнага вугла.



Рыс. 247

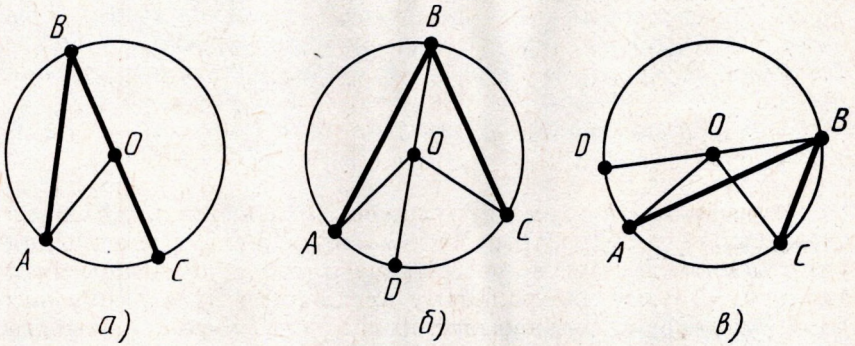


Рыс. 248

Вугал, вяршыня якога ляжыць на акружнасці, а стораны перасякаюць гэту акружнасць, называецца *ўпісаным у акружнасць*. Вугал BAC на рысунку 248 упісаны ў акружнасць. Яго вяршыня A ляжыць на акружнасці, а стораны перасякаюць акружнасць у пунктах B і C. Гавораць таксама, што вугал A абапіраецца на хорду BC. Прамая BC разбівае акружнасць на дзве дугі. Цэнтральны вугал, што адпавядае той з гэтых дуг, якая не змяшчае пункт A, называецца цэнтральным вуглом, *адпаведным дадзенаму ўпісанаму вуглу*.

Тэарэма 11.5. ***Вугал, упісаны ў акружнасць, роўны палавіне адпаведнага цэнтральнага вугла.***

Доказ. Разгледзім спачатку прыватны выпадак, калі адна са старон вугла праходзіць праз цэнтр акружнасці (рыс. 249, *а*). Трохвугольнік AOB раўнабедраны, таму што ў яго стораны OA і OB роўныя як радыусы. Таму вуглы A і B трохвугольніка роўныя. А паколькі іх сума роўна знешняму вуглу трохвугольніка пры вяршыні O, то вугал B трохвугольніка роўны палавіне вугла AOC, што і трэба было даказаць.



Рыс. 249

Агульны выпадак зводзіцца да разгледжанага прыватнага выпадку правядзеннем дапаможнага дыяметра BD (рыс. 249, *б*, *в*).

У выпадку, дадзеным на рысунку 249, *б*,

$$\angle ABC = \angle CBD + \angle ABD = \frac{1}{2}\angle COD + \frac{1}{2}\angle AOD = \frac{1}{2}\angle AOC.$$

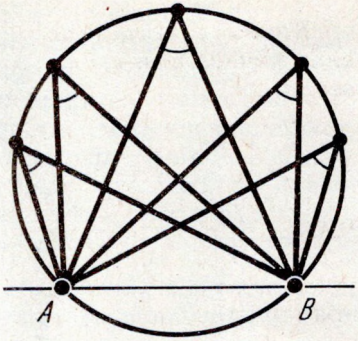
У выпадку, паказаным на рысунку 249, *в*,

$$\angle ABC = \angle CBD - \angle ABD = \frac{1}{2}\angle COD = \frac{1}{2}\angle AOD = \frac{1}{2}\angle AOC.$$

Тэарэма даказана поўнасцю.

З тэарэмы 11.5 вынікае, што ***ўпісаныя вуглы, стораны якіх праходзяць праз пункты A і B акружнасці, а вяршыні ляжаць па адзін бок ад прамой AB, роўныя*** (рыс. 250).

У прыватнасці, ***вуглы, якія абапіраюцца на дыяметр, прамыя.***



Рыс. 250

108. ПРАПАРЦЫЯНАЛЬНАСЦЬ АДРЭЗКАЎ ХОРД І СЯКУЧЫХ АКРУЖНАСЦІ

Калі хорды AB і CD акружнасці перасякаюцца ў пункце S, то

$$AS \cdot BC = CS \cdot DS.$$

Дакажам спачатку, што трохвугольнікі ASD і CSB падобныя (рыс. 251). Упісаныя вуглы DCB і DAB роўныя па выніку з тэарэмы 11.5. Вуглы ASD і BSC роўныя як вертыкальныя. З роўнасці дадзеных вуглоў вынікае, што трохвугольнікі ASD і CSB падобныя.

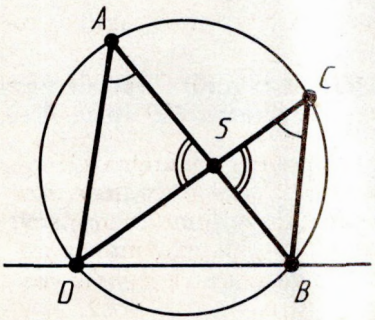
З падобнасці трохвугольнікаў вынікае прапорцыя

$$\frac{DS}{BS} = \frac{AS}{CS}.$$

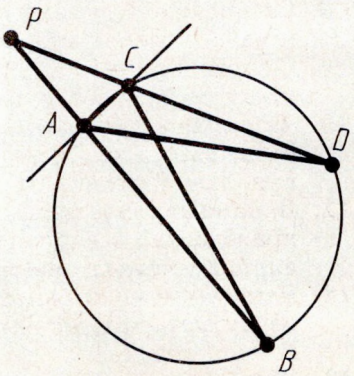
Адсюль

$$AS \cdot BS = CS \cdot DS,$$

што і трэба было даказаць.



Рыс. 251



Рыс. 252

Калі з пункта P да акружнасці праведзены дзве сякучыя, якія перасякаюць акружнасць у пунктах A, B і C, D адпаведна, то

$$AP \cdot BP = CP \cdot DP.$$

Няхай пункты A і C — найбліжэйшыя да пункта P пункты перасячэння сякучых з акружнасцю (рыс. 252). Трохвугольнікі PAD і PCB падобныя. У іх вугал пры вяршыні P агульны, а вуглы пры вяршынях B і D роўныя па ўласцівасці вуглоў, упісаных у акружнасць. З падобнасці трохвугольнікаў вынікае прапорцыя

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}.$$

Адсюль $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, што і трэба было даказаць.

КАНТРОЛЬНЫЯ ПЫТАННІ

1. Што такое пераўтварэнне падобнасці?
2. Што такое гаматэтыя (цэнтр гаматэтыі, каэфіцыент гаматэтыі)?
3. Дакажыце, што гаматэтыя ёсць пераўтварэнне падобнасці.
4. Якія ўласцівасці пераўтварэння падобнасці вы ведаеце? Дакажыце, што пераўтварэнне падобнасці захоўвае вуглы паміж паўпрамымі.
5. Якія фігуры называюцца падобнымі?
6. Якім знакам абазначаецца падобнасць фігур? Як запісваецца падобнасць трохвугольнікаў?
7. Сфармулюйце і дакажыце прызнак падобнасці трохвугольнікаў па двух вуглах.
8. Сфармулюйце і дакажыце прызнак падобнасці трохвугольнікаў па дзвюх старанах і вуглу паміж імі.
9. Сфармулюйце і дакажыце прызнак падобнасці трохвугольнікаў па трох старанах.
10. Дакажыце, што катэт прамавугольнага трохвугольніка ёсць сярэдняе прапарцыянальнае паміж гіпатэнузай і праекцыяй гэтага катэта на гіпатэнузу.
11. Дакажыце, што вышыня прамавугольнага трохвугольніка, праведзеная з вяршыні прамога вугла, ёсць сярэдняе прапарцыянальнае паміж праекцыямі катэтаў на гіпатэнузу.
12. Дакажыце, што бісектрыса трохвугольніка дзеліць процілеглую старану на адрэзкі, прапарцыянальныя дзвюм другім старанам.
13. Што такое плоскі вугал?
14. Што такое цэнтральны вугал?

15. Які вугал называецца ўпісаным у акружнасць?
16. Дакажыце, што ўпісаны ў акружнасць вугал роўны палавіне адпаведнага цэнтральнага вугла.
17. Дакажыце ўласцівасці адрэзкаў хорд, якія перасякаюцца, і ўласцівасці адрэзкаў сякучых.

ЗАДАЧЫ

1. Пры гаматэтыі пункт X пераходзіць у пункт X', а пункт Y — у пункт Y'. Як знайсці цэнтр гаматэтыі, калі пункты X, X', Y, Y' не ляжаць на адной прамой?
2. Пры гаматэтыі пункт X пераходзіць у пункт X'. Пабудуйце цэнтр гаматэтыі, калі каэфіцыент гаматэтыі роўны 2.
3. Начарціце трохвугольнік. Пабудуйце гаматэтычны яму трохвугольнік, прыняўшы за цэнтр гаматэтыі адну з яго вяршынь і каэфіцыент гаматэтыі роўным 2.
4. На рысунку 236 паказаны план сядзібы ў маштабе 1 : 1000. Вызначце размеры сядзібы (даўжыню і шырыню).
5. Што ўяўляе сабой фігура, падобная трохвугольніку?
6. У падобных трохвугольнікаў ABC і $A_1B_1C_1$ $\angle A = 30°$, $AB = 1$ м, $BC = 2$ м, $B_1C_1 = 3$ м. Чаму роўныя вугал A_1 і старана A_1B_1?
7. Дакажыце, што фігура, падобная да акружнасці, ёсць акружнасць.

8*. Дадзены вугал і ўнутры яго пункт A. Пабудуйце акружнасць, якая датыкаецца да старон вугла і праходзіць праз пункт A.

9*. Упішыце ў дадзены трохвугольнік квадрат, у якога дзве вяршыні ляжаць на адной старане, а дзве другія вяршыні — на дзвюх другіх старанах.

10. Дакажыце падобнасць раўнабедраных трохвугольнікаў з роўнымі вугламі пры вяршынях, процілеглых асновам.
11. У двух раўнабедраных трохвугольнікаў вуглы паміж бакавымі старанамі роўныя. Бакавая старана і аснова аднаго трохвугольніка роўны 17 см і 10 см; аснова другога роўна 8 см. Знайдзіце яго бакавую старану.
12. У трохвугольнікаў ABC і $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AB = 5$ м, $BC = 7$ м, $A_1B_1 = 10$ м, $A_1C_1 = 8$ м. Знайдзіце астатнія стораны трохвугольнікаў.
13. Рашыце задачу 12 пры ўмове, што $AB = 16$ см, $BC = 20$ см, $A_1B_1 = 12$ см, $AC - A_1C_1 = 6$ см.
14. Дакажыце, што вышыня прамавугольнага трохвугольніка, апушчаная з вяршыні прамога вугла, разбівае яго на два трохвугольнікі, падобныя да зыходнага.
15. Прамая, паралельная старане AB трохвугольніка ABC,

перасякае яго старану AC у пункце A_1, а старану BC у пункце B_1. Дакажыце, што $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C$.

16. У трохвугольнік з асновай a і вышынёй h упісаны квадрат так, што дзве яго вяршыні ляжаць на аснове трохвугольніка, а другія дзве — на бакавых старанах (рыс. 253). Вылічыце старану квадрата.

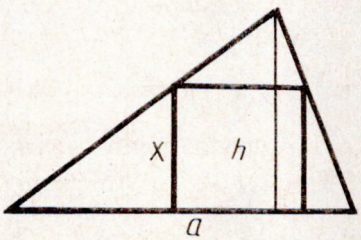
17. Прамая, паралельная старане AB трохвугольніка ABC, дзеліць яго старану AC у адносіне $m : n$, лічачы ад вяршыні C. У якой адносіне яна дзеліць старану BC?

18. У трохвугольніку ABC праведзены адрэзак DE, паралельны старане AC (канец D адрэзка ляжыць на старане AB, а E — на старане BC). Знайдзіце AD, калі $AB = 16$ см, $AC = 20$ см і $DE = 15$ см.

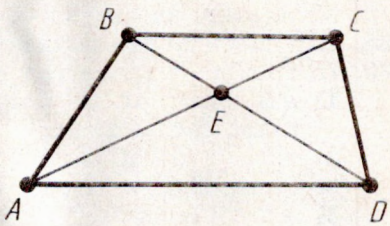
19. У задачы 18 знайдзіце адносіну $AD : BD$, калі вядома, што $AC : DE = 55 : 28$.

20. Знайдзіце даўжыню адрэзка DE ў задачы 18, калі: 1) $AC = 20$ см, $AB = 17$ см і $BD = 11{,}9$ см; 2) $AC = 18$ дм, $AB = 15$ дм і $AD = 10$ дм.

21. Дыяганалі трапецыі $ABCD$ перасякаюцца ў пункце E (рыс. 254). Дакажыце падобнасць трохвугольнікаў BCE і DAE.



Рыс. 253



Рыс. 254

22. Знайдзіце адносіну адрэзкаў дыяганалі трапецыі, на якія яна разбіваецца другой дыяганаллю, калі асновы трапецыі адносяцца як $m : n$.

23. Прамая, якая праходзіць праз пункт перасячэння дыяганалей трапецыі, дзеліць адну аснову ў адносіне $m : n$. У якой адносіне яна дзеліць другую аснову?

24. У трапецыі $ABCD$ з дыяганаллю AC вуглы ABC і ACD роўныя. Знайдзіце дыяганаль AC, калі асновы BC і AD адпаведна роўны 12 м і 27 м.

25. Лінія, паралельная асновам трапецыі, дзеліць адну бакавую старану ў адносіне $m : n$. У якой адносіне дзеліць яна другую бакавую старану?

26. Прадаўжэнні бакавых старон AB і CD трапецыі $ABCD$ перасякаюцца ў пункце E. Знайдзіце стораны трохвугольніка

AED, калі $AB = 5$ см, $BC = 10$ см, $CD = 6$ см, $AD = 15$ см.

27. Знайдзіце вышыню трохвугольніка AED з задачы 26, апушчаную на старану AD, калі $BC = 7$ см, $AD = 21$ см і вышыня трапецыі роўна 3 см.

28*. Дыяганалі трапецыі перасякаюцца ў пункце E, а прадаўжэнні бакавых старон перасякаюцца ў пункце F. Дакажыце, што прамая EF дзеліць аснову трапецыі папалам (рыс. 255).

29*. У раўнабедранага трохвугольніка ABC з асновай AC і процілеглым вуглом 36° праведзена бісектрыса AD.

1) Дакажыце падобнасць трохвугольнікаў ABC і CAD.

2) Знайдзіце аснову трохвугольніка ABC, калі яго бакавая старана роўна a.

30. Вуглы B і B_1 трохвугольнікаў ABC і $A_1B_1C_1$ роўныя. Стораны трохвугольніка ABC, прылеглыя да вугла B, у 2,5 раза большыя за стораны трохвугольніка $A_1B_1C_1$, прылеглыя да вугла B_1. Знайдзіце AC і A_1C_1, калі іх сума роўна 4,2 м.

31. У трохвугольніку ABC з вострым вуглом C праведзены вышыні AE і BD. Дакажыце, што $\triangle ABC \sim \triangle EDC$.

32*. У востравугольным трохвугольніку ABC праведзены вышыні AD, BE, CF. Знайдзіце вуглы трохвугольніка DEF, ведаючы вуглы трохвугольніка ABC (рыс. 256).

33*. Дакажыце, што бісектрысы трохвугольніка DEF у задачы 32 ляжаць на вышынях трохвугольніка ABC.

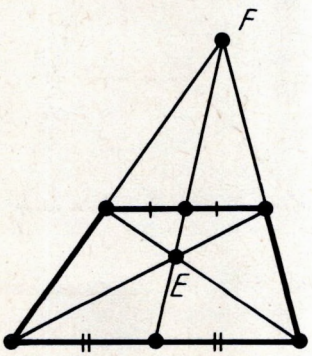
34. Ці падобныя два роўнастароннія трохвугольнікі?

35. Ці падобныя трохвугольнікі ABC і $A_1B_1C_1$, калі:

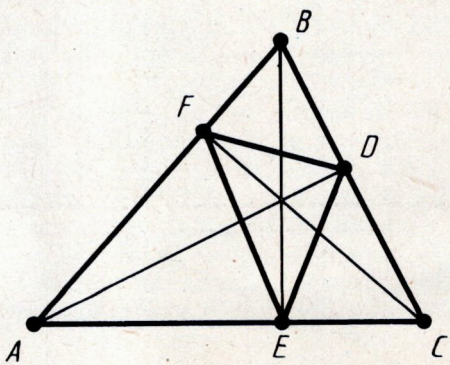
1) $AB = 1$ м, $AC = 1{,}5$ м, $BC = 2$ м; $A_1B_1 = 10$ см, $A_1C_1 = 15$ см, $B_1C_1 = 20$ см;

2) $AB = 1$ м, $AC = 2$ м, $BC = 1{,}5$ м; $A_1B_1 = 8$ дм, $A_1C_1 = 16$ дм, $B_1C_1 = 12$ дм;

3) $AB = 1$ м, $AC = 2$ м, $BC = 1{,}25$ м; $A_1B_1 = 10$ см, $A_1C_1 = 20$ см, $B_1C_1 = 13$ см?



Рыс. 255



Рыс. 256

36. Дакажыце, што ў падобных трохвугольнікаў перыметры адносяцца як адпаведныя стораны.

37. Стораны трохвугольніка роўны 0,8 м, 1,6 м і 2 м. Знайдзіце стораны падобнага яму трохвугольніка, перыметр якога роўны 5,5 м.

38. Перыметр аднаго трохвугольніка складае $\frac{11}{13}$ перыметра падобнага яму трохвугольніка. Рознасць дзвюх адпаведных старон роўна 1 м. Знайдзіце гэтыя стораны.

38. Ці падобныя два прамавугольныя трохвугольнікі, калі ў аднаго з іх ёсць вугал 40°, а ў другога — вугал роўны: 1)50°; 2) 60°?

40. Аснова вышыні прамавугольнага трохвугольніка, апушчанай на гіпатэнузу, дзеліць яе на адрэзкі 9 см і 16 см. Знайдзіце стораны трохвугольніка.

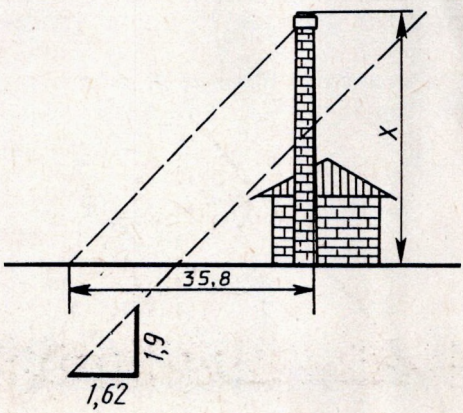
41. Гіпатэнуза прамавугольнага трохвугольніка роўна 25 см, а адзін з катэтаў роўны 10 см. Знайдзіце праекцыю другога катэта на гіпатэнузу.

42. Дакажыце, што адпаведныя вышыні падобных трохвугольнікаў адносяцца як адпаведныя стораны.

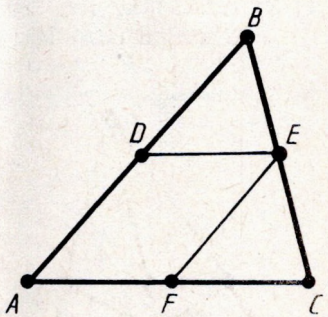
43. Катэты прамавугольнага трохвугольніка адносяцца як $m:n$. Як адносяцца праекцыі катэтаў на гіпатэнузу?

44. Даўжыня ценю фабрычнай трубы роўна 35,8 м; у той жа час вертыкальна ўткнуты ў зямлю кол вышынёй 1,9 м дае цень даўжынёй 1,62 м (рыс. 257). Знайдзіце вышыню трубы.

45. У трохвугольнік ABC упісаны ромб $ADEF$ так, што вугал A ў іх агульны, а вяршыня E знаходзіцца на старане BC (рыс. 258). Знайдзіце старану ромба, калі $AB = c$ і $AC = b$.



Рыс. 257



Рыс. 258

46*. Бісектрыса знешняга вугла трохвугольніка ABC пры вяршыні C перасякае прамую AB у пункце D (рыс. 259). Дакажыце, што $AD:BD = AC:BC$.

47*. Дакажыце, што геаметрычнае месца пунктаў, адносіна адлегласцей якіх да двух дадзеных пунктаў пастаянная (не роўна адзінцы), ёсць акружнасць.

48. Старана трохвугольніка роўна 10 см, а процілеглы вугал — 150°. Знайдзіце радыус апісанай акружнасці.

49. Пункты A, B, C ляжаць на акружнасці. Чаму роўна хорда AC, калі вугал ABC роўны 30°, а дыяметр акружнасці 10 см?

50. Пункты A, B, C ляжаць на акружнасці. Чаму роўны вугал ABC, калі хорда AC роўна радыусу акружнасці? (Два выпадкі.)

51. Дакажыце, што цэнтрам акружнасці, апісанай каля прамавугольнага трохвугольніка, з'яўляецца сярэдзіна гіпатэнузы.

52. Дакажыце, што медыяна прамавугольнага трохвугольніка, праведзеная да гіпатэнузы, разбівае яго на два раўнабедраныя трохвугольнікі.

53. Пабудуйце прамавугольны трохвугольнік па гіпатэнузе і вышыні, апушчанай з вяршыні прамога вугла на гіпатэнузу.

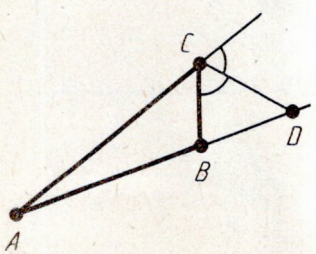
54. На акружнасці адзначаны чатыры пункты: A, B, C, D. Чаму роўны вугал ADC, калі вугал ABC роўны α? (Два выпадкі.)

55. Хорды акружнасці AD і BC перасякаюцца. Вугал ABC роўны 50°, вугал ACD роўны 80°. Знайдзіце вугал CAD.

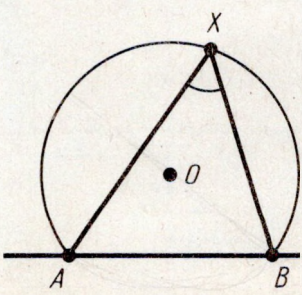
56*. Дакажыце, што ў чатырохвугольніка, упісанага ў акружнасць, сума процілеглых вуглоў роўна 180°.

57. Дакажыце, што геаметрычнае месца вяршынь прамых вуглоў, стораны якіх праходзяць праз два дадзеныя пункты, ёсць акружнасць.

58. Дакажыце, што геаметрычнае месца вяршынь вуглоў з зададзенай градуснай мерай, стораны якіх праходзяць праз



Рыс. 259



Рыс. 260

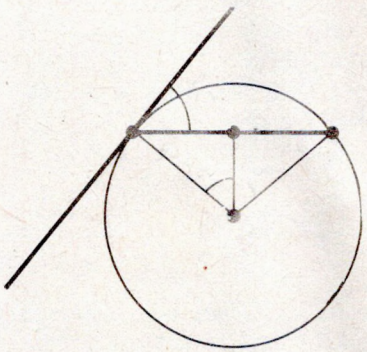
два дадзеныя пункты, а вяршыні ляжаць па адзін бок ад прамой, якая злучае гэтыя пункты, ёсць дуга акружнасці з канцамі ў гэтых пунктах (рыс. 260).

59. Дакажыце, што востры вугал паміж хордай акружнасці і датычнай да акружнасці ў канцы хорды роўны палавіне вугла паміж радыусамі, праведзенымі да канцоў хорды (рыс. 261).

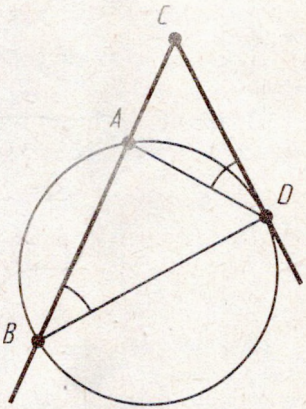
60. Пабудуйце трохвугольнік па старане, процілегламу ёй вуглу і вышыні, праведзенай з вяршыні гэтага вугла.

61. З пункта C акружнасці праведзены перпендыкуляр CD да дыяметра AB. Дакажыце, што $CD^2 = AD \cdot BD$.

62. Дакажыце, што здабытак адрэзкаў сякучай акружнасці роўны квадрату адрэзка датычнай, праведзенай з таго ж пункта: $AC \cdot BC = CD^2$ (рыс. 262).



Рыс. 261



Рыс. 262

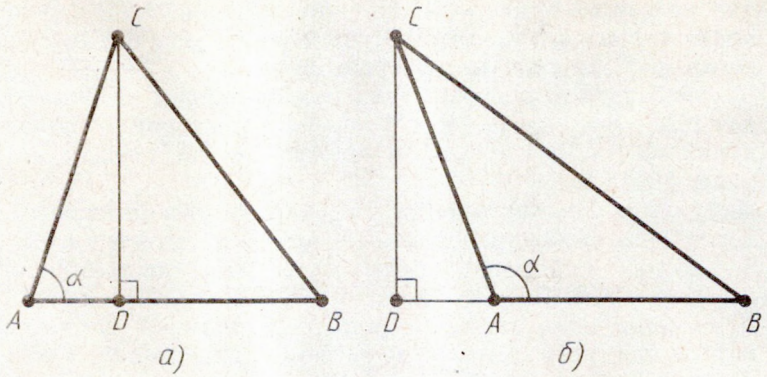
63. Як далёка відаць з самалёта, які ляціць на вышыні 4 км над Зямлёй, калі радыус Зямлі 6370 км?

64. Вылічыце радыус гарызонту, бачнага з вяршыні тэлевежы ў Астанкіне, вышыня якой 537 м.

§ 12. РАШЭННЕ ТРОХВУГОЛЬНІКАЎ

109. ТЭАРЭМА КОСІНУСАЎ

Тэарэма 12.1 (тэарэма косінусаў). ***Квадрат любой стараны трохвугольніка роўны суме квадратаў дзвюх другіх старон без падвоенага здабытку гэтых старон на косінус вугла паміж імі.***



Рыс. 263

Доказ. Няхай ABC — дадзены трохвугольнік (рыс. 263). Дакажам, што $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$.

Маем вектарную роўнасць $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}$. Узводзячы гэту роўнасць скалярна ў квадрат, атрымаем:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AC}$$

або

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.$$

Тэарэма даказана.

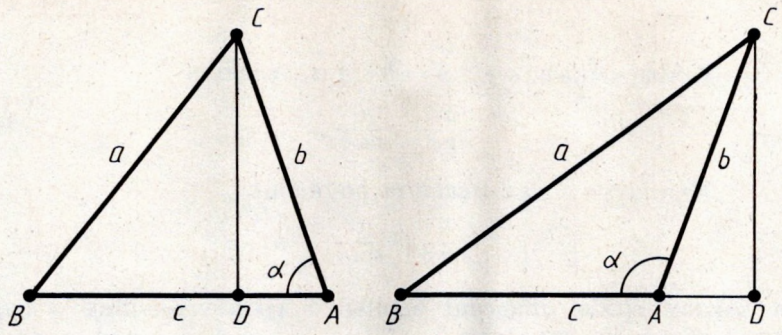
Заўважым, што $AC \cdot \cos A$ роўна па абсалютнай велічыні праекцыі AD стараны AC на старану AB (рыс. 263, *а*) ці яе прадаўжэнне (рыс. 263, *б*). Знак $AC \cdot \cos A$ залежыць ад вугла A: «+», калі вугал A востры, «—», калі вугал A тупы. Адсюль атрымліваецца вынік: ***квадрат стараны трохвугольніка роўны суме квадратаў дзвюх другіх старон «±» падвоены здабытак адной з іх на праекцыю другой. Знак «+» трэба браць, калі процілеглы вугал тупы, а знак «—», калі вугал востры.***



Задача (7). Дадзены стораны трохвугольніка a, b, c. Знайдзіце вышыню трохвугольніка, апушчаную на старану c.

Рашэнне. Маем: $a^2 = b^2 + c^2 \pm 2c \cdot AD$ (рыс. 264). Адсюль $AD = \pm \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c}$. Па тэарэме Піфагора

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c}\right)^2}.$$



Рыс. 264

110. ТЭАРЭМА СІНУСАЎ

Тэарэма 12.2 (тэарэма сінусаў). ***Стораны трохвугольніка прапарцыянальныя сінусам процілеглых вуглоў.***

Доказ. Няхай ABC — трохвугольнік са старанамі a, b, c і процілеглымі вугламі α, β, γ (рыс. 265). Дакажам, што

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Апусцім з вяршыні C вышыню CD. З прамавугольнага трохвугольніка ACD, калі вугал α востры, атрымліваем:

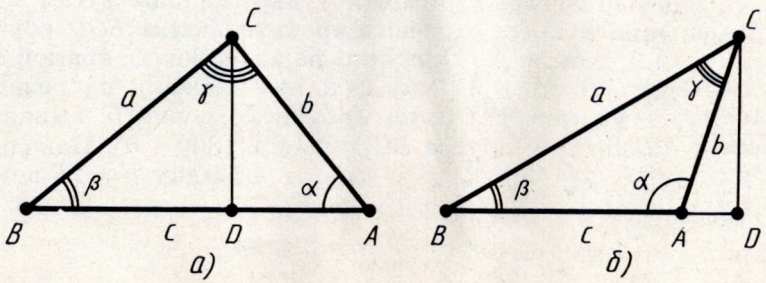
$$CD = b\sin\alpha$$

(рыс. 265, *а*). Калі вугал α тупы, то

$$CD = b\sin(180^\circ - \alpha) = b\sin\alpha$$

(рыс. 265, *б*). Аналагічна з трохвугольніка BCD атрымліваем:

$$CD = a\sin\beta.$$



Рыс. 265

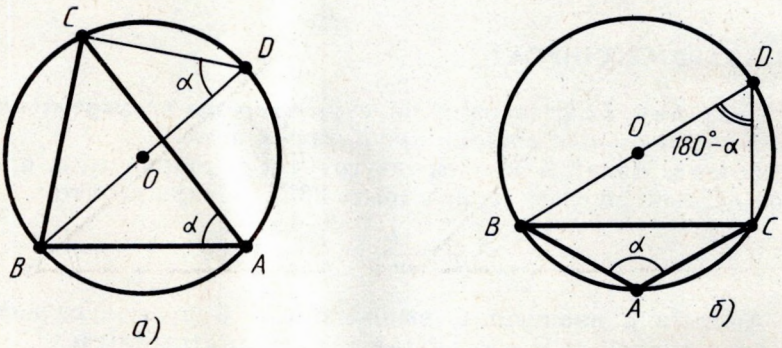
Такім чынам, $a \sin \beta = b \sin \alpha$. Адсюль

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \alpha}.$$

Аналагічна даказваецца роўнасць

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Для доказу трэба правесці вышыню трохвугольніка з вяршыні A. Тэарэма даказана.



Рыс. 266

Задача (13). Дакажыце, што ў тэарэме сінусаў кожная з трох адносін: $\frac{a}{\sin \alpha}$, $\frac{b}{\sin \beta}$, $\frac{c}{\sin \gamma}$ — роўна $2R$, дзе R — радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка.

Рашэнне. Правядзём дыяметр BD (рыс. 266). Па ўласцівасці вуглоў, упісаных у акружнасць, вугал пры вяршыні D прамавугольнага трохвугольніка BCD роўны ці α, калі пункты A і D ляжаць па адзін бок ад прамой BC (рыс. 266, *а*), ці $180° - \alpha$, калі яны ляжаць па розныя бакі ад прамой BC (рыс. 266, *б*). У першым выпадку $BC = BD \sin \alpha$, у другім $BC = BD \sin (180° - \alpha)$. Паколькі $\sin (180° - \alpha) = \sin \alpha$, то ў любым выпадку $a = 2R \sin \alpha$. Значыць,

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R,$$

што і трэба было даказаць.

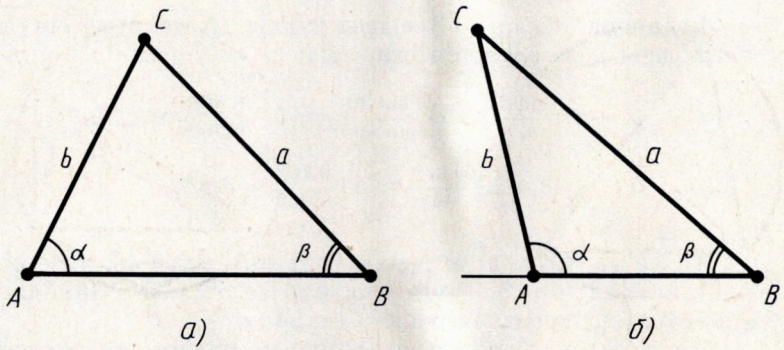
111. СУАДНОСІНА ПАМІЖ ВУГЛАМІ ТРОХВУГОЛЬНІКА І ПРОЦІЛЕГЛЫМІ СТАРАНАМІ

У трохвугольніку супраць большага вугла ляжыць большая старана, супраць большай стараны ляжыць большы вугал.

Няхай a і b — дзве стараны трохвугольніка і α, β — процілеглыя ім вуглы. Дакажам, што калі $\alpha > \beta$, то $a > b$. І наадварот: калі $a > b$, то $\alpha > \beta$.

Калі вуглы α і β вострыя (рыс. 267, *а*), то пры $\alpha > \beta$ будзе $\sin\alpha > \sin\beta$. А паколькі

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b},$$



Рыс. 267

то $a > b$. Калі вугал α тупы (абодва вуглы не могуць быць тупымі), то вугал $180° - \alpha$ востры (рыс. 267, *б*). Прычым вугал $180° - \alpha$ большы за вугал β як знешні вугал трохвугольніка, не сумежны з вуглом β. Таму $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha) > \sin\beta$. І мы зноў заключаем, што $a > b$.

Дакажам адваротнае сцверджанне. Няхай $a > b$. Трэба даказаць, што $\alpha > \beta$. Дапусцім, што $\alpha \leqslant \beta$. Калі $\alpha = \beta$, то трохвугольнік раўнабедраны і $a = b$. Калі $\alpha < \beta$, то па даказанаму $a < b$. У абодвух выпадках атрымліваецца супярэчнасць, таму што па дапушчэнню $a > b$, што і трэба было даказаць.



Задача (17). Дакажыце, што калі ў трохвугольніку ёсць тупы вугал, то процілеглая яму старана найбольшая.

Рашэнне. У трохвугольніку можа быць толькі адзін тупы вугал. Таму ён большы за любы з астатніх вуглоў. А значыць, процілеглая яму старана большая за любую з дзвюх другіх старон трохвугольніка.

112. РАШЭННЕ ТРОХВУГОЛЬНІКАЎ

Рашэнне трохвугольнікаў заключаецца ў знаходжанні невядомых старон і вуглоў трохвугольніка па вядомых яго вуглах і старанах. Будзем абазначаць стораны трохвугольніка праз a, b, c, а процілеглыя ім вуглы праз α, β, γ (рыс. 268).

Задача (26). 1) У трохвугольніку дадзены старана $a = 5$ і два вуглы $\beta = 30°$, $\gamma = 45°$. Знайдзіце трэці вугал і астатнія дзве стараны.

Рашэнне. Паколькі сума вуглоў трохвугольніка роўна 180°, то трэці вугал α выражаецца праз зададзеныя вуглы:

$$\alpha = 180° - \beta - \gamma = 180° - 30° - 45° = 105°.$$

Ведаючы старану і ўсе тры вуглы, па тэарэме сінусаў знаходзім дзве астатнія стараны:

$$b = a \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = 5 \cdot \frac{\sin 30°}{\sin 105°} \approx 5 \cdot \frac{0{,}500}{0{,}966} \approx 2{,}59,$$

$$c = a \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \approx 5 \cdot \frac{0{,}707}{0{,}966} \approx 3{,}66.$$

Задача (27). 1) У трохвугольніку дадзены дзве стараны $a = 12$, $b = 8$ і вугал паміж імі $\gamma = 60°$. Знайдзіце астатнія два вуглы і трэцюю старану.

Рашэнне. Трэцюю старану знаходзім па тэарэме косінусаў:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma} = \sqrt{144 + 64 - 2 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 0{,}500} = \sqrt{112} \approx 10{,}6.$$

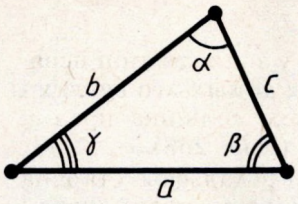
Цяпер, маючы тры стараны, па тэарэме косінусаў знаходзім косінусы двух невядомых вуглоў і самі вуглы: $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \approx 0{,}191$, адкуль $\alpha \approx 79°$, $\beta = 180° - \alpha - \gamma \approx 41°$.

Задача (28). 5) У трохвугольніку дадзены дзве стараны $a = 6$, $b = 8$ і процілеглы старане a вугал $\alpha = 30°$. Знайдзіце астатнія два вуглы і трэцюю старану.

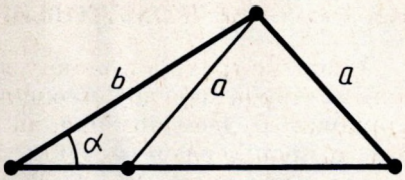
Рашэнне. Па тэарэме сінусаў знаходзім значэнне $\sin\beta$:

$$\sin\beta = \frac{b}{a} \cdot \sin\alpha = \frac{8}{6} \cdot \sin 30° \approx 0{,}667.$$

Гэтаму значэнню сінуса адпавядаюць два вуглы: $\beta_1 \approx 42°$ і $\beta_2 \approx 138°$.



Рыс. 268



Рыс. 269

Разгледзім спачатку вугал $\beta_1 \approx 42°$. Па ім знаходзім трэці вугал $\gamma_1 = 180° - \alpha - \beta \approx 108°$ і па тэарэме сінусаў трэцюю старану

$$c_1 = \frac{a \cdot \sin \gamma_1}{\sin \alpha} \approx 6 \cdot \frac{\sin 108°}{\sin 30°} \approx 6 \cdot \frac{0{,}951}{0{,}500} \approx 11{,}4.$$

Аналагічна па вуглу $\beta_2 \approx 138°$ знаходзім $\gamma_2 \approx 12°$ і $c_2 \approx 2{,}49$.

З а ў в а г а. Мы бачым, што гэта задача ў адрозненне ад папярэдніх мае два рашэнні (рыс. 269). Пры іншых лікавых даных, напрыклад пры $\alpha \geqslant 90°$, задача можа мець толькі адно рашэнне ці наогул не мець рашэнняў.

З а д а ч а (29). 1) Дадзены тры стараны трохвугольніка: $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$. Знайдзіце яго вуглы.

Р а ш э н н е. Вуглы знаходзяцца па тэарэме косінусаў:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{7}{8} = 0{,}875, \text{ адкуль } \alpha \approx 29°.$$

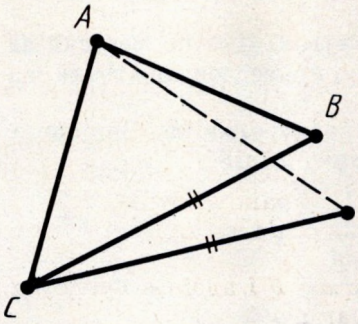
Аналагічна знаходзіцца $\cos \beta = 0{,}688$. Адкуль $\beta \approx 47°$ і $\gamma = 180° - 47° - 29° = 104°$.

КАНТРОЛЬНЫЯ ПЫТАННІ

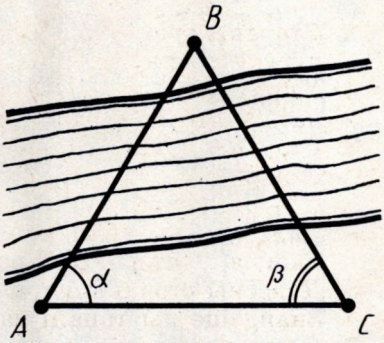
1. Дакажыце тэарэму косінусаў.
2. Дакажыце, што квадрат стараны трохвугольніка роўны суме квадратаў дзвюх другіх старон «$\pm$» падвоены здабытак адной з гэтых старон на праекцыю другой. Ад чаго залежыць знак «$+$» ці «$-$»?
3. Дакажыце тэарэму сінусаў.
4. Дакажыце, што ў любым трохвугольніку супраць большай стараны ляжыць большы вугал і супраць большага вугла ляжыць большая старана.

ЗАДАЧЫ

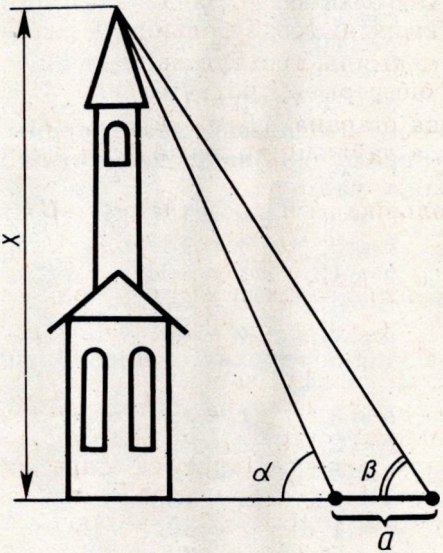
1. Стораны трохвугольніка 5 м, 6 м, 7 м. Знайдзіце косінусы вуглоў трохвугольніка.
2. У трохвугольніка дзве стараны роўны 5 м і 6 м, а сінус вугла паміж імі роўны 0,6. Знайдзіце трэцюю старану.
3. Стораны трохвугольніка a, b, c. Дакажыце, што калі $a^2 + b^2 > c^2$, то вугал, процілеглы старане c, востры. Калі $a^2 + b^2 < c^2$, то вугал, процілеглы старане c, тупы.
4. Дадзены дыяганалі паралелаграма c і d і вугал паміж імі α. Знайдзіце стораны паралелаграма.
5. Дадзены стораны паралелаграма a і b і адзін з вуглоў α. Знайдзіце дыяганалі паралелаграма.
6. Стораны трохвугольніка 4 м, 5 м і 6 м. Знайдзіце праекцыі старон 4 м і 5 м на прамую, якая змяшчае старану 6 м.
7. Дадзены стораны трохвугольніка a, b, c. Знайдзіце вышыню трохвугольніка, апушчаную на старану c.
8. Знайдзіце вышыні трохвугольніка ў задачы 1.
9. Знайдзіце медыяны трохвугольніка ў задачы 1.
10*. Знайдзіце бісектрысы трохвугольніка ў задачы 1.
11*. Як зменіцца старана AB трохвугольніка ABC, калі вугал C узрастае, а даўжыні старон AC і BC застаюцца без змен (рыс. 270)?
12. У трохвугольніка ABC $AB = 15$ см, $AC = 10$ см. Ці можа $\sin\beta = \frac{3}{4}$?
13. Дакажыце, што ў тэарэме сінусаў кожная з трох адносін $\frac{a}{\sin\alpha}$, $\frac{b}{\sin\beta}$, $\frac{c}{\sin\gamma}$ роўна $2R$, дзе R — радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка.
14. Як знайсці радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка, ведаючы яго стораны? Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка са старанамі 5 м, 6 м, 7 м.
15. Растлумачце, як знайсці адлегласць ад пункта A да недаступнага пункта B (рыс. 271), ведаючы адлегласць AC і вуглы α і β.
16. Растлумачце, як знайсці вышыню x будынка (рыс. 272) па вуглах α і β і адлегласці a.
17. Дакажыце, што калі ў трохвугольніку ёсць тупы вугал, то процілеглая яму старана найбольшая.
18. У трохвугольніку ABC $\angle A = 40°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 80°$. Якая са старон трохвугольніка найбольшая, якая — найменшая?
19. У трохвугольніка ABC стораны $AB = 5{,}1$ м, $BC = 6{,}2$ м, $AC = 7{,}3$ м. Які з вуглоў трохвугольніка найбольшы, які — найменшы?



Рыс. 270



Рыс. 271



Рыс.272

20. Што больш: аснова ці бакавая старана раўнабедранага трохвугольніка, калі прылеглы да асновы вугал большы за 60°?

21. У трохвугольніка ABC вугал C тупы. Дакажыце, што калі пункт X ляжыць на старане AC, то $BX < AB$.

22. У трохвугольніка ABC вугал C тупы. Дакажыце, што калі пункт X ляжыць на старане AC, а пункт Y — на старане BC, то $XY < AB$.

23. На старане AB трохвугольніка ABC адзначаны пункт D. Дакажыце, што адрэзак CD меншы, прынамсі, за адну са старон: AC ці BC.

24*. Дадзены трохвугольнік ABC. CD — медыяна, праведзеная да стараны AB. Дакажыце, што калі $AC > BC$, то вугал ACD меншы за вугал BCD.

25*. Дакажыце, што бісектрыса трохвугольніка не меншая за вышыню і не большая за медыяну, праведзеныя з гэтай жа вяршыні.

26. Дадзены старана і два вуглы трохвугольніка. Знайдзіце трэці вугал і астатнія дзве стараны, калі:

1) $a = 5$, $\beta = 30°$, $\gamma = 45°$;
2) $a = 20$, $\alpha = 75°$, $\beta = 60°$;
3) $a = 35$, $\beta = 40°$, $\gamma = 120°$;
4) $b = 12$, $\alpha = 36°$, $\beta = 25°$;
5) $c = 14$, $\alpha = 64°$, $\beta = 48°$.

27. Дадзены дзве стараны і вугал паміж імі. Знайдзіце астатнія два вуглы і трэцюю старану, калі:

1) $a = 12$, $b = 8$, $\gamma = 60°$;
2) $a = 7$, $b = 23$, $\gamma = 130°$;
3) $b = 9$, $c = 17$, $\alpha = 95°$;
4) $b = 14$, $c = 10$, $\alpha = 145°$;
5) $a = 32$, $c = 23$, $\beta = 152°$;
6) $a = 24$, $c = 18$, $\beta = 15°$.

28. У трохвугольніка зададзены дзве стараны і вугал, процілеглы адной са старон. Знайдзіце астатнія вуглы і старану трохвугольніка, калі:

1) $a = 12$, $b = 5$, $\alpha = 120°$;
2) $a = 27$, $b = 9$, $\alpha = 138°$;
3) $a = 34$, $b = 12$, $\alpha = 164°$;
4) $a = 2$, $b = 4$, $\alpha = 60°$;
5) $a = 6$, $b = 8$, $\alpha = 30°$.

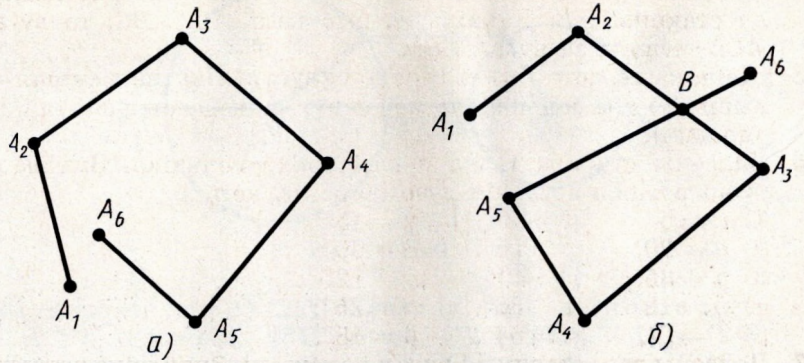
29. Дадзены тры стараны трохвугольніка. Знайдзіце яго вуглы, калі:

1) $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$;
2) $a = 7$, $b = 2$, $c = 8$;
3) $a = 4$, $b = 5$, $c = 7$;
4) $a = 15$, $b = 24$, $c = 18$;
5) $a = 23$, $b = 17$, $c = 39$;
6) $a = 55$, $b = 21$, $c = 38$.

§ 13. МНОГАВУГОЛЬНІКІ

113. ЛОМАНАЯ

Ломанай $A_1A_2A_3...A_n$ называецца фігура, якая складаецца з пунктаў A_1, A_2, ..., A_n і з адрэзкаў A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, якія іх злучаюць. Пункты A_1, A_2, ..., A_n называюцца *вяршынямі* ломанай, а адрэзкі A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ — *звёнамі* ломанай. Лома-



Рыс. 273

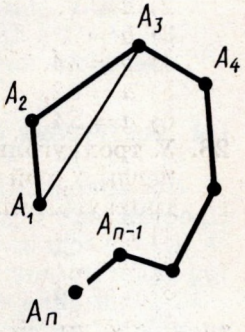
ная называецца *простай*, калі яна не мае самаперасячэнняў. На рысунку 273, *а* паказана простая ломаная, а на рысунку 273, *б* — ломаная з самаперасячэннем (у пункце *B*). *Даўжынёй ломанай* называецца сума даўжынь яе звёнаў.

Тэарэма 13.1. ***Даўжыня ломанай не меншая за даўжыню адрэзка, які злучае яе канцы.***

Доказ. Няхай $A_1A_2A_3...A_n$ — дадзеная ломаная (рыс. 274).

Заменім звёны A_1A_2 і A_2A_3 адным звяном A_1A_3. Атрымаем ломаную $A_1A_3A_4...A_n$. Паколькі па няроўнасці трохвугольніка

$$A_1A_3 < A_1A_2 + A_2A_3,$$

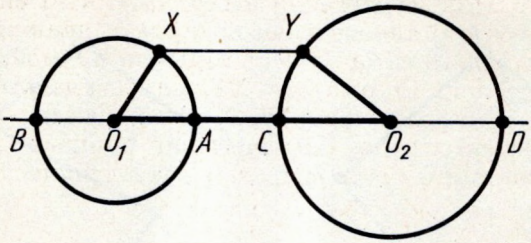


Рыс. 274

то ломаная $A_1A_3A_4...A_n$ мае даўжыню, не большую, чым зыходная ломаная.

Замяняючы такім жа чынам звёны A_1A_3 і A_3A_4 звяном A_1A_4, пераходзім да ломанай $A_1A_4A_5...A_n$, якая таксама мае даўжыню, не большую, чым зыходная ломаная. І гэтак далей. У рэшце рэшт мы прыйдзем да адрэзка A_1A_n, які злучае канцы ломанай. Адсюль вынікае, што зыходная ломаная мела даўжыню, не меншую за даўжыню адрэзка A_1A_n. Тэарэма даказана.

Задача (1). Дадзены дзве акружнасці з радыусамі R_1 і R_2 і адлегласцю паміж цэнтрамі $d > R_1 + R_2$. Чаму роўны найбольшая і найменшая адлегласці паміж пунктамі X і Y гэтых акружнасцей?



Рыс. 275

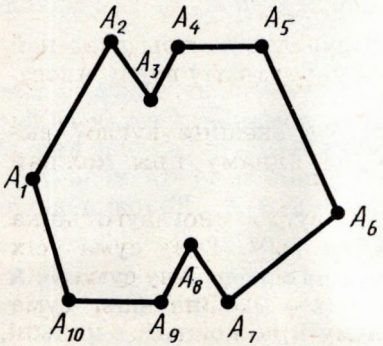
Р а ш э н н е. Для ломанай O_1XYO_2 па тэарэме 13.1 $O_1O_2 \leqslant O_1X + XY + YO_2$ (рыс. 275). Значыць, $d \leqslant R_1 + XY + R_2$. Адсюль $XY \geqslant d - R_1 - R_2$. Паколькі $AC = d - R_1 - R_2$, то найменшая адлегласць паміж пунктамі акружнасцей роўна $d - R_1 - R_2$.

Для ломанай XO_1O_2Y па той жа тэарэме $XY \leqslant R_1 + d + R_2$. Паколькі $BD = d + R_1 + R_2$, то найбольшая адлегласць паміж пунктамі акружнасцей роўна $d + R_1 + R_2$.

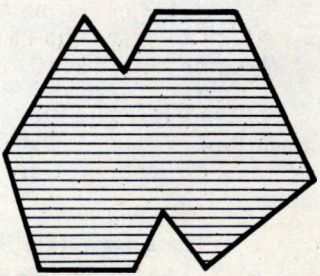
114. ВЫПУКЛЫЯ МНОГАВУГОЛЬНІКІ

Ломаная называецца *замкнутай*, калі ў яе канцы супадаюць. Простая замкнутая ломаная называецца *многавугольнікам*, калі яе суседнія звёны не ляжаць на адной прамой (рыс. 276). Вяршыні ломанай называюцца *вяршынямі многавугольніка*, а звёны ломанай — *старанамі многавугольніка*. Адрэзкі, якія злучаюць несуседнія вяршыні многавугольніка, называюцца *дыяганалямі*. Многавугольнік з n вяршынямі, а значыць, і з n старанамі называецца *n-вугольнікам*.

Плоскім многавугольнікам ці *многавугольнай вобласцю* называецца канечная частка плоскасці, абмежаваная многавугольнікам (рыс. 277).

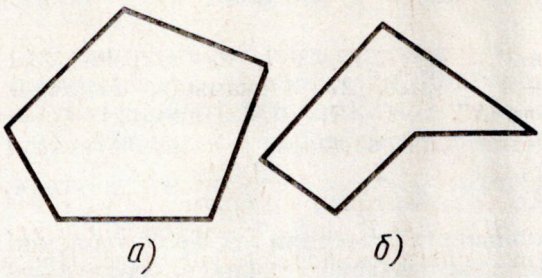


Рыс. 276

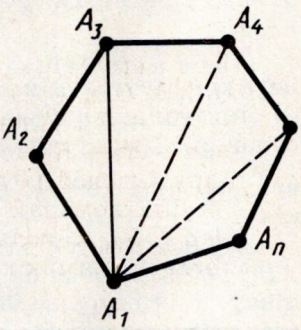


Рыс. 277

Многавугольнік называецца *выпуклым*, калі ён ляжыць у адной паўплоскасці адносна любой прамой, якая змяшчае яго старану. Пры гэтым сама прамая лічыцца прамой, якая належыць паўплоскасці. На рысунку 278, *а* паказаны выпуклы многавугольнік, а на рысунку 278, *б* — нявыпуклы. *Вуглом выпуклага многавугольніка* пры дадзенай вяршыні называецца вугал, утвораны яго старанамі, якія сыходзяцца ў гэтай вяршыні.



Рыс. 278



Рыс. 279

Тэарэма 13.2. ***Сума вуглоў выпуклага n-вугольніка роўна 180°(n − 2).***

Доказ. У выпадку $n = 3$ тэарэма справядлівая. Няхай $A_1A_2...A_n$ — дадзены выпуклы многавугольнік і $n > 3$ (рыс. 279). Правядзём $n - 3$ дыяганалі: A_1A_3, A_1A_4, ..., A_1A_{n-1}. Паколькі многавугольнік выпуклы, то гэтыя дыяганалі разбіваюць яго на $n - 2$ трохвугольнікі: $\triangle A_1A_2A_3$, $\triangle A_1A_3A_4$, ..., $\triangle A_1A_{n-1}A_n$. Сума вуглоў многавугольніка $A_1A_2...A_n$ супадае з сумай вуглоў усіх гэтых трохвугольнікаў. Сума вуглоў кожнага трохвугольніка роўна 180°, а лік гэтых трохвугольнікаў ёсць $n - 2$. Таму сума вуглоў выпуклага n-вугольніка $A_1A_2...A_n$ роўна $180°(n - 2)$. Тэарэма даказана.

Знешнім вуглом выпуклага многавугольніка пры дадзенай вяршыні называецца вугал, сумежны ўнутранаму вуглу многавугольніка пры гэтай вяршыні.

Задача (9). Чаму роўна сума знешніх вуглоў выпуклага n-вугольніка, узятых па аднаму пры кожнай вяршыні?

Рашэнне. Сума ўнутранага вугла многавугольніка і сумежнага з ім знешняга роўна 180°. Таму сума ўсіх унутраных і знешніх вуглоў роўна $180° \cdot n$. Але сума ўсіх унутраных вуглоў роўна $180° \cdot (n - 2)$. Значыць, сума знешніх вуглоў, узятых па аднаму пры кожнай вяршыні, роўна $180° \cdot n - 180° \cdot (n - 2) = 360°$.

115. ПРАВІЛЬНЫЯ МНОГАВУГОЛЬНІКІ

Выпуклы многавугольнік называецца *правільным*, калі ў яго ўсе стораны роўныя і ўсе вуглы роўныя.

Многавугольнік называецца *ўпісаным* у акружнасць, калі ўсе яго вяршыні ляжаць на некаторай акружнасці. Многавугольнік называецца *апісаным* каля акружнасці, калі ўсе яго стораны датыкаюцца да некаторай акружнасці.

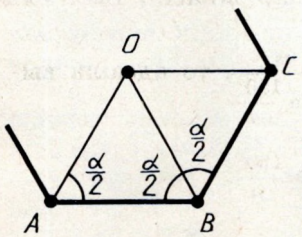
Тэарэма 13.3. ***Правільны выпуклы многавугольнік з'яўляецца ўпісаным у акружнасць і апісаным каля акружнасці.***

Доказ. Няхай A і B — дзве суседнія вяршыні правільнага многавугольніка (рыс. 280). Правядзём бісектрысы вуглоў многавугольніка з вяршыняў A і B. Няхай O — пункт іх перасячэння. Трохвугольнік AOB раўнабедраны з асновай AB і вугламі пры аснове, роўнымі $\frac{\alpha}{2}$, дзе α — вугал многавугольніка.

Злучым пункт O з вяршыняй C, суседняй з B. Трохвугольнікі ABO і CBO роўныя па першаму прызнаку роўнасці трохвугольнікаў. У іх старана OB агульная, стораны AB і BC роўныя як стораны многавугольніка, а вуглы пры вяршыні B роўны $\frac{\alpha}{2}$. З роўнасці трохвугольнікаў вынікае, што трохвугольнік OBC раўнабедраны з вуглом пры вяршыні C, роўным $\frac{\alpha}{2}$, а значыць, CO ёсць бісектрыса вугла C.

Цяпер злучаем пункт O з вяршыняй D, суседняй з C, і даказваем, што трохвугольнік COD раўнабедраны і DO — бісектрыса вугла D многавугольніка. І гэтак далей.

У выніку атрымліваем, што кожны трохвугольнік, у якога адной стараной з'яўляецца старана многавугольніка, а процілеглай вяршыняй — пункт O, з'яўляецца раўнабедраным. Усе гэтыя трохвугольнікі маюць роўныя бакавыя стороны і роўныя вышыні, апушчаныя на іх асновы. Адсюль вынікае, што ўсе вяршыні многавугольніка знаходзяцца на акружнасці з цэнтрам O і радыусам, роўным бакавым старанам трохвугольнікаў, а ўсе стораны многавугольніка датыкаюцца да акружнасці з цэнтрам O і радыусам, роўным вышыням трохвугольнікаў, праведзеным з вяршыні O. Тэарэма даказана.



Рыс. 280

Упісаная і апісаная акружнасці правільнага многавугольніка маюць адзін і той жа цэнтр. Яго называюць *цэнтрам многавугольніка*. Вугал, пад якім бачна старана правільнага многавугольніка з яго цэнтра, называецца *цэнтральным вуглом* многавугольніка.

116. ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАДЫУСАЎ УПІСАНЫХ І АПІСАНЫХ АКРУЖНАСЦЕЙ ПРАВІЛЬНЫХ МНОГАВУГОЛЬНІКАЎ

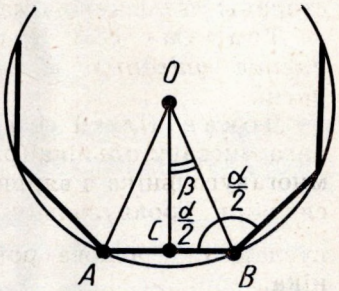
Знойдзем радыус R апісанай акружнасці і радыус r упісанай акружнасці для правільнага многавугольніка са стараной a і лікам старон n (рыс. 281).

Маем:

$$\beta = \frac{180^\circ}{n},$$

$$R = OB = \frac{CB}{\sin\beta} = \frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}},$$

$$r = OC = \frac{CB}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}.$$



Рыс. 281

Для правільнага (роўнастаронняга) трохвугольніка $n = 3$, $\beta = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$,

$$R = \frac{a}{2\sin 60^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}},\quad r = \frac{a}{2\operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

Для правільнага чатырохвугольніка (квадрата) $n = 4$, $\beta = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$,

$$R = \frac{a}{2\sin 45^\circ} = \frac{a}{\sqrt{2}},\quad r = \frac{a}{2\operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{a}{2}.$$

Для правільнага шасцівугольніка $n = 6$, $\beta = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$,

$$R = \frac{a}{2\sin 30^\circ} = a,\quad r = \frac{a}{2\operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



З а д а ч а (16). Знайдзіце выразы для стараны a_n правільнага n-вугольніка праз радыус R апісанай каля яго акружнасці і радыус r упісанай акружнасці. Вылічыце a_n пры $n = 3, 4, 6$.

Р а ш э н н е. Паколькі $R = \frac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$, то адсюль вынікае:

$$a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}.$$

У прыватнасці,

$$a_3 = R\sqrt{3},\ a_4 = R\sqrt{2},\ a_6 = R.$$

Паколькі $r = \dfrac{a_n}{2 \operatorname{tg} \dfrac{180^\circ}{n}}$, то адсюль вынікае:

$$a_n = 2r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}.$$

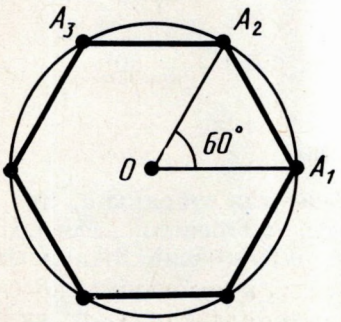
У прыватнасці,

$$a_3 = 2r\sqrt{3},\ a_4 = 2r,\ a_6 = \frac{2r}{\sqrt{3}}.$$

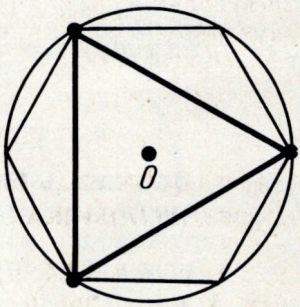
117. ПАБУДАВАННЕ НЕКАТОРЫХ ПРАВІЛЬНЫХ МНОГАВУГОЛЬНІКАЎ

Для пабудавання правільнага многавугольніка, упісанага ў акружнасць, дастаткова пабудаваць яго цэнтральны вугал. У правільнага шасцівугольніка такі вугал роўны $\dfrac{360^\circ}{6} = 60^\circ$. Таму для пабудавання правільнага шасцівугольніка адну вяршыню (A_1) на акружнасці бяром адвольна. З яе як з цэнтра радыусам, роўным радыусу акружнасці, робім засечку і атрымліваем вяршыню A_2 (рыс. 282). Затым аналагічна будуем астатнія вяршыні A_3, A_4, A_5, A_6 і злучаем іх адрэзкамі.

Для пабудавання правільнага ўпісанага трохвугольніка дастаткова злучыць праз адну вяршыні правільнага ўпісанага шасцівугольніка (рыс. 283).

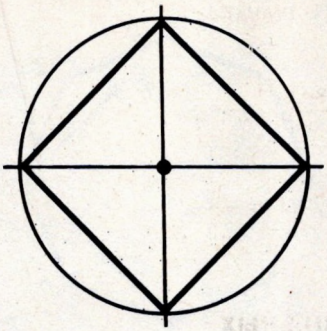


Рыс. 282

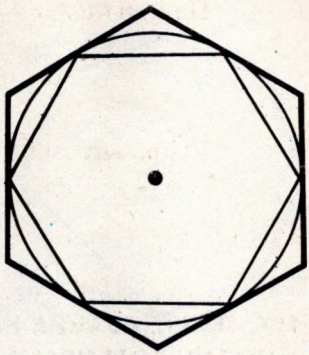


Рыс.283

Для пабудавання правільнага ўпісанага чатырохвугольніка (квадрата) дастаткова правесці праз цэнтр акружнасці перпендыкулярныя прамыя. Яны перасякуць акружнасць у вяршынях квадрата (рыс. 284).



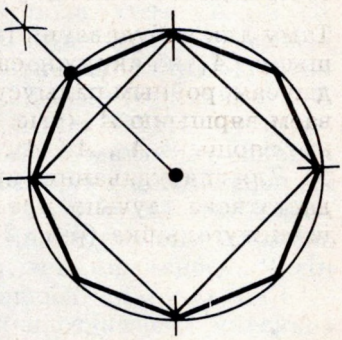
Рыс. 284



Рыс. 285

Для пабудавання правільнага апісанага многавугольніка дастаткова правесці датычныя да акружнасці ў вяршынях правільнага ўпісанага многавугольніка. Датычныя, якія праходзяць праз вяршыні правільнага ўпісанага многавугольніка, перасякаюцца ў вяршынях правільнага апісанага многавугольніка (рыс. 285).

Калі ў акружнасць упісаны правільны n-вугольнік, то лёгка пабудаваць правільны ўпісаны $2n$-вугольнік. На рысунку 286 паказана пабудаванне правільнага васьмівугольніка.



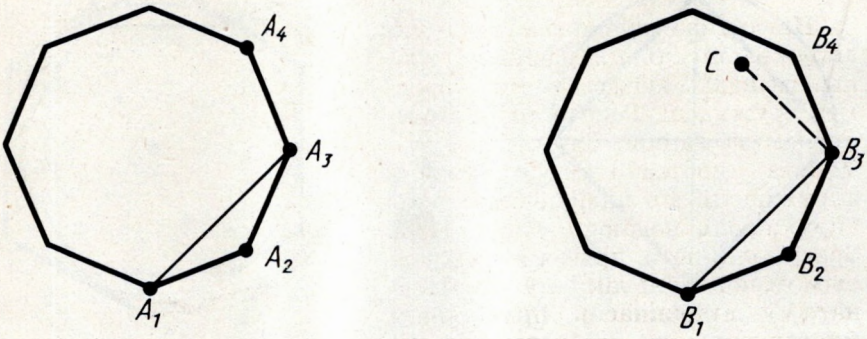
Рыс. 286

118. ПАДОБНАСЦЬ ПРАВІЛЬНЫХ ВЫПУКЛЫХ МНОГАВУГОЛЬНІКАЎ

Тэарэма 13.4. ***Правільныя выпуклыя n-вугольнікі падобныя. У прыватнасці, калі ў іх стораны аднолькавыя, то яны роўныя.***

Доказ. Дакажам спачатку другое сцверджанне тэарэмы. Такім чынам, няхай P_1: $A_1A_2...A_n$, P_2: $B_1B_2...B_n$ — правільныя выпуклыя n-вугольнікі з аднолькавымі старанамі (рыс. 287). Дакажам, што яны роўныя, г. зн. сумяшчаюцца рухам.

Трохвугольнікі $A_1A_2A_3$ і $B_1B_2B_3$ роўныя па першаму прызнаку. У іх $A_1A_2 = B_1B_2$, $A_2A_3 = B_2B_3$ і $\angle A_1A_2A_3 = \angle B_1B_2B_3$.



Рыс. 287

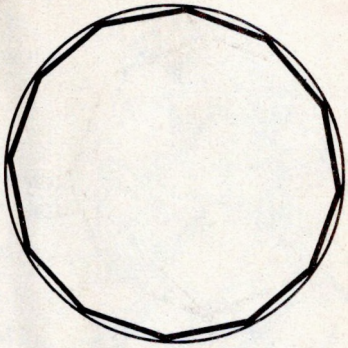
Падвергнем многавугольнік P_1 руху, пры якім яго вяршыні A_1, A_2, A_3 пераходзяць у вяршыні B_1, B_2, B_3 адпаведна. Як мы ведаем, такі рух існуе. Пры гэтым вяршыня A_4 пяройдзе ў некаторы пункт C. Пункты B_4 і C ляжаць па адзін бок з пунктам B_1 адносна прамой B_2B_3. Паколькі рух захоўвае вуглы і адлегласці, то $\angle B_2B_3C = \angle B_2B_3B_4$ і $B_3C = B_3B_4$. А значыць, пункт C супадае з пунктам B_4. Такім чынам, пры нашым руху вяршыня A_4 пераходзіць у вяршыню B_4. Далей такім жа спосабам робім вывад, што вяршыня A_5 пераходзіць у вяршыню B_5 і г. д. Гэта значыць многавугольнік P_1 пераводзіцца рухам у многавугольнік P_2, а значыць, яны роўныя.

Каб даказаць першае сцверджанне тэарэмы, падвергнем спачатку многавугольнік P_1 пераўтварэнню падобнасці, напрыклад гаматэтыі, з каэфіцыентам падобнасці $k = \frac{B_1B_2}{A_1A_2}$. Пры гэтым атрымаем правільны n-вугольнік P' з такімі ж старанамі, як і ў P_2.

Па даказанаму многавугольнік P' пераводзіцца рухам у многавугольнік P_2. А значыць, многавугольнік P_1 пераводзіцца ў многавугольнік P_2 пераўтварэннем падобнасці і рухам. Гэта і ёсць зноў пераўтварэнне падобнасці. Тэарэма даказана.

У падобных фігур каэфіцыент падобнасці роўны адносіне адпаведных лінейных размераў. У правільных n-вугольнікаў такімі лінейнымі размерамі з'яўляюцца даўжыні старон, радыусы ўпісаных і апісаных акружнасцей. Адсюль вынікае, што ў правільных n-вугольнікаў адносіны старон, радыусаў упісаных і радыусаў апісаных акружнасцей роўныя. А паколькі перыметры n-вугольнікаў таксама адносяцца як стораны, то ***ў правільных n-вугольнікаў адносіны перыметраў, радыусаў упісаных і радыусаў апісаных акружнасцей роўныя.***

119. ДАЎЖЫНЯ АКРУЖНАСЦІ



Рыс. 288

Нагляднае ўяўленне аб даўжыні акружнасці атрымліваецца наступным чынам. Уявім сабе нітку ў форме акружнасці. Разрэжам яе і расцягнем за канцы. Даўжыня атрыманага адрэзка і ёсць даўжыня акружнасці. Як знайсці даўжыню акружнасці, ведаючы яе радыус? Зразумела, што пры неабмежаваным павелічэнні ліку старон упісанага ў акружнасць правільнага многавугольніка яго перыметр неабмежавана набліжаецца да даўжыні акружнасці (рыс. 288). Зыходзячы з гэтага, дакажам некаторыя ўласцівасці даўжыні акружнасці.

Тэарэма 13.5. ***Адносіна даўжыні акружнасці да яе дыяметра не залежыць ад акружнасці, г. зн. адна і тая ж для любых дзвюх акружнасцей.***

Доказ. Возьмем дзве адвольныя акружнасці. Няхай R_1 і R_2 — іх радыусы, а l_1 і l_2 — іх даўжыні. Дапусцім, што сцвярджанне тэарэмы няправільнае і $\frac{l_1}{2R_1} \neq \frac{l_2}{2R_2}$, напрыклад:

$$\frac{l_1}{2R_1} < \frac{l_2}{2R_2}. \qquad (*)$$

Упішам у нашы акружнасці правільныя выпуклыя многавугольнікі з вялікім лікам старон n. Калі n вельмі вялікі, то даўжыні нашых акружнасцей будуць вельмі мала адрознівацца ад перыметраў p_1 і p_2 упісаных многавугольнікаў. Таму няроўнасць (*) не парушыцца, калі ў ёй замяніць l_1 на p_1, а l_2 на p_2:

$$\frac{p_1}{2R_1} < \frac{p_2}{2R_2}. \qquad (**)$$

Але, як мы ведаем, перыметры правільных выпуклых n-вугольнікаў адносяцца як радыусы апісаных акружнасцей:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Адсюль $\frac{p_1}{R_1} = \frac{p_2}{R_2}$. А гэта супярэчыць няроўнасці (**). Тэарэма даказана.

Адносіну даўжыні акружнасці да дыяметра прынята абазначаць грэчаскай літарай π (чытаецца «пі»):

$$\frac{l}{2R} = \pi.$$



Архімед — старажытнагрэчаскі вучоны (III ст. да н. э.)

Лік π ірацыянальны. Прыбліжанае значэнне

$$\pi \approx 3{,}1416.$$

Прыбліжанае значэнне ліку π было вядома ўжо старажытным грэкам. Вельмі простае прыбліжанае значэнне π знайшоў Архімед: $\frac{22}{7}$. Яно адрозніваецца ад дакладнага значэння π менш чым на 0,002.

Паколькі $\frac{l}{2R} = \pi$, то даўжыня акружнасці вылічваецца па формуле

$$l = 2\pi R.$$

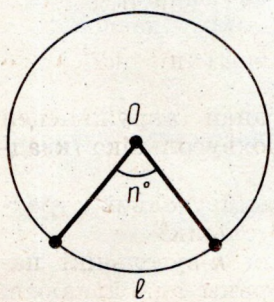
120. РАДЫЯННАЯ МЕРА ВУГЛА

Знойдзем даўжыню дугі акружнасці, якая адпавядае цэнтральнаму вуглу ў $n°$ (рыс. 289). Разгорнутаму вуглу адпавядае даўжыня паўакружнасці πR. Значыць, вуглу ў 1° адпавядае дуга $\frac{\pi R}{180}$, а вуглу ў $n°$ адпавядае дуга даўжынёй

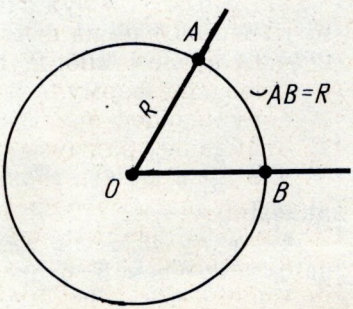
$$l = \frac{\pi R}{180} \cdot n.$$

Радыяннай мерай вугла называецца адносіна даўжыні адпаведнай дугі да радыуса акружнасці. З формулы для даўжыні дугі акружнасці вынікае, што

$$\frac{l}{R} = \frac{\pi}{180} \cdot n,$$



Рыс. 289



Рыс. 290

г. зн. *радыянная мера вугла атрымліваецца з градуснай множаннем на* $\frac{\pi}{180^\circ}$. У прыватнасці, радыянная мера вугла ў 180° роўна π, радыянная мера прамога вугла роўна $\frac{\pi}{2}$.

Адзінкай радыяннай меры вуглоў з'яўляецца *радыян*. Вугал у адзін радыян — гэта вугал, у якога даўжыня дугі роўна радыусу (рыс. 290). Градусная мера вугла ў адзін радыян роўна $\frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ$.



З а д а ч а (50). Знайдзіце радыянную меру вуглоў трохвугольніка, калі $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 45^\circ$.

Р а ш э н н е. Радыянная мера вугла A роўна

$$60^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{3}.$$

Радыянная мера вугла B роўна $45^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{4}$. Па тэарэме аб суме вуглоў трохвугольніка $\angle C = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$.

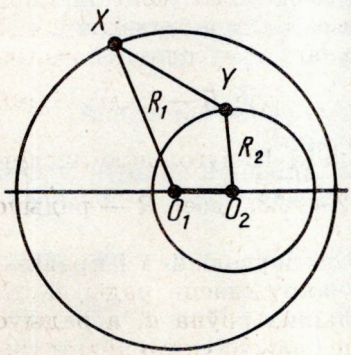
КАНТРОЛЬНЫЯ ПЫТАННІ

1. Што такое ломаная, даўжыня ломанай?
2. Дакажыце, што даўжыня ломанай не меншая за даўжыню адрэзка, які злучае яе канцы.
3. Што такое многавугольнік, выпуклы многавугольнік?
4. Што такое плоскі многавугольнік?
5. Што такое вугал выпуклага многавугольніка пры дадзенай вяршыні?
6. Выведзіце формулу для сумы вуглоў выпуклага многавугольніка.
7. Што такое знешні вугал выпуклага многавугольніка?
8. Дакажыце, што правільны многавугольнік з'яўляецца ўпісаным у акружнасць і апісаным каля акружнасці.
9. Што называецца цэнтрам многавугольніка? цэнтральным вуглом многавугольніка?
10. Выведзіце формулы для радыусаў упісанай і апісанай акружнасцей правільнага n-вугольніка.
11. Знайдзіце радыусы ўпісанай і апісанай акружнасцей для правільнага трохвугольніка, чатырохвугольніка (квадрата), шасцівугольніка.
12. Як пабудаваць правільны выпуклы шасцівугольнік, трохвугольнік, чатырохвугольнік, васьмівугольнік?
13. Дакажыце, што правільныя выпуклыя n-вугольнікі падобныя. У прыватнасці, калі ў іх стораны аднолькавыя, то яны роўныя.

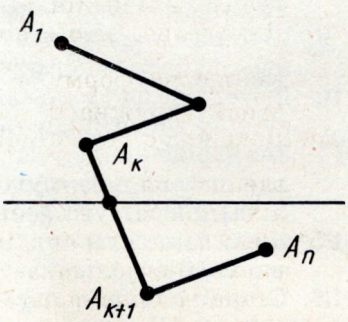
14. Дакажыце, што адносіна даўжыні акружнасці да яе дыяметра не залежыць ад акружнасці, г. зн. адна і тая ж для ўсіх акружнасцей.
15. Па якой формуле вылічваецца даўжыня акружнасці?
16. Па якой формуле вылічваецца даўжыня дугі акружнасці?
17. Што такое радыянная мера вугла?
18. Чаму роўны радыянныя меры вуглоў 180° і 90°?

ЗАДАЧЫ

1. Дадзены дзве акружнасці з радыусамі R_1 і R_2 і адлегласцю паміж цэнтрамі $d > R_1 + R_2$. Чаму роўны найбольшая і найменшая адлегласці паміж пунктамі X і Y гэтых акружнасцей?
2. Рашыце задачу 1 пры ўмове, што $d < R_1 - R_2$ (рыс. 291).
3. Дакажыце, што калі вяршыні ломанай не ляжаць на адной прамой, то даўжыня ломанай большая за даўжыню адрэзка, які злучае яе канцы.
4. Дакажыце, што ў замкнутай ломанай адлегласць паміж любымі дзвюма вяршынямі не большая за палавіну даўжыні ломанай.
5. Дакажыце, што ў замкнутай ломанай даўжыня кожнага звяна не большая за суму даўжынь астатніх звёнаў.
6. Ці можа замкнутая ломаная мець звёны даўжынёй 1 м, 2 м, 3 м, 4 м, 11 м? Растлумачце адказ.
7. Дакажыце, што калі канцы ломанай ляжаць па розныя бакі ад дадзенай прамой, то яна перасякае гэту прамую (рыс. 292).
8. Колькі дыяганалей у n-вугольніка?
9. Чаму роўна сума знешніх вуглоў выпуклага n-вугольніка, узятых па аднаму пры кожнай вяршыні?



Рыс. 291



Рыс. 292

10. Вуглы выпуклага чатырохвугольніка прапарцыянальныя лікам 1, 2, 3, 4. Знайдзіце іх.

11. Дакажыце, што ў чатырохвугольніка, апісанага каля акружнасці, сумы даўжынь процілеглых старон роўныя.

12. Колькі старон мае правільны многавугольнік, кожны з унутраных вуглоў якога роўны: 1) 135°; 2) 150°?

13. Колькі старон мае правільны многавугольнік, калі кожны са знешніх яго вуглоў роўны: 1) 36°; 2) 24°?

14. Дакажыце, што ўзятыя праз адну вяршыні правільнага $2n$-вугольніка з'яўляюцца вяршынямі правільнага n-вугольніка.

15. Дакажыце, што сярэдзіны старон правільнага n-вугольніка з'яўляюцца вяршынямі другога правільнага n-вугольніка.

16. Знайдзіце выразы для стараны a_n правільнага n-вугольніка праз радыус R апісанай каля яго акружнасці і радыус r упісанай акружнасці. Вылічыце a_n пры $n = 3, 4, 6$.

17. Хорда, якая перпендыкулярная радыусу і праходзіць праз яго сярэдзіну, роўна старане правільнага ўпісанага трохвугольніка. Дакажыце.

18. У правільнага трохвугольніка радыус упісанай акружнасці ў два разы меншы за радыус апісанай акружнасці. Дакажыце.

19. Старана правільнага ўпісанага ў акружнасць трохвугольніка роўна a. Знайдзіце старану квадрата, упісанага ў гэту акружнасць.

20. У акружнасць, радыус якой 4 дм, упісаны правільны трохвугольнік, на старане якога пабудаваны квадрат. Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля квадрата.

21. Канец валіка дыяметрам у 4 см апілаваны пад квадрат. Вызначце найбольшы размер, які можа мець старана квадрата.

22. Канец шрубы газавай засаўкі мае правільную трохгранную форму. Які найбольшы размер можа мець кожная грань, калі цыліндрычная частка трубы мае дыяметр 2 см?

23. Дакажыце, што старана правільнага 8-вугольніка вылічваецца па формуле $a_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$, дзе R — радыус апісанай акружнасці.

24. Дакажыце, што старана правільнага 12-вугольніка вылічваецца па формуле $a_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$, дзе R — радыус апісанай акружнасці.

25*. Знайдзіце стораны правільнага пяцівугольніка і правільнага 10-вугольніка, упісаных у акружнасць радыуса R.

26. Старана правільнага многавугольніка роўна a, а радыус апісанай акружнасці R. Знайдзіце радыус упісанай акружнасці.

27. Старана правільнага многавугольніка роўна a, а радыус упісанай акружнасці r. Знайдзіце радыус апісанай акружнасці.

28. Выразіце старану b правільнага апісанага многавугольніка праз радыус R акружнасці і старану a правільнага ўпісанага многавугольніка з тым жа лікам старон.

29. Выразіце старану a правільнага ўпісанага многавугольніка праз радыус R акружнасці і старану b правільнага апісанага многавугольніка з тым жа лікам старон.

30. Упішыце ў акружнасць правільны 12-вугольнік.

31. Апішыце каля акружнасці правільны трохвугольнік, квадрат, правільны васьмівугольнік.

32. Радыусы ўпісанай і апісанай акружнасцей аднаго правільнага n-вугольніка роўны r_1 і R_1, а радыус упісанай акружнасці другога правільнага n-вугольніка роўны r_2. Чаму роўны радыус апісанай акружнасці другога n-вугольніка?

33. Перыметры двух правільных n-вугольнікаў адносяцца як $a:b$. Як адносяцца радыусы іх упісаных і апісаных акружнасцей?

34. Вылічыце даўжыню акружнасці, калі радыус роўны: 1) 10 м; 2) 15 м.

35. На колькі зменіцца даўжыня акружнасці, калі радыус зменіцца на 1 мм?

36. Знайдзіце адносіну перыметра правільнага ўпісанага 8-вугольніка да дыяметра і параўнайце яе з прыбліжаным значэннем π.

37. Рашыце задачу 36 для правільнага 12-вугольніка.

38. Знайдзіце радыус зямнога шара, зыходзячы з таго, што 1 м складае адну 40-мільённую долю даўжыні экватара.

39. На колькі падоўжыўся б зямны экватар, калі б радыус зямнога шара павялічыўся на 1 см?

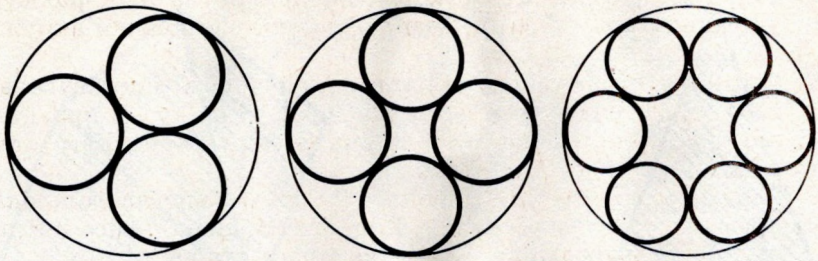
40. Унутры акружнасці радыуса R размешчаны n роўных акружнасцей, якія датыкаюцца адна да адной і да дадзенай акружнасці. Знайдзіце радыус гэтых акружнасцей, калі лік іх роўны: 1) 3; 2) 4; 3) 6 (рыс. 293).

41. Рашыце папярэднюю задачу, калі акружнасці размешчаны па-за дадзенай акружнасцю.

42. Шкіў мае ў дыяметры 1,4 м і робіць 80 абаротаў у мінуту. Знайдзіце скорасць пункта на акружнасці шківа.

43. Знайдзіце дадатковыя плоскія вуглы, ведаючы, што: 1) адзін з іх у 5 разоў большы за другі; 2) адзін з іх на 100° большы за другі; 3) рознасць іх роўна 20°.

44. Колькі градусаў змяшчае цэнтральны вугал, калі адпа-



Рыс. 293

ведная яму дуга складае: 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{1}{5}$; 4) $\frac{1}{6}$; 5) $\frac{2}{3}$; 6) $\frac{3}{4}$ акружнасці?

45. Які вугал утвараюць радыусы Зямлі, праведзеныя ў два пункты на яе паверхні, адлегласць паміж якімі роўна 1 км? Радыус Зямлі 6370 км.

46. Па радыусу $R = 1$ м знайдзіце даўжыню дугі, якая адпавядае цэнтральнаму вуглу: 1) 45°; 2) 30°; 3) 120°; 4) 45°45′; 5) 60°30′; 6) 150°36′.

47. Па дадзенай хордзе a знайдзіце даўжыню яе дугі, калі градусная мера дугі роўна: 1) 60°; 2) 90°; 3) 120°.

48. Па дадзенай даўжыні дугі l знайдзіце яе хорду, калі дуга змяшчае: 1) 60°; 2) 90°; 3) 120°.

49. Знайдзіце радыянную меру вуглоў: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°.

50. Знайдзіце радыянную меру вуглоў трохвугольніка ABC, калі $\angle A = 60°$, $\angle B = 45°$.

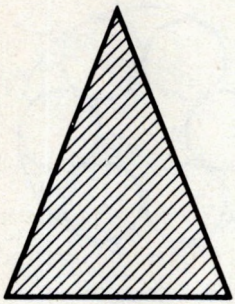
51. Ці могуць убачыць адзін аднаго касманаўты, якія ляцяць над паверхняй Зямлі на вышыні 230 км, калі адлегласць паміж імі па прамой роўна 2200 км? Радыус Зямлі роўны 6370 км.

§ 14. ПЛОШЧЫ ФІГУР

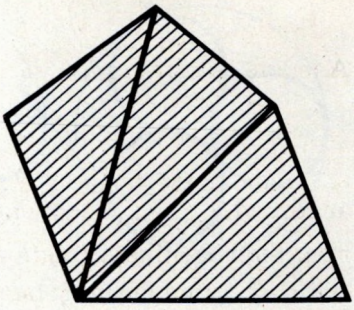
121. ПАНЯЦЦЕ ПЛОШЧЫ

Геаметрычную фігуру будзем называць *простай*, калі яе можна разбіць на канечны лік плоскіх трохвугольнікаў. Напомнім, што плоскім трохвугольнікам мы называем канечную частку плоскасці, абмежаваную трохвугольнікам (рыс. 294).

Прыкладам простай фігуры з'яўляецца выпуклы плоскі многавугольнік. Ён разбіваецца на плоскія трохвугольнікі



Рыс. 294



Рыс. 295

дыяганалямі, праведзенымі з якой-небудзь яго вяршыні (рыс. 295). У гэтым параграфе мы разглядаем толькі плоскія многавугольнікі і таму паўтараць кожны раз слова «плоскі» не будзем.

Дадзім азначэнне плошчы для простых фігур.

Для простых фігур *плошча — гэта дадатная велічыня, лікавае значэнне якой мае наступныя ўласцівасці:*

1) *Роўныя фігуры маюць роўныя плошчы.*

2) *Калі фігура разбіваецца на часткі, якія з'яўляюцца простымі фігурамі, то плошча гэтай фігуры роўна суме плошчаў яе частак.*

3) *Плошча квадрата са стараной, роўнай адзінцы вымярэння, роўна адзінцы.*

Калі квадрат, аб якім ідзе гаворка ў азначэнні, мае старану 1 м, то плошча будзе ў квадратных метрах ($м^2$). Калі старана квадрата 100 км, то плошча будзе ў гектарах. Калі старана квадрата 1 км, то плошча будзе ў квадратных кіламетрах і да т. п.

122. ПЛОШЧА ПРАМАВУГОЛЬНІКА

Знойдзем плошчу прамавугольніка са старанамі a, b. Для гэтага спачатку дакажам, што плошчы двух прамавугольнікаў з роўнымі асновамі адносяцца як іх вышыні.

Няхай $ABCD$ і AB_1C_1D — два прамавугольнікі з агульнай асновай AD (рыс. 296, *а*). Няхай S і S_1 — іх плошчы. Дакажам, што $\frac{S}{S_1} = \frac{AB}{AB_1}$. Разаб'ём старану AB прамавугольніка на вялікі лік n роўных частак, кожная з іх роўна $\frac{AB}{n}$. Няхай m — лік пунктаў дзялення, якія ляжаць на старане AB_1. Тады

$$\left(\frac{AB}{n}\right) m \leqslant AB_1 \leqslant \left(\frac{AB}{n}\right) (m+1).$$

Адсюль, падзяліўшы на AB, атрымаем:

$$\frac{m}{n} \leqslant \frac{AB_1}{AB} \leqslant \frac{m}{n} + \frac{1}{n}. \qquad (*)$$

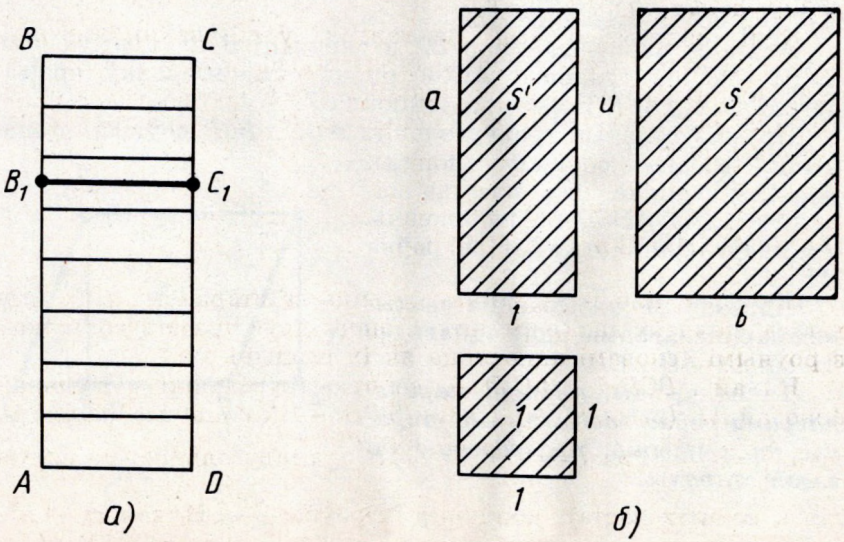
Правядзём праз пункты дзялення прамыя, паралельныя аснове AD. Яны разаб'юць прамавугольнік $ABCD$ на n роўных прамавугольнікаў. Кожны з іх мае плошчу $\frac{S}{n}$. Прамавугольнік AB_1C_1D змяшчае першыя m прамавугольнікаў, лічачы знізу, і змяшчаецца ў $m+1$ прамавугольніках. Таму

$$\left(\frac{S}{n}\right) m \leqslant S_1 \leqslant \left(\frac{S}{n}\right) (m+1).$$

Адсюль

$$\frac{m}{n} \leqslant \frac{S_1}{S} \leqslant \frac{m}{n} + \frac{1}{n}. \qquad (**)$$

З няроўнасцей (*) і (**) мы бачым, што абодва лікі $\frac{AB_1}{AB}$ і $\frac{S_1}{S}$ знаходзяцца паміж $\frac{m}{n}$ і $\frac{m}{n} + \frac{1}{n}$. Таму яны адрозніваюцца не больш чым на $\frac{1}{n}$. А паколькі n можна ўзяць як мага вя-



Рыс. 296

лікім, то гэта можа быць толькі пры

$$\frac{S_1}{S} = \frac{AB_1}{AB},$$

што і трэба было даказаць.

Возьмем цяпер квадрат, які з'яўляецца адзінкай плошчы, прамавугольнік са старанамі 1, a і прамавугольнік са старанамі a, b (рыс. 296, *б*). Параўноўваючы іх плошчы, па даказанаму будзем мець:

$$\frac{S'}{1} = \frac{a}{1} \text{ і } \frac{S}{S'} = \frac{b}{1}.$$

Перамнажаючы гэтыя роўнасці пачленна, атрымаем:

$$S = ab.$$

Такім чынам, ***плошча прамавугольніка са старанамі a, b вылічваецца па формуле $S = ab$.***

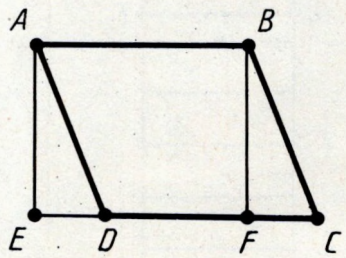
123. ПЛОШЧА ПАРАЛЕЛАГРАМА

Няхай $ABCD$ — дадзены паралелаграм. Калі ён не з'яўляецца прамавугольнікам, то адзін з яго вуглоў — A ці B — востры. Няхай для пэўнасці вугал A вострый, як паказана на рысунку 297.

Апусцім перпендыкуляр AE з вяршыні A на прамую CD. Плошча трапецыі $ABCE$ роўна суме плошчаў паралелаграма $ABCD$ і трохвугольніка ADE.

Апусцім перпендыкуляр BF з вяршыні B на прамую CD. Тады плошча трапецыі $ABCE$ роўна суме плошчаў прамавугольніка $ABFE$ і трохвугольніка BCF.

Прамавугольныя трохвугольнікі ADE і BCF роўныя, а значыць, маюць роўныя плошчы. Адсюль вынікае, што плошча паралелаграма $ABCD$ роўна плошчы прамавугольніка $ABFE$, г. зн. роўна $AB \cdot BF$.

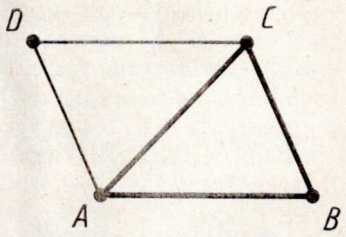


Рыс. 297

Адрэзак BF называецца *вышынёй* паралелаграма, якая адпавядае старанам AB і CD.

Такім чынам, ***плошча паралелаграма роўна здабытку яго старан на вышыню, праведзеную да гэтай стараны.***

124. ПЛОШЧА ТРОХВУГОЛЬНІКА



Рыс. 298

Няхай ABC — дадзены трохвугольнік (рыс. 298). Дапоўнім гэты трохвугольнік да паралелаграма $ABCD$, як паказана на рысунку. Плошча паралелаграма роўна суме плошчаў трохвугольнікаў ABC і CDA. Паколькі гэтыя трохвугольнікі роўныя, то плошча паралелаграма роўна падвоенай плошчы трохвугольніка ABC. Вышыня паралелаграма, якая адпавядае старане AB, роўна вышыні трохвугольніка ABC, праведзенай да стараны AB.

Адсюль вынікае, што ***плошча трохвугольніка роўна палавіне здабытку яго стараны на вышыню, праведзеную да гэтай стараны:***

$$S = \frac{1}{2}ah.$$

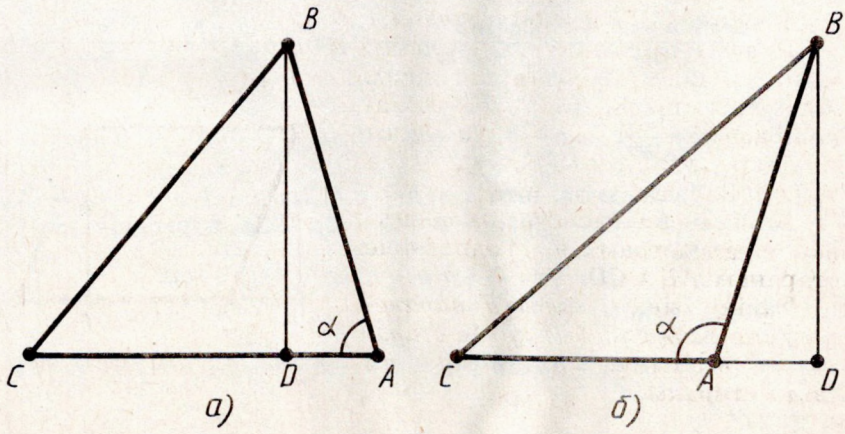
Дакажам цяпер, што ***плошча трохвугольніка роўна палавіне здабытку дзвюх любых яго старон на сінус вугла паміж імі.***

Няхай ABC дадзены трохвугольнік (рыс. 299). Дакажам, што

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A.$$

Правядзём у трохвугольніку ABC вышыню BD. Маем:

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot BD.$$



Рыс. 299

З прамавугольнага трохвугольніка ABD $BD = AB \cdot \sin\alpha$, калі вугал α востры (рыс. 299, *а*), $BD = AB \sin(180° - \alpha)$, калі вугал α тупы (рыс. 299, *б*). Паколькі $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, то ў любым выпадку $BD = AB \cdot \sin\alpha$. Значыць, плошча трохвугольніка $S = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin A$, што і трэба было даказаць.

125. ФОРМУЛА ГЕРОНА ДЛЯ ПЛОШЧЫ ТРОХВУГОЛЬНІКА



З а д а ч а (29). Выведзіце формулу Герона[1] для плошчы трохвугольніка:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

дзе a, b, c — даўжыні старон трохвугольніка, а $p = \frac{a+b+c}{2}$ — паўперыметр.

Р а ш э н н е. Маем:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin\gamma,$$

дзе γ — вугал трохвугольніка, процілеглы старане c. Па тэарэме косінусаў

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Адсюль

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Значыць,

$$\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma = (1 - \cos\gamma)(1 + \cos\gamma) =$$

$$= \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2ab} \cdot \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{c^2 - (a-b)^2}{2ab} \cdot \frac{(a+b)^2 - c^2}{2ab} =$$

$$= \frac{1}{4a^2b^2}(c - a + b)\ (c + a - b)(a + b - c)(a + b + c).$$

Заўважаючы, што $a + b + c = 2p$, $a + b - c = 2p - 2c$, $a + c - b = 2p - 2b$, $c - a + b = 2p - 2a$, атрымліваем:

$$\sin\gamma = \frac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Такім чынам,

$$S = \frac{1}{2} ab \sin\gamma = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

---

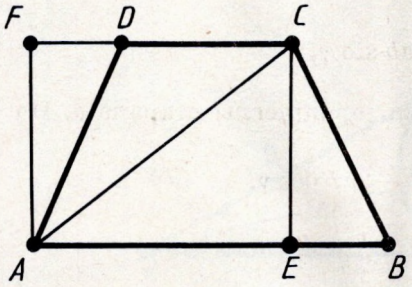
[1] Герон Александрыйскі — старажытнагрэчаскі вучоны, які жыў у I ст. н. э.

126. ПЛОШЧА ТРАПЕЦЫІ

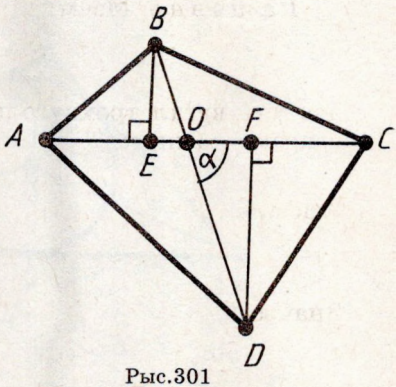
Няхай $ABCD$ — дадзеная трапецыя (рыс. 300). Дыяганаль трапецыі AC разбівае яе на два трохвугольнікі: ABC і CDA. Значыць, плошча трапецыі роўна суме плошчаў гэтых трохвугольнікаў. Плошча трохвугольніка ABC роўна $\frac{1}{2}AB \cdot CE$, плошча трохвугольніка ACD роўна $\frac{1}{2}CD \cdot AF$. Вышыні CE і AF гэтых трохвугольнікаў роўны адлегласці паміж паралельнымі прамымі AB і CD. Гэта адлегласць называецца *вышынёй* трапецыі.

Значыць, ***плошча трапецыі роўна здабытку паўсумы яе асноў на вышыню:***

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$



Рыс. 300



Рыс.301

Задача (40). Дакажыце, што калі дыяганалі чатырохвугольніка перасякаюцца, то плошча чатырохвугольніка роўна палавіне здабытку дыяганалей на сінус вугла паміж імі.

Рашэнне. Плошча S чатырохвугольніка роўна суме плошчаў трохвугольнікаў ABC і ADC (рыс. 301):

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot BE + \frac{1}{2}AC \cdot DF =$$

$$= \frac{1}{2}AC \cdot BO \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2}AC \cdot DO \cdot \sin\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}AC \sin\alpha(BO + OD) = \frac{1}{2}AC \cdot BD \sin\alpha,$$

што і трэба было даказаць.

127. ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАДЫУСАЎ УПІСАНАЙ І АПІСАНАЙ АКРУЖНАСЦЕЙ ТРОХВУГОЛЬНІКА

З а д а ч а (42). Выведзіце наступныя формулы для радыусаў апісанай (R) і ўпісанай (r) акружнасцей трохвугольніка:

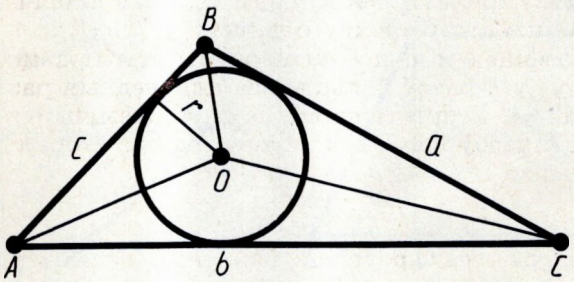
$$R = \frac{abc}{4S},\quad r = \frac{2S}{a+b+c},$$

дзе a, b, c — стораны трохвугольніка, а S — яго плошча.

Р а ш э н н е. Пачнём з формулы для R. Як мы ведаем, $R = \frac{a}{2\sin\alpha}$, дзе α — вугал, процілеглы старане a трохвугольніка.

Памнажаючы лічнік і назоўнік правай часткі на bc і заўважаючы, што $\frac{1}{2}bc\sin\alpha = S$, атрымаем:

$$R = \frac{abc}{4S}.$$



Рыс. 302

Выведзем формулу для r (рыс. 302). Плошча трохвугольніка ABC роўна суме плошчаў трохвугольнікаў OAB, OBC і OCA:

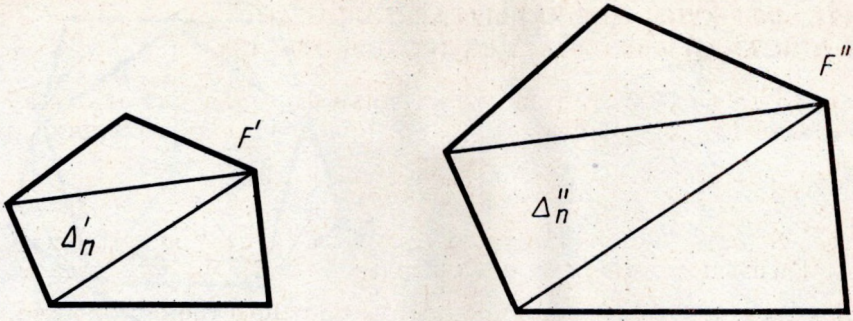
$$S = \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br.$$

Адсюль

$$r = \frac{2S}{a+b+c}.$$

128. ПЛОШЧЫ ПАДОБНЫХ ФІГУР

Няхай F' і F'' — дзве падобныя простыя фігуры. Высветлім, як адносяцца плошчы гэтых фігур. Паколькі фігуры падобныя, то існуе пераўтварэнне падобнасці, пры якім фігура F' пераходзіць у фігуру F''.



Рыс. 303

Разаб'ём фігуру F' на трохвугольнікі $\triangle'_1$, $\triangle'_2$, $\triangle'_3$, ... (рыс. 303). Пераўтварэнне падобнасці, якое пераводзіць фігуру F' у F'', пераводзіць гэтыя трохвугольнікі ў трохвугольнікі $\triangle''_1$, $\triangle''_2$, $\triangle''_3$, ... разбіўкі фігуры F''. Плошча фігуры F' роўна суме плошчаў трохвугольнікаў $\triangle'_1$, $\triangle'_2$, ..., а плошча фігуры F'' роўна суме плошчаў трохвугольнікаў $\triangle''_1$, $\triangle''_2$, ...

Калі каэфіцыент падобнасці роўны k, то размеры трохвугольніка $\triangle''_n$ у k разоў большыя за адпаведныя размеры трохвугольніка $\triangle'_n$. У прыватнасці, стораны і вышыні трохвугольніка $\triangle''_n$ у k разоў большыя за адпаведныя стораны і вышыні трохвугольніка $\triangle'_n$. Адсюль вынікае, што

$$S(\triangle''_n) = k^2 S(\triangle'_n).$$

Складаючы гэтыя роўнасці пачленна, атрымаем:

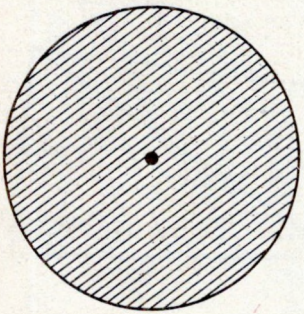
$$S(F'') = k^2 S(F').$$

Каэфіцыент падобнасці k роўны адносіне адпаведных лінейных размераў фігур F'' і F'. Таму *плошчы падобных фігур адносяцца як квадраты іх адпаведных лінейных размераў.*

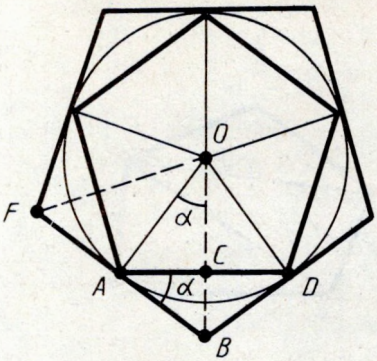
129. ПЛОШЧА КРУГА

Калі фігура простая, г. зн. дапускае разбіўку на канечны лік трохвугольнікаў, то яе плошча роўна суме плошчаў гэтых трохвугольнікаў. Для адвольнай фігуры плошча вызначаецца наступным чынам.

Дадзеная фігура мае плошчу S, калі існуюць простыя фігуры, якія змяшчаюць яе, і простыя фігуры, што змяшчаюцца ў ёй, з плошчамі, неабмежавана мала адрознымі ад S. Прыменім гэта азначэнне для знаходжання плошчы круга.



Рыс. 304



Рыс. 305

Кругам называецца фігура, якая складаецца з усіх пунктаў плоскасці, адлегласць ад якіх да дадзенага пункта не большая за дадзеную. Гэты пункт называецца *цэнтрам круга*, а дадзеная адлегласць — *радыусам круга*. Мяжой круга з'яўляецца акружнасць з тымі ж цэнтрам і радыусам (рыс. 304).

Плошча круга роўна палавіне здабытку даўжыні акружнасці, якая яго абмяжоўвае, на радыус.

Дакажам гэта. Пабудуем два правільныя n-вугольнікі: P_1 — упісаны ў круг і P_2 — апісаны каля круга (рыс. 305). Многавугольнікі P_1 і P_2 з'яўляюцца простымі фігурамі. Многавугольнік P_2 змяшчае круг, а многавугольнік P_1 змяшчаецца ў крузе.

Радыусы, праведзеныя ў вяршыні многавугольніка P_1, разбіваюць яго на n трохвугольнікаў, роўных трохвугольніку AOD. Таму

$$S_{P_1} = nS_{AOD}.$$

Паколькі $S_{AOD} = AC \cdot OC = AC \cdot AO \cos\alpha$, то

$$S_{P_1} = (nAC)AO \cos\alpha = \frac{pR}{2}\cos\alpha,$$

дзе p — перыметр многавугольніка P_1, R — радыус круга. Аналагічна знаходзім плошчу многавугольніка P_2:

$$S_{P_2} = nS_{BOF},$$

$$S_{BOF} = AB \cdot AO = \frac{AC}{\cos\alpha} \cdot AO,$$

$$S_{P_2} = \frac{(nAC)AO}{\cos\alpha} = \frac{pR}{2\cos\alpha}.$$

Такім чынам, многавугольнік P_1, які змяшчаецца ў крузе, мае плошчу

$$S_{P_1} = \frac{pR}{2}\cos\alpha,$$

а многавугольнік P_2, які змяшчае круг, мае плошчу

$$S_{P_2} = \frac{pR}{2\cos\alpha}.$$

Паколькі пры дастаткова вялікім n перыметр p адрозніваецца неабмежавана мала ад даўжыні l акружнсці, а $\cos\alpha$ неабмежавана мала адрозніваецца ад адзінкі, то плошчы многавугольнікаў P_1 і P_2 неабмежавана мала адрозніваюцца ад $\frac{lR}{2}$. Згодна з азначэннем гэта значыць, што плошча круга

$$S = \frac{lR}{2} = \pi R^2,$$

што і трэба было даказаць.

Кругавым сектарам называецца частка круга, якая ляжыць унутры адпаведнага цэнтральнага вугла (рыс. 306).

Плошча кругавога сектара вылічваецца па формуле

$$S = \frac{\pi R^2}{360}\alpha,$$

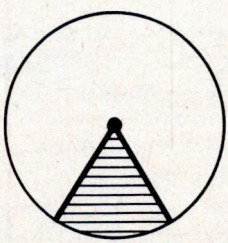
дзе R — радыус круга, а α — градусная мера адпаведнага цэнтральнага вугла.

Кругавым сегментам называецца агульная частка круга і паўплоскасці (рыс. 307).

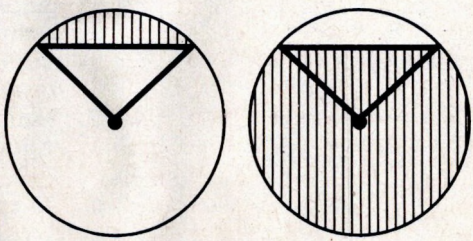
Плошча сегмента, не роўнага паўкругу, вылічваецца па формуле

$$S = \frac{\pi R^2}{360}\alpha \pm S_{\triangle},$$

дзе α — градусная мера цэнтральнага вугла, які змяшчае дугу гэтага кругавога сегмента, а $S_{\triangle}$ — плошча трохвугольніка з вяршынямі ў цэнтры круга і канцах радыусаў, што абмяжоўваюць адпаведны сектар. Знак «$-$» трэба браць, калі $\alpha < 180°$, а знак «$+$» трэба браць, калі $\alpha > 180°$.



Рыс. 306



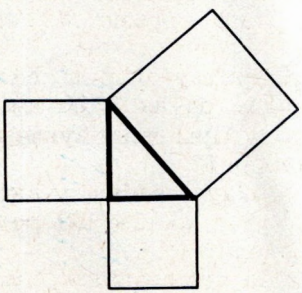
Рыс. 307

КАНТРОЛЬНЫЯ ПЫТАННІ

1. Сфармулюйце ўласцівасці плошчы для простых фігур.
2. Дакажыце, што плошча прамавугольніка роўна здабытку яго старон.
3. Дакажыце, што плошча паралелаграма роўна здабытку яго стараны на вышыню, праведзеную да гэтай стараны.
4. Дакажыце, што плошча трохвугольніка роўна палавіне здабытку яго стараны на вышыню, праведзеную да гэтай стараны.
5. Дакажыце, што плошча трохвугольніка роўна палавіне здабытку дзвюх любых яго старон на сінус вугла паміж імі.
6. Дакажыце, што плошча трапецыі роўна здабытку паўсумы асноў на вышыню.
7. Як адносяцца плошчы падобных фігур?
8. Выведзіце формулу плошчы круга.
9. Па якіх формулах вылічваюцца плошчы кругавога сектара і кругавога сегмента?

ЗАДАЧЫ

1. Дакажыце, што сума плошчаў квадратаў, пабудаваных на катэтах прамавугольнага трохвугольніка, роўна плошчы квадрата, пабудаванага на гіпатэнузе (рыс. 308).
2. Стораны двух участкаў зямлі квадратнай формы роўны 100 м і 150 м. Знайдзіце старану квадратнага ўчастка, роўнавялікага ім.
3. Знайдзіце плошчу квадрата S па яго дыяганалі a.
4. У колькі разоў плошча квадрата, апісанага каля акружнасці, большая за плошчу квадрата, упісанага ў тую ж акружнасць?



Рыс. 308

5. Як зменіцца плошча квадрата, калі кожную яго старану павялічыць у 3 разы?
6. У колькі разоў трэба паменшыць стораны квадрата, каб яго плошча паменшылася ў 25 разоў?
7. Чаму роўны стораны прамавугольніка, калі яны адносяцца як 4 : 9, а яго плошча 144 м^2?
8. Чаму роўны стораны прамавугольніка, калі яго перыметр 74 дм, а плошча 3 м^2?
9. Паралелаграм і прамавугольнік

маюць аднолькавыя стораны. Знайдзіце востры вугал паралелаграма, калі плошча яго роўна палавіне плошчы прамавугольніка.

10. Квадрат і ромб маюць аднолькавыя перыметры. Якая з фігур мае большую плошчу? Растлумачце адказ.

11. Знайдзіце плошчу ромба, калі яго вышыня 10 см, а вострый вугал 30°.

12. Знайдзіце плошчу ромба, калі яго вышыня 12 см, а меншая дыяганаль 13 см.

13. Дакажыце, што плошча ромба роўна палавіне здабытку дыяганалей.

14. Знайдзіце стораны ромба, ведаючы, што яго дыяганалі адносяцца як 1 : 2, а плошча ромба роўна 12 см^2.

15. Падзяліце дадзены трохвугольнік на тры роўнавялікія часткі прамымі, якія праходзяць праз адну вяршыню.

16*. Рашыце папярэднюю задачу, узяўшы замест трохвугольніка паралелаграм.

17. Чаму роўна плошча раўнабедранага трохвугольніка, калі яго аснова 120 м, а бакавая старана 100 м?

18. Знайдзіце плошчу раўнабедранага прамавугольнага трохвугольніка з гіпатэнузай a.

19. У трохвугольніку са старанамі 8 см і 4 см праведзены вышыні да гэтых старон. Вышыня, праведзеная да стараны 8 см, роўна 3 см. Чаму роўна вышыня, праведзеная да стараны 4 см?

20. Дакажыце, што стораны трохвугольніка адваротна прапарцыянальныя яго вышыням, г. зн.

$$a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}.$$

21. Знайдзіце плошчу роўнастаронняга трохвугольніка са стараной a.

22. Знайдзіце плошчу правільнага трохвугольніка, упісанага ў круг радыуса R.

23. Знайдзіце плошчу прамавугольнага трохвугольніка, калі яго вышыня дзеліць гіпатэнузу на адрэзкі 32 см і 18 см.

24. Чаму роўны катэты прамавугольнага трохвугольніка, калі яго гіпатэнуза роўна 73 см, а плошча роўна 1320 см^2?

25. У трохвугольніку ABC $AC = a$, $BC = b$. Пры якім вугле C плошча трохвугольніка будзе найбольшай?

26. Знайдзіце плошчу раўнабедранага трохвугольніка, у якога бакавыя стораны роўны 1 м, а вугал паміж імі роўны 70°.

27. Знайдзіце плошчу паралелаграма, калі яго стораны 2 м і 3 м, а адзін з вуглоў роўны 70°.

28*. Знайдзіце плошчу трохвугольніка па старане a і прылеглых да яе вуглах α і β.

29. Выведзіце формулу Герона для плошчы трохвугольніка: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, дзе a, b, c — даўжыні старон трохвугольніка, а p — паўперыметр.

30. Знайдзіце плошчу трохвугольніка па трох старанах: 1) 13, 14, 15; 2) 5, 5, 6; 3) 17, 65, 80; 4) $\frac{25}{6}$, $\frac{29}{6}$, 6; 5) 13, $37\frac{12}{13}$, $47\frac{1}{13}$; 6) $2\frac{1}{12}$, $3\frac{44}{75}$, 1,83.

31. Стораны трохвугольніка a, b, c. Знайдзіце вышыню трохвугольніка, апушчаную на старану c.

32. Бакавыя стораны трохвугольніка 30 см і 25 см. Знайдзіце вышыню трохвугольніка, апушчаную на аснову, роўную: 1) 25 см; 2) 11 см.

33. Перыметр раўнабедранага трохвугольніка 64 см, а яго бакавая старана на 11 см большая за аснову. Знайдзіце вышыню трохвугольніка, апушчаную на бакавую старану.

34. Знайдзіце вышыні трохвугольніка, у якога стораны роўны 13 см, 14 см і 15 см.

35. Знайдзіце вышыню трохвугольніка са старанамі $2\frac{1}{12}$, $3\frac{44}{75}$, 1,83, праведзеную да стараны $2\frac{1}{12}$.

36. Знайдзіце найменшую вышыню трохвугольніка са старанамі: 1) 5, 5, 6; 2) 17, 65, 80 і найбольшую вышыню трохвугольніка са старанамі: 3) $\frac{25}{6}$, $\frac{29}{6}$, 6; 4) 13, $37\frac{12}{13}$, $47\frac{1}{13}$.

37. Знайдзіце плошчу трапецыі, у якой паралельныя стораны 60 см і 20 см, а непаралельныя — 13 см і 37 см.

38. У раўнабокай трапецыі асновы роўны 10 см і 24 см, бакавая старана 25 см. Знайдзіце плошчу трапецыі.

39. У раўнабокай трапецыі большая аснова роўна 44 м, бакавая старана 17 м і дыяганаль 39 м. Знайдзіце плошчу трапецыі.

40. Дакажыце, што калі дыяганалі чатырохвугольніка перасякаюцца, то плошча чатырохвугольніка роўна палавіне здабытку яго дыяганалей на сінус вугла паміж імі.

41*. Дакажыце, што сярод усіх паралелаграмаў з дадзенымі дыяганалямі найбольшую плошчу мае ромб.

42. Выведзіце наступныя формулы для радыусаў апісанай (R) і ўпісанай (r) акружнасцей трохвугольніка:

$$R=\frac{abc}{4S},\quad r=\frac{2S}{a+b+c},$$

дзе a, b, c — стораны трохвугольніка, а S — яго плошча.

43. Знайдзіце радыусы апісанай (R) і ўпісанай (r) акружнасцей для трохвугольніка са старанамі: 1) 13, 14, 15; 2) 15, 13, 4; 3) 35, 29, 8; 4) 4, 5, 7.

44. Бакавая старана раўнабедранага трохвугольніка 6 см, вышыня, праведзеная да асновы, 4 см. Знайдзіце радыус апісанай акружнасці.

45. Знайдзіце радыус акружнасцей, апісанай каля раўнабедранага трохвугольніка з асновай a і бакавой стараной b і ўпісанай у яго.

46. Знайдзіце радыус r упісанай і радыус R апісанай акружнасцей для раўнабедранага трохвугольніка з асновай 10 см і бакавой стараной 13 см.

47. Дакажыце, што ў прамавугольным трохвугольніку радыус упісанай акружнасці роўны палавіне рознасці паміж сумай катэтаў і гіпатэнузай.

48. Катэты прамавугольнага трохвугольніка роўны 40 см і 42 см. Знайдзіце радыусы апісанай і ўпісанай акружнасцей.

49. Дакажыце, што плошча многавугольніка, апісанага каля акружнасці, роўна палавіне здабытку перыметра многавугольніка на радыус акружнасці.

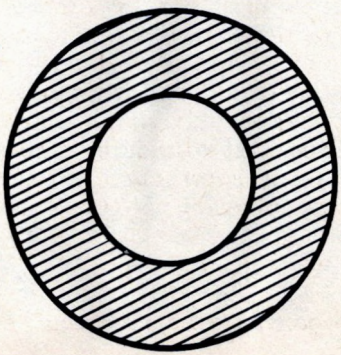
50. Праз сярэдзіну вышыні трохвугольніка праведзена перпендыкулярная да яе прамая. У якой адносіне яна дзеліць плошчу трохвугольніка?

51. Прамая, перпендыкулярная вышыні трохвугольніка, дзеліць яго плошчу папалам. Знайдзіце адлегласць ад гэтай прамой да вяршыні трохвугольніка, з якой праведзена вышыня, калі яна роўна h.

52. Перыметры правільных n-вугольнікаў адносяцца як $a : b$. Як адносяцца іх плошчы?

53. Знайдзіце плошчу круга, калі даўжыня акружнасці l.

54. Знайдзіце плошчу кругавога кольца (рыс. 309), якое знаходзіцца паміж дзвюма акружнасцямі з адным і тым жа цэнтрам і радыусамі: 1) 4 см і 6 см; 2) 5,5 м і 6,5 м; 3) a і b ($a > b$).



Рыс. 309

55. У колькі разоў павялічыцца плошча круга, калі яго дыяметр павялічыць: 1) у 2 разы; 2) у 5 разоў; 3) у m разоў?

56. Знайдзіце адносіну плошчы круга да плошчы ўпісанага ў яго: 1) квадрата; 2) правільнага трохвугольніка; 3) правільнага шасцівугольніка.

57. Знайдзіце адносіну плошчы круга, упісанага ў правільны трохвугольнік, да плошчы круга, апісанага каля яго.

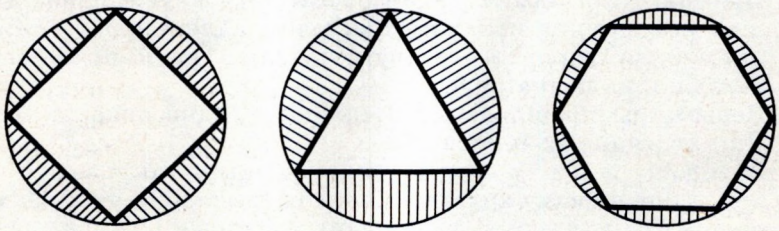
58. Знайдзіце адносіну плошчы круга, апісанага каля квадрата, да плошчы круга, упісанага ў яго.

59. Знайдзіце плошчу сектара круга радыуса R, калі адпаведны гэтаму сектару цэнтральны вугал роўны: 1) 40°; 2) 90°; 3) 150°; 4) 240°; 5) 300°; 6) 330°.

60. Дадзена акружнасць радыуса R. Знайдзіце плошчу сектара, які адпавядае дузе з даўжынёй, роўнай: 1) R; 2) l.

61*. Знайдзіце плошчу кругавога сегмента з асновай $a\sqrt{3}$ і вышынёй $\frac{a}{2}$.

62. Знайдзіце плошчу той часткі круга, якая размешчана па-за ўпісаным у яго: 1) квадратам; 2) правільным трохвугольнікам; 3) правільным шасцівугольнікам. Радыус круга R (рыс. 310).



Рыс. 310

10 клас

СТЭРЭАМЕТРЫЯ

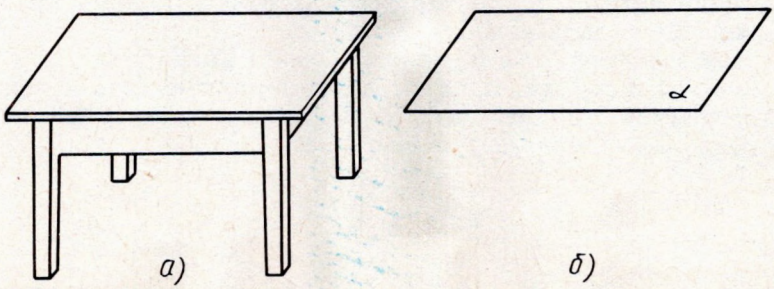
§ 15. АКСІЁМЫ СТЭРЭАМЕТРЫІ І ІХ НАЙПРАСЦЕЙШЫЯ ВЫНІКІ

130. АКСІЁМЫ СТЭРЭАМЕТРЫІ

Стэрэаметрыя — гэта раздзел геаметрыі, у якім вывучаюцца фігуры ў прасторы. У стэрэаметрыі, як і ў планіметрыі, уласцівасці геаметрычных фігур устанаўліваюцца шляхам доказу адпаведных тэарэм. Пры гэтым зыходнымі з'яўляюцца ўласцівасці асноўных геаметрычных фігур, якія выражаюцца аксіёмамі. Асноўнымі фігурамі ў прасторы з'яўляюцца пункт, прамая і плоскасць.

Плоскасць мы ўяўляем сабе як роўную паверхню стала (рыс. 311, *а*) і таму будзем паказваць яе ў выглядзе паралелаграма (рыс. 311, *б*). Плоскасць, як і прамая, бесканечная. На рысунку мы паказваем толькі частку плоскасці, але ўяўляем яе неабмежавана працягнутай ва ўсе бакі. Плоскасці абазначаюцца грэчаскімі літарамі α, β, γ, ...

Увядзенне новага геаметрычнага вобраза — плоскасці —



Рыс. 311

прымушае пашырыць сістэму аксіём. Таму мы ўводзім групу аксіём C, якая выражае асноўныя ўласцівасці плоскасцей у прасторы. Гэта група складаецца з наступных трох аксіём:

C_1. Якая б ні была плоскасць, існуюць пункты, якія належаць гэтай плоскасці, і пункты, якія не належаць ёй.

C_2. Калі дзве розныя плоскасці маюць агульны пункт, то яны перасякаюцца па прамой, якая праходзіць праз гэты пункт.

Гэтай аксіёмай сцвярджаецца, што калі дзве розныя плоскасці α і β маюць агульны пункт, то існуе прамая c, якая належыць кожнай з гэтых плоскасцей. Пры гэтым, калі пункт C належыць абедзвюм плоскасцям, то ён належыць прамой c.

C_3. Калі дзве розныя прамыя маюць агульны пункт, то праз іх можна правесці плоскасць, і прытым толькі адну.

Гэта значыць, што калі дзве розныя прамыя a і b маюць агульны пункт C, то існуе плоскасць γ, якая змяшчае прамыя a і b. Плоскасць, якая валодае гэтай уласцівасцю, адзіная.

Такім чынам, сістэма аксіём стэрэаметрыі складаецца з аксіём I — IX планіметрыі і групы аксіём C.

З а ў в а г а. У планіметрыі мы мелі адну плоскасць, на якой размяшчаліся ўсе фігуры, што намі разглядаліся. У стэрэаметрыі многа, нават бесканечна многа плоскасцей. У сувязі з гэтым фармулёўкі некаторых аксіём планіметрыі, як аксіём стэрэаметрыі, патрабуюць удакладнення. Гэта датычыцца аксіём IV, VII, VIII, IX. Прывядзём гэтыя ўдакладненыя фармулёўкі.

IV. Прамая, *якая належыць плоскасці*, разбівае гэту плоскасць на дзве паўплоскасці.

VII. Ад паўпрамой *на плоскасці, якая яе змяшчае*, у зададзеную паўплоскасць можна адкласці вугал з зададзенай градуснай мерай, меншай за 180°, і толькі адзін.

VIII. Які б ні быў трохвугольнік, існуе роўны яму трохвугольнік *у дадзенай плоскасці* ў зададзеным размяшчэнні адносна дадзенай паўпрамой у гэтай плоскасці.

IX. *На плоскасці* праз дадзены пункт, які не ляжыць на дадзенай прамой, можна правесці не больш за адну прамую, паралельную дадзенай.

Для зручнасці выкладання напомнім аксіёму I.

I. Якая б ні была прамая, існуюць пункты, што належаць гэтай прамой, і пункты, якія не належаць ёй. Праз любыя два пункты можна правесці прамую, і толькі адну.

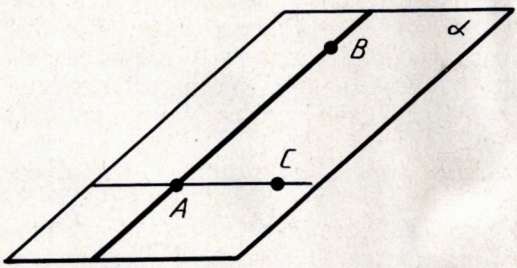
131. ІСНАВАННЕ ПЛОСКАСЦІ, ЯКАЯ ПРАХОДЗІЦЬ ПРАЗ ДАДЗЕНУЮ ПРАМУЮ І ДАДЗЕНЫ ПУНКТ

Тэарэма 15.1. ***Праз прамую і пункт, які не ляжыць на ёй, можна правесці плоскасць, і прытым толькі адну.***

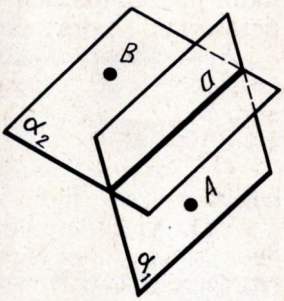
Доказ. Няхай AB дадзеная прамая і C — пункт, які не ляжыць на ёй (рыс. 312). Правядзём праз пункты A і C прамую (аксіёма I). Прамыя AB і AC розныя, паколькі пункт C не ляжыць на прамой AB. Правядзём праз прамыя AB і AC плоскасць α (аксіёма C_3). Яна праходзіць праз прамую AB і пункт C.

Дакажам, што плоскасць α, якая праходзіць праз прамую AB і пункт C, адзіная.

Дапусцім, існуе другая плоскасць α', якая праходзіць праз прамую AB і пункт C. Па аксіёме C_2 плоскасці α і α' перасякаюцца па прамой. Гэта прамая павінна змяшчаць пункты A, B, C. Але яны не ляжаць на адной прамой. Мы прыйшлі да супярэчнасці. Тэарэма даказана.



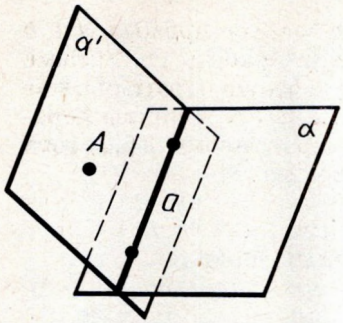
Рыс. 312



Рыс. 313

Задача (7). Дакажыце, што праз прамую можна правесці дзве розныя плоскасці.

Рашэнне. Няхай a — дадзеная прамая (рыс. 313). Па аксіёме I існуе пункт A, які не ляжыць на прамой a. Па тэарэме 15.1 праз прамую a і пункт A можна правесці плоскасць, абазначым яе α_1. Па аксіёме C_1 існуе пункт B, які не ляжыць у плоскасці α_1. Правядзём праз прамую a і пункт B плоскасць α_2. Плоскасці α_1 і α_2 розныя, таму што пункт B плоскасці α_2 не ляжыць на плоскасці α_1.



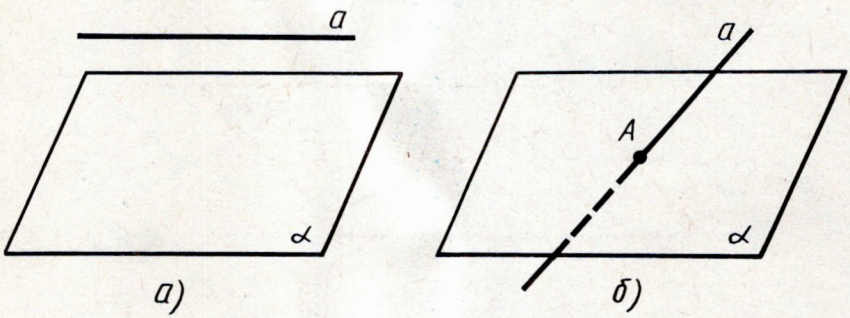
Рыс. 314

132. ПЕРАСЯЧЭННЕ ПРАМОЙ З ПЛОСКАСЦЮ

Тэарэма 15.2. ***Калі два пункты прамой належаць плоскасці, то ўся прамая належыць гэтай плоскасці.***

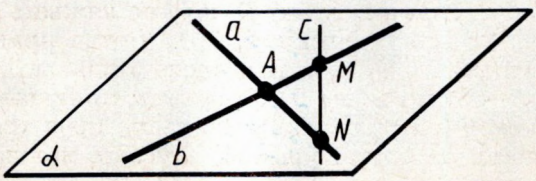
Доказ. Няхай a — дадзеная прамая і α — дадзеная плоскасць (рыс. 314). Па аксіёме I існуе пункт A, які не ляжыць на прамой a. Правядзём праз прамую a і пункт A плоскасць α'. Калі плоскасць α' супадае з α, то плоскасць α змяшчае прамую a, што і сцвярджаецца тэарэмай. Калі плоскасць α' адрозніваецца ад α, то гэтыя плоскасці перасякаюцца па прамой a', якая змяшчае два пункты прамой a. Па аксіёме I прамая a' супадае з a і, значыць, прамая a ляжыць у плоскасці α. Тэарэма даказана.

З тэарэмы 15.2 вынікае, што ***плоскасць і прамая, якая на ёй не ляжыць, або не перасякаюцца, або перасякаюцца ў адным пункце*** (рыс. 315).



Рыс. 315

Задача (9). Дадзены дзве розныя прамыя, якія перасякаюцца ў пункце A. Дакажыце, што ўсе прамыя, якія перасякаюць абедзве дадзеныя прамыя і не праходзяць праз пункт A, ляжаць у адной плоскасці.



Рыс. 316

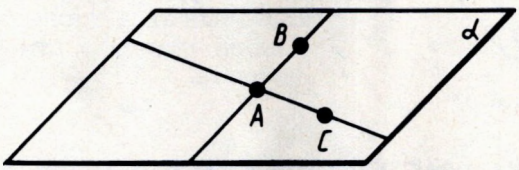
Рашэнне. Правядзём праз дадзеныя прамыя a і b плоскасць α (рыс. 316). Гэта можна зрабіць па аксіёме C_3. Прамая c, якая перасякае дадзеныя прамыя, мае з плоскасцю α два агульныя пункты M і N (пункты перасячэння з дадзенымі прамымі). Па тэарэме 15.2 гэта прамая павінна ляжаць у плоскасці α.

133. ІСНАВАННЕ ПЛОСКАСЦІ, ЯКАЯ ПРАХОДЗІЦЬ ПРАЗ ТРЫ ДАДЗЕНЫЯ ПУНКТЫ

Тэарэма 15.3. ***Праз тры пункты, якія не ляжаць на адной прамой, можна правесці плоскасць, і прытым толькі адну.***

Доказ. Няхай A, B, C — тры дадзеныя пункты, якія не ляжаць на адной прамой (рыс. 317). Правядзём прамыя AB і AC; яны розныя, таму што пункты A, B, C не ляжаць на адной прамой. Па аксіёме C_3 праз прамыя AB і AC можна правесці плоскасць α. Гэта плоскасць змяшчае пункты A, B, C.

Дакажам, што плоскасць α, якая праходзіць праз пункты A, B, C, адзіная. Сапраўды, плоскасць, што праходзіць праз пункты A, B, C, па тэарэме 15.2 змяшчае прамыя AB і AC. А па аксіёме C_3 такая плоскасць адзіная.



Рыс. 317

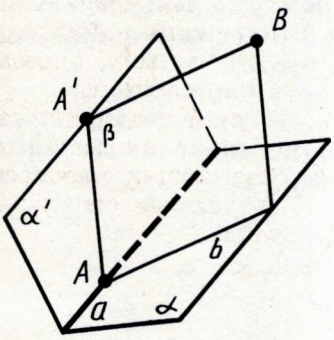
Задача (13). Ці можна правесці плоскасць праз тры пункты, калі яны ляжаць на адной прамой? Растлумачце адказ.

Рашэнне. Няхай A, B, C — тры пункты, якія ляжаць на прамой a. Возьмем пункт D, што не ляжыць на прамой a (аксіёма I). Праз пункты A, B, D можна правесці плоскасць (тэарэма 15.3). Гэта плоскасць змяшчае два пункты прамой a — пункты A і B, а значыць, змяшчае і пункт C гэтай прамой (тэарэма 15.2). Значыць, праз тры пункты, якія ляжаць на адной прамой, заўсёды можна правесці плоскасць.

134. ЗАЎВАГА ДА АКСІЁМЫ I

Аксіёма I у спіску аксіём стэрэаметрыі набывае новы сэнс у параўнанні з тым, які яна мела ў планіметрыі. У планіметрыі гэта аксіёма сцвярджае існаванне пунктаў па-за дадзенай прамой *на плоскасці*, у якой ляжыць прамая. Менавіта ў такім сэнсе гэта аксіёма прымянялася пры пабудаванні геаметрыі на плоскасці. Цяпер гэта аксіёма сцвярджае наогул існаванне пунктаў, якія не ляжаць на дадзенай прамой. З яе непасрэдна не вынікае, што існуюць пункты па-за дадзенай прамой на плоскасці, у якой ляжыць прамая. Гэта патрабуе спецыяльнага доказу. Дадзім такі доказ.

Няхай α — плоскасць і a — прамая ў гэтай плоскасці (рыс. 318). Дакажам існаванне пунктаў у плоскасці α, якія не ляжаць на прамой a.



Рыс. 318

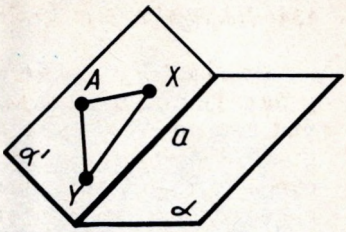
Адзначым пункт A на прамой a і пункт A' па-за плоскасцю α. Правядзём плоскасць α' праз прамую a і пункт A'. Возьмем пункт B па-за плоскасцю α' і правядзём праз прамую AA' і пункт B плоскасць β. Плоскасці α і β перасякаюцца па прамой b, якая праходзіць праз пункт A і адрозніваецца ад прамой a. Пункты гэтай прамой, адрозныя ад A, ляжаць у плоскасці α па-за прамой a, што і трэба было даказаць.

135. РАЗБІЎКА ПРАСТОРЫ ПЛОСКАСЦЮ НА ДЗВЕ ПАЎПРАСТОРЫ

Тэарэма 15.4. ***Плоскасць разбівае прастору на дзве паўпрасторы. Калі пункты X і Y належаць адной паўпрасторы, то адрэзак XY не перасякае плоскасць. Калі ж пункты X і Y належаць розным паўпрасторам, то адрэзак XY перасякае плоскасць.***

Доказ (не для запамінання). Няхай α — дадзеная плоскасць. Адзначым пункт A, які не ляжыць у плоскасці α. Такі пункт існуе па аксіёме C_1. Разаб'ём усе пункты прасторы, якія не ляжаць у плоскасці α, на дзве паўпрасторы наступным чынам. Пункт X аднясём да першай паўпрасторы, калі адрэзак AX не перасякае плоскасць α, і да другой паўпрасторы, калі адрэзак AX перасякае плоскасць α. Пакажам, што гэта разбіўка прасторы валодае ўласцівасцямі, адзначанымі ў тэарэме.

Няхай пункты X і Y належаць першай паўпрасторы. Правядзём праз пункты A, X і Y плоскасць α'. Калі плоскасць α' не перасякае плоскасць α, то адрэзак XY таксама не перасякае гэту плоскасць. Дапусцім, што плоскасць α' перасякае плоскасць α (рыс. 319). Паколькі плоскасці розныя, то іх перасячэнне адбываецца па некаторай прамой a. Прамая a разбівае плоскасць α' на дзве паўплоскасці. Пункты X і Y належаць адной паўплоскасці, менавіта той, у якой ляжыць пункт A. Таму адрэзак XY не перасякае прамую a, а значыць, і плоскасць α.



Рыс. 319

Калі пункты X і Y належаць другой паўпрасторы, то плоскасць α' заведама перасякае плоскасць α, паколькі адрэзак AX перасякае плоскасць α. Пункты X і Y належаць адной паўплоскасці разбіўкі плоскасці α' прамой a. Значыць, адрэзак XY не перасякае прамую a, а значыць, і плоскасць α.

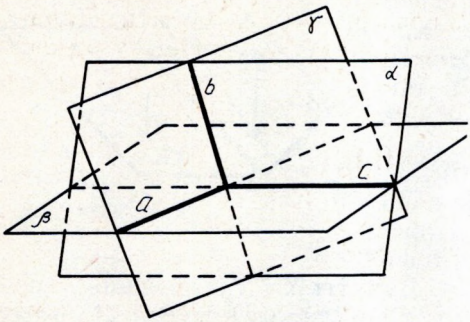
Калі, нарэшце, пункт X належыць адной паўпрасторы, а пункт Y другой, то плоскасць α' перасякае плоскасць α, а пункты X і Y ляжаць у розных паўплоскасцях плоскасці α' адносна прамой a. Таму адрэзак XY перасякае прамую a, а значыць, і плоскасць α. Тэарэма даказана.

КАНТРОЛЬНЫЯ ПЫТАННІ

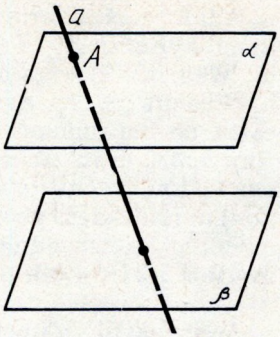
1. Што такое стэрэаметрыя?
2. Сфармулюйце аксіёмы групы С.
3. Дакажыце, што праз прамую і пункт, які не ляжыць на ёй, можна правесці плоскасць, і прытым толькі адну.
4. Дакажыце, што калі два пункты прамой належаць плоскасці, то ўся прамая належыць плоскасці.
5. Дакажыце, што праз тры пункты, якія не ляжаць на адной прамой, можна правесці плоскасць, і прытым толькі адну.

ЗАДАЧЫ

1. Пункты A, B, C і D не ляжаць у адной плоскасці. Дакажыце, што прамыя AB і CD не перасякаюцца.
2. Ці можна праз пункт перасячэння дзвюх дадзеных прамых правесці трэцюю прамую, якая не ляжыць з імі ў адной плоскасці? Растлумачце адказ.
3. Пункты A, B, C ляжаць у кожнай з дзвюх розных плоскасцей. Дакажыце, што гэтыя пункты ляжаць на адной прамой.



Рыс. 320



Рыс. 321

4. Дадзены тры розныя плоскасці, якія парамі перасякаюцца. Дакажыце, што калі дзве з прамых перасячэння гэтых плоскасцей перасякаюцца, то трэцяя прамая праходзіць праз пункт іх перасячэння (рыс. 320).
5. Дадзены дзве плоскасці, якія перасякаюцца па прамой a, і прамая b, што ляжыць у адной з гэтых плоскасцей і перасякае другую. Дакажыце, што прамыя a і b перасякаюцца.
6. Чатыры пункты не ляжаць у адной плоскасці. Ці могуць якія-небудзь тры з іх ляжаць на адной прамой? Растлумачце адказ.
7. Дакажыце, што праз прамую можна правесці дзве розныя плоскасці.
8*. Дадзены дзве плоскасці, якія не перасякаюцца. Дакажыце, што прамая, якая перасякае адну з гэтых плоскасцей, перасякае і другую (рыс. 321).
9. Дадзены дзве розныя прамыя, якія перасякаюцца ў пункце A. Дакажыце, што ўсе прамыя, якія перасякаюць абедзве дадзеныя прамыя і не праходзяць праз пункт A, ляжаць у адной плоскасці.
10. Дакажыце, што ўсе прамыя, якія перасякаюць дадзеную прамую і праходзяць праз дадзены пункт па-за прамой, ляжаць у адной плоскасці.
11. Дакажыце, што калі прамыя AB і CD не ляжаць у адной плоскасці, то прамыя AC і BD таксама не ляжаць у адной плоскасці.
12. Дадзены чатыры пункты, якія не ляжаць у адной плоскасці. Колькі можна правесці розных плоскасцей, якія праходзяць праз тры з гэтых пунктаў? Растлумачце адказ.
13. Ці можна правесці плоскасць праз тры пункты, калі яны ляжаць на адной прамой? Растлумачце адказ.

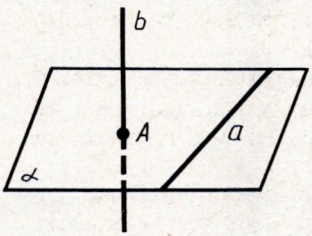
14*. Дадзены чатыры пункты. Вядома, што прамая, якая праходзіць праз любыя два з гэтых пунктаў, не перасякаецца з прамой, якая праходзіць праз другія два пункты. Дакажыце, што дадзеныя чатыры пункты не ляжаць у адной плоскасці.

§ 16. ПАРАЛЕЛЬНАСЦЬ ПРАМЫХ І ПЛОСКАСЦЕЙ

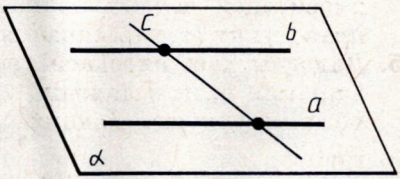
136. ПАРАЛЕЛЬНЫЯ ПРАМЫЯ Ў ПРАСТОРЫ

Дзве прамыя ў прасторы называюцца *паралельнымі*, калі яны ляжаць у адной плоскасці і не перасякаюцца. Прамыя, якія не перасякаюцца і не ляжаць у адной плоскасці, называюцца прамымі, *якія скрыжоўваюцца* (рыс. 322).

Рыс. 322



Рыс. 323



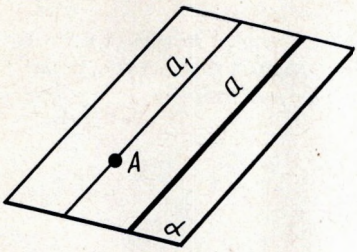
З а д а ч а (3). Дакажыце, што ўсе прамыя, якія перасякаюць дзве дадзеныя паралельныя прамыя, ляжаць у адной плоскасці.

Р а ш э н н е. Паколькі дадзеныя прамыя a і b паралельныя, то праз іх можна правесці плоскасць (рыс. 323). Абазначым яе α. Прамая c, якая перасякае дадзеныя паралельныя прамыя, мае з плоскасцю α два агульныя пункты — пункты перасячэння з дадзенымі прамымі. Па тэарэме 15.2 гэта прамая ляжыць у плоскасці α. Такім чынам, усе прамыя, якія перасякаюць дзве дадзеныя паралельныя прамыя, ляжаць у адной плоскасці — плоскасці α.

Т э а р э м а 16.1. ***Праз пункт па-за дадзенай прамой можна правесці прамую, паралельную гэтай прамой, і прытым толькі адну.***

З а ў в а г а. Сцверджанне адзінасці ў тэарэме 16.1 не з'яўляецца простым вынікам аксіёмы паралельных, паколькі гэтай аксіёмай сцвярджаецца адзінасць прамой, паралельнай дадзенай у дадзенай плоскасці. Таму яна патрабуе доказу.

Д о к а з. Няхай a — дадзеная прамая і A — пункт, які



Рыс. 324

не ляжыць на гэтай прамой (рыс. 324). Правядзём праз прамую a і пункт A плоскасць α. Правядзём праз пункт A ў плоскасці α прамую a_1, паралельную a. Дакажам, што прамая a_1, паралельная a, адзіная.

Дапусцім, што існуе другая прамая a_2, якая праходзіць праз пункт A і паралельная прамой a. Праз прамыя a і a_2 можна правесці плоскасць α_2. Плоскасць α_2 праходзіць праз прамую a і пункт A; значыць, па тэарэме 15.1 яна супадае з α. Цяпер па аксіёме паралельных прамыя a_1 і a_2 супадаюць. Тэарэма даказана.

137. ПРЫЗНАК ПАРАЛЕЛЬНАСЦІ ПРАМЫХ

Тэарэма 16.2. ***Дзве прамыя, паралельныя трэцяй прамой, паралельныя.***

Доказ. Няхай прамыя b і c паралельныя прамой a. Дакажам, што прамыя b і c паралельныя.

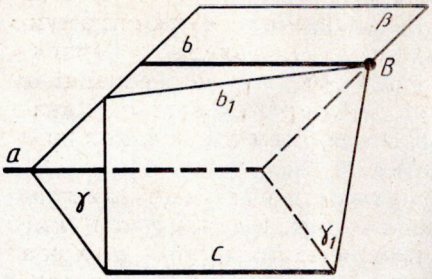
Выпадак, калі прамыя a, b, c ляжаць у адной плоскасці, быў разгледжаны ў планіметрыі. Таму дапусцім, што нашы прамыя не ляжаць у адной плоскасці. Няхай β — плоскасць, у якой ляжаць прамыя a і b, а γ — плоскасць, у якой ляжаць прамыя a і c. Плоскасці β і γ розныя (рыс. 325). Адзначым на прамой b які-небудзь пункт B і правядзём плоскасць γ_1 праз прамую c і пункт B. Яна перасячэ плоскасць β па прамой b_1.

Прамая b_1 не перасякае плоскасць γ. Сапраўды, пункт перасячэння павінен належаць прамой a, паколькі прамая b_1 ляжыць у плоскасці β. З другога боку, яна павінна ляжаць і на прамой c, паколькі прамая b_1 ляжыць у плоскасці γ_1. Але прамыя a і c як паралельныя не перасякаюцца.

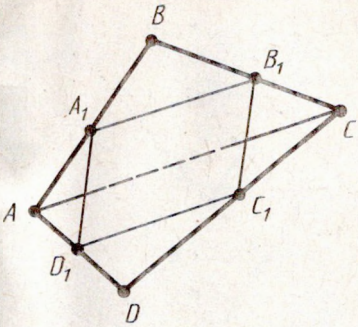
Паколькі прамая b_1 ляжыць у плоскасці β і не перасякае прамую a, то яна паралельная a, а значыць, супадае з b па аксіёме паралельных. Такім чынам, прамая b, супадаючы з прамой b_1, ляжыць у адной плоскасці з прамой c (у плоскасці γ_1) і не перасякае яе. Значыць, прамыя b і c паралельныя. Тэарэма даказана.

Задача (11). Дакажыце, што сярэдзіны старон прасторавага чатырохвугольніка з'яўляюцца вяршынямі паралелаграма (вяршыні прасторавага чатырохвугольніка не ляжаць у адной плоскасці).

Рашэнне. Няхай $ABCD$ — дадзены прасторавы чатырохвугольнік (рыс. 326). Няхай A_1, B_1, C_1, D_1 —



Рыс. 325



Рыс. 326

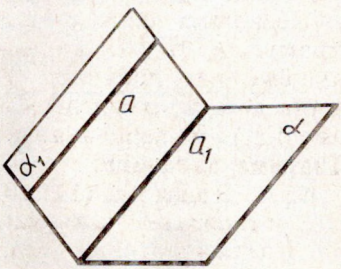
сярэдзіны яго старон. Тады A_1B_1 — сярэдняя лінія трохвугольніка ABC, паралельная старане AC, C_1D_1 — сярэдняя лінія трохвугольніка ACD, таксама паралельная старане AC. Па тэарэме 16.2 прамыя A_1B_1 і C_1D_1 паралельныя, а значыць, ляжаць у адной плоскасці. Зусім гэтак жа даказваецца паралельнасць прамых A_1D_1 і B_1C_1. Такім чынам, чатырохвугольнік $A_1B_1C_1D_1$ ляжыць у адной плоскасці і яго процілеглыя стораны паралельныя. Значыць, ён — паралелаграм.

138. ПРЫЗНАК ПАРАЛЕЛЬНАСЦІ ПРАМОЙ І ПЛОСКАСЦІ

Прамая і плоскасць называюцца *паралельнымі*, калі яны не перасякаюцца.

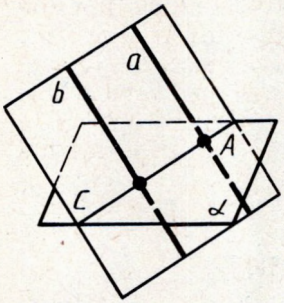
Тэарэма 16.3. ***Калі прамая, якая не належыць плоскасці, паралельная якой-небудзь прамой у гэтай плоскасці, то яна паралельная і самой плоскасці.***

Доказ. Няхай α — плоскасць, a — прамая, якая ў ёй не ляжыць, і a_1 — прамая ў плоскасці α, паралельная прамой a. Правядзём плоскасць α_1 праз прамыя a і a_1 (рыс. 327). Плоскасці α і α_1 перасякаюцца па прамой a_1. Калі б прамая a перасякала плоскасць α, то пункт перасячэння належаў бы прамой a_1. Але гэта немагчыма, таму што прамыя a і a_1 паралельныя. Такім чынам, прамая a не перасякае плоскасць α, а значыць, паралельная плоскасці α. Тэарэма даказана.



Рыс. 327

Задача (15). Дакажыце, што калі плоскасць перасякае адну з дзвюх паралельных прамых, то яна перасякае і другую.



Рыс. 328

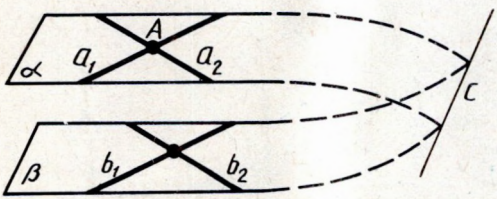
Рашэнне. Няхай a і b — дзве паралельныя прамыя і α — плоскасць, якая перасякае прамую a ў пункце A (рыс. 328). Правядзём праз прамыя a і b плоскасць. Яна перасякае плоскасць α па некаторай прамой c. Прамая c перасякае прамую a (у пункце A), а значыць, перасякае паралельную ёй прамую b. Паколькі прамая c ляжыць у плоскасці α, то плоскасць α перасякае прамую b.

139. ПРЫЗНАК ПАРАЛЕЛЬНАСЦІ ПЛОСКАСЦЕЙ

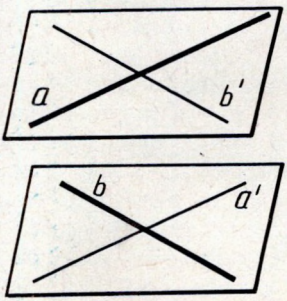
Дзве плоскасці называюцца *паралельнымі*, калі яны не перасякаюцца.

Тэарэма 16.4. ***Калі дзве прамыя, якія перасякаюцца, адной плоскасці адпаведна паралельныя дзвюм прамым другой плоскасці, то гэтыя плоскасці паралельныя.***

Доказ. Няхай α і β — дадзеныя плоскасці, a_1 і a_2 — прамыя ў плоскасці α, якія перасякаюцца ў пункце A, b_1 і b_2 — адпаведна паралельныя ім прамыя ў плоскасці β (рыс. 329). Дапусцім, што плоскасці α і β не паралельныя, г. зн. перасякаюцца на некаторай прамой c. Па тэарэме 16.3. прамыя a_1 і a_2, як паралельныя прамым b_1 і b_2, паралельныя плоскасці β і таму яны не перасякаюць прамую c, што ляжыць у гэтай плоскасці. Такім чынам, у плоскасці α праз пункт A праходзяць дзве прамыя (a_1 і a_2), паралельныя прамой c. Але гэта немагчыма па аксіёме паралельных. Мы прыйшлі да супярэчнасці. Тэарэма даказана.



Рыс. 329



Рыс. 330

З а д а ч а (19). Дакажыце, што праз дзве прамыя, якія скрыжоўваюцца, можна правесці паралельныя плоскасці.

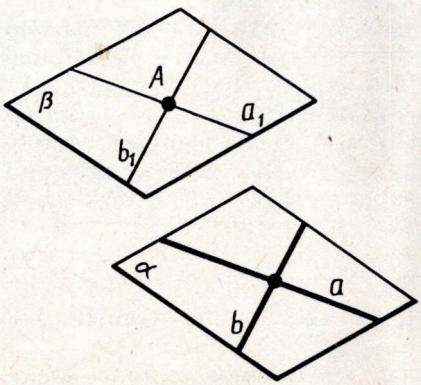
Р а ш э н н е. Няхай a і b — дадзеныя прамыя, якія скрыжоўваюцца (рыс. 330). Праз адвольны пункт прамой a правядзём прамую b', паралельную b, а праз адвольны пункт прамой b правядзём прамую a', паралельную a. Цяпер правядзём дзве плоскасці — адну праз прамыя a і b', а другую праз прамыя b і a'. Па тэарэме 16.4 гэтыя плоскасці паралельныя. У першай з іх ляжыць прамая a, а ў другой — прамая b.

140. ІСНАВАННЕ ПЛОСКАСЦІ, ПАРАЛЕЛЬНАЙ ДАДЗЕНАЙ ПЛОСКАСЦІ

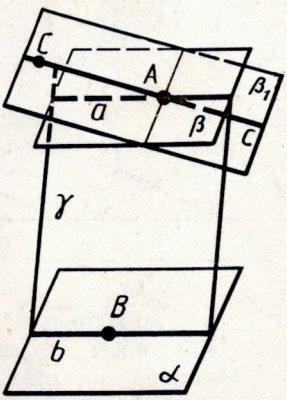
Т э а р э м а 16.5. ***Праз пункт па-за дадзенай плоскасцю можна правесці плоскасць, паралельную дадзенай, і прытым толькі адну.***

Д о к а з. Правядзём у дадзенай плоскасці α якія-небудзь дзве прамыя a і b, якія перасякаюцца (рыс. 331). Праз дадзены пункт A правядзём паралельныя ім прамыя a_1 і b_1. Плоскасць β, якая праходзіць праз прамыя a_1 і b_1, па тэарэме 16.4 паралельная плоскасці α.

Дапусцім, што праз пункт A праходзіць другая плоскасць β_1, таксама паралельная плоскасці α (рыс. 332). Адзначым на плоскасці β_1 які-небудзь пункт C, які не ляжыць у плоскасці β. Правядзём плоскасць γ праз пункты A, C і які-небудзь пункт B плоскасці α. Гэта плоскасць перасячэ плоскасці α, β і β_1 па прамых b, a і c. Прамыя a і c не перасякаюць прамую b, таму што не перасякаюць плоскасць α. Значыць,



Рыс. 331



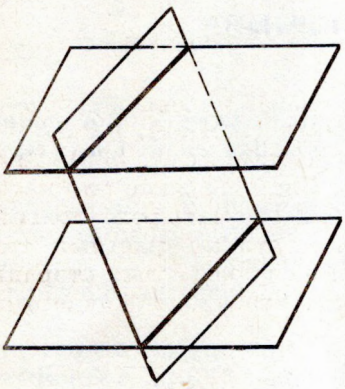
Рыс. 332

яны паралельныя прамой b. Але ў плоскасці γ праз пункт A можа праходзіць толькі адна прамая, паралельная прамой b. Мы прыйшлі да супярэчнасці. Тэарэма даказана поўнасцю.

Задача (23). Плоскасці α і β паралельныя плоскасці γ. Ці могуць плоскасці α і β перасякацца?

Рашэнне. Плоскасці α і β не могуць перасякацца. Калі б плоскасці α і β мелі агульны пункт, то праз гэты пункт праходзілі б дзве плоскасці (α і β), паралельныя плоскасці γ. А гэта супярэчыць тэарэме 16.5.

141. УЛАСЦІВАСЦІ ПАРАЛЕЛЬНЫХ ПЛОСКАСЦЕЙ



Рыс. 333

Калі дзве паралельныя плоскасці перасякаюцца трэцяй, то прамыя перасячэння паралельныя (рыс. 333).

Сапраўды, згодна з азначэннем паралельныя прамыя — гэта прамыя, якія ляжаць у адной плоскасці і не перасякаюцца. Нашы прамыя ляжаць у адной плоскасці — сякучай плоскасці. Яны не перасякаюцца, паколькі не перасякаюцца паралельныя прамыя, што іх змяшчаюць. Значыць, прамыя паралельныя, што і трэба было даказаць.

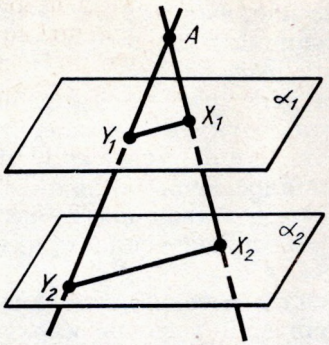
Задача (33). Дадзены дзве паралельныя плоскасці α_1 і α_2 і пункт A, які не ляжыць ні ў адной з гэтых плоскасцей. Праз пункт A праведзена адвольная прамая. Няхай X_1 і X_2 — пункты перасячэння яе з плоскасцямі α_1 і α_2. Дакажыце, што адносіна даўжынь адрэзкаў $AX_1 : AX_2$ не залежыць ад узятай прамой.

Рашэнне. Правядзём праз пункт A другую прамую і абазначым праз Y_1 і Y_2 пункты перасячэння яе з плоскасцямі α_1 і α_2 (рыс. 334). Правядзём праз прамыя AX_1 і AY_1 плоскасць. Яна перасячэ плоскасці α_1 і α_2 па паралельных прамых X_1Y_1 і X_2Y_2. Адсюль вынікае падобнасць трохвугольнікаў AX_1Y_1 і AX_2Y_2. А з падобнасці трохвугольнікаў вынікае прапорцыя

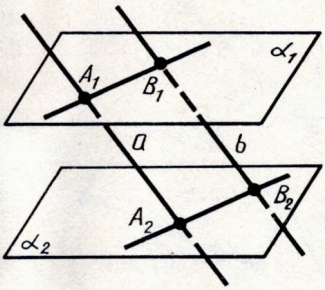
$$\frac{AX_1}{AX_2} = \frac{AY_1}{AY_2},$$

г. зн. адносіны $AX_1 : AX_2$ і $AY_1 : AY_2$ аднолькавыя для абедзвюх прамых.

Адрэзкі паралельных прамых, змешчаныя паміж дзвюма паралельнымі плоскасцямі, роўныя.



Рыс. 334



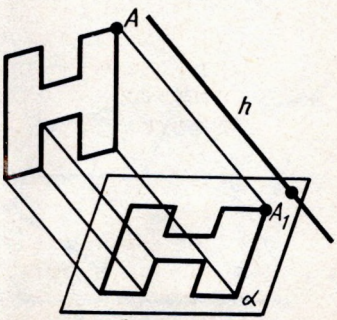
Рыс. 335

Сапраўды, няхай α_1 і α_2 — паралельныя плоскасці, a і b — паралельныя прамыя, якія іх перасякаюць. A_1, A_2 і B_1, B_2 — пункты перасячэння прамых з плоскасцямі (рыс. 335). Правядзём праз прамыя a і b плоскасць. Яна перасякае плоскасці α_1 і α_2 па паралельных прамых A_1B_1 і A_2B_2. Чатырохвугольнік $A_1B_1B_2A_2$ — паралелаграм, паколькі ў яго процілеглыя бакі паралельныя. А ў паралелаграма процілеглыя бакі роўныя. Значыць, $A_1A_2 = B_1B_2$, што і трэба было даказаць.

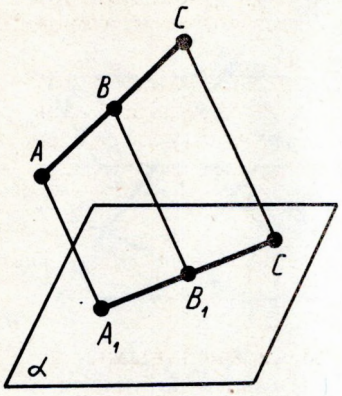
142. ПАКАЗ ПРАСТОРАВЫХ ФІГУР НА ПЛОСКАСЦІ

Для паказу прасторавых фігур на плоскасці звычайна карыстаюцца паралельным праектаваннем. Гэты спосаб паказу фігуры заключаецца ў наступным. Бяром адвольную прамую h, якая перасякае плоскасць чарцяжа α, праводзім праз адвольны пункт A фігуры прамую, паралельную h. Пункт A_1 перасячэння гэтай прамой з плоскасцю чарцяжа будзе відарысам пункта A (рыс. 336). Пабудаваўшы такім чынам відарыс кожнага пункта фігуры, атрымаем відарыс самой фігуры. Такі спосаб паказу прасторавай фігуры на плоскасці адпавядае зрокаваму ўспрыманню фігуры пры разглядзе яе здалёк.

Адзначым некаторыя ўласцівасці паказу фігуры на плоскасці, якія вынікаюць з апісанага яе пабудавання.



Рыс. 336



Рыс. 337

Прамалінейныя адрэзкі фігуры паказваюцца на плоскасці чарцяжа адрэзкамі (рыс. 337).

Сапраўды, усе прамыя, якія праектуюць пункты адрэзка AC, ляжаць у адной плоскасці, што перасякае плоскасць чарцяжа α па прамой A_1C_1. Адвольны пункт B адрэзка AC паказваецца пунктам B_1 адрэзка A_1C_1.

З а ў в а г а. У толькі што даказанай уласцівасці і далей мяркуецца, безумоўна, што праектуемыя адрэзкі не паралельныя з напрамкам праектавання.

Паралельныя адрэзкі фігуры паказваюцца на плоскасці чарцяжа паралельнымі адрэзкамі (рыс. 338).

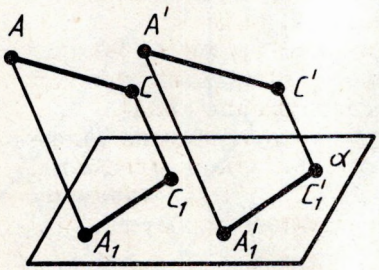
Сапраўды, няхай AC і $A'C'$ — паралельныя адрэзкі фігуры. Прамыя A_1C_1 і $A'_1C'_1$ паралельныя, паколькі яны атрымліваюцца пры перасячэнні паралельных плоскасцей з плоскасцю α. Першая з гэтых плоскасцей праходзіць праз прамыя AC і AA_1, а другая — праз прамыя $A'C'$ і $A'A'_1$.

Адносіна адрэзкаў адной прамой або паралельных прамых захоўваецца пры паралельным праектаванні.

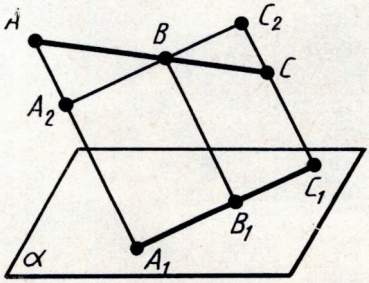
Пакажам, напрыклад, што (рыс. 339)

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}. \qquad (*)$$

Правядзём праз пункт B прамую A_2C_2, паралельную A_1C_1. Трохвугольнікі BAA_2 і BCC_2 падобныя. З падобнасці трохвугольнікаў і роўнасцей $A_1B_1 = A_2B$ і $B_1C_1 = BC_2$ вынікае прапорцыя (*).



Рыс. 338



Рыс. 339

Задача (37). Дадзена паралельная праекцыя трохвугольніка. Як пабудаваць праекцыі медыян гэтага трохвугольніка?

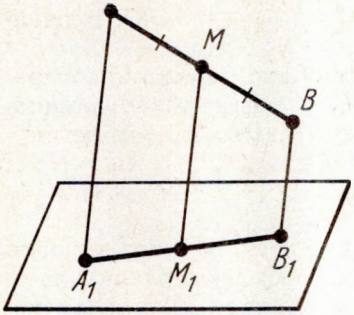
Рашэнне. Пры паралельным праектаванні захоўваецца адносіна адрэзкаў прамой. Таму сярэдзіна стараны трохвугольніка праектуецца ў сярэдзіну праекцыі гэтай стараны. Значыць, праекцыі медыян трохвугольніка будуць медыянамі яго праекцыі.

КАНТРОЛЬНЫЯ ПЫТАННІ

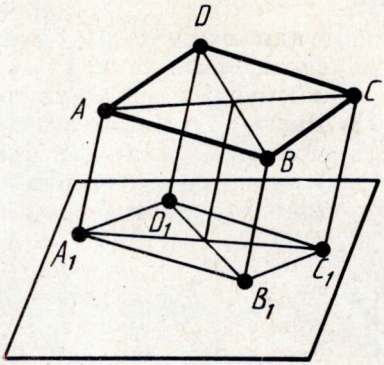
1. Якія прамыя ў прасторы называюцца паралельнымі?
2. Якія прамыя называюцца прамымі, што скрыжоўваюцца?
3. Дакажыце, што праз пункт па-за дадзенай прамой можна правесці прамую, паралельную гэтай прамой, і прытым толькі адну.
4. Дакажыце прызнак паралельнасці прамых.
5. Што значыць: прамая і плоскасць паралельныя?
6. Дакажыце прызнак паралельнасці прамой і плоскасці.
7. Якія плоскасці называюцца паралельнымі?
8. Дакажыце прызнак паралельнасці плоскасцей.
9. Дакажыце, што праз пункт па-за дадзенай плоскасцю можна правесці плоскасць, паралельную дадзенай, і прытым толькі адну.
10. Дакажыце, што калі дзве паралельныя плоскасці перасякаюцца трэцяй, то прамыя перасячэння паралельныя.
11. Дакажыце, што адрэзкі паралельных прамых, якія знаходзяцца паміж дзвюма паралельнымі плоскасцямі, роўныя.
12. Пералічыце ўласцівасці паралельнага праектавання.

ЗАДАЧЫ

1. Дакажыце, што калі прамыя AB і CD скрыжоўваюцца, то прамыя AC і BD таксама скрыжоўваюцца.
2. Ці можна праз пункт C, які не належыць прамым a і b, што скрыжоўваюцца, правесці дзве розныя прамыя, кожная з якіх перасякае прамыя a і b? Растлумачце адказ.
3. Дакажыце, што ўсе прамыя, якія перасякаюць дзве дадзеныя паралельныя прамыя, ляжаць у адной плоскасці.
4. Прамыя a і b перасякаюцца. Дакажыце, што ўсе прамыя, якія паралельныя прамой b і перасякаюць прамую a, ляжаць у адной плоскасці.
5. Праз канцы адрэзка AB і яго сярэдзіну M праведзены



Рыс. 340



Рыс. 341

паралельныя прамыя, якія перасякаюць некаторую плоскасць у пунктах A_1, B_1 і M_1. Знайдзіце даўжыню адрэзка MM_1, калі адрэзак AB не перасякае плоскасць (рыс. 340) і калі:

1) $AA_1 = 5$ м, $BB_1 = 7$ м; 2) $AA_1 = 3{,}6$ дм, $BB_1 = 4{,}8$ дм; 3) $AA_1 = 8{,}3$ см, $BB_1 = 4{,}1$ см; 4) $AA_1 = a$, $BB_1 = b$.

6*. Рашыце папярэднюю задачу пры ўмове, што адрэзак AB перасякае плоскасць.

7. Праз канец A адрэзка AB праведзена плоскасць. Праз канец B і пункт C гэтага адрэзка праведзены паралельныя прамыя, якія перасякаюць плоскасць у пунктах B_1 і C_1. Знайдзіце даўжыню адрэзка BB_1, калі: 1) $CC_1 = 15$ см, $AC : BC = 2 : 3$; 2) $CC_1 = 8{,}1$ см, $AB : AC = 11 : 9$; 3) $AB = 6$ см, $AC : CC_1 = 2 : 5$; 4) $AC = a$, $BC = b$, $CC_1 = c$.

8*. Дадзены паралелаграм $ABCD$ і плоскасць, якая яго не перасякае. Праз вяршыні паралелаграма праведзены паралельныя прамыя, якія перасякаюць дадзеную плоскасць у пунктах A_1, B_1, C_1, D_1 (рыс. 341). Знайдзіце даўжыню адрэзка DD_1, калі: 1) $AA_1 = 2$ м, $BB_1 = 3$ м, $CC_1 = 8$ м; 2) $AA_1 = 4$ м, $BB_1 = 3$ м, $CC_1 = 1$ м; 3) $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $CC_1 = c$.

9. Прамыя a і b не ляжаць у адной плоскасці. Ці можна правесці прамую c, паралельную прамым a і b?

10. Пункты A, B, C, D не ляжаць у адной плоскасці. Дакажыце, што прамая, якая праходзіць праз сярэдзіны адрэзкаў AB і BC, паралельная прамой, якая праходзіць праз сярэдзіны адрэзкаў AD і CD.

11. Дакажыце, што сярэдзіны старон прасторавага чатырохвугольніка з'яўляюцца вяршынямі паралелаграма (вяршыні прасторавага чатырохвугольніка не ляжаць у адной плоскасці).

12*. Дадзены чатыры пункты A, B, C, D, якія не ляжаць

у адной плоскасці. Дакажыце, што прамыя, якія злучаюць сярэдзіны адрэзкаў AB і CD, AC і BD, AD і BC, перасякаюцца ў адным пункце.

13. Дадзены трохвугольнік ABC. Плоскасць, паралельная прамой AB, перасякае старану AC гэтага трохвугольніка ў пункце A_1, а старану BC — у пункце B_1. Знайдзіце даўжыню адрэзка A_1B_1, калі: 1) $AB = 15$ см, $AA_1 : AC = 2 : 3$; 2) $AB = 8$ см, $AA_1 : A_1C = 5 : 3$; 3) $B_1C = 10$ см, $AB : BC = 4 : 5$; 4) $AA_1 = a$, $AB = b$, $A_1C = c$.

14. Праз дадзены пункт правядзіце прамую, паралельную кожнай з дзвюх дадзеных плоскасцей, якія перасякаюцца.

15. Дакажыце, што калі плоскасць перасякае адну з дзвюх паралельных прамых, то яна перасякае і другую.

16. Дакажыце, што праз любую з дзвюх прамых, якія скрыжоўваюцца, можна правесці плоскасць, паралельную другой прамой.

17. Дакажыце, што калі дзве плоскасці, якія перасякаюцца па прамой a, перасякаюць плоскасць α па паралельных прамых, то прамая a паралельная плоскасці α (рыс. 342).

18. Дакажыце, што калі прамая перасякае адну з дзвюх паралельных плоскасцей, то яна перасякае і другую.

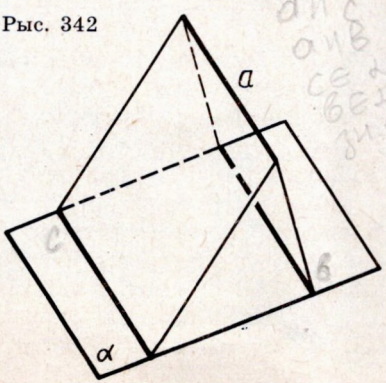
19. Дакажыце, што праз дзве прамыя, якія скрыжоўваюцца, можна правесці паралельныя плоскасці.

20. Праз дадзены пункт прасторы правядзіце прамую, якая перасякае кожную з дзвюх прамых, што скрыжоўваюцца (рыс. 343). Ці заўсёды гэта магчыма?

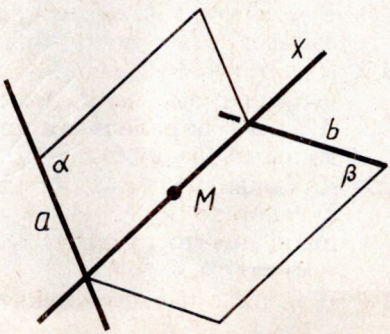
21*. Дакажыце, што геаметрычнае месца сярэдзін адрэзкаў з канцамі на дзвюх прамых, якія скрыжоўваюцца, ёсць плоскасць, паралельная гэтым прамым (рыс. 344).

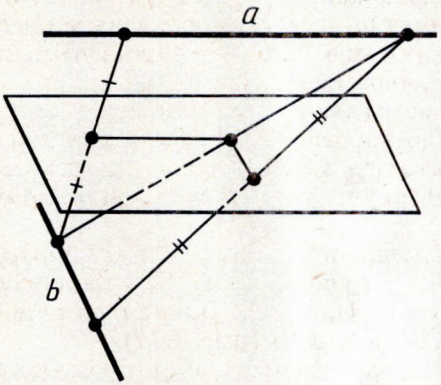
22. Дадзены чатыры пункты A, B, C і D, якія не ляжаць у адной плоскасці. Дакажыце, што любая плоскасць, паралельная прамым AB і CD, перасякае прамыя AC, AD, BD і BC у вяршынях паралелаграма (рыс. 345).

Рыс. 342

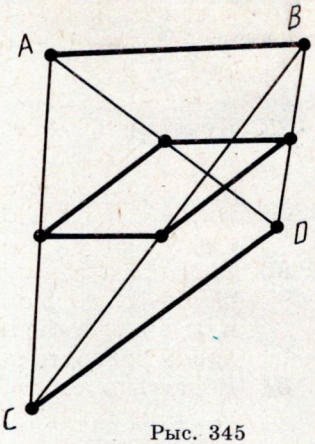


Рыс. 343





Рыс. 344



Рыс. 345

23. Плоскасці α і β паралельныя плоскасці γ. Ці могуць плоскасці α і β перасякацца?

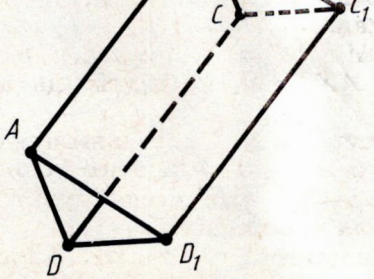
24. Плоскасці α і β перасякаюцца. Дакажыце, што любая плоскасць γ перасякае хаця б адну з плоскасцей α, β.

25. Дакажыце, што ўсе прамыя, якія праходзяць праз дадзены пункт паралельна дадзенай плоскасці, ляжаць у адной плоскасці.

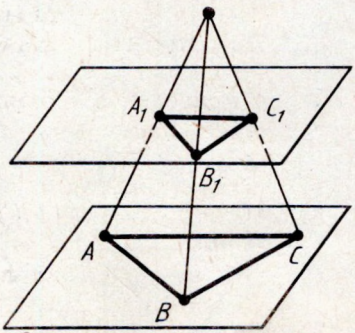
26. Праз дадзены пункт правядзіце плоскасць, паралельную кожнай з дзвюх прамых, якія перасякаюцца. Ці заўсёды гэта магчыма?

27. Паралелаграмы $ABCD$ і ABC_1D_1 ляжаць у розных плоскасцях. Дакажыце, што чатырохвугольнік CDD_1C_1 таксама паралелаграм (рыс. 346).

28. Праз вяршыні паралелаграма $ABCD$, які ляжыць у адной



Рыс. 346



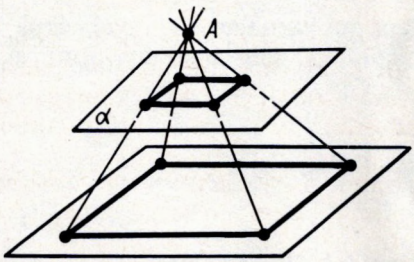
Рыс. 347

з дзвюх паралельных плоскасцей, праведзены паралельныя прамыя, якія перасякаюць другую плоскасць у пунктах A_1, B_1, C_1, D_1. Дакажыце, што чатырохвугольнік $A_1B_1C_1D_1$ таксама паралелаграм.

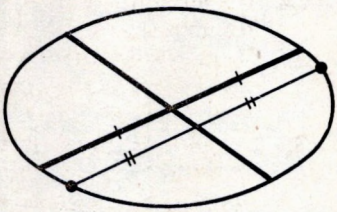
29. Праз вяршыні трохвугольніка ABC, што ляжыць у адной з дзвюх паралельных плоскасцей, праведзены паралельныя прамыя, якія перасякаюць другую плоскасць у пунктах A_1, B_1, C_1. Дакажыце роўнасць трохвугольнікаў ABC і $A_1B_1C_1$.

30. Тры прамыя, якія праходзяць праз адзін пункт, перасякаюць дадзеную плоскасць у пунктах A, B, C, а паралельную ёй плоскасць у пунктах A_1, B_1, C_1. Дакажыце падобнасць трохвугольнікаў ABC і $A_1B_1C_1$ (рыс. 347).

31. Дакажыце, што калі чатыры прамыя, якія праходзяць праз пункт A, перасякаюць плоскасць α у вяршынях паралелаграма, то яны перасякаюць любую плоскасць, якая паралельная α і не праходзіць праз A, таксама ў вяршынях паралелаграма (рыс. 348).



Рыс. 348



Рыс. 349

32. Дадзены дзве паралельныя плоскасці. Праз пункты A і B адной з плоскасцей праведзены паралельныя прамыя, якія перасякаюць другую плоскасць у пунктах A_1 і B_1. Чаму роўны адрэзак A_1B_1, калі $AB = a$?

33*. Дадзены дзве паралельныя плоскасці α_1 і α_2 і пункт A, які не ляжыць ні ў адной з гэтых плоскасцей. Праз пункт A праведзена адвольная прамая. Няхай X_1 і X_2 — пункты перасячэння яе з плоскасцямі α_1 і α_2. Дакажыце, што адносіна даўжынь адрэзкаў $AX_1 : AX_2$ не залежыць ад узятай прамой.

34*. Пункт A ляжыць па-за плоскасцю α, X — адвольны пункт плоскасці α, X' — пункт адрэзка AX, які дзеліць яго ў адносіне $m : n$. Дакажыце, што геаметрычнае месца пунктаў X' ёсць плоскасць, паралельная плоскасці α.

35*. Дадзены тры паралельныя плоскасці α_1, α_2, α_3. Няхай X_1, X_2, X_3 — пункты перасячэння гэтых плоскасцей з

адвольнай прамой. Дакажыце, што адносіна даўжынь адрэзкаў $X_1X_2 : X_2X_3$ не залежыць ад прамой, г. зн. аднолькавая для любых дзвюх прамых.

36. Дадзены чатыры паралельныя прамыя. Дакажыце, што калі якая-небудзь плоскасць перасякае гэтыя прамыя ў вяршынях паралелаграма, то любая плоскасць, не паралельная дадзеным прамым, перасякае іх у вяршынях некаторага паралелаграма.

37. Дадзена паралельная праекцыя трохвугольніка. Як пабудаваць праекцыі медыян гэтага трохвугольніка?

38. Дадзена паралельная праекцыя трохвугольніка. Які выгляд будзе мець праекцыя сярэдняй лініі трохвугольніка?

39. Ці можа пры паралельным праектаванні паралелаграма атрымацца трапецыя? Растлумачце адказ.

40. Ці можа праекцыя паралелаграма пры паралельным праектаванні быць квадратам?

41. Дакажыце, што паралельная праекцыя цэнтральна-сіметрычнай фігуры таксама з'яўляецца цэнтральна-сіметрычнай фігурай.

42*. Дадзена паралельная праекцыя акружнасці і яе дыяметра (рыс. 349). Як пабудаваць праекцыю перпендыкулярнага дыяметра?

§ 17. ПЕРПЕНДЫКУЛЯРНАСЦЬ ПРАМЫХ І ПЛОСКАСЦЕЙ

143. ПЕРПЕНДЫКУЛЯРНАСЦЬ ПРАМЫХ У ПРАСТОРЫ

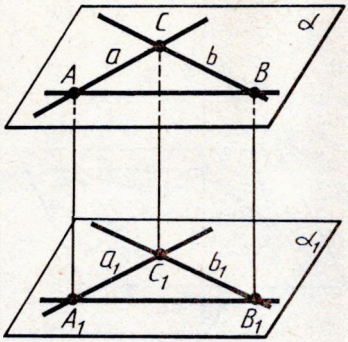
Гэтак жа як і на плоскасці, дзве прамыя называюцца *перпендыкулярнымі*, калі яны перасякаюцца пад прамым вуглом.

Тэарэма 17.1. ***Калі дзве прамыя, якія перасякаюцца, адпаведна паралельныя дзвюм перпендыкулярным прамым, то яны таксама перпендыкулярныя.***

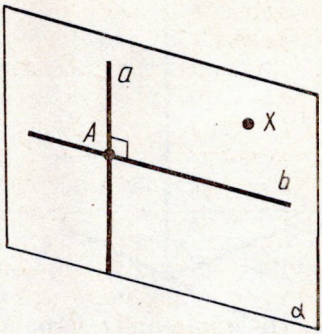
Доказ. Няхай a і b — перпендыкулярныя прамыя, a_1 і b_1 — паралельныя ім прамыя, якія перасякаюцца. Дакажам, што прамыя a_1 і b_1 перпендыкулярныя.

Калі прамыя a, b, a_1, b_1 ляжаць у адной плоскасці, то яны валодаюць названай у тэарэме ўласцівасцю, як гэта вядома з планіметрыі.

Дапусцім цяпер, што нашы прамыя не ляжаць у адной плоскасці. Тады прамыя a і b ляжаць у некаторай плоскасці α, а прамыя a_1 і b_1 — у некаторай плоскасці α_1 (рыс. 350). Па тэарэме 16.3 плоскасці α і α_1 паралельныя. Няхай C — пункт перасячэння прамых a і b, а C_1 — пункт перасячэння прамых a_1 і b_1. Правядзём у плоскасці паралельных прамых a і a_1 прамую, паралельную прамой CC_1. Яна перасячэ прамыя



Рыс. 350



Рыс. 351

a і a_1 ў пунктах A і A_1. У плоскасці прамых b і b_1 правядзём прамую, паралельную прамой CC_1 і абазначым праз B і B_1 пункты яе перасячэння з прамымі b і b_1.

Чатырохвугольнікі CAA_1C_1 і CBB_1C_1 — паралелаграмы, паколькі ў іх процілеглыя стораны паралельныя. Чатырохвугольнік ABB_1A_1 таксама паралелаграм. У яго стораны AA_1, BB_1 паралельныя, таму што кожная з іх паралельная прамой CC_1. Такім чынам, чатырохвугольнік ляжыць у плоскасці, якая праходзіць праз паралельныя прамыя AA_1 і BB_1. А яна перасякае паралельныя плоскасці α і α_1 па паралельных прамых AB і A_1B_1.

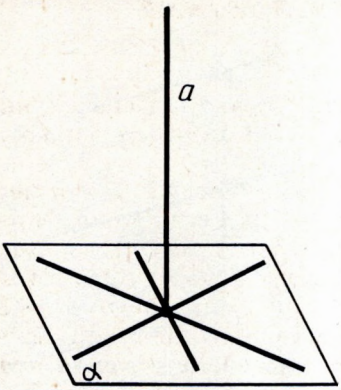
Паколькі ў паралелаграма процілеглыя стораны роўныя, то $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$. Па трэцяму прызнаку роўнасці трохвугольнікаў трохвугольнікі ABC і $A_1B_1C_1$ роўныя. Значыць, вугал $A_1C_1B_1$, роўны вуглу ACB, прамы, г. зн. прамыя a_1 і b_1 перпендыкулярныя. Тэарэма даказана.

Задача (1). Дакажыце, што праз любы пункт прамой у прасторы можна правесці перпендыкулярную да яе прамую.

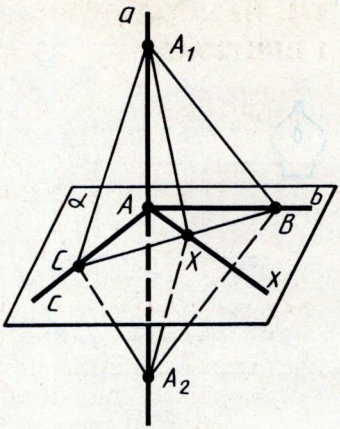
Рашэнне. Няхай a — дадзеная прамая і A — пункт на ёй (рыс. 351). Возьмем любы пункт X па-за прамой a і правядзём праз гэты пункт і прамую a плоскасць α (тэарэма 15.1). У плоскасці α праз пункт A можна правесці прамую b, перпендыкулярную прамой a.

144. ПРЫЗНАК ПЕРПЕНДЫКУЛЯРНАСЦІ ПРАМОЙ І ПЛОСКАСЦІ

Прамая, якая перасякае плоскасць, называецца *перпендыкулярнай* гэтай плоскасці, калі яна перпендыкулярная любой



Рыс. 352



Рыс. 353

прамой, якая ляжыць у дадзенай плоскасці і праходзіць праз пункт перасячэння (рыс. 352).

Тэарэма 17.2. ***Калі прамая перпендыкулярная дзвюм прамым, якія перасякаюцца і ляжаць у плоскасці, то яна перпендыкулярная дадзенай плоскасці.***

Доказ. Няхай a — прамая, перпендыкулярная прамым b і c у плоскасці α. Тады прамая a праходзіць праз пункт A перасячэння прамых b і c (рыс. 353). Дакажам, што прамая a перпендыкулярная плоскасці α.

Правядзём адвольную прамую x праз пункт A ў плоскасці α і пакажам, што яна перпендыкулярная прамой a. Правядзём у плоскасці α адвольную прамую, якая не праходзіць праз пункт A і перасякае прамыя b, c і x. Няхай пунктамі перасячэння будуць B, C і X.

Адкладзём на прамой a ад пункта A ў розныя бакі роўныя адрэзкі AA_1 і AA_2. Трохвугольнік A_1CA_2 раўнабедраны, паколькі адрэзак AC з'яўляецца вышынёй па ўмове тэарэмы і медыянай па пабудаванню ($AA_1 = AA_2$). Па гэтай жа прычыне трохвугольнік A_1BA_2 таксама раўнабедраны. Значыць, трохвугольнікі A_1BC і A_2BC роўныя па трэцяму прызнаку роўнасці трохвугольнікаў.

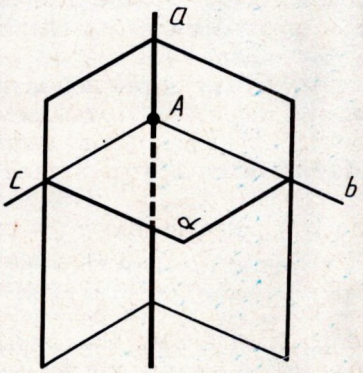
З роўнасці трохвугольнікаў A_1BC і A_2BC вынікае роўнасць вуглоў A_1BX, A_2BX і, значыць, роўнасць трохвугольнікаў A_1BX і A_2BX па першаму прызнаку роўнасці трохвугольнікаў. З роўнасці старон A_1X і A_2X гэтых трохвугольнікаў робім вывад, што трохвугольнік A_1XA_2 раўнабедраны. Таму яго медыяна XA з'яўляецца таксама вышынёй. А гэта і значыць, што прамая x перпендыкулярная a. Па азначэнню прамая a перпендыкулярная плоскасці α. Тэарэма даказана.

145. ПАБУДАВАННЕ ПЕРПЕНДЫКУЛЯРНЫХ ПРАМОЙ І ПЛОСКАСЦІ

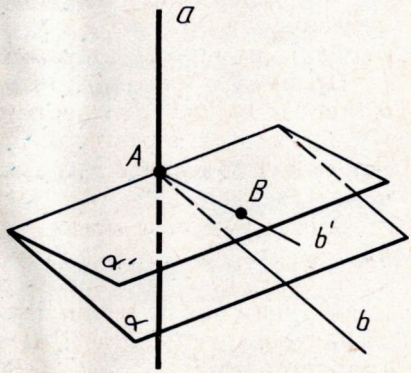
Задача (9). Дакажыце, што праз дадзены пункт прамой можна правесці адну, і толькі адну перпендыкулярную ёй плоскасць.

Рашэнне. Няхай a — дадзеная прамая і A — пункт на ёй (рыс. 354). Правядзём праз яе дзве плоскасці і правядзём у іх праз пункт A прамыя b і c, перпендыкулярныя прамой a. Плоскасць α, якая праходзіць праз гэтыя прамыя, перпендыкулярная прамой a па тэарэме 17.2.

Дакажам, што гэта плоскасць адзіная. Дапусцім, што, акрамя плоскасці α, існуе іншая плоскасць α', якая праходзіць праз пункт A і перпендыкулярная прамой a (рыс. 355). Няхай B — пункт плоскасці α', які не ляжыць у плоскасці α. Правядзём праз пункт B і прамую a плоскасць. Яна перасячэ плоскасці α і α' па розных прамых b і b', перпендыкулярных прамой a. А гэта, як мы ведаем, немагчыма, паколькі на плоскасці праз дадзены пункт прамой праходзіць толькі адна перпендыкулярная ёй прамая. Такім чынам, плоскасць, якая праходзіць праз пункт A і перпендыкулярная прамой a, адзіная.



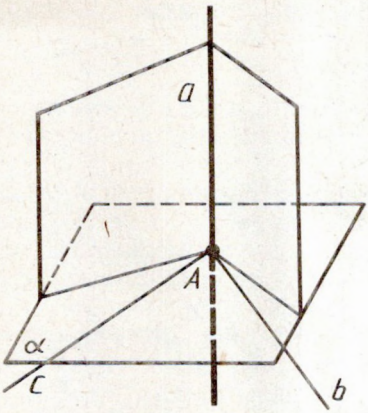
Рыс. 354



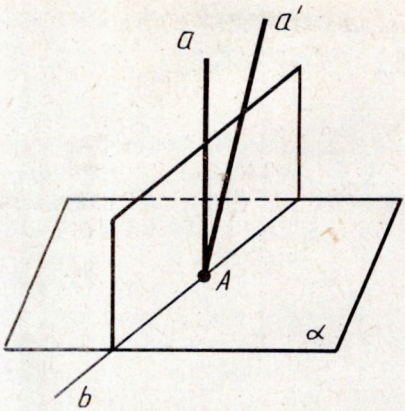
Рыс. 355

Задача (11). Дакажыце, што праз дадзены пункт плоскасці можна правесці адну, і толькі адну перпендыкулярную ёй прамую.

Рашэнне. Няхай α — дадзеная плоскасць і A — пункт на ёй (рыс. 356). Правядзём у плоскасці α праз пункт A дзве прамыя b і c. Правядзём праз пункт A пер-



Рыс. 356



Рыс. 357

пендыкулярныя ім плоскасці. Яны перасякуцца па некаторай прамой a, перпендыкулярнай прамым b і c. Значыць, прамая a перпендыкулярная плоскасці α.

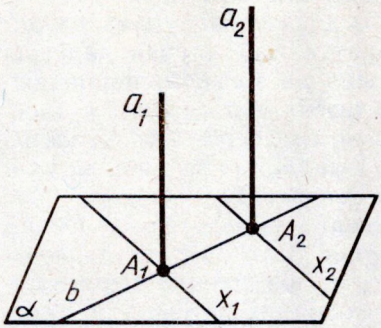
Дакажам, што гэта прамая адзіная. Дапусцім, што, акрамя прамой a, існуе іншая прамая a', якая праходзіць праз пункт A і перпендыкулярная плоскасці α (рыс. 357). Правядзём праз прамыя a і a' плоскасць. Яна перасячэ плоскасць α па некаторай прамой b, перпендыкулярнай прамым a і a'. А гэта, як мы ведаем, немагчыма. Такім чынам, прамая, якая праходзіць праз дадзены пункт плоскасці і перпендыкулярная гэтай плоскасці, адзіная.

146. УЛАСЦІВАСЦІ ПЕРПЕНДЫКУЛЯРНЫХ ПРАМОЙ І ПЛОСКАСЦІ

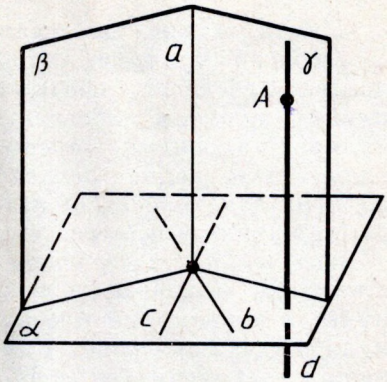
Тэарэма 17.3. ***Калі плоскасць перпендыкулярная адной з дзвюх паралельных прамых, то яна перпендыкулярная і другой.***

Доказ. Няхай a_1 і a_2 — дзве паралельныя прамыя і α — плоскасць, перпендыкулярная прамой a_1 (рыс. 358). Дакажам, што гэта плоскасць перпендыкулярная і прамой a_2.

Правядзём праз пункт A_2 перасячэння прамой a_2 з плоскасцю α адвольную прамую x_2 у плоскасці α. Правядзём у плоскасці α праз пункт A_1 перасячэння прамой a_1 з α прамую x_1, паралельную прамой x_2. Паколькі прамая a_1 перпендыкулярная плоскасці α, то прамыя a_1 і x_1 перпендыкулярныя. А па тэарэме 17.1 паралельныя ім прамыя a_2 і x_2, якія перасякаюцца, таксама перпендыкулярныя. Такім чынам, прамая a_2 перпендыкулярная любой прамой x_2 у плоскасці α. А гэта значыць,



Рыс. 358



Рыс. 359

што прамая a_2 перпендыкулярная плоскасці α. Тэарэма даказана.

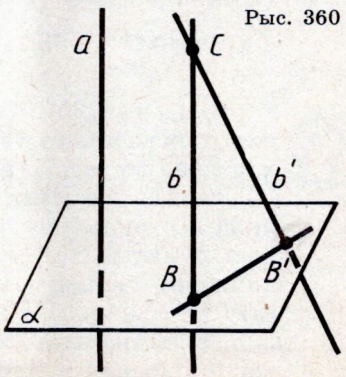
Задача (12). Дакажыце, што праз любы пункт A можна правесці прамую, перпендыкулярную дадзенай плоскасці α.

Рашэнне. Правядзём у плоскасці α дзве прамыя b і c, якія перасякаюцца (рыс. 359). Праз пункт іх перасячэння правядзём плоскасці β і γ, перпендыкулярныя прамым b і c адпаведна. Яны перасякаюцца па некаторай прамой a. Прамая a перпендыкулярная прамым b і c, а значыць, і плоскасці α. Правядзём цяпер праз пункт A прамую d, паралельную a. Па тэарэме 17.3 яна перпендыкулярная плоскасці α.

Тэарэма 17.4. ***Дзве прамыя, перпендыкулярныя адной і той жа плоскасці, паралельныя.***

Доказ. Няхай a і b — дзве прамыя, перпендыкулярныя плоскасці α (рыс. 360). Дапусцім, што прамыя a і b не паралельныя.

Рыс. 360



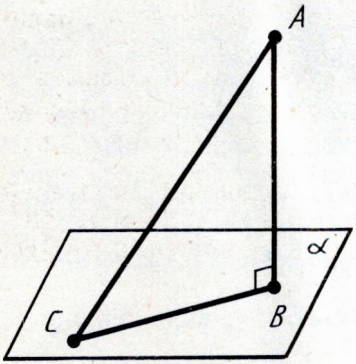
Выберам на прамой b пункт C, які не ляжыць у плоскасці α. Правядзём праз пункт C прамую b', паралельную прамой a. Прамая b' перпендыкулярная плоскасці α (тэарэма 17.3). Няхай B і B' — пункты перасячэння прамых b і b' з плоскасцю α. Тады прамая BB' перпендыкулярная прамым b і b', якія перасякаюцца. А гэта немагчыма. Мы прыйшлі да супярэчнасці. Тэарэма даказана.

147. ПЕРПЕНДЫКУЛЯР І НАХІЛЕНАЯ

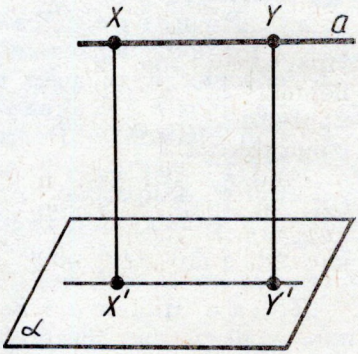
Няхай дадзены плоскасць і пункт, які не ляжыць на ёй. *Перпендыкулярам*, апушчаным з дадзенага пункта на дадзеную плоскасць, называецца адрэзак, які злучае дадзены пункт з пунктам плоскасці і ляжыць на прамой, перпендыкулярнай плоскасці. Канец гэтага адрэзка, які ляжыць у плоскасці, называецца *асновай перпендыкуляра*. *Адлегласцю* ад пункта да плоскасці называецца даўжыня перпендыкуляра, апушчанага з гэтага пункта на плоскасць.

Нахіленай, праведзенай з дадзенага пункта да дадзенай плоскасці, называецца любы адрэзак, што злучае дадзены пункт з пунктам на плоскасці, які не з'яўляецца перпендыкулярам да плоскасці. Канец адрэзка, які ляжыць у плоскасці, называецца *асновай нахіленай*. Адрэзак, які злучае асновы перпендыкуляра і нахіленай, праведзеных з аднаго і таго ж пункта, называецца *праекцыяй нахіленай*.

На рысунку 361 з пункта A праведзены да плоскасці α перпендыкуляр AB і нахіленая AC. Пункт B — аснова перпендыкуляра, пункт C — аснова нахіленай, BC — праекцыя нахіленай AC на плоскасць α.



Рыс. 361



Рыс. 362

Задача (26). Дакажыце, што калі прамая паралельная плоскасці, то ўсе яе пункты знаходзяцца на аднолькавай адлегласці ад плоскасці.

Рашэнне. Няхай a — дадзеная прамая і α — дадзеная плоскасць (рыс. 362). Возьмем на прамой a два адвольныя пункты X і Y. Іх адлегласці да плоскасці α — гэта даўжыні перпендыкуляраў XX' і YY', апушчаных на гэту плоскасць. Па тэарэме 17.4 прамыя XX' і YY' паралельныя, значыць, ляжаць у адной плоскасці. Гэта плоскасць перасякае плоскасць α па прамой $X'Y'$. Прамая a

паралельная прамой $X'Y'$, таму што не перасякае плоскасць α, у якой яна ляжыць. Такім чынам, у чатырохвугольніка $XX'Y'Y$ процілеглыя стораны паралельныя. Значыць, ён паралелаграм, а значыць $XX' = YY'$.

Адлегласцю ад прамой да паралельнай ёй плоскасці называецца адлегласць ад любога пункта гэтай прамой да плоскасці.

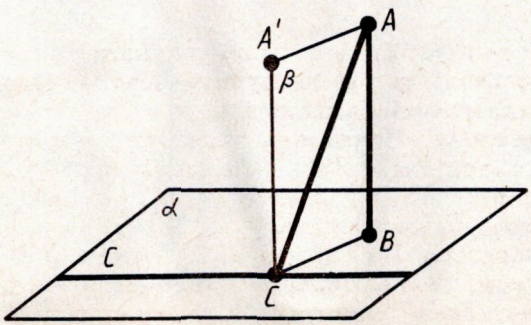
Дакладна гэтак жа, як у рашэнні задачы (26), даказваецца, што адлегласці ад любых двух пунктаў плоскасці да паралельнай плоскасці роўныя. У сувязі з гэтым *адлегласцю* паміж паралельнымі плоскасцямі называецца адлегласць ад любога пункта адной плоскасці да другой плоскасці.

148. ТЭАРЭМА АБ ТРОХ ПЕРПЕНДЫКУЛЯРАХ

Тэарэма 17.5. ***Калі прамая, праведзеная на плоскасці праз аснову нахіленай, перпендыкулярная яе праекцыі, то яна перпендыкулярная і нахіленай.*** І наадварот, ***калі прамая на плоскасці перпендыкулярная нахіленай, то яна перпендыкулярная і праекцыі нахіленай.***

Доказ. Няхай AB — перпендыкуляр да плоскасці α, AC — нахіленая і c — прамая ў плоскасці α, якая праходзіць праз аснову C нахіленай (рыс. 363). Правядзём прамую CA', паралельную прамой AB. Яна перпендыкулярная плоскасці α. Правядзём праз прамыя AB і $A'C$ плоскасць β. Прамая c перпендыкулярная прамой CA'. Калі яна перпендыкулярная прамой CB, то яна перпендыкулярная плоскасці β, а значыць, і прамой AC.

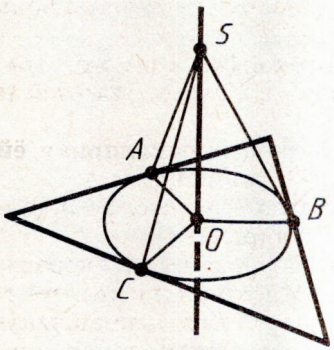
Аналагічна, калі прамая c перпендыкулярная нахіленай CA, то яна, з'яўляючыся перпендыкулярнай і прамой CA', перпендыкулярная плоскасці β, а значыць, і праекцыі нахіленай BC. Тэарэма даказана.



Рыс. 363

Задача (45). Праз цэнтр упісанай у трохвугольнік акружнасці праведзена прамая, перпендыкулярная плоскасці трохвугольніка. Дакажыце, што кожны пункт гэтай прамой роўнааддалены ад старон трохвугольніка.

Рашэнне. Няхай A, B, C — пункты дотыку старон трохвугольніка з акружнасцю, O — цэнтр акружнасці і S — пункт на перпендыкуляры (рыс. 364). Паколькі радыус OA перпендыкулярны старане трохвугольніка, то па тэарэме аб трох перпендыкулярах адрэзак SA ёсць перпендыкуляр да гэтай стараны, а яго даўжыня — адлегласць ад пункта S да стараны трохвугольніка. Па тэарэме Піфагора $SA=\sqrt{AO^2+OS^2}=\sqrt{r^2+OS^2}$, дзе r — радыус упісанай акружнасці. Аналагічна знаходзім: $SB=\sqrt{r^2+OS^2}$, $SC=\sqrt{r^2+OS^2}$, г. зн. усе адлегласці ад пункта S да старон трохвугольніка роўныя.

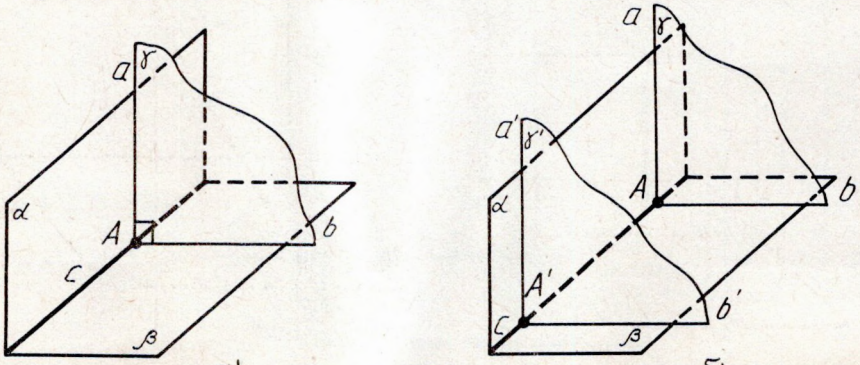


Рыс. 364

149. ПРЫЗНАК ПЕРПЕНДЫКУЛЯРНАСЦІ ПЛОСКАСЦЕЙ

Дзве плоскасці, якія перасякаюцца, называюцца *перпендыкулярнымі*, калі трэцяя плоскасць, перпендыкулярная прамой перасячэння гэтых плоскасцей, перасякае іх па перпендыкулярных прамых.

На рысунку 365, *а* вы бачыце дзве перпендыкулярныя плоскасці α і β, якія перасякаюцца па прамой c. Плоскасць γ, перпендыкулярная прамой c, перасякае плоскасці α і β па перпендыкулярных прамых a і b.



Рыс. 365

Любая плоскасць, перпендыкулярная лініі перасячэння перпендыкулярных плоскасцей, перасякае іх па перпендыкулярных прамых.

Сапраўды, калі ўзяць другую плоскасць γ', перпендыкулярную прамой c (рыс. 365, *б*), то яна перасячэ плоскасць α па прамой a', перпендыкулярнай c, а значыць, паралельнай прамой a, а плоскасць β — па прамой b', перпендыкулярнай c, а значыць, паралельнай прамой b. Па тэарэме 17.1 з перпендыкулярнасці прамых a і b вынікае перпендыкулярнасць прамых a' і b', што і трэба было даказаць.

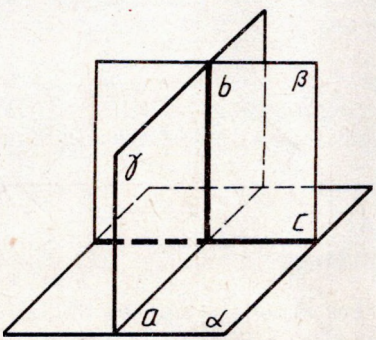
Тэарэма 17.6. ***Калі плоскасць праходзіць праз прамую, перпендыкулярную другой плоскасці, то гэтыя плоскасці перпендыкулярныя.***

Доказ. Няхай α — плоскасць, b — перпендыкулярная ёй прамая, β — плоскасць, якая праходзіць праз прамую b, і c — прамая, па якой перасякаюцца плоскасці α і β (рыс. 366). Дакажам, што плоскасці α і β перпендыкулярныя.

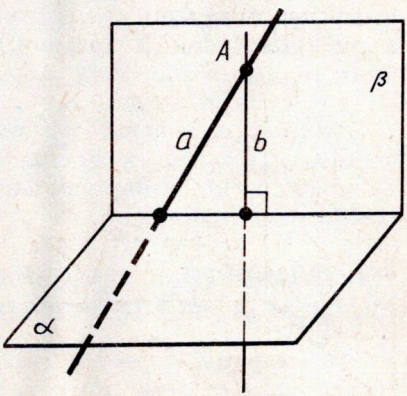
Правядзём у плоскасці α прамую a праз пункт перасячэння прамой b з плоскасцю α, перпендыкулярную прамой c. Правядзём праз прамыя a і b плоскасць γ. Яна перпендыкулярная прамой c, таму што прамая c перпендыкулярная прамым a і b. Паколькі прамыя a і b перпендыкулярныя, то плоскасці α і β перпендыкулярныя. Тэарэма даказана.

Задача (54). Дадзены прамая a і плоскасць α. Правядзіце праз прамую a плоскасць, перпендыкулярную плоскасці α.

Рашэнне. Праз адвольны пункт прамой a праводзім прамую b (рыс. 367), перпендыкулярную плоскасці α (задача 12). Праз прамыя a і b праводзім плоскасць β. Плоскасць β перпендыкулярная плоскасці α па тэарэме 17.6.

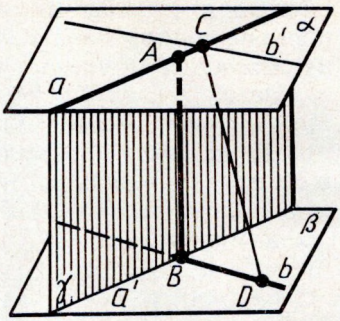


Рыс. 366



Рыс. 367

150. АДЛЕГЛАСЦЬ ПАМІЖ ПРАМЫМІ, ЯКІЯ СКРЫЖОЎВАЮЦЦА



Рыс. 368

Агульным перпендыкулярам дзвюх прамых, якія скрыжоўваюцца, называецца адрэзак з канцамі на гэтых прамых, які з'яўляецца перпендыкулярам да кожнай з іх.

Дакажам, што ***дзве прамыя, якія скрыжоўваюцца, маюць агульны перпендыкуляр, і прытым толькі адзін. Ён з'яўляецца агульным перпендыкулярам паралельных плоскасцей, якія праходзяць праз гэтыя прамыя.***

Сапраўды, няхай a і b — дадзеныя прамыя, якія скрыжоўваюцца (рыс. 368). Правядзём праз іх паралельныя плоскасці α і β. Прамыя, якія перасякаюць прамую a і перпендыкулярныя плоскаці α, ляжаць у адной плоскасці (γ). Гэта плоскасць перасякае плоскасць β па прамой a', паралельнай a. Няхай B — пункт перасячэння прамых a' і b. Тады прамая AB, якая перпендыкулярная плоскасці α, перпендыкулярная і плоскасці β, таму што β паралельная α. Адрэзак AB — агульны перпендыкуляр плоскасцей α і β, а значыць, і прамых a і b.

Дакажам, што гэты агульны перпендыкуляр адзіны. Дапусцім, што прамыя a і b маюць другі агульны перпендыкуляр CD. Правядзём праз пункт C прамую b', паралельную b. Прамая CD перпендыкулярная прамой b, а значыць, і b'. Паколькі яна перпендыкулярная прамой a, то яна перпендыкулярная плоскасці α, а значыць, паралельная прамой AB. Выходзіць, што праз прамыя AB і CD, як праз паралельныя, можна правесці плоскасць. У гэтай плоскасці павінны ляжаць нашы прамыя AC і BD, якія скрыжоўваюцца, а гэта немагчыма. Што і трэба было даказаць.

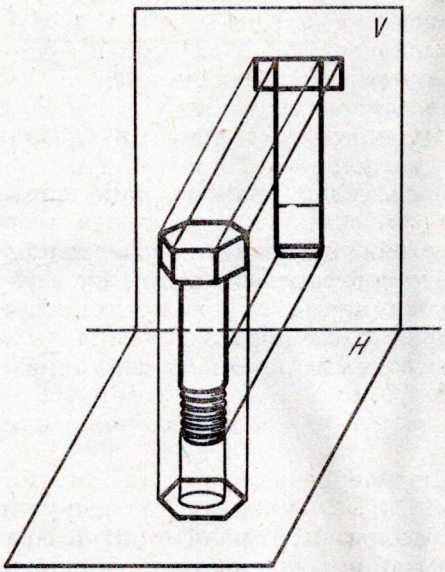
Адлегласцю паміж прамымі, якія скрыжоўваюцца, называецца даўжыня іх агульнага перпендыкуляра. Яна роўна адлегласці паміж паралельнымі плоскасцямі, якія праходзяць праз гэтыя прамыя.

151. ПРЫМЯНЕННЕ АРТАГАНАЛЬНАГА ПРАЕКТАВАННЯ Ў ТЭХНІЧНЫМ ЧАРЧЭННІ

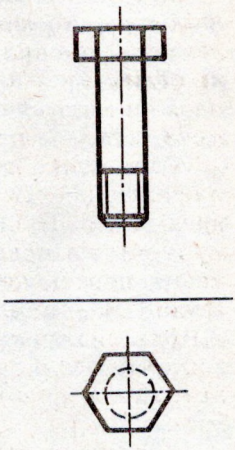
У чарчэнні прымяняецца артаганальнае праектаванне, г. зн. паралельнае праектаванне прамымі, перпендыкулярнымі плоскасці праекцыі. Чарцяжы дэталей машын атрым-

ліваюцца шляхам артаганальнага праектавання на адну, дзве ці тры ўзаемна перпендыкулярныя плоскасці. Гэтыя плоскасці называюцца плоскасцямі праекцый. Плоскасці праекцый з праекцыямі праектуемай дэталі на іх сумяшчаюцца паваротам каля прамых, па якіх яны перасякаюцца.

На рысунку 369 паказана выкананне чарцяжа балта шляхам праектавання на дзве плоскасці: гарызантальную H і вертыкальную V. Чарцёж балта ў дзвюх праекцыях паказаны на рысунку 370.



Рыс. 369



Рыс. 370

Пры выкананні чарцяжоў дэталей машын карыстаюцца рознымі ўмоўнасцямі, якія прадугледжаны стандартам. У прыватнасці, разьба ўмоўна паказваецца суцэльнай тонкай лініяй, а цэнтравыя і восевыя — штрыхпункцірнымі лініямі. Гэтыя ўмоўнасці паказу прыменены на чарцяжы балта (рыс. 370).

КАНТРОЛЬНЫЯ ПЫТАННІ

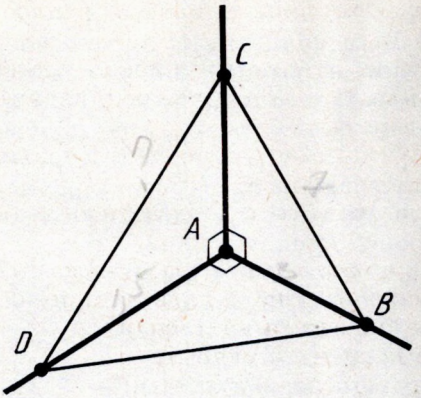
1. Якія прамыя ў прасторы называюцца перпендыкулярнымі?
2. Дакажыце, што прамыя, якія перасякаюцца і адпаведна паралельныя перпендыкулярным прамым, самі перпендыкулярныя.

3. Дайце азначэнне перпендыкулярнасці прамой і плоскасці.
4. Дакажыце прызнак перпендыкулярнасці прамой і плоскасці.
5. Дакажыце, што калі плоскасць перпендыкулярная адной з дзвюх паралельных прамых, то яна перпендыкулярная і другой.
6. Дакажыце, што дзве прамыя, якія перпендыкулярныя адной і той жа плоскасці, паралельныя.
7. Што такое перпендыкуляр, апушчаны з дадзенага пункта на плоскасць?
8. Што называецца адлегласцю ад пункта да плоскасці?
9. Што такое нахіленая, якая праведзена з дадзенага пункта да плоскасці? Што такое праекцыя нахіленай?
10. Дакажыце тэарэму аб трох перпендыкулярах.
11. Якія плоскасці называюцца перпендыкулярнымі?
12. Дакажыце прызнак перпендыкулярнасці плоскасцей.
13. Што такое агульны перпендыкуляр прамых, якія скрыжоўваюцца?
14. Дакажыце, што прамыя, якія скрыжоўваюцца, маюць агульны перпендыкуляр, і прытым толькі адзін. Ён з'яўляецца агульным перпендыкулярам паралельных плоскасцей, якія праходзяць праз гэтыя прамыя.
15. Што называецца адлегласцю паміж прамымі, якія скрыжоўваюцца?

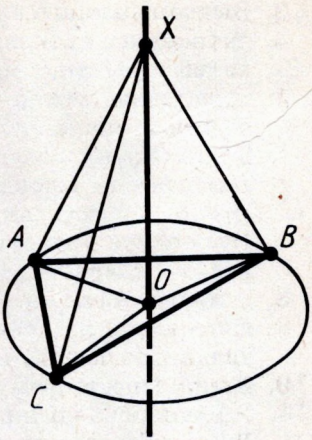


ЗАДАЧЫ

1. Дакажыце, што праз любы пункт прамой у прасторы можна правесці перпендыкулярную ёй прамую.
2. Дакажыце, што праз любы пункт прамой у прасторы можна правесці дзве розныя перпендыкулярныя да яе прамыя.
3. Прамыя AB, AC і AD парамі перпендыкулярныя (рыс. 371). Знайдзіце адрэзак CD, калі: 1) $AB = 3$ см, $BC = 7$ см, $AD = 1{,}5$ см; 2) $BD = 9$ см, $BC = 16$ см, $AD = 5$ см; 3) $AB = b$, $BC = a$, $AD = d$; 4) $BD = c$, $BC = a$, $AD = d$.
4*. Стораны чатырохвугольніка $ABCD$ і прамавугольніка $A_1B_1C_1D_1$ адпаведна паралельныя. Дакажыце, што $ABCD$ — прамавугольнік.
5. Дакажыце, што праз пункт, які не ляжыць у дадзенай плоскасці, нельга правесці больш за адну прамую, перпендыкулярную плоскасці.
6. Праз цэнтр апісанай каля трохвугольніка акружнасці праведзена прамая, перпендыкулярная плоскасці трохвугольніка. Дакажыце, што кожны пункт гэтай прамой роўнаддалены ад вяршынь трохвугольніка (рыс. 372).



Рыс. 371



Рыс. 372

7. Праз вяршыню A прамавугольніка $ABCD$ праведзена прамая AK, перпендыкулярная яго плоскасці. Адлегласці ад пункта K да іншых вяршынь прамавугольніка роўны 6 м, 7 м і 9 м. Знайдзіце адрэзак AK.
8. Праз вяршыню вострага вугла прамавугольнага трохвугольніка ABC з прамым вуглом C праведзена прамая AD, перпендыкулярная плоскасці трохвугольніка. Знайдзіце адлегласць ад пункта D да вяршынь B і C, калі $AC = a$, $BC = b$, $AD = c$.
9. Дакажыце, што праз дадзены пункт прамой можна правесці адну, і толькі адну перпендыкулярную ёй плоскасць.
10. Праз пункт A прамой a праведзены перпендыкулярныя ёй плоскасць β і прамая b. Дакажыце, што прамая b ляжыць у плоскасці β.
11. Дакажыце, што праз дадзены пункт плоскасці можна правесці адну, і толькі адну перпендыкулярную ёй прамую.
12. Дакажыце, што праз любы пункт A можна правесці прамую, перпендыкулярную дадзенай плоскасці α.
13. Праз вяршыню квадрата $ABCD$ праведзена прамая BM, перпендыкулярная яго плоскасці. Дакажыце, што: 1) прамая AD перпендыкулярная плоскасці прамых AB і BM; 2) прамая CD перпендыкулярная плоскасці прамых BC і BM.
14. Праз пункты A і B праведзены прамыя, перпендыкулярныя плоскасці α, якія перасякаюць яе ў пунктах C і D адпаведна. Знайдзіце адлегласць паміж пунктамі A і B, калі $AC = 3$ м, $BD = 2$ м, $CD = 2{,}4$ м і адрэзак AB не перасякае плоскасць α.
15. Верхнія канцы двух слупоў, якія стаяць вертыкальна, аддаленыя на адлегласць 3,4 м, злучаны перакладзінай.

Вышыня аднаго слупа 5,8 м, а другога — 3,9 м. Знайдзіце даўжыню перакладзіны.

16. Тэлефонны дрот даўжынёй 15 м працягнуты ад тэлефоннага слупа, дзе ён прымацаваны на вышыні 8 м ад паверхні зямлі, да дома, дзе яго прымацавалі на вышыні 20 м. Знайдзіце адлегласць паміж домам і слупам, дапускаючы, што дрот не правісае.

17. Пункт A знаходзіцца на адлегласці a ад вяршынь роўнастаронняга трохвугольніка са стараной a. Знайдзіце адлегласць ад пункта A да плоскасці трохвугольніка.

18. З пункта S па-за плоскасцю α праведзены да яе тры роўныя нахіленыя SA, SB, SC і перпендыкуляр SO. Дакажыце, што аснова перпендыкуляра O з'яўляецца цэнтрам акружнасці, апісанай каля трохвугольніка ABC.

19. Стораны роўнастаронняга трохвугольніка роўны 3 м. Знайдзіце адлегласць да плоскасці трохвугольніка ад пункта, які знаходзіцца на адлегласці 2 м ад кожнай з яго вяршынь.

20*. У раўнабедраным трохвугольніку аснова і вышыня роўны 4 м. Дадзены пункт знаходзіцца на адлегласці 6 м ад плоскасці трохвугольніка і на роўнай адлегласці ад яго вяршынь. Знайдзіце гэту адлегласць.

21. Адлегласці ад пункта A да вяршынь квадрата роўны a. Знайдзіце адлегласць ад пункта A да плоскасці квадрата, калі старана квадрата роўна b.

22. Знайдзіце геаметрычнае месца асноў нахіленых дадзенай даўжыні, праведзеных з дадзенага пункта да плоскасці.

23. З пункта да плоскасці праведзены дзве нахіленыя, роўныя 10 см і 17 см. Рознасць праекцый гэтых нахіленых роўна 9 см. Знайдзіце праекцыі нахіленых.

24. З пункта да плоскасці праведзены дзве нахіленыя. Знайдзіце даўжыні нахіленых, калі: 1) адна з іх на 26 см большая за другую, а праекцыі нахіленых роўны 12 см і 40 см; 2) нахіленыя адносяцца як 1 : 2, а праекцыі нахіленых роўны 1 см і 7 см.

25. З пункта да плоскасці праведзены дзве нахіленыя, роўныя 23 см і 33 см. Знайдзіце адлегласць ад гэтага пункта да плоскасці, калі праекцыі нахіленых адносяцца як 2 : 3.

26. Дакажыце, што калі прамая паралельная плоскасці, то ўсе яе пункты знаходзяцца на аднолькавай адлегласці ад плоскасці.

27. Праз вяршыню прамога вугла C прамавугольнага трохвугольніка ABC праведзена плоскасць, паралельная гіпатэнузе, на адлегласці 1 м ад яе. Праекцыі катэтаў на гэту плоскасць роўны 3 м і 5 м. Знайдзіце гіпатэнузу.

28. Праз адну старану ромба праведзена плоскасць на адлегласці 4 м ад процілеглай стараны. Праекцыі дыяганалей

на гэту плоскасць роўны 8 м і 2 м. Знайдзіце праекцыі старон.

29. З канцоў адрэзка AB, паралельнага плоскасці, праведзены перпендыкуляр AC і нахіленая BD, перпендыкулярная адрэзку AB (рыс. 373). Чаму роўна адлегласць CD, калі: $AB = a$, $AC = b$, $BD = c$?

30. Дакажыце, што адлегласці ад усіх пунктаў плоскасці да паралельнай плоскасці аднолькавыя.

31. Адлегласць паміж дзвюма паралельнымі плоскасцямі роўна a. Адрэзак даўжыні b сваімі канцамі ўпіраецца ў гэтыя плоскасці. Знайдзіце праекцыю адрэзка на кожную з плоскасцей.

32. Два адрэзкі даўжынь a і b упіраюцца канцамі ў дзве паралельныя плоскасці. Праекцыя першага адрэзка (даўжыні a) на плоскасць роўна c. Знайдзіце праекцыю другога адрэзка.

33. Канцы дадзенага адрэзка, які не перасякае плоскасць, аддалены ад яе на 0,3 м і 0,5 м. Як аддалены ад плоскасці пункт, што дзеліць дадзены адрэзак у адносіне 3 : 7?

34. Праз сярэдзіну адрэзка праведзена плоскасць. Дакажыце, што канцы адрэзка знаходзяцца на аднолькавай адлегласці ад гэтай плоскасці.

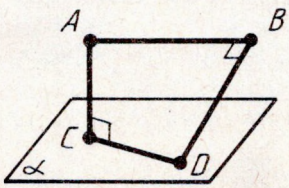
35. Праз дыяганаль паралелаграма праведзена плоскасць. Дакажыце, што канцы другой дыяганалі знаходзяцца на аднолькавай адлегласці ад гэтай плоскасці.

36. Знайдзіце адлегласць ад сярэдзіны адрэзка AB да плоскасці, якая не перасякае гэты адрэзак, калі адлегласці ад пунктаў A і B да плоскасці роўны: 1) 3,2 см і 5,3 см; 2) 7,4 см і 6,1 см; 3) a і b.

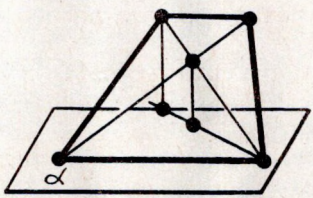
37*. Рашыце папярэднюю задачу, лічачы, што адрэзак AB перасякае плоскасць.

38. Адрэзак даўжынёй 1 м перасякае плоскасць, канцы яго аддалены ад плоскасці на 0,5 м і 0,3 м. Знайдзіце даўжыню праекцыі адрэзка на плоскасць.

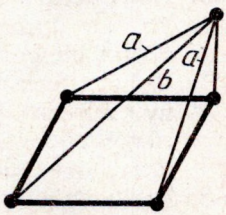
39*. Праз аснову трапецыі праведзена плоскасць, якая знаходзіцца ад другой асновы на адлегласці a. Знайдзіце адлегласць ад пункта перасячэння дыяганалей трапецыі да гэтай плоскасці, калі асновы трапецыі адносяцца як $m : n$ (рыс. 374).



Рыс. 373



Рыс. 374



Рыс. 375

40. Праз старану паралелаграма праведзена плоскасць на адлегласці a ад процілеглай стараны. Знайдзіце адлегласць ад пункта перасячэння дыяганалей паралелаграма да гэтай плоскасці.

41. З вяршыні квадрата ўзведзены перпендыкуляр да яго плоскасці. Адлегласць ад канца гэтага перпендыкуляра да іншых вяршынь квадрата a і b ($a < b$). Знайдзіце даўжыню перпендыкуляра і старану квадрата (рыс. 375).

42. З вяршыні прамавугольніка ўзведзены перпендыкуляр да яго плоскасці. Адлегласці ад канца гэтага перпендыкуляра да іншых вяршынь прамавугольніка роўны a, b, c ($a < c$, $b < c$). Знайдзіце даўжыню перпендыкуляра і стораны прамавугольніка.

43. З дадзенага пункта да плоскасці праведзены дзве роўныя нахіленыя даўжынёй 2 м. Знайдзіце адлегласць ад пункта да плоскасці, калі нахіленыя ўтвараюць вугал 60°, а іх праекцыі перпендыкулярныя.

44. З пункта, які знаходзіцца ад плоскасці на адлегласці 1м, праведзены дзве роўныя нахіленыя. Знайдзіце адлегласць паміж асновамі нахіленых, калі вядома, што нахіленыя перпендыкулярныя і ўтвараюць з перпендыкулярам да плоскасці вуглы, роўныя 60°.

45. Праз цэнтр упісанай у трохвугольнік акружнасці праведзена прамая, перпендыкулярная плоскасці трохвугольніка. Дакажыце, што кожны пункт гэтай прамой роўнааддалены ад старон трохвугольніка.

46. Да плоскасці трохвугольніка з цэнтра ўпісанай у яго акружнасці радыуса 0,7 м узведзены перпендыкуляр даўжынёй 2,4 м. Знайдзіце адлегласць ад канца гэтага перпендыкуляра да старон трохвугольніка.

47. Адлегласць ад дадзенага пункта да плоскасці трохвугольніка роўна 1,1 м, а да кожнай з яго старон — 6,1 м. Знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у гэты трохвугольнік.

48. З вяршыні роўнастаронняга трохвугольніка ABC узведзены перпендыкуляр AD да плоскасці трохвугольніка. Знайдзіце адлегласць ад пункта D да стараны BC, калі $AD = 13$ см, $BC = 6$ см.

49. Праз канец A адрэзка AB даўжыні b праведзена плоскасць, перпендыкулярная адрэзку, і ў гэтай плоскасці праведзена прамая. Знайдзіце адлегласць ад пункта B да прамой, калі адлегласць ад пункта A да прамой роўна a.

50. Адлегласць ад пункта A да ўсіх старон квадрата роўна a. Знайдзіце адлегласць ад пункта A да плоскасці квадрата, калі дыяганаль квадрата роўна d.

51*. Пункт M, які ляжыць па-за плоскасцю дадзенага прамога вугла, аддалены ад вяршыні вугла на адлегласць a, а ад

яго старон на адлегласць b. Знайдзіце адлегласць ад пункта M да плоскасці вугла.

52*. Дадзены раўнабедраны трохвугольнік з асновай 6 м і бакавой стараной 5 м. З цэнтра ўпісанага круга ўзведзены перпендыкуляр да плоскасці трохвугольніка даўжынёй 2 м. Знайдзіце адлегласць ад канца гэтага перпендыкуляра да старон трохвугольніка.

53. З вяршыні прамога вугла C трохвугольніка ABC узведзены перпендыкуляр CD да плоскасці трохвугольніка. Знайдзіце адлегласці ад пункта D да гіпатэнузы трохвугольніка, калі $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$.

54. Дадзены прамая a і плоскасць α. Правядзіце праз прамую a плоскасць, перпендыкулярную плоскасці α.

55. Дадзены прамая a і плоскасць α. Дакажыце, што ўсе прамыя, якія перпендыкулярныя плоскасці α і перасякаюць прамую a, ляжаць у адной плоскасці, перпендыкулярнай плоскасці α.

56. З вяршынь A і B роўнастаронняга трохвугольніка ABC узведзены перпендыкуляры AA_1 і BB_1 да плоскасці трохвугольніка. Знайдзіце адлегласць ад вяршыні C да сярэдзіны адрэзка A_1B_1, калі $AB = 2$ м, $CA_1 = 3$ м, $CB_1 = 7$ м і адрэзак A_1B_1 не перасякае плоскасць трохвугольніка.

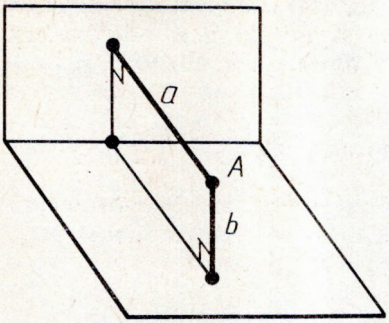
57. З вяршынь A і B вострых вуглоў прамавугольнага трохвугольніка ABC узведзены перпендыкуляры AA_1 і BB_1 да плоскасці трохвугольніка. Знайдзіце адлегласць ад вяршыні C да сярэдзіны адрэзка A_1B_1, калі $A_1C = 4$ м, $A_1A = 3$ м, $B_1C = 6$ м, $B_1B = 2$ м і адрэзак A_1B_1 не перасякае плоскасць трохвугольніка.

58*. Дакажыце, што калі прамая, якая ляжыць у адной з дзвюх перпендыкулярных плоскасцей, перпендыкулярная лініі іх перасячэння, то яна перпендыкулярная і другой плоскасці.

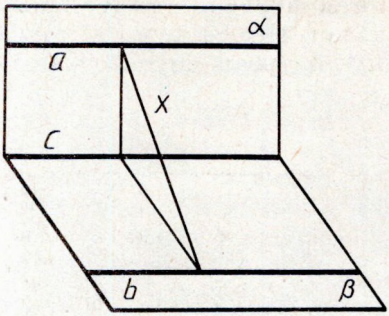
59. З пунктаў A і B, якія ляжаць у дзвюх перпендыкулярных плоскасцях, апушчаны перпендыкуляры AC і BD на прамую перасячэння плоскасцей. Знайдзіце даўжыню адрэзка AB, калі: 1) $AC = 6$ м, $BD = 7$ м, $CD = 6$ м; 2) $AC = 3$ м, $BD = 4$ м, $CD = 12$ м; 3) $AD = 4$ м, $BC = 7$ м, $CD = 1$ м; 4) $AD = BC = 5$ м, $CD = 1$ м; 5) $AC = a$, $BD = b$, $CD = c$; 6) $AD = a$, $BC = b$, $CD = c$.

60. Пункт знаходзіцца на адлегласцях a і b ад дзвюх перпендыкулярных плоскасцей. Знайдзіце адлегласць ад гэтага пункта да прамой перасячэння плоскасцей (рыс. 376).

61. Плоскасці α і β перпендыкулярныя. У плоскасці α узяты пункт A, адлегласць ад якога да прамой c (лініі перасячэння плоскасцей) роўна 0,5 м. У плоскасці β праведзена прамая b, якая паралельная прамой c і знаходзіцца ад яе



Рыс. 376



Рыс. 377

на адлегласці 1,2 м. Знайдзіце адлегласць ад пункта A да прамой b.

62. Перпендыкулярныя плоскасці α і β перасякаюцца па прамой c. У плоскасці α праведзена прамая $a \| c$, у плоскасці β — прамая $b \| c$. Знайдзіце адлегласць паміж прамымі a і b, калі адлегласць паміж прамымі a і c роўна 1,5 м, а паміж прамымі b і c — 0,8 м (рыс. 377).

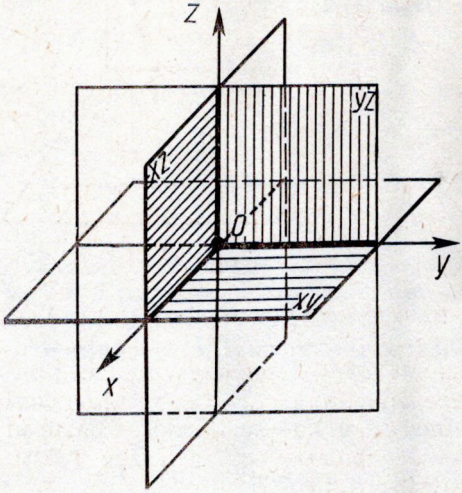
§ 18. ДЭКАРТАВЫ КААРДЫНАТЫ І ВЕКТАРЫ Ў ПРАСТОРЫ

152. УВЯДЗЕННЕ ДЭКАРТАВЫХ КААРДЫНАТ У ПРАСТОРЫ

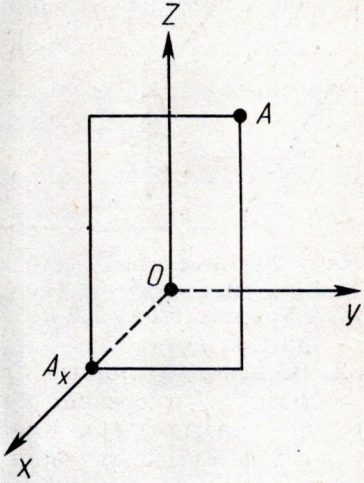
Возьмем тры ўзаемна перпендыкулярныя прамыя x, y, z, якія перасякаюцца ў адным пункце O (рыс. 378). Правядзём праз кожную пару гэтых прамых плоскасць. Плоскасць, якая праходзіць праз прамыя x і y, называецца плоскасцю xy. Дзве іншыя плоскасці называюцца адпаведна xz і yz. Прамыя x, y, z называюцца *каардынатнымі восямі* (ці *восямі каардынат*), пункт іх перасячэння O — *пачаткам каардынат*, а плоскасці xy, yz і xz — *каардынатнымі плоскасцямі*. Пункт O разбівае кожную з восей каардынат на дзве паўпрамыя — паўвосі, якія мы ўмовімся называць дадатнай і адмоўнай.

Возьмем цяпер адвольны пункт A і правядзём праз яго плоскасць, паралельную плоскасці yz (рыс. 379). Яна перасякае вось x у некаторым пункце A_x. *Каардынатай* x пункта A будзем называць лік, роўны па абсалютнай велічыні даўжыні адрэзка OA_x: дадатны, калі пункт A_x ляжыць на дадатнай паўвосі x, і адмоўны, калі ён ляжыць на адмоўнай паўвосі. Калі пункт A_x супадае з пунктам O, то дапускаем $x = 0$. Аналагічна вызначаюцца каардынаты y і z пункта A. Каардыі-

наты пункта будзем запісваць у дужках побач з літарным абазначэннем пункта: $A(x; y; z)$. Часам будзем абазначаць пункт проста яго каардынатамі $(x; y; z)$.



Рыс. 378



Рыс. 379

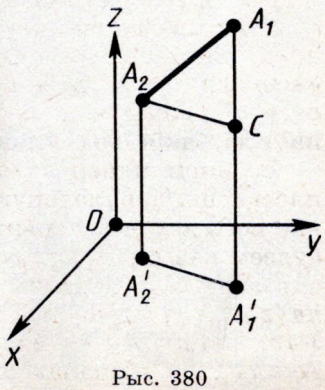
Задача (2). Дадзены пункты $A(1; 2; 3)$, $B(0; 1; 2)$, $C(0; 0; 3)$, $D(1; 2; 0)$. Якія з гэтых пунктаў ляжаць: 1) у плоскасці xy; 2) на восі z; 3) у плоскасці yz?

Рашэнне. У пунктаў плоскасці xy каардыната z роўна нулю. Таму толькі пункт D ляжыць у плоскасці xy. У пунктаў плоскасці yz каардыната x роўна нулю. Такім чынам, пункты B і C ляжаць у плоскасці yz. У пунктаў на восі z дзве каардынаты (x і y) роўны нулю. Таму толькі пункт C ляжыць на восі z.

153. АДЛЕГЛАСЦЬ ПАМІЖ ПУНКТАМІ Ў ДЭКАРТАВЫХ КААРДЫНАТАХ

Выразім адлегласць паміж двума пунктамі $A_1(x_1; y_1; z_1)$ і $A_2(x_2; y_2; z_2)$ праз каардынаты гэтых пунктаў.

Разгледзім спачатку выпадак, калі прамая A_1A_2 не паралельная восі z (рыс. 380). Правядзём праз пункты A_1 і A_2 прамыя, паралельныя восі z. Яны перасякуць плоскасць xy у пунктах A_1' і A_2'. Гэтыя пункты маюць тыя ж самыя



Рыс. 380

каардынаты x, y, што і пункты A_1, A_2, а каардыната z у іх роўна нулю. Правядзём цяпер плоскасць праз пункт A_2, паралельную плоскасці xy. Яна перасячэ прамую A_1A_1' ў некаторым пункце C. Згодна з тэарэмай Піфагора

$$A_1A_2^2 = A_1C^2 + CA_2^2.$$

Адрэзкі CA_2 і $A_1'A_2'$ роўныя, а

$$A_1'A_2'^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Даўжыня адрэзка A_1C роўна $|z_1 - z_2|$. Таму

$$A_1A_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Калі адрэзак A_1A_2 паралельны восі z, то $A_1A_2 = |z_1 - z_2|$. Той жа рэзультат дае і атрыманая формула, таму што ў гэтым выпадку $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Такім чынам, ***адлегласць паміж пунктамі A_1 і A_2 вылічваецца па формуле***

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Задача (5). У плоскасці xy знайсці пункт $D(x; y; 0)$, роўнааддалены ад трох пунктаў: $A(0; 1; -1)$, $B(-1; 0; 1)$, $C(0; -1; 0)$.

Рашэнне. Маем:

$$AD^2 = (x - 0)^2 + (y - 1)^2 + (0 + 1)^2,$$
$$BD^2 = (x + 1)^2 + (y - 0)^2 + (0 - 1)^2,$$
$$CD^2 = (x - 0)^2 + (y + 1)^2 + (0 - 0)^2.$$

Прыраўноўваючы першыя дзве адлегласці да трэцяй, атрымаем два ўраўненні для вызначэння x і y:

$$-4y + 1 = 0, \quad 2x - 2y + 1 = 0.$$

Адсюль $y = \frac{1}{4}$, $x = -\frac{1}{4}$. Шукаемы пункт $D\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; 0\right)$.

154. КААРДЫНАТЫ СЯРЭДЗІНЫ АДРЭЗКА

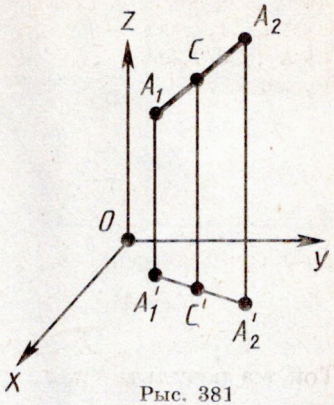
Няхай $A_1(x_1; y_1; z_1)$ і $A_2(x_2; y_2; z_2)$ — два адвольныя пункты. Выразім каардынаты x, y, z сярэдзіны C адрэзка A_1A_2 праз каардынаты яго канцоў A_1 і A_2 (рыс. 381). Для гэтага правядзём праз пункты A_1, A_2 і C прамыя, паралельныя восі z. Яны перасякуць плоскасць xy у пунктах $A_1'(x_1; y_1; 0)$, $A_2'(x_2; y_2; 0)$ і $C'(x; y; 0)$. Па тэарэме Фалеса пункт C' з'яўляецца сярэдзінай адрэзка $A_1'A_2'$. А мы ведаем, што на плоскасці xy каардынаты

сярэдзіны адрэзка выражаюцца праз каардынаты яго канцоў па формулах

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Для таго каб знайсці выраз для z, дастаткова замест плоскасці xy узяць плоскасць xz або yz. Пры гэтым для z атрымліваецца аналагічная формула:

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$



Рыс. 381

З а д а ч а (9). Дакажыце, што чатырохвугольнік $ABCD$ з вяршынямі ў пунктах $A(1; 3; 2)$, $B(0; 2; 4)$, $C(1; 1; 4)$, $D(2; 2; 2)$ — паралелаграм.

Р а ш э н н е. Як мы ведаем, чатырохвугольнік, у якога дыяганалі перасякаюцца і пунктам перасячэння дзеляцца папалам, ёсць паралелаграм. Выкарыстаем гэта для рашэння задачы. Каардынатамі сярэдзіны адрэзка AC будуць:

$$x = \frac{1+1}{2} = 1, \qquad y = \frac{3+1}{2} = 2, \qquad z = \frac{2+4}{2} = 3.$$

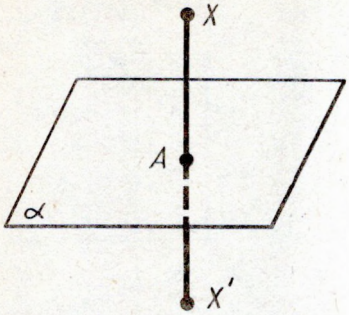
Каардынатамі сярэдзіны адрэзка BD будуць:

$$x = \frac{0+2}{2} = 1, \qquad y = \frac{2+2}{2} = 2, \qquad z = \frac{4+2}{2} = 3.$$

Мы бачым, што каардынаты сярэдзін адрэзкаў AC і BD аднолькавыя. Значыць, гэтыя адрэзкі перасякаюцца і пунктам перасячэння дзеляцца папалам. Такім чынам, чатырохвугольнік $ABCD$ — паралелаграм.

155. ПЕРАЎТВАРЭННЕ СІМЕТРЫІ Ў ПРАСТОРЫ

Паняцце пераўтварэння для фігур у прасторы вызначаецца гэтак жа, як і на плоскасці. Гэтак жа, як і на плоскасці, вызначаюцца пераўтварэнні сіметрыі адносна пункта і прамой.



Рыс. 382

Акрамя сіметрыі адносна пункта і прамой у прасторы, разглядаюць пераўтварэнне сіметрыі адносна плоскасці. Гэта пераўтварэнне заключаецца ў наступным (рыс. 382). Няхай α — адвольная фіксаваная плоскасць. З пункта X фігуры апускаем перпендыкуляр XA на плоскасць α і на яго прадаўжэнні за пункт A адкладваем адрэзак AX', роўны XA. Пункт X' называецца *сіметрычным* пункту X адносна плоскасці α, а пераўтварэнне, якое пераводзіць пункт X у сіметрычны яму пункт X', называецца *пераўтварэннем сіметрыі адносна плоскасці* α.

Калі пункт X ляжыць у плоскасці α, то лічыцца, што пункт X пераходзіць у сябе. Калі пераўтварэнне сіметрыі адносна плоскасці α пераводзіць фігуру ў сябе, то фігура называецца *сіметрычнай адносна плоскасці* α, а плоскасць α называецца *плоскасцю сіметрыі* гэтай фігуры.

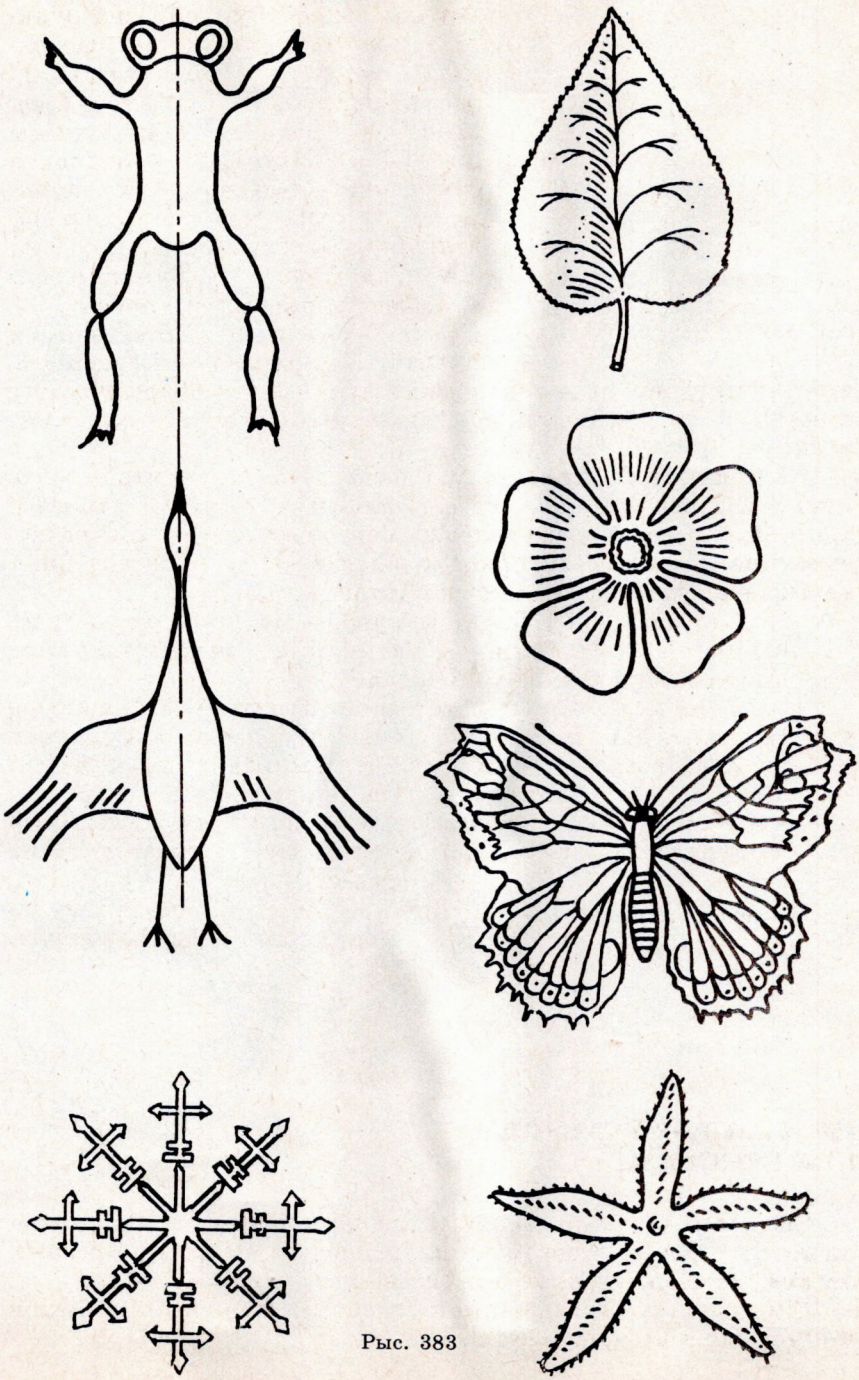
З а д а ч а (17). Дадзены пункты (1; 2; 3), (0; —1; 2), (1; 0; —3). Знайдзіце пункты, сіметрычныя дадзеным адносна каардынатных плоскасцей.

Р а ш э н н е. Пункт, сіметрычны пункту (1; 2; 3) адносна плоскасці xy, ляжыць на прамой, перпендыкулярнай плоскасці xy. Таму яна мае тыя ж каардынаты x і y: $x = 1$, $y = 2$. Сіметрычны пункт знаходзіцца на той жа адлегласці ад плоскасці xy, але па другі бок ад яе. Таму каардыната z у яе адрозніваецца толькі знакам, г. зн. $z = -3$. Такім чынам, пункт, сіметрычны пункту (1; 2; 3) адносна плоскасці xy, будзе (1; 2; —3). Для іншых пунктаў і іншых каардынатных плоскасцей рашэнне аналагічнае.

156. СІМЕТРЫЯ Ў ПРЫРОДЗЕ І НА ПРАКТЫЦЫ

Сіметрыя шырока распаўсюджана ў прыродзе. Яе можна назіраць у форме лісця і кветак раслін, у размяшчэнні розных органаў жывёл, у форме крышталічных цел (рыс. 383).

Сіметрыя шырока выкарыстоўваецца на практыцы, у будаўніцтве і тэхніцы (рыс. 384).



Рыс. 383

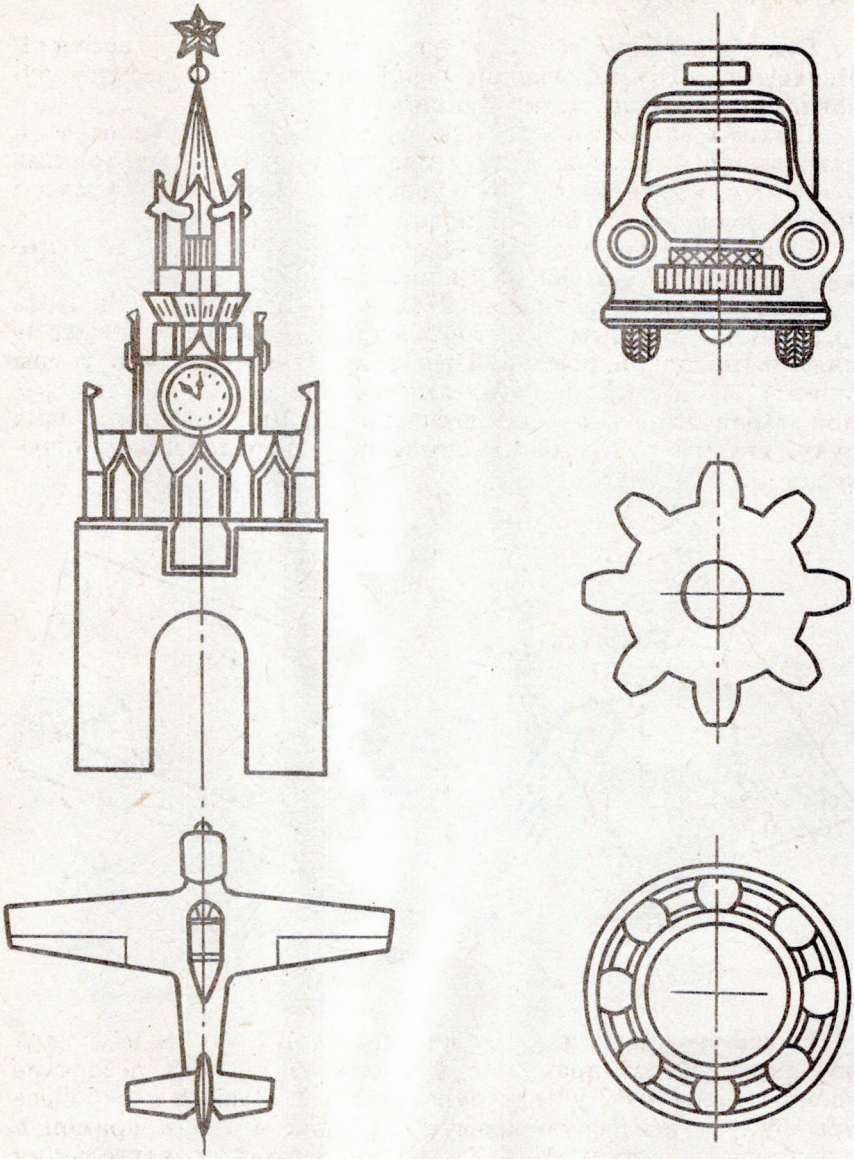


Рис. 384

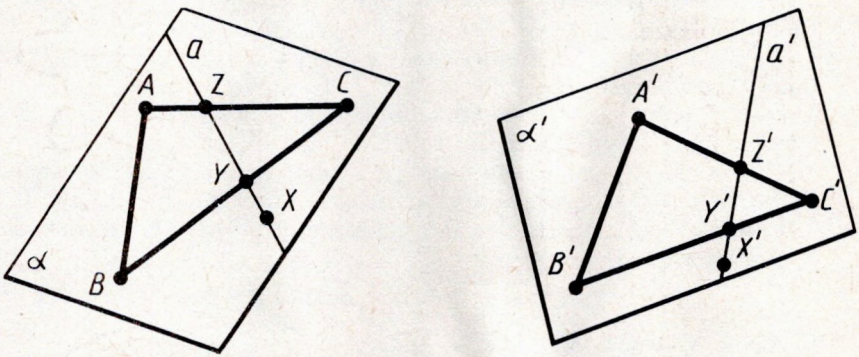
157. РУХ У ПРАСТОРЫ

Рух у прасторы вызначаецца таксама, як і на плоскасці. Менавіта: *рухам* называецца пераўтварэнне, пры якім захоўваюцца адлегласці паміж пунктамі.

Літаральна гэтак жа, як і для руху на плоскасці, даказваецца, што пры руху ў прасторы прамыя пераходзяць у прамыя, паўпрамыя — у паўпрамыя, адрэзкі — у адрэзкі і захоўваюцца вуглы паміж паўпрамымі.

Новай уласцівасцю руху ў прасторы з'яўляецца тое, што ***рух пераводзіць плоскасці ў плоскасці.***

Дакажам гэту ўласцівасць. Няхай α — адвольная плоскасць (рыс. 385). Адзначым на ёй любыя тры пункты A, B, C, якія не ляжаць на адной прамой. Пры руху яны пяройдуць у тры пункты A', B', C', якія таксама не ляжаць на адной прамой. Правядзём праз іх плоскасць α'. Дакажам, што пры руху, які мы разглядаем, плоскасць α пераходзіць у плоскасць a'.



Рыс. 385

Няхай X — адвольны пункт плоскасці α. Правядзём праз яго якую-небудзь прамую a ў плоскасці α, якая перасякае трохвугольнік ABC у двух пунктах Y і Z. Прамая a пяройдзе пры руху ў некаторую прамую a'. Пункты Y і Z прамой a пяройдуць у пункты Y' і Z', якія належаць трохвугольніку $A'B'C'$, а значыць, плоскасці α'. Такім чынам, прамая a' ляжыць у плоскасці α'. Пункт X пры руху пераходзіць у пункт X' прамой a', а значыць, і плоскасці α', што і трэба было даказаць.

У прасторы, таксама як і на плоскасці, дзве фігуры называюцца *роўнымі*, калі яны сумяшчаюцца рухам.

158. ПАРАЛЕЛЬНЫ ПЕРАНОС У ПРАСТОРЫ

Паралельным пераносам у прасторы называецца такое пераўтварэнне, пры якім адвольны пункт $(x; y; z)$ фігуры пераходзіць у пункт $(x + a; y + b; z + c)$, дзе лікі a, b, c адны і тыя ж для ўсіх пунктаў $(x; y; z)$. Паралельны пераносу прасторы задаецца формуламі

$$x' = x + a,\ y' = y + b,\ z' = z + c,$$

што выражаюць каардынаты x', y', z' пункта, у які пераходзіць пункт $(x; y; z)$ пры паралельным пераносе. Гэтак жа, як і на плоскасці, даказваюцца наступныя ўласцівасці паралельнага пераносу:

1. Паралельны перанос ёсць рух.

2. Пры паралельным пераносе пункты зрушваюцца па паралельных (або якія супадаюць) прамых на адну і тую ж адлегласць.

3. Пры паралельным пераносе кожная прамая пераходзіць у паралельную ёй прамую (або ў сябе).

4. Якія б ні былі пункты A і A', існуе адзіны паралельны перанос, пры якім пункт A пераходзіць у пункт A'.

З а д а ч а (23). Знайдзіце значэнні a, b, c у формулах паралельнага пераносу $x' = x + a$, $y' = y + b$, $z' = z + c$, калі пры гэтым паралельным пераносе пункт $A(1; 0; 2)$ пераходзіць у пункт $A'(2; 1; 0)$.

Р а ш э н н е. Падстаўляючы ў формулы паралельнага пераносу каардынаты пунктаў A і A', г. зн. $x = 1$, $y = 0$, $z = 2$, $x' = 2$, $y' = 1$, $z' = 0$, атрымаем ураўненні, з якіх вызначаюцца a, b, c:

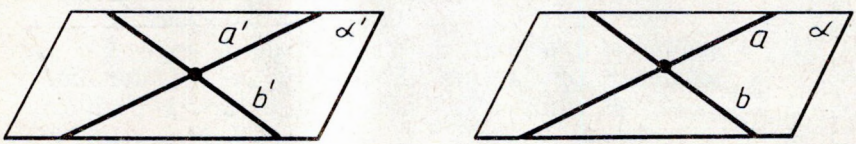
$$2 = 1 + a,\ 1 = 0 + b,\ 0 = 2 + c.$$

Адсюль $a = 1$, $b = 1$, $c = -2$.

Новай для паралельнага пераносу ў прасторы з'яўляецца наступная ўласцівасць:

5. ***Пры паралельным пераносе ў прасторы кожная плоскасць пераходзіць або ў сябе, або ў паралельную ёй плоскасць.***

Сапраўды, няхай α — адвольная плоскасць (рыс. 386). Правядзём у гэтай плоскасці дзве прамыя a і b, што перася-



Рыс. 386

каюцца. Пры паралельным пераносе прамыя a і b пераходзяць або ў сябе, або ў паралельныя прамыя a' і b'. Плоскасць α пераходзіць у некаторую плоскасць α', якая праходзіць праз прамыя a' і b'. Калі плоскасць α' не супадае з α, то па тэарэме 16.4 яна паралельная α, што і трэба было даказаць.

159. ПАДОБНАСЦЬ ПРАСТОРАВЫХ ФІГУР

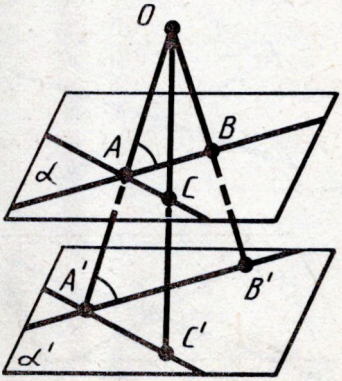
Пераўтварэнне падобнасці ў прасторы вызначаецца таксама, як і на плоскасці. Менавіта: пераўтварэнне фігуры F называецца пераўтварэннем падобнасці, калі пры гэтым пераўтварэнні адлегласці паміж пунктамі змяняюцца ў адзін і той жа лік разоў, г. зн. для любых двух пунктаў X і Y фігуры F і пунктаў X', Y' фігуры F', у якія яны пераходзяць, $X'Y' = k \cdot XY$.

Таксама, як і на плоскасці, пераўтварэнне падобнасці ў прасторы пераводзіць прамыя ў прамыя, паўпрамыя ў паўпрамыя, адрэзкі ў адрэзкі і захоўвае вуглы паміж паўпрамымі. Такімі ж разважаннямі, як у п. 157, даказваецца, што пераўтварэнне падобнасці пераводзіць плоскасці ў плоскасці. Таксама, як і на плоскасці, дзве фігуры называюцца *падобнымі*, калі яны пераводзяцца адна ў другую пераўтварэннем падобнасці.

Найпрасцейшым пераўтварэннем падобнасці ў прасторы з'яўляецца гаматэтыя. Таксама, як і на плоскасці, *гаматэтыя* адносна цэнтра O з каэфіцыентам гаматэтыі k — гэта пераўтварэнне, якое пераводзіць адвольны пункт X у пункт X' праменя OX, такі, што $OX' = k \cdot OX$.

Пераўтварэнне гаматэтыі ў прасторы пераводзіць любую плоскасць, якая не праходзіць праз цэнтр гаматэтыі, у паралельную плоскасць (ці ў сябе пры $k = 1$).

Сапраўды, няхай O — цэнтр гаматэтыі і α — любая плоскасць, якая не праходзіць праз пункт O (рыс. 387). Возьмем любую прамую AB у плоскасці α. Пераўтварэнне гаматэтыі пераводзіць пункт A ў пункт A' на прамені OA, а пункт B у пункт B' на прамені OB, прычым $\frac{OA'}{OA} = k$, $\frac{OB'}{OB} = k$, дзе k — каэфіцыент гаматэтыі. Адсюль вынікае падобнасць трохвугольнікаў AOB і $A'OB'$. З падобнасці трохвугольнікаў вынікае роўнасць адпаведных вуглоў OAB і $OA'B'$, а значыць, паралельнасць прамых AB і $A'B'$.



Рыс. 387

Возьмем цяпер другую прямую AC у плоскасці α. Яна пры гаматэтыі пяройдзе ў паралельную прямую $A'C'$. Пры разглядаемай гаматэтыі плоскасць α пяройдзе ў плоскасць α', якая праходзіць праз прамыя $A'B'$, $A'C'$. Паколькі $A'B' \parallel AB$ і $A'C' \parallel AC$, то па тэарэме 16.4 плоскасці α і α' паралельныя, што і трэба было даказаць.

160. ВУГАЛ ПАМІЖ ПРАМЫМІ, ЯКІЯ СКРЫЖОЎВАЮЦЦА

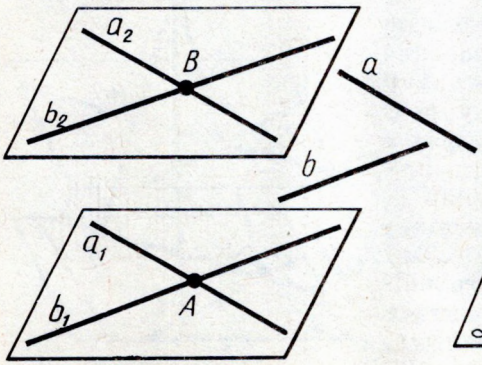
Дзве прамыя, якія перасякаюцца, утвараюць сумежныя і вертыкальныя вуглы. Вертыкальныя вуглы роўныя, а сумежныя вуглы дапаўняюць адзін аднаго да 180°. Вуглавая мера меншага з іх называецца *вуглом паміж прамымі*. Вугал паміж перпендыкулярнымі прамымі роўны 90° па азначэнню. Вугал паміж паралельнымі прамымі лічым роўным нулю.

Вуглом паміж прамымі, якія скрыжоўваюцца, называецца вугал паміж паралельнымі ім прамымі, што перасякаюцца.

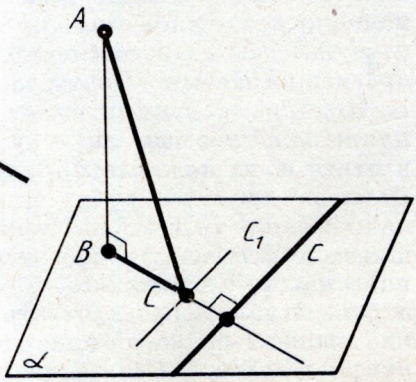
Гэты вугал не залежыць ад таго, якія ўзяты прамыя, што перасякаюцца. Дакажам гэта.

Няхай a_1 і b_1 — прамыя, якія перасякаюцца ў пункце A і паралельныя дадзеным прамым a і b, што скрыжоўваюцца (рыс. 388). Няхай a_2 і b_2 — іншыя прамыя, якія перасякаюцца ў пункце B і паралельныя дадзеным. Па тэарэме 16.2 прамыя a_1 і a_2 паралельныя (або супадаюць) і прамыя b_1 і b_2 паралельныя (або супадаюць).

Выканаем паралельны перанос, пры якім пункт A пераходзіць у пункт B. Паколькі пры паралельным пераносе кожная прамая пераходзіць або ў сябе, або ў паралельную прамую, то дадзены паралельны перанос пераводзіць прамую a_1 ў прамую a_2, а прамую b_1 — у прамую b_2. Паколькі паралельны



Рыс. 388



Рыс. 389

перанос захоўвае велічыню вугла, то вугал паміж прамымі a_1 і b_1 роўны вуглу паміж прамымі a_2 і b_2. А гэта і трэба было даказаць.

Па дадзенаму раней азначэнню перпендыкулярнымі называюцца прамыя, якія перасякаюцца пад прамым вуглом. Аднак часам прамыя, якія скрыжоўваюцца, таксама называюць перпендыкулярнымі, калі вугал паміж імі роўны 90°.



З а д а ч а (33). Дакажыце, што любая прамая на плоскасці, перпендыкулярная праекцыі нахіленай на гэту плоскасць, перпендыкулярная і нахіленай. І наадварот, калі прамая на плоскасці перпендыкулярная нахіленай, то яна перпендыкулярная і праекцыі нахіленай.

Р а ш э н н е. Няхай AB — перпендыкуляр да плоскасці α, AC — нахіленая і c — прамая ў плоскасці α, перпендыкулярная BC (рыс. 389). Правядзём праз аснову C нахіленай прамую $c_1 \parallel c$.

Па тэарэме аб трох перпендыкулярах c_1 перпендыкулярная нахіленай AC. А паколькі вугал паміж прамой c і нахіленай AC роўны вуглу паміж прамымі AC і c_1, то прамая c таксама перпендыкулярная нахіленай AC.

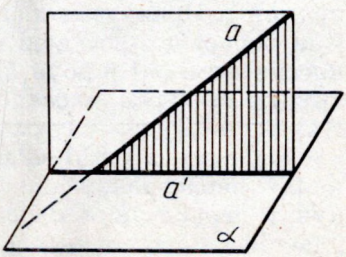
Наадварот: калі прамая c перпендыкулярная нахіленай AC, то прамая c_1 таксама перпендыкулярная ёй, а значыць, па тэарэме аб трох перпендыкулярах і яе праекцыі BC. Паколькі $c \parallel c_1$, то $c \perp BC$.

161. ВУГАЛ ПАМІЖ ПРАМОЙ І ПЛОСКАСЦЮ

Вызначым паняцце вугла паміж прамой і плоскасцю.

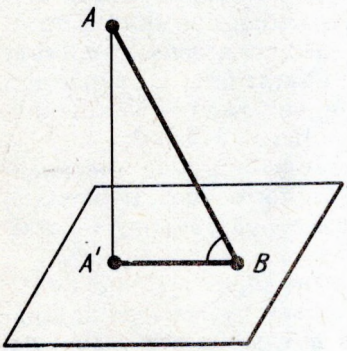
Няхай α — плоскасць і a — прамая, якая яе перасякае і не перпендыкулярная плоскасці α (рыс. 390). Асновы перпендыкуляраў, якія апушчаны з пунктаў прамой a на плоскасць α, ляжаць на прамой a'. Гэта прамая называецца *праекцыяй* прамой a на плоскасць α. *Вуглом паміж прамой і плоскасцю* называецца вугал паміж гэтай прамой і яе праекцыяй на плоскасць.

Калі прамая перпендыкулярная плоскасці, то вугал лічыцца роўным 90°, калі паралельная,— то 0°. Паколькі прамая a, яе праекцыя a' на плоскасць α і перпендыкуляр да плоскасці α у пункце яе перасячэння з прамой a ляжаць у адной плоскасці, то *вугал паміж прамой і плоскасцю дапаўняе да* 90° *вугал паміж гэтай прамой і перпендыкулярам да плоскасці.*



Рыс. 390

Задача (35). Пункт A знаходзіцца ад плоскасці на адлегласці h. Знайдзіце даўжыні нахіленых, якія праведзены з гэтага пункта пад наступнымі вугламі да плоскасці: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°.



Рыс. 391

Рашэнне. Апусцім перпендыкуляр AA' на плоскасць (рыс. 391). Трохвугольнік $AA'B$ — прамавугольны з прамым вуглом пры вяршыні A'. Востры вугал гэтага трохвугольніка, процілеглы катэту AA', роўны 30° (адпаведна 45°, 60°). Таму ў першым выпадку нахіленая $AB = \frac{AA'}{\sin 30°} = 2h$. У другім выпадку

$$AB = h\sqrt{2},$$

у трэцім —

$$AB = \frac{2h}{\sqrt{3}}.$$

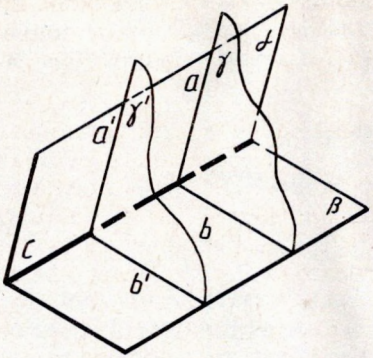
162. ВУГАЛ ПАМІЖ ПЛОСКАСЦЯМІ

Вызначым паняцце вугла паміж плоскасцямі. Вугал паміж паралельнымі плоскасцямі лічыцца роўным нулю.

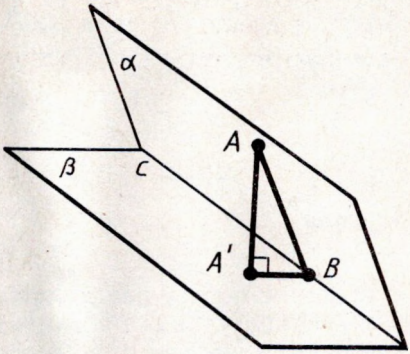
Няхай дадзеныя плоскасці перасякаюцца. Правядзём плоскасць, перпендыкулярную прамой іх перасячэння. Яна перасякае дадзеныя плоскасці па дзвюх прамых. Вугал паміж гэтымі прамымі называецца *вуглом паміж дадзенымі плоскасцямі* (рыс. 392).

Вызначаемы так вугал паміж плоскасцямі не залежыць ад выбару сякучай плоскасці. Дакажам гэта.

Няхай α і β — дадзеныя плоскасці, якія перасякаюцца па прамой c. Правядзём плоскасць, перпендыкулярную прамой c. Яна перасячэ плоскасці α і β па прамых a і b. Вугал паміж плоскасцямі α і β роўны вуглу паміж прамымі a і b. Возьмем другую сякучую плоскасць γ', перпендыкулярную прамой c. Няхай a' і b' — прамыя перасячэння гэтай плоскасці з плоскасцямі α і β. Выканаем паралельны пераност, пры якім пункт перасячэння плоскасці γ з прамой c пераходзіць у пункт перасячэння плоскасці γ' з прамой c. Пры гэтым па ўласцівасці паралельнага пераносу прамая a пераходзіць у прамую a', а прамая b — у прамую b'. Гэта значыць, што вуглы паміж прамымі a і b, a' і b' роўныя, што і трэба было даказаць.



Рыс. 392



Рыс. 393

Задача (43). Дзве плоскасці перасякаюцца пад вуглом 30°. Пункт A, які ляжыць у адной з гэтых плоскасцей, знаходзіцца на адлегласці a ад другой плоскасці. Знайдзіце адлегласць ад гэтага пункта да прамой перасячэння плоскасцей.

Рашэнне. Няхай α і β — дадзеныя плоскасці і A — пункт, які ляжыць у плоскасці α (рыс. 393). Апусцім перпендыкуляр AA' на плоскасць β і перпендыкуляр AB на прамую c, па якой перасякаюцца плоскасці. Па тэарэме аб трох перпендыкулярах $A'B \perp c$. Плоскасць $\triangle ABA'$ перпендыкулярная прамой c і таму вугал пры вяршыні B прамавугольнага трохвугольніка ABA' роўны 30°. Маем:

$$AB = \frac{AA'}{\sin 30^\circ} = a : \frac{1}{2} = 2a.$$

Адлегласць ад пункта A да прамой c роўна $2a$.

163. ПЛОШЧА АРТАГАНАЛЬНАЙ ПРАЕКЦЫІ МНОГАВУГОЛЬНІКА

Тэарэма 18.1. ***Плошча артаганальнай праекцыі многавугольніка на плоскасць роўна здабытку яго плошчы на косінус вугла паміж плоскасцю многавугольніка і плоскасцю праекцыі.***

Доказ. Разгледзім спачатку трохвугольнік і яго праекцыю на плоскасць, якая праходзіць праз адну з яго старон (рыс. 394). Праекцыяй трохвугольніка ABC з'яўляецца трохвугольнік ABC_1 у плоскасці α. Правядзём вышыню CD трохвугольніка

ABC. Па тэарэме аб трох перпендыкулярах адрэзак C_1D — вышыня трохвугольніка ABC_1. Вугал CDC_1 роўны вуглу φ паміж плоскасцю трохвугольніка ABC і плоскасцю праекцыі α. Маем:

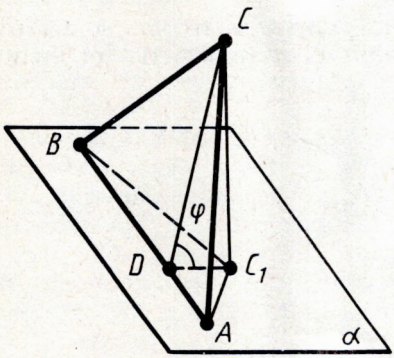
$$C_1D = CD\cos\varphi,$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CD, \quad S_{ABC_1} = \frac{1}{2}AB \cdot C_1D.$$

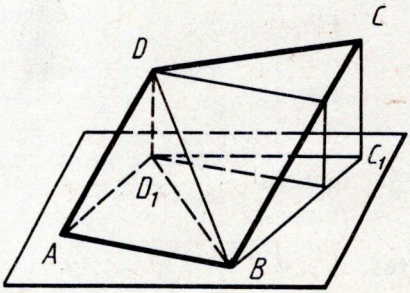
Адсюль

$$S_{ABC_1} = S_{ABC}\cos\varphi.$$

Такім чынам, у разглядаемым выпадку тэарэма правільная. Тэарэма правільная і ў выпадку, калі замест плоскасці α узята любая паралельная ёй плоскасць. Сапраўды, пры праектаванні фігуры на паралельныя плоскасці яе праекцыі сумяшчаюцца паралельным пераносам у напрамку праектавання. А сумяшчаемыя паралельным пераносам фігуры роўныя.



Рыс. 394



Рыс. 395

Разгледзім цяпер агульны выпадак. Разаб'ём дадзены многавугольнік на трохвугольнікі. Кожны трохвугольнік, у якога няма стараны, паралельнай плоскасці праекцыі, мы разаб'ём на два трохвугольнікі з агульнай стараной, паралельнай плоскасці праекцыі, як гэта паказана для чатырохвугольніка $ABCD$ на рысунку 395.

Цяпер для кожнага трохвугольніка Δ нашай разбіўкі і яго праекцыі Δ' запішам роўнасць $S'_\Delta = S_\Delta\cos\varphi$. Складзём усе гэтыя роўнасці пачленна. Тады атрымаем злева плошчу праекцыі многавугольніка, а справа — плошчу самога многавугольніка, памножаную на $\cos\varphi$. Тэарэма даказана.

164. ВЕКТАРЫ Ў ПРАСТОРЫ

У прасторы гэта жа, як і на плоскасці, *вектарам* называецца накіраваны адрэзак. Літаральна гэтак жа, як і на плоскасці, вызначаюцца асноўныя паняцці для вектараў у прасторы: абсалютная велічыня вектара, напрамак вектара, роўнасць вектараў.

Каардынатамі вектара з пачаткам у пункце $A_1(x_1; y_1; z_1)$ і канцом у пункце $A_2(x_2; y_2; z_2)$ называюцца лікі $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$. Гэтак жа, як і на плоскасці, даказваецца, што роўныя вектары маюць адпаведна роўныя каардынаты, і, наадварот, вектары з адпаведна роўнымі каардынатамі роўныя. Гэта дае падставу для абазначэння вектара яго каардынатамі: $\bar{a}(a_1; a_2; a_3)$ або проста $(a_1; a_2; a_3)$.



Задача (50). Дадзены чатыры пункты $A(2; 7; -3)$, $B(1; 0; 3)$, $C(-3; -4; 5)$, $D(-2; 3; -1)$. Пакажыце сярод вектараў $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$ роўныя вектары.

Рашэнне. Трэба знайсці каардынаты дадзеных вектараў $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ... і параўнаць адпаведныя каардынаты. У роўных вектараў адпаведныя каардынаты роўныя. Напрыклад, у вектара $\overline{AB}$ каардынаты: $1 - 2 = -1$, $0 - 7 = -7$, $3 - (-3) = 6$. У вектара $\overline{DC}$ такія ж каардынаты: $-3 - (-2) = -1$, $-4 - 3 = -7$, $5 - (-1) = 6$. Такім чынам, вектары $\overline{AB}$ і $\overline{DC}$ роўныя. Другой парай роўных вектараў будуць $\overline{BC}$ і $\overline{AD}$.

165. ДЗЕЯННІ НАД ВЕКТАРАМІ Ў ПРАСТОРЫ

Гэтак жа, як і на плоскасці, вызначаюцца дзеянні над вектарамі: складанне, множанне на лік і скалярны здабытак.

Сумай вектараў $\bar{a}(a_1; a_2; a_3)$ і $\bar{b}(b_1; b_2; b_3)$ называецца вектар $\bar{c}(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$.

Гэтак жа, як і на плоскасці, даказваецца вектарная роўнасць

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

Здабыткам вектара $\bar{a}(a_1; a_2; a_3)$ на лік λ называецца вектар $\lambda\bar{a} = (\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$. Гэтак жа, як і на плоскасці, даказваецца, што абсалютная велічыня вектара $\lambda\bar{a}$ роўна $|\lambda|\,|\bar{a}|$, а напрамак супадае з напрамкам вектара $\bar{a}$, калі $\lambda > 0$, і процілеглы напрамку вектара $\bar{a}$, калі $\lambda < 0$.

Задача (54). Дадзен вектар $\bar{a}(1; 2; 3)$. Знайдзіце калінеарны яму вектар з пачаткам у пункце $A(1; 1; 1)$ і канцом B на плоскасці xy.

Рашэнне. Каардыната z пункта B роўна нулю. Каардынаты вектара $\overline{AB}$: $x-1$, $y-1$, $0-1=-1$. З калінеарнасці вектараў $\bar{a}$ і $\overline{AB}$ атрымліваем прапорцыю

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{-1}{3}.$$

Адсюль знаходзім каардынаты x, y пункта B:

$$x=\frac{2}{3},\ y=\frac{1}{3}.$$

Скалярным здабыткам вектараў $(\overline{a_1; a_2; a_3})$ і $(\overline{b_1; b_2; b_3})$ называецца лік $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$. Літаральна гэтак жа, як і на плоскасці, даказваецца, што скалярны здабытак вектараў роўны здабытку іх абсалютных велічынь на косінус вугла паміж вектарамі.

Задача (59). Дадзены чатыры пункты: $A(0; 1; -1)$, $B(1; -1; 2)$, $C(3; 1; 0)$, $D(2; -3; 1)$. Знайдзіце косінус вугла φ паміж вектарамі $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$.

Рашэнне. Каардынатамі вектара $\overline{AB}$ будуць:

$$1-0=1,\ -1-1=-2,\ 2-(-1)=3;$$

$$|\overline{AB}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{14}.$$

Каардынатамі вектара $\overline{CD}$ будуць:

$$2-3=-1,\ -3-1=-4,\ 1-0=1;$$

$$|\overline{CD}|=\sqrt{(-1)^2+(-4)^2+1^2}=\sqrt{18}.$$

Значыць,

$$\cos\varphi=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{|\overline{AB}|\,|\overline{CD}|}=\frac{1\cdot(-1)+(-2)\cdot(-4)+3\cdot1}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{18}}=\frac{5}{\sqrt{63}}.$$

КАНТРОЛЬНЫЯ ПЫТАННІ

1. Растлумачце, як вызначаюцца каардынаты пункта ў прасторы.
2. Выразіце адлегласць паміж двума пунктамі праз каардынаты гэтых пунктаў.
3. Выведзіце формулы для каардынат сярэдзіны адрэзка праз каардынаты яго канцоў.

4. Што такое пераўтварэнне сіметрыі адносна пункта? Якая фігура называецца цэнтральна-сіметрычнай?
5. Растлумачце, што такое пераўтварэнне сіметрыі адносна плоскасці. Што такое плоскасць сіметрыі фігуры?
6. Якое пераўтварэнне фігуры называецца рухам?
7. Дакажыце, што рух у прасторы пераводзіць плоскасць у плоскасць.
8. Якія фігуры ў прасторы называюцца роўнымі?
9. Дайце азначэнне паралельнага пераносу.
10. Пералічыце ўласцівасці паралельнага пераносу.
11. Дакажыце, што пры паралельным пераносе ў прасторы кожная плоскасць пераходзіць або ў сябе, або ў паралельную плоскасць.
12. Што такое пераўтварэнне падобнасці? Пералічыце яго ўласцівасці.
13. Якое пераўтварэнне называецца гаматэтыяй? Дакажыце, што пераўтварэнне гаматэтыі ў прасторы пераводзіць любую плоскасць, якая не праходзіць праз цэнтр гаматэтыі, у паралельную плоскасць (або ў сябе).
14. Дайце азначэнне вугла паміж прамымі, якія скрыжоўваюцца.
15. Дайце азначэнне вугла паміж прамой і плоскасцю.
16. Дайце азначэнне вугла паміж плоскасцямі.
17. Дакажыце, што плошча артаганальнай праекцыі многавугольніка на плоскасць роўна здабытку яго плошчы на косінус вугла паміж плоскасцю многавугольніка і плоскасцю яго праекцыі.
18. Што такое абсалютная велічыня вектара? Якія вектары называюцца аднолькава накіраванымі?
19. Дайце азначэнне каардынат вектара з пачаткам у пункце $A_1(x_1; y_1; z_1)$ і канцом у пункце $A_2(x_2; y_2; z_2)$.
20. Дайце азначэнні дзеянняў над вектарамі: складання, множання на лік, скалярнага здабытку.

ЗАДАЧЫ

1. Дзе ляжаць тыя пункты прасторы, для якіх каардынаты x і y роўны нулю?
2. Дадзены пункты $A(1; 2; 3)$, $B(0; 1; 2)$, $C(0; 0; 3)$, $D(1; 2; 0)$. Якія з гэтых пунктаў ляжаць: 1) у плоскасці xy; 2) на восі z; 3) у плоскасці yz?
3. Дадзен пункт $A(1; 2; 3)$. Знайдзіце асновы перпендыкуляраў, апушчаных з гэтага пункта на каардынатныя восі і каардынатныя плоскасці.
4. Знайдзіце адлегласці ад пункта $(1; 2; -3)$ да: 1) каардынатных плоскасцей; 2) восей каардынат; 3) пачатку каардынат.

5. У плоскасці xy знайдзіце пункт $D(x; y; 0)$, роўнаддалены ад трох дадзеных пунктаў: $A(0; 1; -1)$, $B(-1; 0; 1)$, $C(0; -1; 0)$.

6. Знайдзіце пункты, якія роўнаддалены ад пунктаў (0; 0; 1), (0; 1; 0), (1; 0; 0) і знаходзяцца ад плоскасці yz на адлегласці 2.

7. На восі x знайдзіце пункт $C(x; 0; 0)$, роўнаддалены ад двух пунктаў $A(1; 2; 3)$, $B(-2; 1; 3)$.

8. Састаўце ўраўненне геаметрычнага месца пунктаў прасторы, роўнаддаленых ад пункта $A(1; 2; 3)$ і пачатку каардынат.

9. Дакажыце, што чатырохвугольнік $ABCD$ з вяршынямі ў пунктах $A(1; 2; 3)$, $B(0; 2; 4)$, $C(1; 1; 4)$, $D(2; 2; 2)$ ёсць паралелаграм.

10. Дакажыце, што чатырохвугольнік $ABCD$ з'яўляецца паралелаграмам, калі: 1) $A(0; 2; -3)$, $B(-1; 1; 1)$, $C(2; -2; -1;)$, $D(3; -1; -5)$; 2) $A(2; 1; 3)$, $B(1; 0; 7)$, $C(-2; 1; 5)$, $D(-1; 2; 1)$.

11. Дакажыце, што чатырохвугольнік $ABCD$ з'яўляецца ромбам, калі:
1) $A(6; 7; 8)$, $B(8; 2; 6)$, $C(4; 3; 2)$, $D(2; 8; 4)$; 2) $A(0; 2; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $C(2; 0; 2)$, $D(1; 2; 2)$.

12. Дадзены адзін канец адрэзка $A(2; 3; -1)$ і яго сярэдзіна $C(1; 1; 1)$. Знайдзіце другі канец адрэзка $B(x; y; z)$.

13. Знайдзіце каардынаты вяршыні D паралелаграма $ABCD$, калі каардынаты трох другіх яго вяршынь вядомыя: 1) $A(2; 3; 2)$, $B(0; 2; 4)$, $C(4; 1; 0)$; 2) $A(1; -1; 0)$, $B(0; 1; -1)$, $C(-1; 0; 1)$; 3) $A(4; 2; -1)$, $B(1; -3; 2)$, $C(-4; 2; 1)$.

14. Дакажыце, што сярэдзіна адрэзка з канцамі ў пунктах $A(a; c; -b)$ і $B(-a; d; b)$ ляжыць на восі y.

15. Дакажыце, што сярэдзіна адрэзка з канцамі ў пунктах $C(a; b; c)$ і $D(p; q; -c)$ ляжыць у плоскасці xy.

16. Дакажыце, што пераўтварэнне сіметрыі адносна каардынатнай плоскасці xy задаецца формуламі $x' = x$, $y' = y$, $z' = -z$.

17. Дадзены пункты (1; 2; 3), (0; −1; 2), (1; 0; −3). Знайдзіце пункты, сіметрычныя дадзеным адносна каардынатных плоскасцей.

18. Дадзены пункты (1; 2; 3), (0; −1; 2), (1; 0; −3). Знайдзіце пункты, сіметрычныя ім адносна пачатку каардынат.

19. Дакажыце, што пераўтварэнне сіметрыі адносна пункта ёсць рух.

20*. Дакажыце, што пераўтварэнне сіметрыі адносна плоскасці ёсць рух.

21. Дакажыце, што пры руху ў прасторы круг пераходзіць у круг таго ж радыуса.

22. Дакажыце, што пры руху ў прасторы тры пункты, якія

ляжаць на прамой, пераходзяць у тры пункты, якія таксама ляжаць на адной прамой.

23. Знайдзіце значэнні a, b, c у формулах паралельнага пераносу $x' = x + a$, $y' = y + b$, $z' = z + c$, калі пры гэтым паралельным пераносе пункт $A(1; 0; 2)$ пераходзіць у пункт $A'(2; 1; 0)$.

24. Пры паралельным пераносе пункт $A(2; 1; -1)$ пераходзіць у пункт $A'(1; -1; 0)$. У які пункт пераходзіць пачатак каардынат?

25. Ці існуе паралельны перанос, пры якім пункт A пераходзіць у пункт B, а пункт C — у пункт D, калі: 1) $A(2; 1; 0)$, $B(1; 0; 1)$, $C(3; -2; 1)$, $D(2; -3; 0)$; 2) $A(-2; 3; 5)$, $B(1; 2; 4)$, $C(4; -3; 6)$, $D(7; -2; 5)$; 3) $A(0; 1; 2)$, $B(-1; 0; 1)$, $C(3; -2; 2)$, $D(2; -3; 1)$; 4) $A(1; 1; 0)$, $B(0; 0; 0)$, $C(-2; 2; 1)$, $D(1; 1; 1)$?

26. Дакажыце, што пры паралельным пераносе паралелаграм пераходзіць у роўны яму паралелаграм.

27. Чатыры паралельныя прамыя перасякаюць паралельныя плоскасці ў вяршынях паралелаграмаў $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ адпаведна. Дакажыце, што паралелаграмы $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ сумяшчаюцца паралельным пераносам.

28. Дакажыце, што пераўтварэнне гаматэтыі ў прасторы з'яўляецца пераўтварэннем падобнасці.

29. Тры прамыя, якія праходзяць праз пункт S, перасякаюць дадзеную плоскасць у пунктах A, B, C, а паралельную ёй плоскасць — у пунктах $A_1B_1C_1$. Дакажыце, што трохвугольнікі ABC і $A_1B_1C_1$ гаматэтычныя.

30. Прамая a ляжыць у плоскасці α, а прамая b перпендыкулярная гэтай плоскасці. Чаму роўны вугал паміж a і b?

31*. Дадзены тры пункты A, B, C, якія не ляжаць на адной прамой. Чаму роўны вугал паміж прамымі CA і CB, калі гэтыя прамыя ствараюць вуглы α і β з прамой AB і $\alpha + \beta < 90°$?

32. Прамыя a, b, c паралельныя адной і той жа плоскасці. Чаму роўны вугал паміж прамымі b і c, калі вуглы гэтых прамых з прамой a роўны $60°$ і $80°$?

33. Дакажыце, што любая прамая на плоскасці, перпендыкулярная праекцыі нахіленай на гэту плоскасць, перпендыкулярная і нахіленай. І наадварот: калі прамая на плоскасці перпендыкулярная нахіленай, то яна перпендыкулярная і праекцыі нахіленай.

34. 1) Дакажыце, што прамая, якая перасякае паралельныя плоскасці, перасякае іх пад роўнымі вугламі.

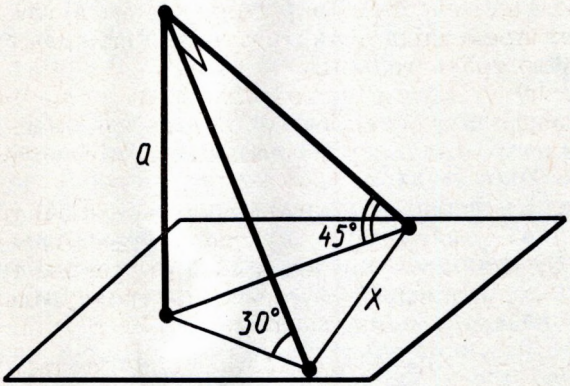
2) Дакажыце, што плоскасць, якая перасякае паралельныя прамыя, перасякае іх пад роўнымі вугламі.

35. Пункт A знаходзіцца на адлегласці h ад плоскасці. Знайдзіце даўжыні нахіленых, праведзеных з яго пад наступнымі вугламі да плоскасці: 1) $30°$; 2) $45°$; 3) $60°$.

36. Нахіленая роўна a. Чаму роўна праекцыя гэтай нахіленай на плоскасць, калі нахіленая складае з плоскасцю вугал, роўны: 1) 45°; 2) 60°; 3) 30°?

37. Адрэзак даўжынёй 10 м перасякае плоскасць. Яго канцы знаходзяцца на адлегласцях 2 м і 3 м ад плоскасці. Знайдзіце вугал паміж дадзеным адрэзкам і плоскасцю.

38. З пункта, які знаходзіцца на адлегласці a ад плоскасці, праведзены дзве нахіленыя, якія ўтвараюць з плоскасцю вуглы 45° і 30°, а паміж сабой прамы вугал. Знайдзіце адлегласць паміж канцамі нахіленых (рыс. 396).



Рыс. 396

39. З пункта, які знаходзіцца на адлегласці a ад плоскасці, праведзены дзве нахіленыя, якія ўтвараюць з плоскасцю вуглы 45°, а паміж сабой вугал 60°. Знайдзіце адлегласць паміж канцамі нахіленых.

40. З пункта, які знаходзіцца ад плоскасці на адлегласці a, праведзены дзве нахіленыя пад вуглом 30° да плоскасці, прычым іх праекцыі ўтвараюць вугал 120°. Знайдзіце адлегласць паміж канцамі нахіленых.

41. Праз катэт раўнабедранага прамавугольнага трохвугольніка праведзена плоскасць пад вуглом 45° да другога катэта. Знайдзіце вугал паміж гіпатэнузай і плоскасцю.

42. Дакажыце, што плоскасць, якая перасякае паралельныя плоскасці, перасякае іх пад роўнымі вугламі.

43. Дзве плоскасці перасякаюцца пад вуглом 30°. Пункт A, які ляжыць у адной з гэтых плоскасцей, знаходзіцца на адлегласці a ад другой плоскасці. Знайдзіце адлегласць ад гэтага пункта да прамой перасячэння плоскасцей.

44. Знайдзіце вугал паміж плоскасцямі, калі пункт, узяты на адной з іх, знаходзіцца ад прамой перасячэння плоскасцей у два разы далей, чым ад другой плоскасці.

45. Два раўнабедраныя трохвугольнікі маюць агульную аснову, а іх плоскасці ўтвараюць вугал 60°. Агульная аснова роўна 16 м, бакавая старана аднаго трохвугольніка 17 м, а бакавыя стораны другога перпендыкулярныя. Знайдзіце адлегласць паміж вяршынямі трохвугольнікаў.

46. Раўнабедраныя трохвугольнікі ABC і ABD з агульнай асновай AB ляжаць у розных плоскасцях, вугал паміж якімі роўны α. Знайдзіце $\cos\alpha$, калі: 1) $AB = 24$ см, $AC = 13$ см, $AD = 37$ см, $CD = 35$ см; 2) $AB = 32$ м, $AC = 65$ м, $AD = 20$ м, $CD = 63$ м.

47. Катэты прамавугольнага трохвугольніка роўны 7 м і 24 м. Знайдзіце адлегласць ад вяршыні прамога вугла да плоскасці, якая праходзіць праз гіпатэнузу і складае вугал 30° з плоскасцю трохвугольніка.

48. Дадзен роўнастаронні трохвугольнік са стараной a. Знайдзіце плошчу яго артаганальнай праекцыі на плоскасць, якая стварае з плоскасцю трохвугольніка вугал, роўны: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°.

49. 1) Знайдзіце плошчу артаганальнай праекцыі трохвугольніка ABC з задачы 46 на плоскасць трохвугольніка ABD.
2) Знайдзіце плошчу артаганальнай праекцыі трохвугольніка ABD з задачы 46 на плоскасць трохвугольніка ABC.

50. Дадзены чатыры пункты: $A(2; 7; -3)$, $B(1; 0; 3)$, $C(-3; -4; 5)$, $D(-2; 3; -1)$. Назавіце сярод вектараў $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$ роўныя вектары.

51. Дадзены тры пункты: $A(1; 0; 1)$, $B(-1; 1; 2)$, $C(0; 2; -1)$. Знайдзіце пункт $D(x; y; z)$, калі вектары $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ роўныя.

52. Знайдзіце пункт D у задачы 51, калі сума вектараў $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ роўна нулю.

53. Дадзены вектары $\overline{(2; n; 3)}$ і $\overline{(3; 2; m)}$. Пры якіх m і n гэтыя вектары калінеарныя?

54. Дадзен вектар $\bar{a}(1; 2; 3)$. Знайдзіце калінеарны яму вектар з пачаткам у пункце $A(1; 1; 1)$ і канцом B на плоскасці xy.

55. Пры якім значэнні n дадзеныя вектары перпендыкулярныя:
1) $\bar{a}(2; -1; 3)$, $\bar{b}(1; 3; n)$; 2) $\bar{a}(n; -2; 1)$, $\bar{b}(n; -n; 1)$;
3) $\bar{a}(n; -2; 1)$, $\bar{b}(n; 2n; 4)$; 4) $\bar{a}(4; 2n; -1)$, $\bar{b}(-1; 1; n)$?

56. Дадзены тры пункты: $A(1; 0; 1)$, $B(-1; 1; 2)$, $C(0; 2; -1)$. Знайдзіце на восі z такі пункт $D(0; 0; c)$, каб вектары $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ былі перпендыкулярныя.

57*. Вектары $\bar{a}$ і $\bar{b}$ утвараюць вугал 60°, а вектар $\bar{c}$ перпендыкулярны ім. Знайдзіце абсалютную велічыню вектара $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$.

58*. Вектары $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ адзінкавай даўжыні ўтвараюць парамі

вуглы ў 60°. Знайдзіце вугал φ паміж вектарамі: 1) $\bar{a}$ і $\bar{b}+\bar{c}$; 2) $\bar{a}$ і $\bar{b}-\bar{c}$.

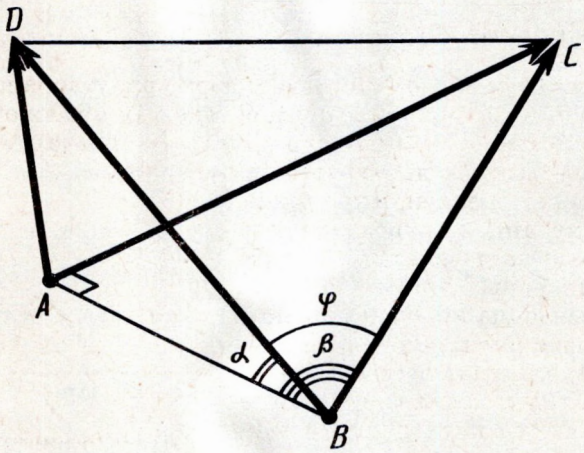
59. Дадзены чатыры пункты: $A(0;\ 1;\ -1)$, $B(1;\ -1;\ 2)$, $C(3;\ 1;\ 0)$, $D(2;\ -3;\ 1)$. Знайдзіце косінус вугла φ паміж вектарамі $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$.

60. Дадзены тры пункты: $A(0;\ 1;\ -1)$, $B(1;\ -1;\ 2)$, $C(3;\ 1;\ 0)$. Знайдзіце косінус вугла C трохвугольніка ABC.

61*. Дакажыце, што вугал φ паміж прамымі, якія ўтрымліваюць вектары $\bar{a}$ і $\bar{b}$, вызначаецца з ураўнення

$$|\bar{a}\bar{b}| = |\bar{a}|\ |\bar{b}|\cos\varphi.$$

62*. З вяршыні прамога вугла A трохвугольніка ABC узведзены перпендыкуляр AD да плоскасці трохвугольніка. Знайдзіце косінус вугла φ паміж вектарамі $\overline{BC}$ і $\overline{BD}$, калі вугал ABD роўны α, а вугал ABC роўны β (рыс. 397).



Рыс. 397

63. Нахіленая ўтварае вугал 45° з плоскасцю. Праз аснову нахіленай праведзена прамая ў плоскасці пад вуглом 45° да праекцыі нахіленай. Знайдзіце вугал φ паміж гэтай прамой і нахіленай.

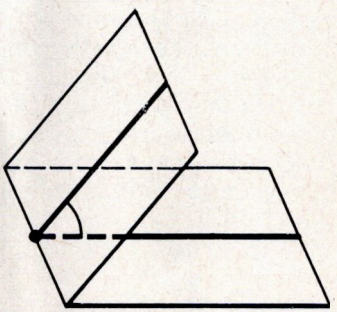
64*. З пункта па-за плоскасцю праведзены перпендыкуляр і дзве роўныя нахіленыя, якія ўтвараюць вуглы α з перпендыкулярам. Знайдзіце вугал φ паміж праекцыямі нахіленых, калі вугал паміж нахіленымі β.

§ 19. МНАГАГРАННІКІ

166. ДВУХГРАННЫ ВУГАЛ

Двухгранным вуглом называецца фігура, утвораная дзвюма паўплоскасцямі з агульнай прамой, якая іх абмяжоўвае (рыс. 398). Паўплоскасці называюцца *гранямі*, а прамая, якая іх абмяжоўвае,— *кантам* двухграннага вугла.

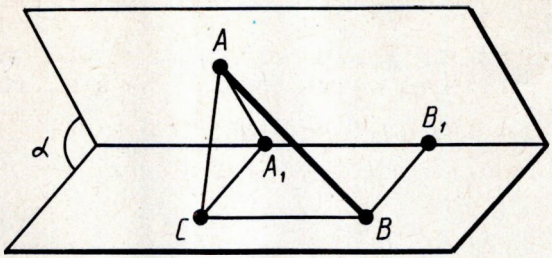
Плоскасць, перпендыкулярная канту двухграннага вугла, перасякае яго грані па дзвюх паўпрамых. Вугал, утвораны гэтымі паўпрамымі, называецца *лінейным вуглом* двухграннага вугла. За меру двухграннага вугла прымаецца мера адпаведнага яму лінейнага вугла. Усе лінейныя вуглы двухграннага вугла сумяшчаюцца паралельным пераносам, а значыць, роўныя. Таму мера двухграннага вугла не залежыць ад выбару лінейнага вугла.



Рыс. 398

Задача (1). З пунктаў A і B, якія ляжаць у гранях двухграннага вугла, апушчаны перпендыкуляры AA_1 і BB_1 на кант вугла. Знайдзіце даўжыню адрэзка AB, калі $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $A_1B_1 = c$ і двухгранны вугал роўны α (рыс. 399).

Рашэнне. Правядзём прамыя $A_1C \parallel BB_1$ і $BC \parallel A_1B_1$. Чатырохвугольнік A_1B_1BC — паралелаграм, значыць $A_1C = BB_1 = b$. Прамая A_1B_1 перпендыкулярная плоскасці



Рыс. 399

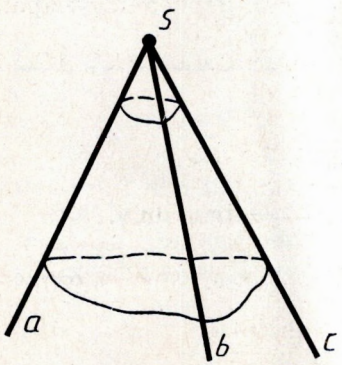
трохвугольніка AA_1C, таму што яна перпендыкулярная дзвюм прамым у гэтай плоскасці AA_1 і CA_1. Значыць, паралельная ёй прамая BC таксама перпендыкулярная гэтай плоскасці. Такім чынам, трохвугольнік ABC прамавугольны з прамым вуглом C. Па тэарэме косінусаў $AC^2 = AA_1^2 + A_1C^2 - 2AA_1 \cdot A_1C \cdot \cos\alpha = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$.

Па тэарэме Піфагора

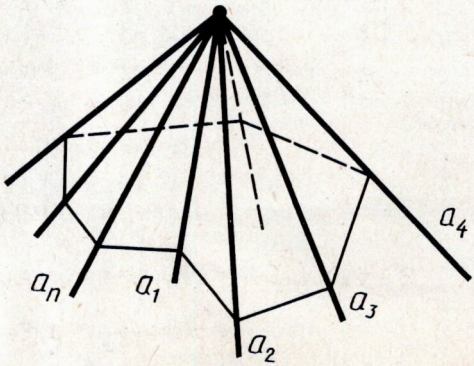
$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha + c^2}.$$

167. ТРОХГРАННЫ І МНАГАГРАННЫ ВУГЛЫ

Разгледзім тры прамені a, b, c, якія выходзяць з аднаго пункта і не ляжаць у адной плоскасці. *Трохгранным вуглом* (abc) называецца фігура, складзеная з трох плоскіх вуглоў (ab), (bc) і (ac) (рыс. 400). Гэтыя вуглы называюцца *гранямі* трохграннага вугла, а іх стораны — *кантамі*. Агульная вяршыня плоскіх вуглоў называецца *вяршыняй* трохграннага вугла. Двухгранныя вуглы, утвораныя гранямі трохграннага вугла, называюцца *двухграннымі вугламі трохграннага вугла*.



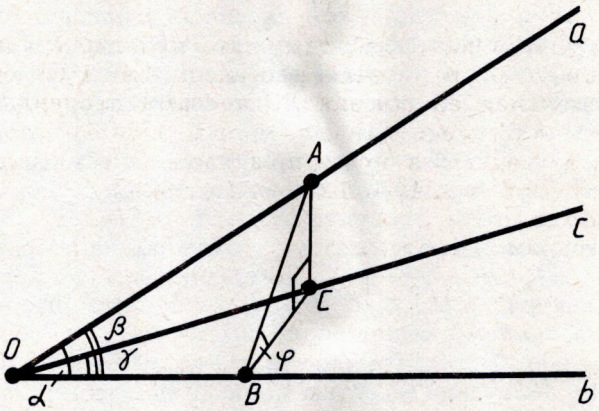
Рыс. 400



Рыс. 401

Аналагічна вызначаецца паняцце мнагаграннага вугла (рыс. 401).

З а д а ч а (2). У трохграннага вугла (abc) двухгранны вугал пры канце c прамы, двухгранны вугал пры канце b роўны φ, а плоскі вугал (bc) роўны $\gamma\left(\varphi_1,\ \gamma < \frac{\pi}{2}\right)$. Знайдзіце два іншыя плоскія вугалы: $\alpha = \angle(ab)$, $\beta = \angle(ac)$.



Рыс. 402

Р а ш э н н е. Апусцім з адвольнага пункта A канта a перпендыкуляр AB на кант b і перпендыкуляр AC на кант c (рыс. 402). Па тэарэме аб трох перпендыкулярах CB — перпендыкуляр да канта b.

З прамавугольных трохвугольнікаў OAB, OCB, AOC і ABC атрымліваем:

$$\operatorname{tg}\alpha = AB : OB = \frac{BC}{\cos\varphi} : \frac{BC}{\operatorname{tg}\gamma} = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\cos\varphi},$$

$$\operatorname{tg}\beta = AC : OC = BC\operatorname{tg}\varphi : \frac{BC}{\sin\gamma} = \operatorname{tg}\varphi\sin\gamma.$$

З а ў в а г а. Атрыманыя залежнасці паміж вугламі α, β, γ, φ:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\cos\varphi},\ \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\varphi\sin\gamma\ -$$

дазваляюць, ведаючы два вуглы, знайсці два іншыя.

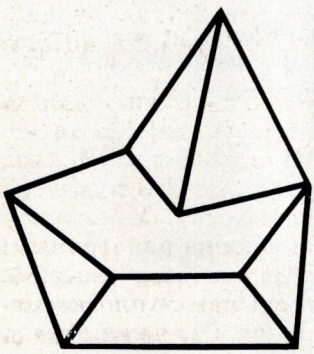
168. МНАГАГРАННІК

У стэрэаметрыі вывучаюцца фігуры ў прасторы, якія называюцца целамі. Наглядна (геаметрычнае) цела трэба ўяўляць сабе як частку прасторы, якая занята фізічным целам і абмежавана паверхняй.

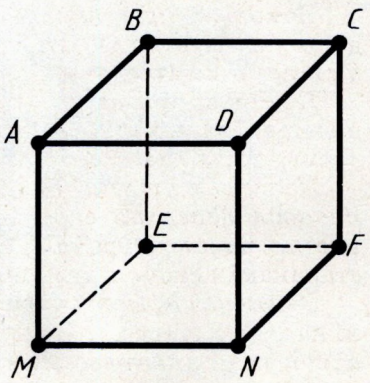
Мнагагранніка — гэта такое цела, паверхня якога складаецца з канечнага ліку плоскіх многавугольнікаў (рыс. 403). Мнагагранніка называецца *выпуклым*, калі ён размешчаны з аднаго боку плоскасці кожнага плоскага многавугольніка на яго паверхні. Агульная частка такой плоскасці і паверхні выпуклага мнагагранніка называецца *гранню*. Грані выпуклага мнагагранніка з'яўляюцца плоскімі выпуклымі многавугольнікамі. Стораны граней называюцца *кантамі мнагагранніка*, а вяршыні — *вяршынямі мнагагранніка*.

Растлумачым сказанае на прыкладзе знаёмага вам куба (рыс. 404). Куб ёсць выпуклы мнагаграннік. Яго паверхня складаецца з шасці квадратаў: $ABCD$, $BEFC$, ... Яны з'яўляюцца яго гранямі. Кантамі куба з'яўляюцца стораны гэтых квадратаў AB, BC, BE, ... Вяршынямі куба з'яўляюцца вяршыні квадратаў A, B, C, D, E, ... У куба шэсць граней, дванаццаць кантаў і восем вяршынь.

Найпрасцейшым мнагаграннікам — прызмам і пірамідам, якія будуць асноўным аб'ектам нашага вывучэння, мы дадзім такія азначэнні, якія, па сутнасці, не выкарыстоўваюць паняцце цела. Яны будуць вызначаны як геаметрычныя фігуры з указаннем усіх пунктаў прасторы, якія ім належаць. Паняцце геаметрычнага цела і яго паверхні ў агульным выпадку будзе дадзена пазней.



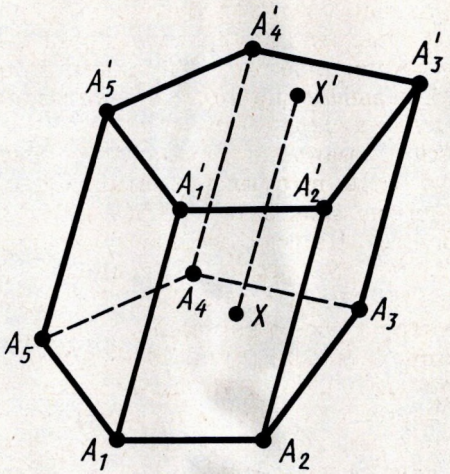
Рыс. 403



Рыс. 404

169. ПРЫЗМА

Прызмай называецца мнагаграннік, які складаецца з двух плоскіх многавугольнікаў, якія ляжаць у розных плоскасцях і сумяшчаюцца паралельным пераносам, і ўсіх адрэзкаў, якія злучаюць адпаведныя пункты гэтых многавугольнікаў (рыс. 405). Многавугольнікі называюцца *асновамі прызмы*, а адрэзкі, якія злучаюць адпаведныя вяршыні,— *бакавымі кантамі прызмы*.



Рыс. 405

Паколькі паралельны пераносёсць рух, то ***асновы прызмы роўныя.***

Паколькі пры паралельным пераносе плоскасць пераходзіць у паралельную плоскасць (ці ў сябе), то ***ў прызмы асновы ляжаць у паралельных плоскасцях.***

Паколькі пры паралельным пераносе пункты сумяшчаюцца на паралельных (ці супадаючых) прамых на адну і тую ж адлегласць, то ***ў прызмы бакавыя канты паралельныя і роўныя.***

Паверхня прызмы складаецца з асновы і бакавой паверхні. *Бакавая паверхня* складаецца з паралелаграмаў. У кожнага з гэтых паралелаграмаў дзве стараны з'яўляюцца адпаведнымі старанамі асноў, а дзве іншыя — суседнімі бакавымі кантамі.

Вышынёй прызмы называецца адлегласць паміж плоскасцямі яе асноў. Адрэзак, які злучае дзве вяршыні, што не належаць адной грані, называецца *дыяганаллю прызмы*.

Прызма называецца n-вугольнай, калі яе асновы — n-вугольнікі. У далейшым мы будзем разглядаць толькі прызмы, у якіх асновы — выпуклыя многавугольнікі. Такія прызмы з'яўляюцца выпуклымі мнагаграннікамі.

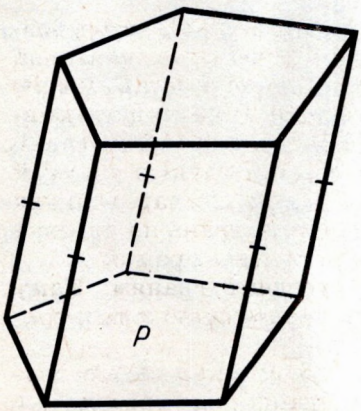
На рысунку 405 паказана пяцівугольная прызма. Яе асновамі з'яўляюцца пяцівугольнікі $A_1A_2 \ldots A_5$, $A'_1A'_2 \ldots A'_5$. XX' — адрэзак, які злучае адпаведныя пункты асноў. Бакавыя канты прызмы — адрэзкі $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, ..., $A_5A'_5$. Бакавыя грані прызмы — паралелаграмы $A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_2$, ...

170. ПАКАЗ ПРЫЗМЫ І ПАБУДАВАННЕ ЯЕ СЯЧЭННЯЎ

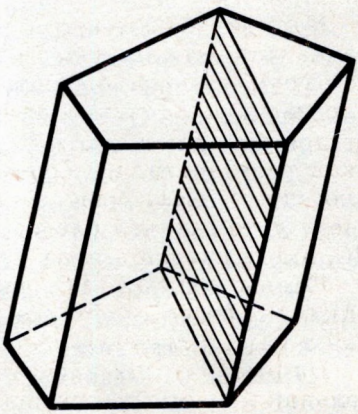
У адпаведнасці з правіламі паралельнага праектавання відарыс прызмы будуецца наступным чынам. Спачатку будуецца адна з асноў P (рыс. 406). Гэта будзе некаторы плоскі многавугольнік. Затым з вяршынь многавугольніка P праводзяцца бакавыя канты прызмы ў выглядзе паралельных адрэзкаў роўнай даўжыні. Канцы гэтых адрэзкаў злучаюцца і атрымліваецца другая аснова прызмы. Нябачныя канты праводзяцца штрыхавымі лініямі.

Сячэнні прызмы плоскасцямі, паралельнымі бакавым кантам, з'яўляюцца паралелаграмамі. У прыватнасці, паралелаграмамі з'яўляюцца дыяганальныя сячэнні. Гэта сячэнні плоскасцямі, якія праходзяць праз два бакавыя, не належачыя адной грані канты (рыс. 407).

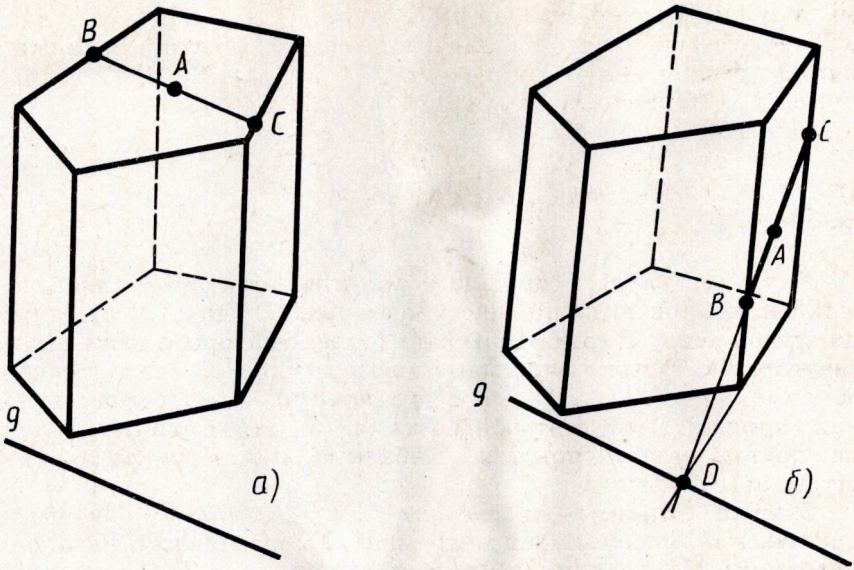
На практыцы, у прыватнасці, пры рашэнні задач, часта даводзіцца будаваць сячэнне прызмы плоскасцю, якая праходзіць праз зададзеную прамую g на плоскасці адной з асноў прызмы. Такая прамая называецца *следам* сякучай плоскасці на плоскасці асновы. Для пабудавання сячэння прызмы дастаткова пабудаваць перасячэнні сякучай плоскасці з гранямі



Рыс. 406



Рыс. 407



Рыс. 408

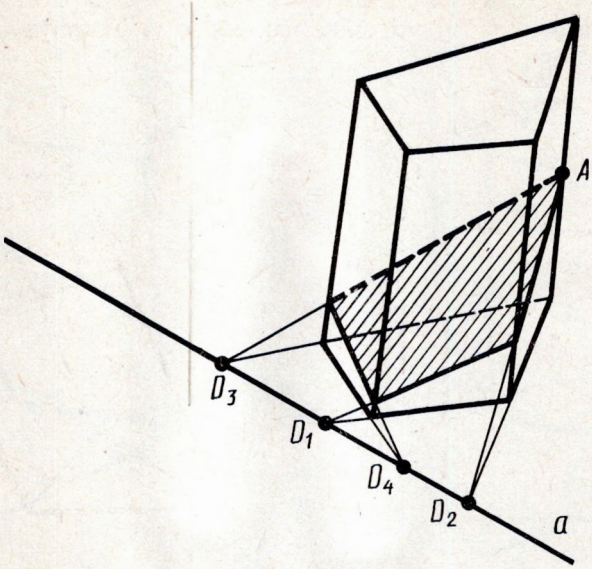
прызмы. Пакажам, як будуецца такое сячэнне, калі вядомы які-небудзь пункт A на паверхні прызмы, які належыць сячэнню (рыс. 408).

Калі дадзены пункт A належыць другой аснове прызмы, то яго перасячэнне з сякучай плоскасцю ўяўляе сабой адрэзак BC, паралельны следу g, які змяшчае дадзены пункт A (рыс. 408, *а*).

Калі дадзены пункт A належыць бакавой грані, то перасячэнне гэтай грані з сякучай плоскасцю будуецца, як паказана на рысунку 408, *б*. Менавіта, спачатку будуецца пункт D, у якім плоскасць грані перасякае зададзены след g. Потым праводзіцца прамая праз пункты A і D. Адрэзак BC прамой AD на грані, якая разглядаецца, і ёсць перасячэнне гэтай грані з сякучай плоскасцю. Калі грань, якая змяшчае пункт A, паралельная следу g, то сякучая плоскасць перасякае гэту грань па адрэзку BC, які праходзіць праз пункт A і паралельны прамой g.

Канцы адрэзка BC належаць і суседнім граням. Таму апісаным спосабам можна пабудаваць перасячэнне гэтых граней з нашай сякучай плоскасцю. I г. д.

На рысунку 409 паказана пабудаванне сячэння чатырохвугольнай прызмы плоскасцю, якая праходзіць праз прамую a ў плоскасці ніжняй асновы прызмы і пункт A на адным з бакавых кантаў.



Рыс. 409

171. ПРАМАЯ ПРЫЗМА

Прызма называецца *прамой*, калі яе бакавыя канты перпендыкулярныя асновам. У адваротным выпадку прызма называецца *нахіленай*.

У прамой прызмы бакавыя грані з'яўляюцца прамавугольнікамі. Пры паказе прамой прызмы на рысунку бакавыя канты звычайна праводзяць вертыкальна (рыс. 410).

Прамая прызма называецца *правільнай*, калі яе асновы з'яўляюцца правільнымі многавугольнікамі.

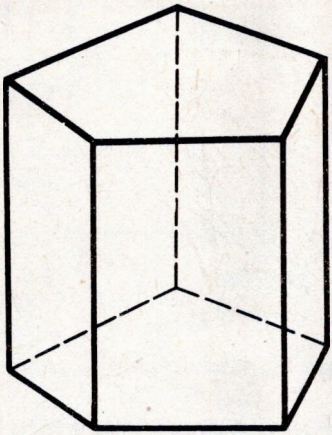
Бакавой паверхняй прызмы (дакладней, плошчай бакавой паверхні) называецца сума плошчаў бакавых граней. *Поўная паверхня прызмы* роўна суме бакавой паверхні і плошчаў асноў.

Тэарэма 19.1. ***Бакавая паверхня прамой прызмы роўна здабытку перыметра асновы на вышыню прызмы, г. зн. на даўжыню бакавога канта.***

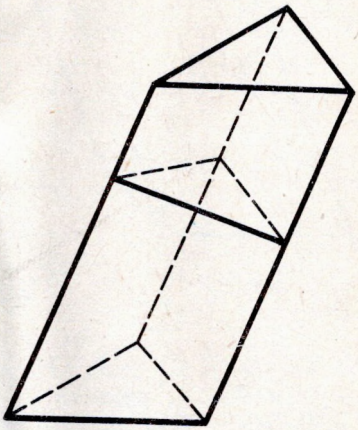
Доказ. Бакавыя грані прамой прызмы — прамавугольнікі. Асновы гэтых прамавугольнікаў з'яўляюцца старанамі многавугольніка, які ляжыць у аснове прызмы, а вышыні роўны даўжыні бакавых кантаў. Адсюль вынікае, што бакавая паверхня прызмы роўна

$$S = a_1 l + a_2 l + \ldots + a_n l = pl,$$

дзе a_1, ..., a_n — даўжыні кантаў асновы, p — перыметр асновы прызмы, а l — даўжыня бакавых кантаў. Тэарэма даказана.



Рыс. 410



Рыс. 411

З а д а ч а (22). У нахіленай прызме праведзена сячэнне, якое перпендыкулярнае бакавым кантам і перасякае ўсе бакавыя канты. Знайдзіце бакавую паверхню прызмы, калі перыметр сячэння роўны p, а бакавыя канты роўны l.

Р а ш э н н е. Плоскасць праведзенага сячэння разбівае прызму на дзве часткі (рыс. 411). Падвергнем адну з іх паралельнаму пераносу, які сумяшчае асновы прызмы. Пры гэтым атрымаем прамую прызму, асновай якой служыць сячэнне зыходнай прызмы, а бакавыя канты роўны l. Гэта прызма мае тую ж бакавую паверхню, што і зыходная. Такім чынам, бакавая паверхня зыходнай прызмы роўна pl.

172. ПАРАЛЕЛЕПІПЕД

Калі аснова прызмы ёсць паралелаграм, то яна называецца *паралелепіпедам*. У паралелепіпеда ўсе грані — паралелаграмы.

На рысунку 412, *а* паказан нахілены паралелепіпед, а на рысунку 412, *б* — прамы паралелепіпед.

Грані паралелепіпеда, якія не маюць агульных вяршынь, называюцца *процілеглымі*.



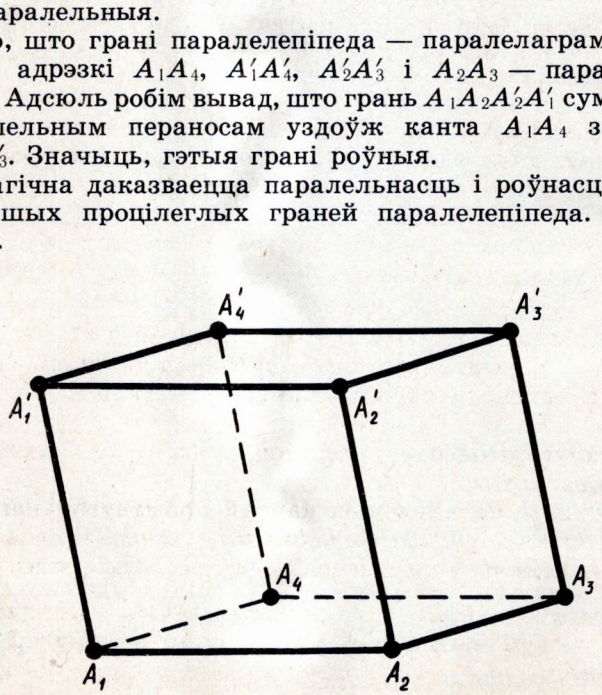
Рыс. 412

Тэарэма 19.2. ***У паралелепіпеда процілеглыя грані паралельныя і роўныя.***

Доказ. Разгледзім якія-небудзь дзве процілеглыя грані паралелепіпеда, напрыклад $A_1A_2A_2'A_1'$ і $A_3A_4A_4'A_3'$ (рыс. 413). Паколькі ўсе грані паралелепіпеда — паралелаграмы, то прамая A_1A_2 паралельная прамой A_4A_3, прамая A_1A_1' паралельная прамой A_4A_4'. Адсюль вынікае, што плоскасці разглядаемых граней паралельныя.

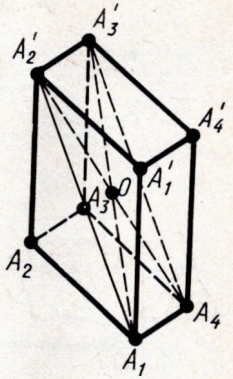
З таго, што грані паралелепіпеда — паралелаграмы, вынікае, што адрэзкі A_1A_4, $A_1'A_4'$, $A_2'A_3'$ і A_2A_3 — паралельныя і роўныя. Адсюль робім вывад, што грань $A_1A_2A_2'A_1'$ сумяшчаецца паралельным пераносам уздоўж канта A_1A_4 з гранню $A_3A_4A_4'A_3'$. Значыць, гэтыя грані роўныя.

Аналагічна даказваецца паралельнасць і роўнасць любых дзвюх іншых процілеглых граней паралелепіпеда. Тэарэма даказана.



Рыс. 413

173. ЦЭНТРАЛЬНАЯ СІМЕТРЫЯ ПАРАЛЕЛЕПІПЕДА



Рыс. 414

Тэарэма 19.3. ***Дыяганалі паралелепіпеда перасякаюцца ў адным пункце і пунктам перасячэння дзеляцца папалам.***

Доказ. Разгледзім якія-небудзь дзве дыяганалі паралелепіпеда, напрыклад A_1A_3' і A_4A_2' (рыс. 414). Паколькі чатырохвугольнікі $A_1A_2A_3A_4$ і $A_2A_2'A_3'A_3$ — паралелаграмы з агульнай стараной A_2A_3, то іх стораны A_1A_4 і $A_2'A_3'$ паралельныя адна адной, а значыць, ляжаць у адной плоскасці. Гэта плоскасць перасякае плоскасці процілеглых граней паралелепіпеда па паралельных прамых A_1A_2' і A_4A_3'. Значыць, чатырохвугольнік $A_4A_1A_2'A_3'$ — паралелаграм. Дыяганалі паралелепіпеда A_1A_3' і A_4A_2' з'яўляюцца дыяганалямі гэтага паралелаграма. Таму яны перасякаюцца і пунктам перасячэння O дзеляцца папалам.

Аналагічна даказваецца, што дыяганалі A_1A_3' і A_2A_4', а таксама дыяганалі A_1A_3' і A_3A_1' перасякаюцца і пунктам перасячэння дзеляцца папалам. Адсюль робім вывад, што ўсе чатыры дыяганалі паралелепіпеда перасякаюцца ў адным пункце і пунктам перасячэння дзеляцца папалам. Тэарэма даказана.

З тэарэмы 19.3 вынікае, што ***пункт перасячэння дыяганалей паралелепіпеда з'яўляецца яго цэнтрам сіметрыі.***

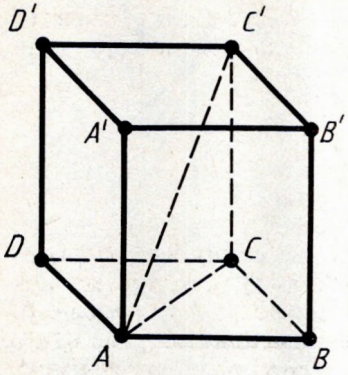
174. ПРАМАВУГОЛЬНЫ ПАРАЛЕЛЕПІПЕД

Прамы паралелепіпед, у якога асновай з'яўляецца прамавугольнік, называецца *прамавугольным паралелепіпедам.* У прамавугольнага паралелепіпеда ўсе грані — прамавугольнікі.

Прамавугольны паралелепіпед, у якога ўсе канты роўныя, называецца *кубам.*

Даўжыні непаралельных кантаў прамавугольнага паралелепіпеда называюцца яго *лінейнымі размерамі (вымярэннямі).* У прамавугольнага паралелепіпеда тры вымярэнні.

Тэарэма 19.4. ***У прамавугольным паралелепіпедзе квадрат любой дыяганалі роўны суме квадратаў трох яго вымярэнняў.***



Рыс. 415

Д о к а з. Разгледзім (рыс. 415) прамавугольны паралелепіпед $ABCDA'B'C'D'$. З прамавугольнага трохвугольніка $AC'C$ па тэарэме Піфагора атрымліваем:

$$AC'^2 = AC^2 + CC'^2.$$

З прамавугольнага трохвугольніка ACB па тэарэме Піфагора атрымліваем: $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Адсюль

$$AC'^2 = CC'^2 + AB^2 + BC^2.$$

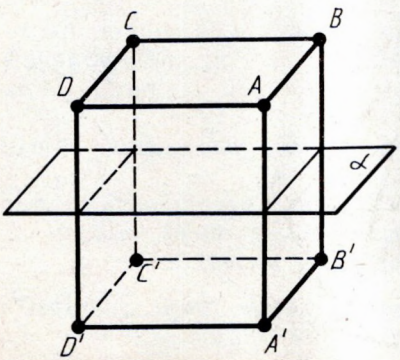
Канты AB, BC і CC' не паралельныя, а значыць, іх даўжыні з'яўляюцца лінейнымі размерамі паралелепіпеда. Тэарэма даказана.

175. СІМЕТРЫЯ ПРАМАВУГОЛЬНАГА ПАРАЛЕЛЕПІПЕДА

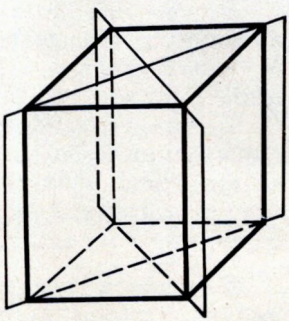
У прамавугольнага паралелепіпеда, як у любога паралелепіпеда, ёсць цэнтр сіметрыі — пункт перасячэння яго дыяганалей. У яго ёсць таксама тры плоскасці сіметрыі, якія праходзяць праз цэнтр сіметрыі паралельна граням. На рысунку 416 паказана адна з такіх плоскасцей. Яна праходзіць праз сярэдзіны чатырох паралельных кантаў паралелепіпеда. Канцы кантаў з'яўляюцца сіметрычнымі пунктамі.

Калі ў паралелепіпеда ўсе лінейныя размеры розныя, то ў яго няма іншых плоскасцей сіметрыі, акрамя тых, што названы.

Калі ж у паралелепіпеда два лінейныя размеры роўныя, то ў яго ёсць яшчэ дзве плоскасці сіметрыі. Гэта плоскасці дыяганальных сячэнняў, якія паказаны на рысунку 417.



Рыс. 416



Рыс. 417

Калі ў паралелепіпеда ўсе лінейныя размеры роўныя, г. зн. ён з'яўляецца кубам, то ў яго плоскасць любога дыяганальнага сячэння з'яўляецца плоскасцю сіметрыі. Такім чынам, у куба дзевяць плоскасцей сіметрыі.

176. ПІРАМІДА

Пірамідай называецца мнагагранні́к, які складаецца з плоскага многавугольніка — *асновы піраміды*, пункта, які не ляжыць у плоскасці асновы,— *вяршыні піраміды* і ўсіх адрэзкаў, што злучаюць вяршыню піраміды з пунктамі асновы (рыс. 418).

Адрэзкі, якія злучаюць вяршыню піраміды з вяршынямі асновы, называюцца *бакавымі кантамі*.

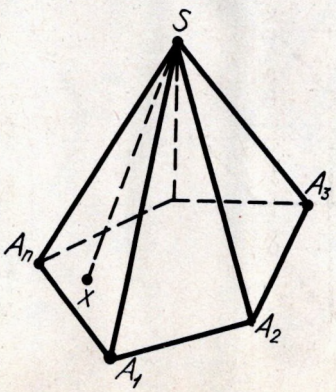
Паверхня піраміды складаецца з асновы і бакавых граней. Кожная бакавая грань — трохвугольнік. Адной з яго вяршынь з'яўляецца вяршыня піраміды, а процілеглай стараной — старана асновы піраміды.

Вышынёй піраміды называецца перпендыкуляр, апушчаны з вяршыні піраміды на плоскасць асновы.

Піраміда называецца n-вугольнай, калі яе асновай з'яўляецца n-вугольнік. Трохвугольная піраміда называецца таксама *тэтраэдрам*.

У піраміды, якая паказана на рысунку 418, аснова — многавугольнік $A_1A_2...A_n$, вяршыня піраміды — S, бакавыя канты — SA_1, SA_2, ..., SA_n, бакавыя грані — $\triangle SA_1A_2$, $\triangle SA_2A_3$, ...

У далейшым мы будзем разглядаць толькі піраміды з выпуклым многавугольнікам у аснове. Такія піраміды з'яўляюцца выпуклымі мнагагранні́камі.



Рыс. 418

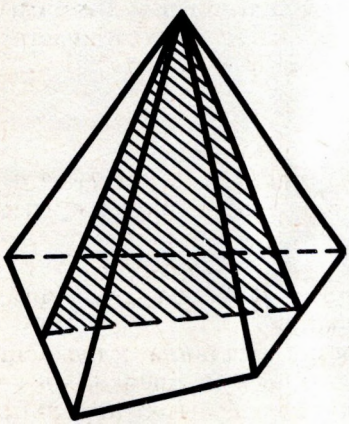
177. ПАБУДАВАННЕ ПІРАМІДЫ І ЯЕ ПЛОСКІХ СЯЧЭННЯЎ

У адпаведнасці з правіламі паралельнага праектавання відарыс піраміды будуецца наступным чынам. Спачатку будуецца аснова. Гэта будзе некаторы плоскі многавугольнік. Потым адзначаецца вяршыня піраміды, якая злучаецца бакавымі кантамі з вяршынямі асновы. На рысунку 418 паказаны відарыс пяцівугольнай піраміды.

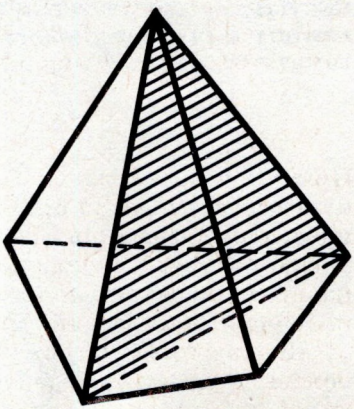
Сячэнні піраміды плоскасцямі, якія праходзяць праз яе вяршыню, уяўляюць сабой трохвугольнікі (рыс. 419). У прыватнасці, трохвугольнікамі з'яўляюцца *дыяганальныя сячэнні*. Гэта сячэнні плоскасцямі, якія праходзяць праз два несуседнія бакавыя канты піраміды (рыс. 420).

Сячэнне піраміды плоскасцю з зададзеным следам g на плоскасці асновы будуецца таксама, як і сячэнне прызмы. Для пабудавання сячэння піраміды плоскасцю дастаткова пабудаваць перасячэнні яе бакавых граней з сякучай плоскасцю.

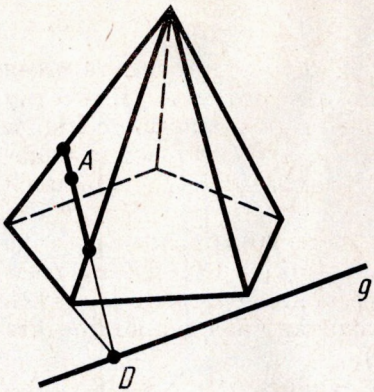
Калі на грані, не паралельнай следу g, вядомы які-небудзь пункт A, які належыць сячэнню, то спачатку будуецца перасячэнне следу g сякучай плоскасці з плоскасцю гэтай грані — пункт D на рысунку 421. Пункт D злучаецца з пунктам A прамой. Тады адрэзак гэтай прамой, які належыць грані, ёсць перасячэнне гэтай грані з сякучай плоскасцю. Калі пункт A ляжыць на грані, паралельнай следу g, то сякучая плоскасць перасякае гэту грань па адрэзку, паралельнаму прамой g. Пераходзячы да суседняй бакавой грані, будуюць яе перасячэнне з сякучай плоскасцю і г. д. У выніку атрымліваецца патрабуемае сячэнне піраміды.



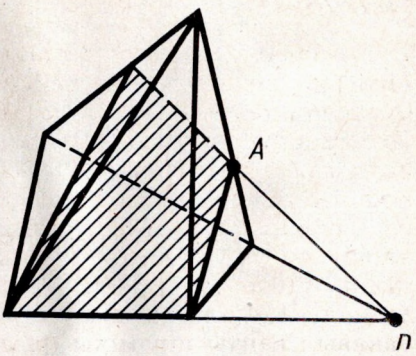
Рыс. 419



Рыс. 420



Рыс. 421



Рыс. 422

На рысунку 422 пабудавана сячэнне чатырохвугольнай піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз старану асновы і пункт A на адным з яе бакавых кантаў.

178. УСЕЧАНАЯ ПІРАМІДА

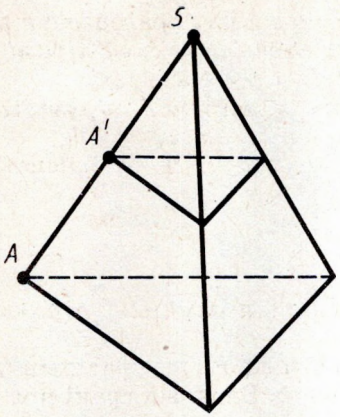
Тэарэма 19.5. ***Плоскасць, якая паралельная аснове піраміды і перасякае яе, адсякае падобную піраміду.***

Доказ. Няхай S — вяршыня піраміды, A — вяршыня асновы і A' — пункт перасячэння сякучай плоскасці з бакавым кантам SA (рыс. 423). Падвергнем піраміду пераўтварэнню гаматэтыі адносна вяршыні S з каэфіцыентам гаматэтыі

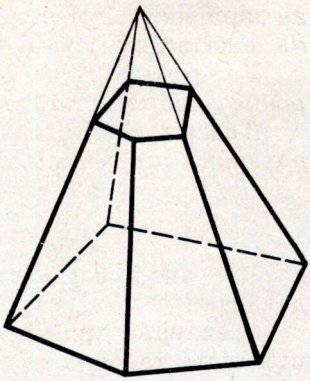
$$k = \frac{SA'}{SA}.$$

Пры гэтай гаматэтыі плоскасць асновы пераходзіць у паралельную плоскасць, якая праходзіць праз пункт A', г. зн. у сякучую плоскасць, а значыць, уся піраміда — у адсякаемую гэтай плоскасцю частку. Паколькі гаматэтыя ёсць пераўтварэнне падобнасці, то адсякаемая частка піраміды з'яўляецца пірамідай, падобнай да дадзенай. Тэарэма даказана.

Па тэарэме 19.5 плоскасць, якая паралельная плоскасці асновы піраміды і перасякае яе бакавыя канты, адсякае ад яе падобную піраміду. Другая частка ўяўляе сабой многагранік, які называецца *ўсечанай пірамідай* (рыс. 424). Грані ўсечанай піраміды, якія ляжаць у паралельных плоскасцях, называюцца *асновамі*; астатнія грані называюцца *бакавымі гранямі*.



Рыс. 423



Рыс. 424

Асновы ўсечанай піраміды ўяўляюць сабой падобныя (больш таго, гаматэтычныя) многавугольнікі, бакавыя грані — трапецыі.

З а д а ч а (54). Бакавы кант піраміды падзелены на чатыры роўныя часткі і праз пункты дзялення праведзены плоскасці, паралельныя аснове. Плошча асновы роўна 400 см^2. Знайдзіце плошчы сячэнняў.

Р а ш э н н е. Сячэнні падобныя аснове піраміды з каэфіцыентамі падобнасці $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ і $\frac{3}{4}$. Плошчы падобных фігур адносяцца, як квадраты лінейных размераў. Таму адносіны плошчаў сячэнняў да плошчы асновы піраміды ёсць $\left(\frac{1}{4}\right)^2$, $\left(\frac{2}{4}\right)^2$ і $\left(\frac{3}{4}\right)^2$. Значыць, плошчы сячэнняў роўны

$$400 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 25 \text{ (см}^2\text{)}, \quad 400 \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^2 = 100 \text{ (см}^2\text{)},$$

$$400 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 225 \text{ (см}^2\text{)}.$$

179. ПРАВІЛЬНАЯ ПІРАМІДА

Піраміда называецца *правільнай*, калі яе асновай з'яўляецца правільны многавугольнік, а аснова вышыні супадае з цэнтрам гэтага многавугольніка. *Воссю* правільнай піраміды называецца прамая, якая змяшчае яе вышыню. Відавочна, у правільнай піраміды бакавыя канты роўныя, значыць, бакавыя грані — роўныя раўнабедраныя трохвугольнікі.

Вышыня бакавой грані правільнай піраміды, праведзеная з яе вяршыні, называецца *апафемай*. *Бакавой паверхняй піраміды* называецца сума плошчаў яе бакавых граней.

Тэарэма 19.6. ***Бакавая паверхня правільнай піраміды роўна здабытку паўперыметра асновы на апафему.***

Доказ. Калі старана асновы a, а лік старон n, то бакавая паверхня піраміды роўна

$$\frac{al}{2}n = \frac{anl}{2} = \frac{pl}{2},$$

дзе l — апафема, а p — перыметр асновы піраміды. Тэарэма даказана.

Усечаная піраміда, якая атрымліваецца з правільнай піраміды, таксама называецца *правільнай*. Бакавыя грані правільнай усечанай піраміды — роўныя раўнабокія трапецыі; іх вышыні называюцца *апафемамі*.

Задача (69). Дакажыце, што бакавая паверхня правільнай усечанай піраміды роўна здабытку паўсумы перыметраў асноў на апафему.

Рашэнне. Бакавыя грані ўсечанай піраміды — трапецыі з адной і той жа верхняй асновай a, ніжняй b і вышынёй (апафемай) l. Таму плошча адной грані роўна $\frac{1}{2}(a+b)l$. Плошча ўсіх граней, г. зн. бакавая паверхня, роўна $\frac{1}{2}(an+bn)l$, дзе n — лік вяршынь у асновы піраміды, an і bn — перыметры асноў піраміды.

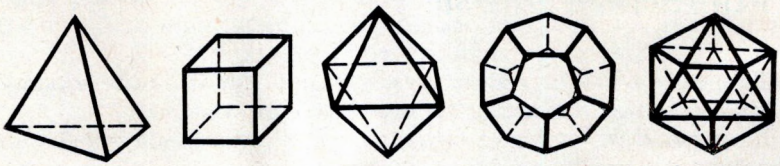
180. ПРАВІЛЬНЫЯ МНАГАГРАННІКІ

Выпуклы мнагаграннік называецца *правільным*, калі яго грані з'яўляюцца правільнымі многавугольнікамі з адным і тым жа лікам старон і ў кожнай вяршыні мнагагранніка зыходзіцца адзін і той жа лік кантаў.

*Існуе пяць тыпаў правільных выпуклых мнагагранніка*ў (рыс. 425): *правільны тэтраэдр, куб, актаэдр, дадэкаэдр, ікасаэдр*.

У правільнага тэтраэдра грані — правільныя трохвугольнікі, у кожнай вяршыні зыходзяцца па тры канты. Тэтраэдр уяўляе сабой трохвугольную піраміду, у якой усе канты роўныя.

У куба ўсе грані — квадраты; у кожнай вяршыні зыходзяцца па тры канты. Куб уяўляе сабой прамавугольны паралелепіпед з роўнымі кантамі.



Рыс. 425

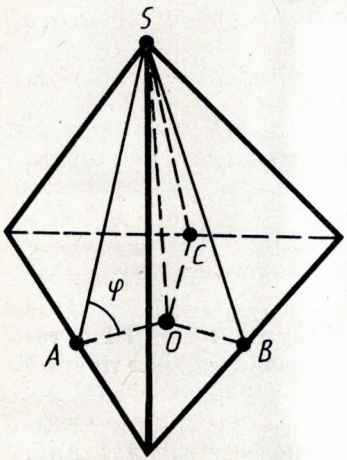
У актаэдра грані — правільныя трохвугольнікі, але ў адрозненне ад тэтраэдра ў кожнай яго вяршыні зыходзяцца па чатыры канты.

У дадэкаэдра грані — правільныя пяцівугольнікі. У кожнай вяршыні зыходзяцца па тры канты.

У ікасаэдра грані — правільныя трохвугольнікі, але ў адрозненне ад тэтраэдра і актаэдра ў кожнай вяршыні зыходзяцца па пяць кантаў.

З а д а ч а (81). Знайдзіце двухгранныя вуглы правільнага тэтраэдра.

Р а ш э н н е. Правядзём з вяршыні S тэтраэдра вышыні SA, SB, SC яго граней, якія зыходзяцца ў гэтай вяршыні, і вышыню SO тэтраэдра (рыс. 426). Калі кант тэтраэдра абазначыць праз a, то вышыні граней будуць роўны $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. З роўнасці вышынь SA, SB, SC вынікае роўнасць адрэзкаў OA, OB, OC. А яны перпендыкулярныя старанам трохвугольніка ў аснове тэтраэдра (па тэарэме аб трох перпендыкулярах). Адсюль вынікае, што пункт O з'яўляецца цэнтрам акружнасці, упісанай у аснову тэтраэдра. Значыць, адрэзкі OA, OB і OC роўны $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. Абазначым праз φ двухгранны вугал пры канце, які змяшчае пункт A. Тады



Рыс. 426

$$\cos\varphi = \frac{OA}{AS} = \frac{a\sqrt{3}}{6} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3},$$

$$\varphi \approx 70°32'.$$

Відавочна, двухгранныя вуглы пры астатніх кантах тэтраэдра такія ж па велічыні.

КАНТРОЛЬНЫЯ ПЫТАННІ

1. Што такое двухгранны вугал (грань вугла, кант вугла)?
2. Што такое лінейны вугал двухграннага вугла?
3. Чаму мера двухграннага вугла не залежыць ад выбару лінейнага вугла?
4. Растлумачце, што такое трохгранны вугал (грані і канты трохграннага вугла).
5. Растлумачце, што такое плоскія і двухгранныя вуглы трохграннага вугла).
6. Што такое мнагагранні?
7. Які мнагагранні называецца выпуклым?
8. Што такое грань выпуклага мнагагранніка, кант, вяршыня?
9. Што такое прызма (асновы прызмы, бакавыя грані, канты)?
10. Дакажыце, што ў прызме асновы ляжаць у паралельных плоскасцях і роўныя, бакавыя канты паралельныя і роўныя, бакавыя грані — паралелаграмы.
11. Што такое вышыня прызмы?
12. Што такое дыяганаль прызмы?
13. Што ўяўляе сабой сячэнне прызмы плоскасцю, якая паралельная бакавым кантам, у прыватнасці дыяганальнае сячэнне?
14. Як будуецца сячэнне прызмы плоскасцю, якая праходзіць праз дадзеную прамую ў плоскасці асновы прызмы і дадзены пункт на адной з бакавых граней?
15. Якая прызма называецца прамой (нахіленай)?
16. Якая прызма называецца правільнай?
17. Што такое бакавая паверхня прызмы (поўная паверхня прызмы)?
18. Дакажыце, што бакавая паверхня прамой прызмы роўна здабытку перыметра асновы на вышыню прызмы.
19. Што такое паралелепіпед?
20. Дакажыце, што ў паралелепіпеда процілеглыя грані паралельныя і роўныя.
21. Дакажыце, што дыяганалі паралелепіпеда перасякаюцца ў адным пункце і пунктам перасячэння дзеляцца папалам.
22. Дакажыце, што пункт перасячэння дыяганалей паралелепіпеда з'яўляецца яго цэнтрам сіметрыі.
23. Які паралелепіпед называецца прамавугольным? Што такое лінейныя размеры прамавугольнага паралелепіпеда?
24. Што такое куб?
25. Дакажыце, што ў прамавугольным паралелепіпедзе квадрат дыяганалі роўны суме квадратаў трох яго вымярэнняў.
26. Колькі плоскасцей сіметрыі ў прамавугольнага паралелепіпеда?

27. Што такое піраміда (аснова піраміды, бакавыя грані, канты, вышыня)?
28. Што ўяўляюць сабой сячэнні піраміды плоскасцямі, якія праходзяць праз яе вяршыню?
29. Што такое дыяганальнае сячэнне піраміды?
30. Як пабудаваць сячэнне піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз дадзеную прамую ў плоскасці асновы піраміды і зададзены пункт на адной з бакавых граней?
31. Дакажыце, што плоскасць, якая перасякае піраміду, паралельная аснове піраміды, адсякае ад яе падобную піраміду.
32. Растлумачце, што такое ўсечаная піраміда.
33. Якая піраміда называецца правільнай? Што такое вось правільнай піраміды?
34. Што такое апафема правільнай піраміды?
35. Дакажыце, што бакавая паверхня правільнай піраміды роўна здабытку паўперыметра асновы на апафему.
36. Які многагранник называецца правільным?
37. Пералічыце пяць тыпаў правільных многагранникаў і апішыце іх.

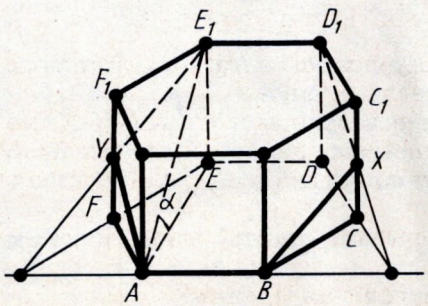


ЗАДАЧЫ

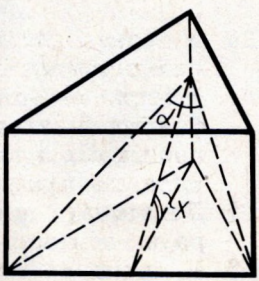
1. З пунктаў A і B, якія ляжаць у гранях двухграннага вугла, апушчаны перпендыкуляры AA_1 і BB_1 на кант вугла. Знайдзіце: 1) даўжыню адрэзка AB, калі $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $A_1B_1 = c$ і двухгранны вугал роўны α; 2) двухгранны вугал α, калі $AA_1 = 3$, $BB_1 = 4$, $A_1B_1 = 6$, $AB = 7$.
2. У трохграннага вугла (abc) двухгранны вугал пры канце c — прамы, двухгранны вугал пры канце b роўны φ, а плоскі вугал (bc) роўны $\gamma\left(\varphi,\ \gamma < \frac{\pi}{2}\right)$. Знайдзіце два іншыя плоскія вуглы: $\alpha = \angle(ab)$, $\beta = \angle(ac)$.
3. У трохграннага вугла адзін плоскі вугал роўны γ, а прылеглыя да яго двухгранныя вуглы роўны $\varphi\left(\varphi < \frac{\pi}{2}\right)$. Знайдзіце два іншыя плоскія вуглы α і вугал β, які ўтварае плоскасць вугла γ з процілеглым кантам.
4*. У трохграннага вугла два плоскія вуглы вострыя і роўныя α, а трэці вугал роўны γ. Знайдзіце двухгранныя вуглы φ, процілеглыя плоскім вуглам α, і вугал β паміж плоскасцю γ і процілеглым кантам.
5. Дакажыце, што сячэнне прызмы, паралельнае асновам, роўна асновам.
6. Колькі дыяганалей мае n-вугольная прызма?
7. Пабудуйце сячэнне чатырохвугольнай прызмы плоскасцю,

якая праходзіць праз старану і адну з вяршынь другой асновы.

8. Пабудуйце сячэнне чатырохвугольнай прызмы плоскасцю, якая праходзіць праз тры пункты на бакавых кантах прызмы.
9. У прызмы адзін бакавы кант перпендыкулярны плоскасці асновы. Дакажыце, што астатнія бакавыя канты таксама перпендыкулярныя плоскасці асновы.
10. У прамой трохвугольнай прызме стораны асновы роўны 10 см, 17 см і 21 см, а вышыня прызмы 18 см. Знайдзіце плошчу сячэння, праведзенага праз бакавы кант і меншую вышыню асновы.
11. Бакавы кант нахіленай прызмы роўны 15 см і нахілены да плоскасці асновы пад вуглом 30°. Знайдзіце вышыню прызмы.
12*. У нахіленай трохвугольнай прызме адлегласці паміж бакавымі кантамі роўны 37 см, 13 см і 40 см. Знайдзіце адлегласць паміж большай бакавой гранню і процілеглым бакавым кантам.
13. Асновай прызмы з'яўляецца правільны шасцівугольнік са стараной a, а бакавыя грані — квадраты. Знайдзіце дыяганалі прызмы і плошчы яе дыяганальных сячэнняў.
14*. У правільнай шасцівугольнай прызме, у якой бакавыя грані — квадраты, правядзіце плоскасць праз старану ніжняй асновы і процілеглую ёй старану верхняй асновы. Старана асновы роўна a. Знайдзіце плошчу пабудаванага сячэння (рыс. 427).
15. Праз старану ніжняй асновы правільнай трохвугольнай прызмы праведзена плоскасць, якая перасякае бакавыя грані па адрэзках, вугал паміж якім α. Знайдзіце вугал нахілу гэтай плоскасці да асновы прызмы (рыс. 428).
16. У правільнай чатырохвугольнай прызме праз сярэдзіны дзвюх сумежных старон асновы праведзена плоскасць, якая



Рыс. 427



Рыс. 428

перасякае тры бакавыя канты і нахілена да плоскасці асновы пад вуглом α. Старана асновы роўна a. Знайдзіце плошчу атрыманага сячэння.

17. У правільнай чатырохвугольнай прызме плошча асновы 144 см^2, а вышыня 14 см. Знайдзіце дыяганаль прызмы.

18. У правільнай чатырохвугольнай прызме плошча бакавой грані роўна Q. Знайдзіце плошчу дыяганальнага сячэння.

19*. Старана асновы правільнай чатырохвугольнай прызмы роўна 15, вышыня роўна 20. Знайдзіце найкарацейшую адлегласць ад стараны асновы да дыяганалі прызмы, якая яе не перасякае (рыс. 429).

20. У прамой трохвугольнай прызме ўсе канты роўныя. Бакавая паверхня роўна 12 м^2. Знайдзіце вышыню.

21. Бакавая паверхня правільнай чатырохвугольнай прызмы роўна 32 м^2, а поўная паверхня 40 м^2. Знайдзіце вышыню.

22*. У нахіленай прызме праведзена сячэнне, якое перпендыкулярнае бакавым кантам і перасякае ўсе бакавыя канты. Знайдзіце бакавую паверхню прызмы, калі перыметр сячэння роўны p, а бакавыя канты роўны l.

23. Адлегласці паміж паралельнымі прамымі, якія змяшчаюць бакавыя канты нахіленай трохвугольнай прызмы 2 см, 3 см і 4 см, а бакавыя канты 5 см. Знайдзіце бакавую паверхню прызмы.

24. Па старане асновы a і бакавому канту b знайдзіце поўную паверхню правільнай прызмы: 1) трохвугольнай; 2) чатырохвугольнай; 3) шасцівугольнай.

25. Плоскасць, якая праходзіць праз старану асновы правільнай трохвугольнай прызмы і сярэдзіну процілеглага канта, утварае з асновай вугал 45°. Старана асновы l. Знайдзіце бакавую паверхню прызмы.

26. У паралелепіпеда тры грані маюць плошчы 1 м^2, 2 м^2 і 3 м^2. Чаму роўна поўная паверхня паралелепіпеда?

27. Вядомы вуглы, утвараемыя кантамі паралелепіпеда, якія зыходзяцца ў адной вяршыні. Як знайсці вуглы паміж кантамі, якія зыходзяцца ў любой іншай вяршыні?

28. Дакажыце, што адрэзак, які злучае цэнтры асноў паралелепіпеда, паралельны бакавым кантам.

29. У прамым паралелепіпедзе стораны асновы 6 м і 8 м утвараюць вугал 30°; бакавы кант роўны 5 м. Знайдзіце поўную паверхню гэтага паралелепіпеда.

30. У прамым паралелепіпедзе стораны асновы 3 см і 8 см; вугал паміж імі 60°. Бакавая паверхня роўна 220 см^2. Знайдзіце поўную паверхню.

31. У прамым паралелепіпедзе стораны асновы 3 см і 5 см, а адна з дыяганалей асновы 4 см. Знайдзіце большую дыяганаль паралелепіпеда, ведаючы, што меншая дыяганаль утварае з плоскасцю асновы вугал 60°.

32. Знайдзіце дыяганалі прамога паралелепіпеда, у якога кожны кант роўны a, а вугал асновы роўны 60°.

33*. Бакавы кант прамога паралелепіпеда роўны 5 м, стораны асновы роўны 6 м і 8 м, адна з дыяганалей асновы роўна 12 м. Знайдзіце дыяганалі паралелепіпеда.

34. У прамым паралелепіпедзе бакавы кант роўны 1 м, стораны асновы роўны 23 дм і 11 дм, а дыяганалі асновы адносяцца як 2 : 3. Знайдзіце плошчы дыяганальных сячэнняў.

35. Знайдзіце дыяганалі прамавугольнага паралелепіпеда па трох яго вымярэннях: 1) 1, 2, 2; 2) 2, 3, 6; 3) 6, 6, 7.

36*. Кант куба роўны a. Знайдзіце адлегласць ад вяршыні куба да яго дыяганалі, якая злучае дзве другія вяршыні.

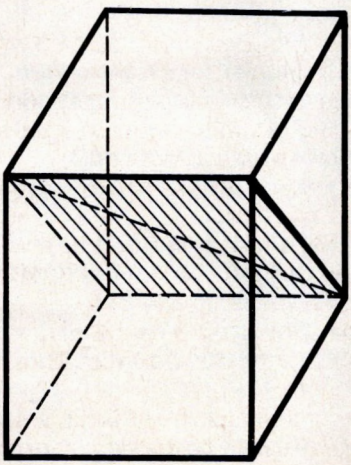
37. У прамавугольным паралелепіпедзе стораны асновы 7 дм і 24 дм, а вышыня паралелепіпеда роўна 8 дм. Знайдзіце плошчу дыяганальнага сячэння.

38. Знайдзіце паверхню прамавугольнага паралелепіпеда па трох яго вымярэннях: 10 см, 22 см, 16 см.

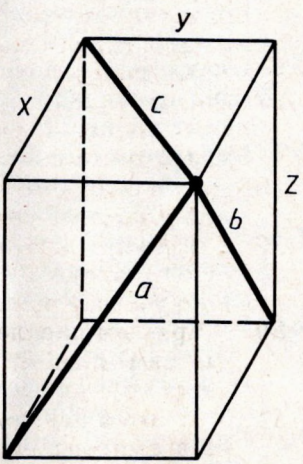
39. Знайдзіце бакавую паверхню прамавугольнага паралелепіпеда, калі яго вышыня h, плошча асновы Q, а плошча дыяганальнага сячэння M.

40. Дыяганалі трох граней прамавугольнага паралелепіпеда, якія зыходзяцца ў адной вяршыні, роўны a, b, c. Знайдзіце лінейныя размеры паралелепіпеда (рыс. 430).

41. Аснова піраміды — раўнабедраны трохвугольнік, аснова якога роўна 12 см, а бакавая старана 10 см. Бакавыя грані ўтвараюць з асновай роўныя двухгранныя вуглы, якія змяшчаюць па 45°. Знайдзіце вышыню піраміды.



Рыс. 429



Рыс. 430

42. Аснова піраміды — прамавугольнік са старанамі 6 см і 8 см. Кожны бакавы кант піраміды роўны 13 см. Вылічыце вышыню піраміды.

43. Асновай піраміды з'яўляецца правільны трохвугольнік; адна з бакавых граней перпендыкулярная аснове, а дзве другія нахілены да яе пад вуглом α. Як нахілены да плоскасці асновы бакавыя канты?

44. У аснове піраміды ляжыць прамавугольны трохвугольнік з гіпатэнузай a. Кожны бакавы кант утварае з плоскасцю асновы вугал β. Знайдзіце вышыню піраміды.

45. Аснова піраміды — прамавугольны трохвугольнік з катэтамі 6 см і 8 см. Усе двухгранныя вуглы пры аснове піраміды роўны 60°. Знайдзіце вышыню піраміды.

46. Аснова піраміды — паралелаграм, у якога стораны 3 см і 7 см, а адна з дыяганалей 6 см; вышыня піраміды праходзіць праз пункт перасячэння дыяганалей, яна роўна 4 см. Знайдзіце бакавы кант піраміды.

47*. Аснова піраміды — ромб з дыяганалямі 6 м і 8 м; вышыня піраміды праходзіць праз пункт перасячэння дыяганалей ромба і роўна 1 м. Знайдзіце бакавую паверхню піраміды.

48. Аснова піраміды — раўнабедраны трохвугольнік са старанамі 40 см, 25 см і 25 см. Яе вышыня праходзіць праз вяршыню вугла, процілеглага старане 40 см, і роўна 8 см. Знайдзіце бакавую паверхню піраміды.

49. Аснова піраміды — квадрат, яе вышыня праходзіць праз адну з вяршынь асновы. Знайдзіце бакавую паверхню піраміды, калі старана асновы роўна 20 дм, а вышыня 21 дм (рыс. 431).

50. Пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз вяршыню піраміды і два дадзеныя пункты на яе аснове.

51. Пабудуйце сячэнне трохвугольнай піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз старану асновы піраміды і дадзены пункт на процілеглым канце.

52. Пабудуйце сячэнне чатырохвугольнай піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз старану асновы і пункт на адным з бакавых кантаў.

53. У чатырохвугольнай усечанай піраміды стораны адной асновы роўны 6, 7, 8, 9 см, а меншая старана другой асновы роўна 5 см. Знайдзіце астатнія стораны гэтай асновы.

54. Бакавы кант піраміды падзелен на чатыры роўныя часткі і праз пункты дзялення праведзены плоскасці, паралельныя аснове. Плошча асновы роўна 400 см^2. Знайдзіце плошчы сячэнняў.

55. Вышыня піраміды роўна 16 м. Плошча асновы роўна 512 м^2. На якой адлегласці ад асновы знаходзіцца сячэнне, паралельнае яму, калі плошча сячэння 50 м^2?

56. У правільнай трохвугольнай пірамідзе з вышынёй h праз старану асновы a праведзена плоскасць, якая перасякае процілеглы бакавы кант пад прамым вуглом. Знайдзіце плошчу сячэння.

57. Вышыня правільнай чатырохвугольнай піраміды роўна 7 см, а старана асновы — 8 см. Знайдзіце бакавы кант.

58. У правільнай чатырохвугольнай пірамідзе плоскі вугал пры вяршыні роўны α. Знайдзіце двухгранны вугал x пры аснове піраміды.

59. Па дадзенай старане асновы a і бакавому канту b знайдзіце вышыню правільнай піраміды: 1) трохвугольнай; 2) чатырохвугольнай; 3) шасцівугольнай.

60. Па дадзенай старане асновы a і вышыні b знайдзіце апафему правільнай піраміды: 1) трохвугольнай; 2) чатырохвугольнай; 3) шасцівугольнай.

61. Па старане асновы a і вышыні h знайдзіце поўную паверхню правільнай піраміды: 1) трохвугольнай; 2) чатырохвугольнай; 3) шасцівугольнай.

62. Знайдзіце поўную паверхню правільнай шасцівугольнай піраміды з бакавым кантам a і радыусам акружнасці, упісанай у аснову, r.

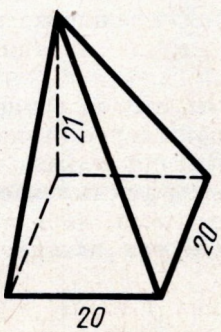
63. У правільнай чатырохвугольнай пірамідзе бакавая паверхня роўна 14,76 м^2, а поўная паверхня — 18 м^2. Знайдзіце старану асновы і вышыню піраміды.

64. Па старане асновы a знайдзіце бакавую паверхню правільнай чатырохвугольнай піраміды, у якой дыяганальнае сячэнне роўнавялікае аснове.

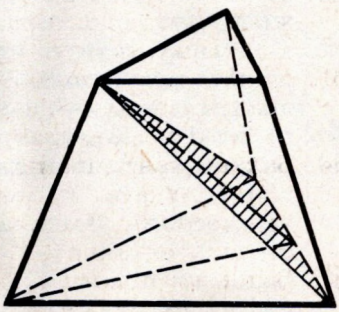
65. Знайдзіце бакавую паверхню піраміды, калі плошча асновы Q, а двухгранныя вуглы пры аснове φ.

66. Знайдзіце двухгранныя вуглы пры аснове правільнай піраміды, плошча асновы якой роўна Q, а бакавая паверхня — S.

67. Знайдзіце старану асновы і апафему правільнай трохву-



Рыс. 431



Рыс. 432

гольнай піраміды, калі яе бакавы кант роўны 10 см, а бакавая паверхня роўна 144 см^2.

68. У правільнай чатырохвугольнай пірамідзе знайдзіце старану асновы, калі бакавы кант роўны 5 см, а поўная паверхня — 16 см^2.

69. Дакажыце, што бакавая паверхня правільнай усечанай піраміды роўна здабытку паўсумы перыметраў асноў на апафему.

70. Вышыня правільнай чатырохвугольнай усечанай піраміды роўна 7 см. Стораны асноў роўны 10 см і 2 см. Знайдзіце бакавы кант піраміды.

71. Стораны асноў правільнай усечанай трохвугольнай піраміды 4 дм і 1 дм. Бакавы кант 2 дм. Знайдзіце вышыню піраміды.

72. У правільнай чатырохвугольнай усечанай пірамідзе вышыня роўна 2 см, а стораны асноў 3 см і 5 см. Знайдзіце дыяганаль гэтай піраміды.

73. Стораны асноў усечанай правільнай трохвугольнай піраміды 2 см і 6 см. Бакавая грань утварае з большай асновай вугал 60°. Знайдзіце вышыню.

74. У правільнай усечанай трохвугольнай пірамідзе старана большай асновы a, старана меншай b. Бакавы кант утварае з асновай вугал 45°. Знайдзіце плошчу сячэння, якое праходзіць праз бакавы кант і вось піраміды[1].

75. Вышыня правільнай чатырохвугольнай усечанай піраміды роўна 4. Стораны асноў роўны 2 і 8. Знайдзіце плошчы дыяганальных сячэнняў.

76. У правільнай трохвугольнай усечанай пірамідзе старана ніжняй асновы 8 м, верхняй — 5 м, а вышыня 3 м. Правядзіце сячэнне праз старану ніжняй асновы і процілеглую вяршыню верхняй асновы. Знайдзіце плошчу сячэння і двухгранны вугал паміж сячэннем і ніжняй асновай (рыс. 432).

77. У правільнай чатырохвугольнай усечанай пірамідзе стораны асноў 8 м і 2 м. Вышыня роўна 4 м. Знайдзіце поўную паверхню.

78. Знайдзіце поўную паверхню правільнай усечанай піраміды: 1) трохвугольнай; 2) чатырохвугольнай; 3) шасцівугольнай, калі вышыня роўна h, а стораны асноў a і b.

79. Дакажыце, што цэнтры граней куба з'яўляюцца вяршынямі актаэдра, а цэнтры граней актаэдра з'яўляюцца вяршынямі куба.

80. Дакажыце, што канцы дзвюх непаралельных дыяганалей

---

[1] Вось правільнай усечанай піраміды супадае з воссю адпаведнай поўнай піраміды.

процілеглых граней куба з'яўляюцца вяршынямі тэтраэдра.

81. Знайдзіце двухгранныя вуглы правільнага тэтраэдра.

82*. Знайдзіце двухгранныя вуглы актаэдра.

83. Якія плоскасці сіметрыі мае правільны тэтраэдр?

84*. Колькі плоскасцей сіметрыі ў правільнага актаэдра, дадэкаэдра і ікасаэдра?

§ 20. ЦЕЛЫ ВЯРЧЭННЯ

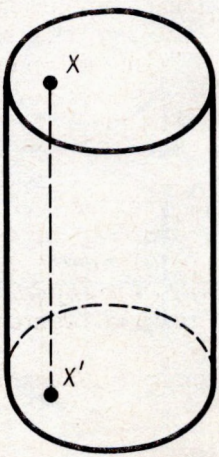
181. ЦЫЛІНДР

Цыліндрам (дакладней, кругавым цыліндрам) называецца цела, якое складаецца з двух кругоў, якія не ляжаць у адной плоскасці і сумяшчаюцца паралельным пераносам, і ўсіх адрэзкаў, што злучаюць адпаведныя пункты гэтых кругоў (рыс. 433). Кругі называюцца *асновамі цыліндра*, а адрэзкі, якія злучаюць адпаведныя пункты акружнасцей кругоў,— *утваральнымі цыліндра*.

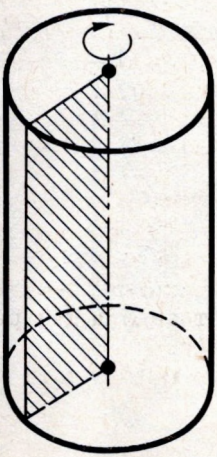
Паколькі паралельны пераносы ёсць рухі, то ***асновы цыліндра роўныя.***

Паколькі пры паралельным пераносе плоскасць пераходзіць у паралельную плоскасць (ці ў сябе), то ***ў цыліндра асновы ляжаць у паралельных плоскасцях.***

Паколькі пры паралельным пераносе пункты зрушваюцца па паралельных (ці супадаючых) прамых на адну і тую ж адлегласць, то ***ў цыліндра ўтваральныя паралельныя і роўныя.***



Рыс. 433



Рыс. 434

Паверхня цыліндра складаецца з асноў і бакавой паверхні. Бакавая паверхня складзена з утваральных.

Цыліндр называецца *прамым*, калі яго ўтваральныя перпендыкулярныя плоскасцям асноў.

У далейшым мы будзем разглядаць толькі прамы цыліндр, называючы яго для кароткасці проста цыліндрам. Прамы цыліндр наглядна можна ўяўляць сабе як цела, якое апісвае прамавугольнік пры вярчэнні яго вакол стараны як восі (рыс. 434).

Радыусам цыліндра называецца радыус яго асновы. *Вышынёй цыліндра* называецца адлегласць паміж плоскасцямі яго асноў. *Воссю цыліндра* называецца прамая, якая праходзіць праз цэнтры асноў. Яна паралельная ўтваральным.

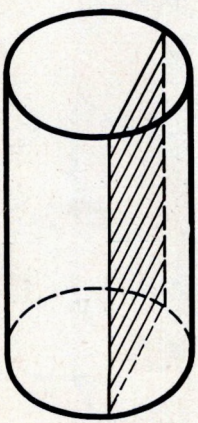
182. СЯЧЭННІ ЦЫЛІНДРА ПЛОСКАСЦЯМІ

Сячэнне цыліндра плоскасцю, паралельнай яго восі, уяўляе сабой прамавугольнік (рыс. 435). Дзве яго староны — утваральныя цыліндра, а дзве іншыя — паралельныя хорды асноў. У прыватнасці, прамавугольнікам з'яўляецца *восевае сячэнне*. Гэта — сячэнне цыліндра плоскасцю, якая праходзіць праз яго вось (рыс. 436).

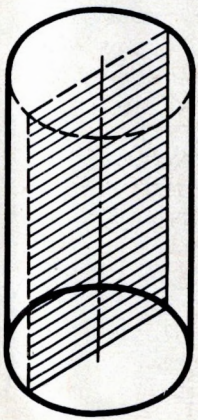


З а д а ч а (2). Восевае сячэнне цыліндра — квадрат, плошча якога Q. Знайдзіце плошчу асновы цыліндра.

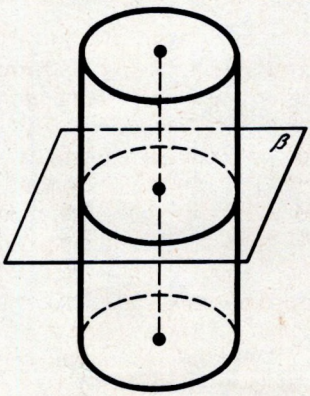
Р а ш э н н е. Старана квадрата роўна $\sqrt{Q}$. Яна роўна



Рыс. 435



Рыс. 436



Рыс. 437

дыяметру асновы. Таму плошча асновы роўна $\pi\left(\frac{\sqrt{Q}}{2}\right)^2 = \frac{\pi Q}{4}$.

Тэарэма 20.1. ***Плоскасць, паралельная плоскасці асновы цыліндра, перасякае яго бакавую паверхню па акружнасці, роўнай акружнасці асновы.***

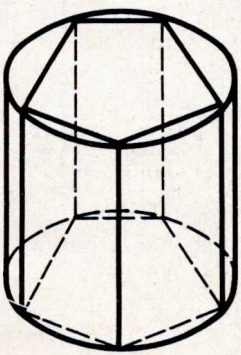
Доказ. Няхай β — плоскасць, паралельная плоскасці асновы цыліндра (рыс. 437). Паралельны перанос у напрамку восі цыліндра, які сумяшчае плоскасць β з плоскасцю асновы цыліндра, сумяшчае сячэнне бакавой паверхні плоскасцю β з акружнасцю асновы. Тэарэма даказана.

183. УПІСАНАЯ І АПІСАНАЯ ПРЫЗМЫ

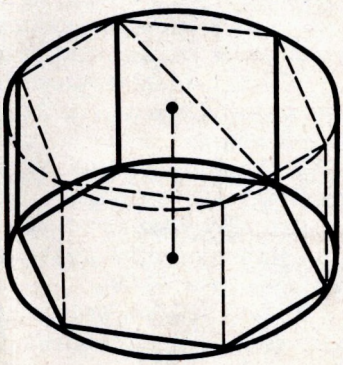
Прызмай, упісанай у цыліндр, называецца такая прызма, у якой плоскасцямі асноў з'яўляюцца плоскасці асноў цыліндра, а бакавыя канты — утваральныя цыліндра (рыс. 438).

Задача (7). У цыліндр упісана правільная шасцівугольная прызма. Знайдзіце вугал паміж дыяганаллю яе бакавой грані і воссю цыліндра, калі радыус асновы роўны вышыні цыліндра.

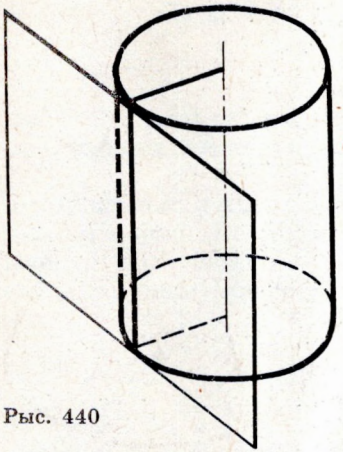
Рашэнне. Бакавыя грані прызмы — квадраты, паколькі старана правільнага шасцівугольніка, упісанага ў акружнасць, роўна радыусу (рыс. 439). Канты прызмы паралельныя восі цыліндра, таму вугал паміж дыяганаллю грані і воссю цыліндра роўны вуглу паміж дыяганаллю і бакавым кантам. А гэты вугал роўны 45°, паколькі грані — квадраты.



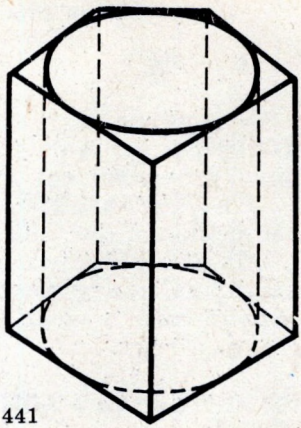
Рыс. 438



Рыс. 439



Рыс. 440



Рыс. 441

Датычнай плоскасцю да цыліндра называецца плоскасць, якая праходзіць праз утваральную цыліндра і перпендыкулярная плоскасці восевага сячэння, якая змяшчае гэту ўтваральную (рыс. 440).

Прызмай, апісанай каля цыліндра, называецца прызма, у якой плоскасцямі асноў з'яўляюцца плоскасці асноў цыліндра, а бакавыя грані датыкаюцца да цыліндра (рыс. 441).

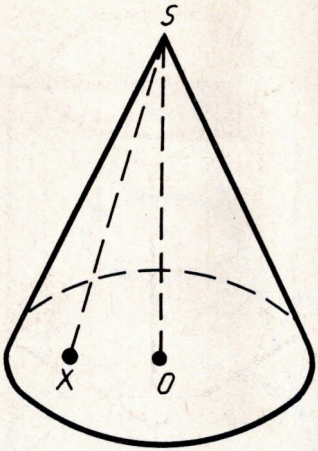
184. КОНУС

Конусам (дакладней, кругавым конусам) называецца цела, якое складаецца з круга — *асновы конуса*, пункта, што не ляжыць у плоскасці гэтага круга,— *вяршыні конуса* і ўсіх адрэзкаў, якія злучаюць вяршыні конуса з пунктамі асновы (рыс. 442). Адрэзкі, якія злучаюць вяршыню конуса з пунктамі акружнасці асновы, называюцца *ўтваральнымі конуса*. Паверхня конуса складаецца з асновы і бакавой паверхні.

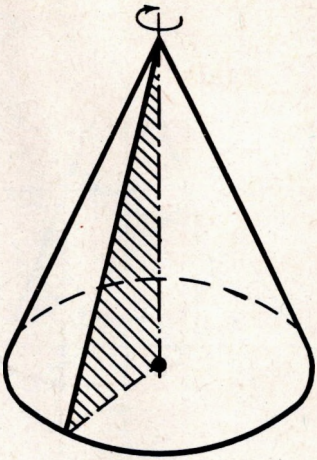
Конус называецца *прамым*, калі прамая, якая злучае вяршыні конуса з цэнтрам асновы, перпендыкулярная плоскасці асновы.

У далейшым мы будзем разглядаць толькі прамы конус, называючы яго для кароткасці проста конусам. Наглядна прамы кругавы конус можна ўяўляць сабе як цела, атрыманае пры вярчэнні прамавугольнага трохвугольніка вакол яго катэта як восі (рыс. 443).

Вышынёй конуса называецца перпендыкуляр, апушчаны з яго вяршыні на плоскасць асновы. У прамога конуса аснова вышыні супадае з цэнтрам асновы. *Воссю прамога кругавога конуса* называецца прамая, якая змяшчае яго вышыню.



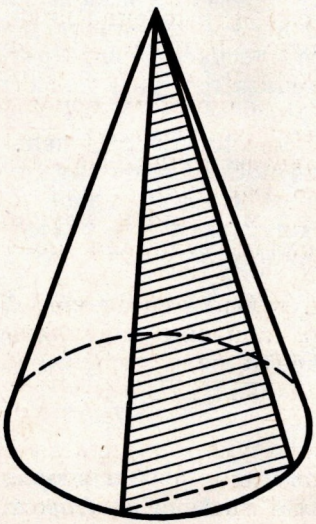
Рыс. 442



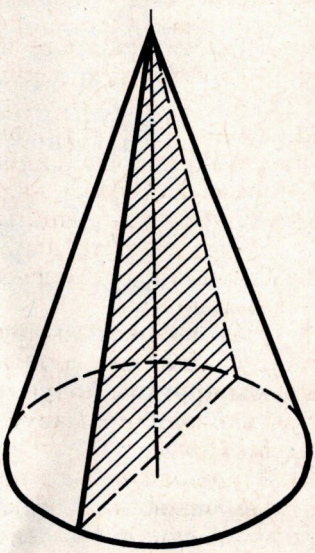
Рыс. 443

185. СЯЧЭННІ КОНУСА ПЛОСКАСЦЯМІ

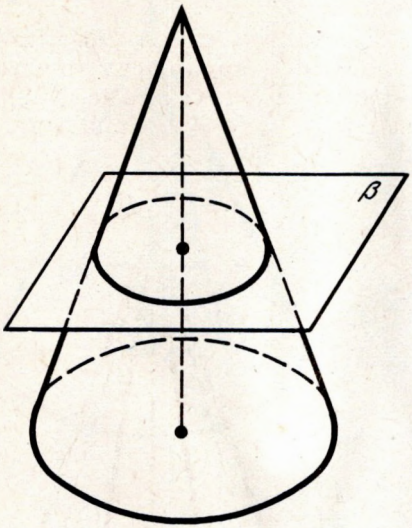
Сячэнне конуса плоскасцю, якая праходзіць праз яго вяршыню, уяўляе сабой раўнабедраны трохвугольнік, у якога бакавыя стораны з'яўляюцца ўтваральнымі цыліндра (рыс. 444). У прыватнасці, раўнабедраным трохвугольнікам з'яўляецца восевае сячэнне конуса. Гэта сячэнне, якое праходзіць праз вось конуса (рыс. 445).



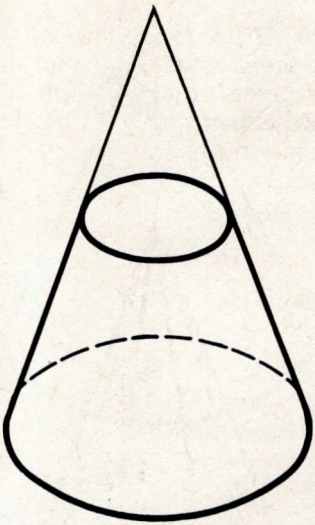
Рыс. 444



Рыс. 445



Рыс. 446



Рыс. 447

Тэарэма 20.2. ***Плоскасць, паралельная плоскасці асновы конуса, перасякае конус па кругу, а бакавую паверхню — па акружнасці з цэнтрам на восі конуса.***

Доказ. Няхай β — плоскасць, паралельная плоскасці асновы конуса і перасякаючая конус (рыс. 446). Пераўтварэнне гаматэтыі адносна вяршыні конуса, якое сумяшчае плоскасць β з плоскасцю асновы, сумяшчае сячэнне конуса плоскасцю β з асновай конуса. Значыць, сячэнне конуса плоскасцю ёсць круг, а сячэнне бакавой паверхні — акружнасць з цэнтрам на восі конуса. Тэарэма даказана.

Задача (15). Конус перасечаны плоскасцю, паралельнай аснове, на адлегласці d ад вяршыні. Знайдзіце плошчу сячэння, калі радыус асновы конуса R, а вышыня H.

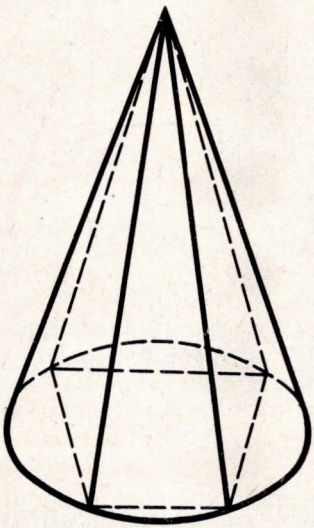
Рашэнне. Сячэнне конуса атрымліваецца з асновы конуса пераўтварэннем гаматэтыі адносна вяршыні конуса з каэфіцыентам гаматэтыі $k = \frac{d}{H}$. Таму радыус круга ў сячэнні $r = R\frac{d}{H}$. Значыць, плошча сячэння

$$S = \pi R^2 \frac{d^2}{H^2}.$$

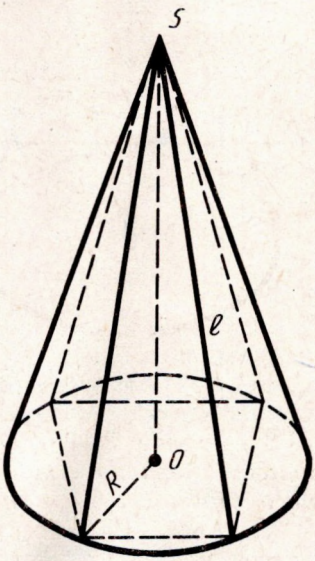
Плоскасць, паралельная аснове конуса і перасякаючая конус, адсякае ад яго меншы конус. Частка, якая засталася, называецца *ўсечаным конусам* (рыс. 447).

186. УПІСАНАЯ І АПІСАНАЯ ПІРАМІДЫ

Пірамідай, упісанай у конус, называецца такая піраміда, аснова якой ёсць многавугольнік, упісаны ў акружнасць асновы конуса, а вяршыняй з'яўляецца вяршыня конуса (рыс. 448). Бакавыя канты піраміды, упісанай у конус, з'яўляюцца ўтваральнымі конуса.



Рыс. 448



Рыс. 449

Задача (25). У піраміды ўсе бакавыя канты роўныя. Дакажыце, што яна з'яўляецца ўпісанай у некаторы конус.

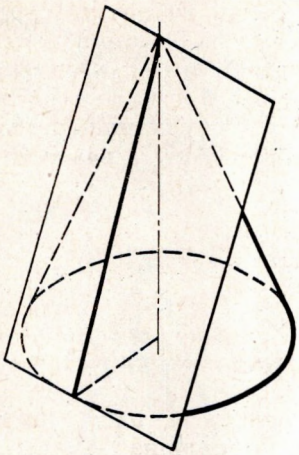
Рашэнне. Апусцім перпендыкуляр SO з вяршыні піраміды на плоскасць асновы (рыс. 449) і абазначым даўжыні бакавых кантаў піраміды праз l. Вяршыні асновы аддалены ад пункта O на адну і тую ж адлегласць

$$R = \sqrt{l^2 - OS^2}.$$

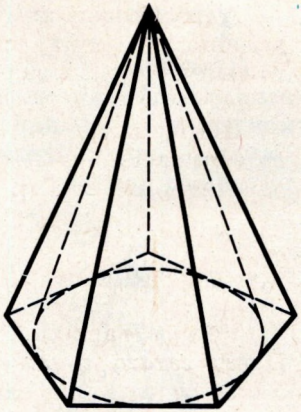
Адсюль вынікае, што наша піраміда ўпісана ў конус, у якога вяршыняй з'яўляецца вяршыня піраміды, а асновай — круг з цэнтрам O і радыусам R.

Датычнай плоскасцю да конуса называецца плоскасць, якая праходзіць праз утваральную конуса і перпендыкулярная плоскасці восевага сячэння, якое змяшчае гэту ўтваральную (рыс. 450).

Пірамідай, апісанай каля конуса, называецца піраміда, у якой асновай з'яўляецца многавугольнік, апісаны каля



Рыс. 450



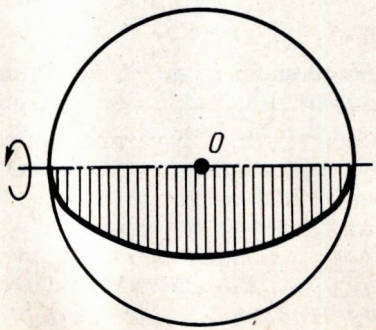
Рыс. 451

асновы конуса, а вяршыня супадае з вяршыняй конуса (рыс. 451). Плоскасці бакавых граней апісанай піраміды з'яўляюцца датычнымі плоскасцямі конуса.

187. ШАР

Шарам называецца цела, якое складаецца з усіх пунктаў прасторы, што знаходзяцца на адлегласці, не большай за дадзеную ад дадзенага пункта. Гэты пункт называецца *цэнтрам шара*, а дадзеная адлегласць — *радыусам шара*.

Мяжа шара называецца *шаравой паверхняй*, або *сферай*. Такім чынам, пунктамі сферы з'яўляюцца ўсе пункты шара, якія аддалены ад цэнтра на адлегласць, роўную радыусу. Любы адрэзак, які злучае цэнтр шара з пунктам шаравой паверхні, таксама называецца радыусам.



Рыс. 452

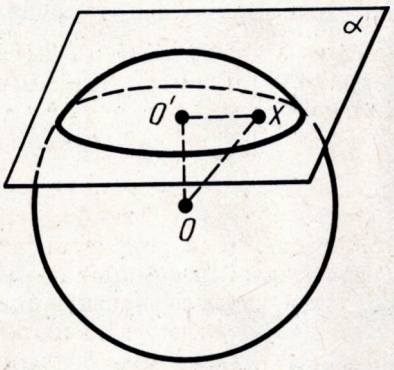
Адрэзак, які злучае два пункты шаравой паверхні і праходзіць праз цэнтр шара, называецца *дыяметрам*. Канцы любога дыяметра называюцца *дыяметральна процілеглымі пунктамі шара*.

Шар гэтак жа, як цыліндр і конус, з'яўляецца целам вярчэння. Ён атрымліваецца пры вярчэнні паўкруга вакол яго дыяметра як восі (рыс. 452).

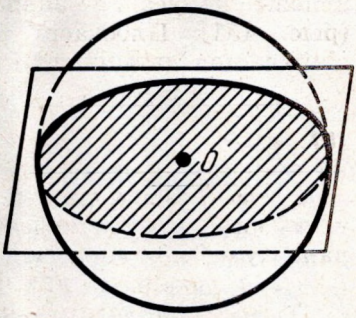
188. СЯЧЭННЕ ШАРА ПЛОСКАСЦЮ

Тэарэма 20.3. ***Усякае сячэнне шара плоскасцю ёсць круг. Цэнтр гэтага круга ёсць аснова перпендыкуляра, апушчанага з цэнтра шара на сякучую плоскасць.***

Доказ. Няхай α — сякучая плоскасць і O — цэнтр шара (рыс. 453). Апусцім перпендыкуляр з цэнтра шара на плоскасць α і абазначым праз O' аснову гэтага перпендыкуляра.



Рыс. 453

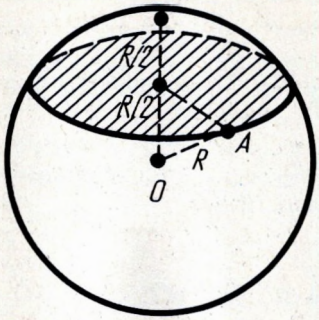


Рыс. 454

Няхай X — адвольны пункт шара, які належыць плоскасці α. Па тэарэме Піфагора $OX^2 = OO'^2 + O'X^2$. Паколькі OX не большы за радыус R шара, то $O'X \leqslant \sqrt{R^2 - OO'^2}$, г. зн. любы пункт сячэння шара плоскасцю α знаходзіцца ад пункта O' на адлегласці, не большай за $\sqrt{R^2 - OO'^2}$, значыць, ён належыць кругу з цэнтрам O' і радыусам $\sqrt{R^2 - OO'^2}$.

Наадварот, любы пункт X гэтага круга належыць шару. А гэта значыць, што сячэнне шара плоскасцю α ёсць круг з цэнтрам у пункце O'. Тэарэма даказана.

Плоскасць, якая праходзіць праз цэнтр шара, называецца *дыяметральнай плоскасцю*. Сячэнне шара дыяметральнай плоскасцю называецца *вялікім кругам* (рыс. 454), а сячэнне сферы — *вялікай акружнасцю*.



Рыс. 455

З а д а ч а (30). Праз сярэдзіну радыуса шара праведзена перпендыкулярная яму плоскасць. Як адносіцца плошча атрыманага сячэння да плошчы вялікага круга?

Р а ш э н н е. Калі радыус шара R (рыс. 455), то радыус круга ў сячэнні будзе $\sqrt{R^2-\left(\frac{R}{2}\right)^2}=R\sqrt{\frac{3}{4}}$. Адносіна плошчы гэтага круга да плошчы вялікага круга роўна

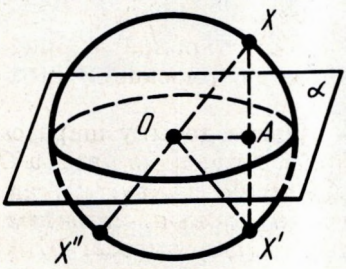
$$\frac{\pi\left(R\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2}{\pi R^2}=\frac{3}{4}.$$

189. СІМЕТРЫЯ ШАРА

Т э а р э м а 20.4. ***Любая дыяметральная плоскасць шара з'яўляецца яго плоскасцю сіметрыі. Цэнтр шара з'яўляецца яго цэнтрам сіметрыі.***

Д о к а з. Няхай α — дыяметральная плоскасць і X — адвольны пункт шара (рыс. 456). Пабудуем пункт X', сіметрычны пункту X адносна плоскасці α.

Плоскасць α перпендыкулярная адрэзку XX' і перасякаецца з ім у яго сярэдзіне (у пункце A). З роўнасці прамавугольных трохвугольнікаў OAX і OAX' вынікае, што $OX'=OX$.



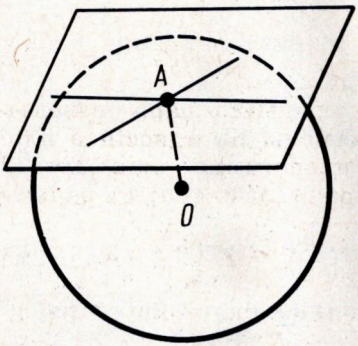
Рыс. 456

Паколькі $OX\leqslant R$, то $OX'\leqslant R$, г. зн. пункт, сіметрычны пункту X, належыць шару. Першае сцвярджанне тэарэмы даказана.

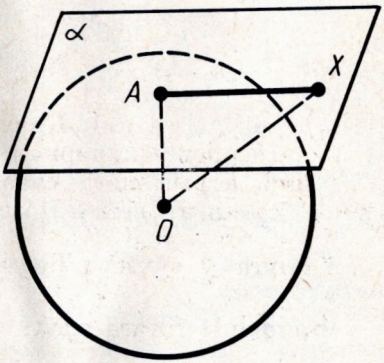
Няхай цяпер X'' — пункт, сіметрычны пункту X адносна цэнтра шара. Тады $OX''=OX\leqslant R$, г. зн. пункт X'' належыць шару. Тэарэма даказана поўнасцю.

190. ДАТЫЧНАЯ ПЛОСКАСЦЬ ДА ШАРА

Плоскасць, якая праходзіць праз пункт A шаравой паверхні і перпендыкулярная радыусу, праведзенаму ў пункт A, называецца *датычнай плоскасцю*. Пункт A называецца *пунктам дотыку* (рыс. 457).



Рыс. 457



Рыс. 458

Тэарэма 20.5. ***Датычная плоскасць мае з шарам толькі адзін агульны пункт — пункт дотыку.***

Доказ. Няхай α — плоскасць, датычная да шара, і A — пункт дотыку (рыс. 458). Возьмем адвольны пункт X плоскасці α, які адрозніваецца ад A. Паколькі OA — перпендыкуляр, а OX — нахіленая, то $OX > OA = R$. Значыць, пункт X не належыць шару. Тэарэма даказана.

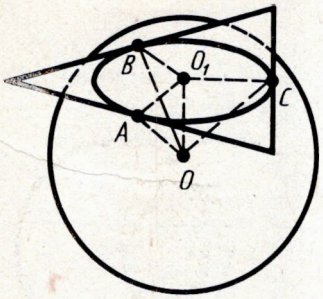
Прамая ў датычнай плоскасці шара, якая праходзіць праз пункт дотыку, называецца *датычнай да шара* ў гэтым пункце.

Паколькі датычная плоскасць мае з шарам толькі адзін агульны пункт, то датычная прамая мае з шарам толькі адзін агульны пункт — пункт дотыку.



Задача (39). Шар радыуса R датыкаецца да ўсіх старон правільнага трохвугольніка са стараной a. Знайдзіце адлегласць ад цэнтра шара да плоскасці трохвугольніка.

Рашэнне. Няхай A, B, C — пункты дотыку шара са старанамі трохвугольніка (рыс. 459). Апусцім з цэнтра O шара перпендыкуляр OO_1 на плоскасць трохвугольніка. Адрэзкі OA, OB і OC перпендыкулярныя старанам. Па тэарэме аб трох перпендыкулярах адрэзкі O_1A, O_1B і O_1C таксама перпендыкулярныя адпаведным старанам трохвугольніка.



Рыс. 459

З роўнасці прамавугольных трохвугольнікаў OO_1A, OO_1B, OO_1C (у іх катэт агульны, а гіпатэнузы роўныя радыусу) вынікае роўнасць старон: $O_1A = O_1B = O_1C$. Значыць, O_1 — цэнтр акружнасці, упісанай у трохвугольнік. Радыус гэтай акружнасці, як мы ведаем, роўны $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. Па тэарэме Піфагора знаходзім шукаемую адлегласць. Яна роўна $\sqrt{OA^2 - O_1A^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{12}}$.

191. ПЕРАСЯЧЭННЕ ДЗВЮХ СФЕР

Тэарэма 20.6. ***Лінія перасячэння дзвюх сфер ёсць акружнасць.***

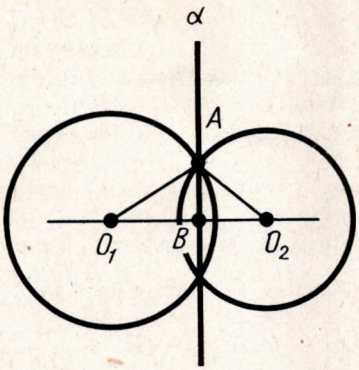
Доказ. Няхай O_1 і O_2 — цэнтры сфер і A — іх пункт перасячэння (рыс. 460). Правядзём праз пункт A плоскасць, перпендыкулярную прамой O_1O_2.

Абазначым праз B пункт перасячэння плоскасці α з прамой O_1O_2. Па тэарэме 20.3 плоскасць α перасякае абедзве сферы па акружнасці K з цэнтрам B, якая праходзіць праз пункт A. Такім чынам, акружнасць K належыць перасячэнню сфер.

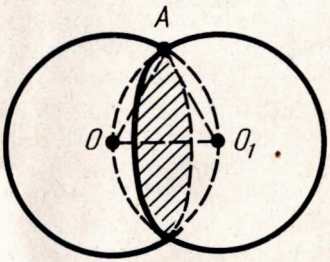
Пакажам зараз, што сферы не маюць іншых пунктаў перасячэння, акрамя пунктаў акружнасці K. Дапусцім, пункт X перасячэння сфер не ляжыць на акружнасці K. Правядзём плоскасць праз пункт X і прамую O_1O_2. Яна перасячэ сферы па акружнасцях з цэнтрам O_1 і O_2. Гэтыя акружнасці перасякаюцца ў двух пунктах, якія належаць акружнасці K, ды яшчэ ў пункце X. Але дзве акружнасці не могуць мець больш за два пункты перасячэння. Мы прыйшлі да супярэчнасці. Такім чынам, перасячэнне нашых сфер ёсць акружнасць (K). Тэарэма даказана.

Задача (44). Два роўныя шары радыуса R размешчаны так, што цэнтр аднаго ляжыць на паверхні другога. Знайдзіце даўжыню лініі, па якой перасякаюцца іх паверхні.

Рашэнне. Правядзём сячэнне праз цэнтры шароў (рыс. 461). Лінія, аб якой гаворыцца ў задачы, ёсць акружнасць (тэарэма 20.6). Яе радыус роўны вышыні роўнастаронняга трохвугольніка OAO_1 са старанамі, роўнымі R. Вышыня роўна $\frac{R\sqrt{3}}{2}$. Значыць, даўжыня лініі роўна $\pi R\sqrt{3}$.



Рыс. 460



Рыс. 461

192. УПІСАНЫЯ І АПІСАНЫЯ МНАГАГРАННІКІ

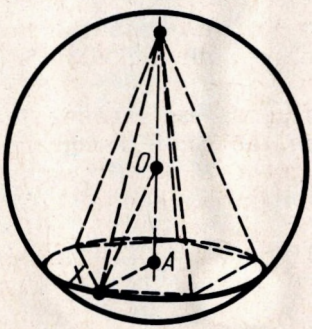
Мнагагранік называецца *ўпісаным у шар*, калі ўсе яго вяршыні ляжаць на паверхні шара. Мнагагранік называецца *апісаным каля шара*, калі ўсе яго грані датыкаюцца да паверхні шара.

З а д а ч а (47). Дакажыце, што цэнтр шара, апісанага каля правільнай піраміды, ляжыць на яе восі.

Р а ш э н н е. Апусцім перпендыкуляр OA з цэнтра шара O на плоскасць асновы піраміды (рыс. 462). Няхай X — адвольная вяршыня асновы піраміды. Па тэарэме Піфагора

$$AX^2 = OX^2 - OA^2 = R^2 - OA^2.$$

Такім чынам, AX — адно і тое ж для любой вяршыні асновы піраміды. А гэта значыць, што пункт A з'яўляецца цэнтрам акружнасці, апісанай каля асновы піраміды. Значыць, цэнтр шара O ляжыць на восі піраміды.



Рыс. 462

193. АБ ПАНЯЦЦІ ЦЕЛА І ЯГО ПАВЕРХНІ Ў ГЕАМЕТРЫІ

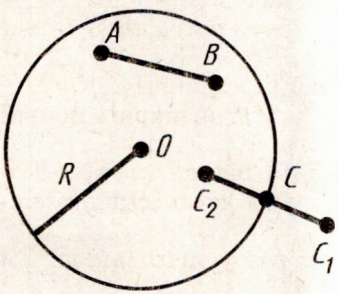
У папярэднім выкладанні мы неаднаразова ўжывалі словы — *цела* і *паверхня цела*, укладваючы ў іх змест вядомыя вам наглядныя ўяўленні. Цяпер мы дадзім азначэнне паняцця геаметрычнага цела і яго паверхні.

Пункт фігуры называецца *ўнутраным*, калі існуе шар з цэнтрам у гэтым пункце, які цалкам належыць фігуры. Фігура называецца *вобласцю*, калі ўсе яе пункты ўнутраныя і калі любыя два яе пункты можна злучыць ломанай, якая цалкам належыць фігуры. Растлумачым дадзенае азначэнне на прыкладзе шара (рыс. 463).

Кожны пункт шара, які аддалены ад яго цэнтра на адлегласць r, меншую за R, з'яўляецца ўнутраным пунктам шара, таму што шар з цэнтрам у гэтым пункце і радыусам $R - r$ змяшчаецца ў зыходным шары радыуса R. Усе пункты шара, якія аддалены ад цэнтра на адлегласць, меншую за R, утвараюць вобласць. На самай справе, любыя два такія пункты A і B злучаюцца адрэзкам AB, усе пункты якога аддалены ад цэнтра на адлегласць, меншую за R.

Пункт прасторы называецца *гранічным пунктам* дадзенай фігуры, калі любы шар з цэнтрам у гэтым пункце змяшчае як пункты, што належаць фігуры, так і пункты, якія не належаць ёй. Для шара гранічнымі пунктамі з'яўляюцца пункты, якія аддалены ад пункта O на адлегласць, роўную R, г. зн. мяжа шара ёсць сфера. Для кожнага такога пункта C можна знайсці ў кожным шары з цэнтрам C і радыусам $r > 0$ пункты C_1 і C_2, якія знаходзяцца ад пункта O на адлегласці, большай за R, і на адлегласці, меншай за R. Вобласць разам з яе мяжой называецца *замкнутай вобласцю*.

Целам называецца канечная замкнутая вобласць. Мяжа цела называецца *паверхняй цела*. Шар з'яўляецца прыкладам цела. Іншымі знаёмымі вам прыкладамі цел з'яўляюцца мнагаграннікі, цыліндр і конус.



Рыс. 463

Падобна да таго як у прасторы, на плоскасці ўводзяцца паняцці ўнутранага пункта фігуры, гранічнага пункта і вобласці. Гранічныя пункты вобласці ўтвараюць мяжу вобласці. У крузе радыуса R пункты, якія знаходзяцца на адлегласці, меншай за R ад цэнтра,— унутраныя, а пункты, што знаходзяцца на адлегласці R,— гранічныя. Круг — замкнутая вобласць.

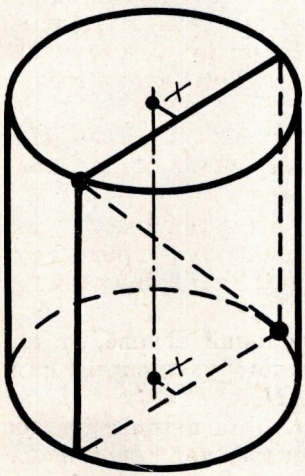
Плоскі многавугольнік — гэта абмежаваная замкнутая вобласць на плоскасці, мяжа якой з'яўляецца многавугольнікам.

КАНТРОЛЬНЫЯ ПЫТАННІ

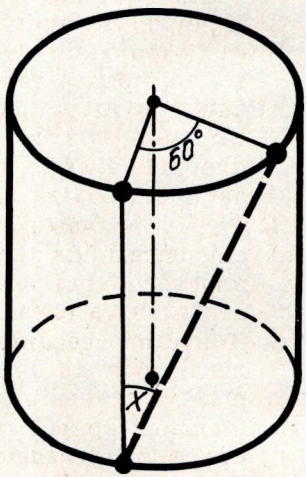
1. Растлумачце, што такое кругавы цыліндр (утваральная цыліндра, асновы і бакавая паверхня цыліндра).
2. Які цыліндр называецца прамым?
3. Што такое радыус цыліндра, вышыня цыліндра, вось цыліндра, восевае сячэнне цыліндра?
4. Дакажыце, што плоскасць, паралельная плоскасці асновы цыліндра, перасякае яго бакавую паверхню па акружнасці, роўнай акружнасці асновы.
5. Што такое прызма, упісаная ў цыліндр (апісаная каля цыліндра)? Што такое датычная плоскасць да цыліндра?
6. Што такое кругавы конус, вяршыня конуса, утваральная конуса, аснова конуса, бакавая паверхня конуса?
7. Які конус называецца прамым?
8. Што такое вышыня конуса, вось конуса, восевае сячэнне конуса?
9. Дакажыце, што плоскасць, перпендыкулярная плоскасці асновы конуса, перасякае бакавую паверхню па акружнасці з цэнтрам на восі конуса.
10. Што такое ўсечаны конус?
11. Якая піраміда называецца ўпісанай у конус (апісанай каля конуса)? Што такое датычная плоскасць да конуса?
12. Што такое шар (шаравая паверхня, або сфера)?
13. Што такое радыус шара, дыяметр шара? Якія пункты шара называюцца дыяметральна процілеглымі?
14. Дакажыце, што перасячэнне шара з плоскасцю ёсць круг.
15. Якая плоскасць называецца дыяметральнай плоскасцю шара? Што такое вялікі круг?
16. Дакажыце, што любая дыяметральная плоскасць шара з'яўляецца яго плоскасцю сіметрыі; цэнтр шара з'яўляецца яго цэнтрам сіметрыі.
17. Якая плоскасць называецца датычнай да шара?
18. Дакажыце, што датычная плоскасць мае з шарам толькі адзін агульны пункт — пункт дотыку.
19. Якая прамая называецца датычнай да шара?
20. Дакажыце, што лінія перасячэння дзвюх сфер ёсць акружнасць.
21. Які многагранік называецца ўпісаным у шар (апісаным каля шара)?

ЗАДАЧЫ

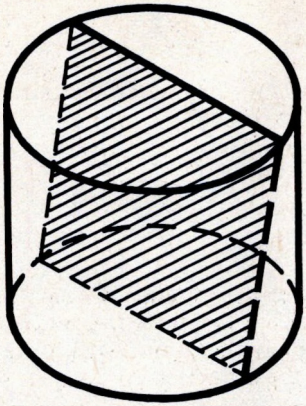
1. Радыус асновы цыліндра 2 м, вышыня 3 м. Знайдзіце дыяганаль восевага сячэння.
2. Восевае сячэнне цыліндра — квадрат, плошча якога Q. Знайдзіце плошчу асновы цыліндра.
3. Вышыня цыліндра 6 см, радыус асновы 5 см. Знайдзіце плошчу сячэння, праведзенага паралельна восі цыліндра на адлегласці 4 см ад яе.
4. Вышыня цыліндра 8 дм, радыус асновы 5 дм. Цыліндр перасечаны плоскасцю так, што ў сячэнні атрымаўся квадрат. Знайдзіце адлегласць ад гэтага сячэння да восі (рыс. 464).
5. Вышыня цыліндра 6 дм, радыус асновы 5 дм. Канцы дадзенага адрэзка AB, роўнага 10 дм, ляжаць на акружнасцях абедзвюх асноў. Знайдзіце найкарацейшую адлегласць ад яго да восі.
6. У роўнастароннім цыліндры (дыяметр роўны вышыні цыліндра) пункт акружнасці верхняй асновы злучаны з пунктам акружнасці ніжняй асновы. Вугал паміж радыусамі, праведзенымі ў гэтыя пункты, роўны 60°. Знайдзіце вугал x паміж праведзенай прамой і воссю цыліндра (рыс. 465).
7. У цыліндр упісана правільная шасцівугольная прызма. Знайдзіце вугал паміж дыяганаллю яе бакавой грані і воссю цыліндра, калі радыус асновы роўны вышыні цыліндра.



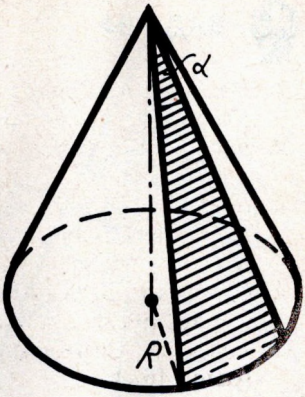
Рыс. 464



Рыс. 465

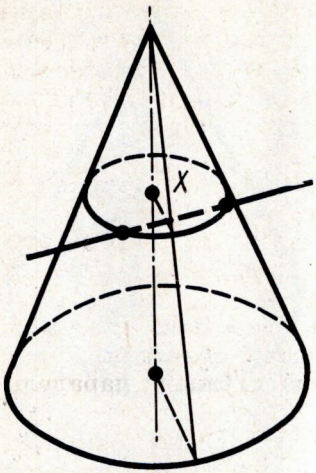


Рыс. 466

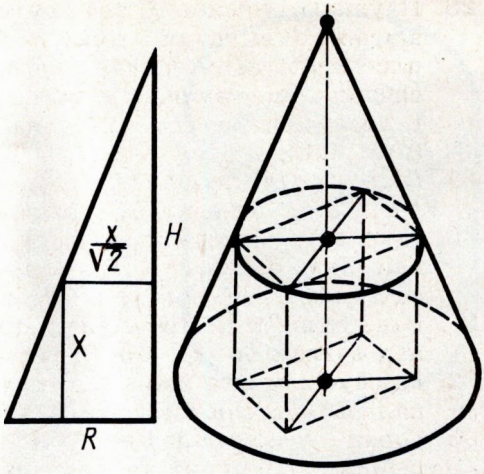


Рыс. 467

8. Вышыня цыліндра 2 м. Радыус асноў 7 м. У гэты цыліндр нахілена ўпісаны квадрат так, што ўсе вяршыні яго ляжаць на акружнасцях асноў. Знайдзіце старану квадрата (рыс. 466).
9. Радыус асновы конуса 3 м, вышыня 4 м. Знайдзіце ўтваральную.
10. Утваральная конуса l нахілена да плоскасці асновы пад вуглом 30°. Знайдзіце вышыню.
11. Радыус асновы конуса R. Восевым сячэннем з'яўляецца прамавугольны трохвугольнік. Знайдзіце яго плошчу.
12. У роўнастароннім конусе (у восевым сячэнні — правільны трохвугольнік) радыус асновы R. Знайдзіце плошчу сячэння, праведзенага праз дзве ўтваральныя, вугал паміж якімі роўны α (рыс. 467).
13. Вышыня конуса 20; радыус яго асновы 25. Знайдзіце плошчу сячэння, праведзенага праз вяршыню, калі адлегласць ад яго да цэнтра асновы конуса роўна 12.
14. Радыус асновы конуса R, а ўтваральная нахілена да плоскасці асновы пад вуглом α. Праз вяршыню конуса праведзена плоскасць пад вуглом φ да яго вышыні. Знайдзіце плошчу атрыманага сячэння.
15. Конус перасечаны плоскасцю, паралельнай аснове, на адлегласці d ад вяршыні. Знайдзіце плошчу сячэння, калі радыус асновы конуса R, а вышыня H.
16. Вышыня конуса H. На якой адлегласці ад вяршыні трэба правесці плоскасць, паралельную аснове, каб плошча сячэння была роўна палавіне плошчы асновы?
17. Праз сярэдзіну вышыні конуса праведзена прамая пара-



Рыс. 468



Рыс. 469

лельна ўтваральнай l. Знайдзіце даўжыню адрэзка прамой, змешчанага ўнутры конуса.

18*. Утваральная конуса 13 см, вышыня 12 см. Конус перасечаны прамой, паралельнай аснове; адлегласць ад яе да асновы роўна 6 см, а да вышыні 2 см. Знайдзіце адрэзак гэтай прамой, які змяшчаецца ўнутры конуса (рыс. 468).

19. Радыусы асноў усечанага конуса 3 м і 6 м, вышыня 4 м. Знайдзіце ўтваральную.

20. Радыусы асноў усечанага конуса R і r; утваральная нахілена да асноў пад вуглом 45°. Знайдзіце вышыню.

21. Утваральная ўсечанага конуса роўна $2a$ і нахілена да асновы пад вуглом 60°. Радыус адной асновы ў два разы большы за радыус другой асновы. Знайдзіце кожны з радыусаў.

22. Радыусы асноў усечанага конуса 3 дм і 7 дм, утваральная 5 дм. Знайдзіце плошчу восевага сячэння.

23. Плошчы асноў усечанага конуса 4 дм^2 і 16 дм^2. Праз сярэдзіну вышыні праведзена плоскасць, паралельная асновам. Знайдзіце плошчу сячэння.

24. Плошчы асноў усечанага конуса M і m. Знайдзіце плошчу сярэдняга сячэння, паралельнага асновам.

25. У пірамідзе ўсе бакавыя канты роўныя. Дакажыце, што яна з'яўляецца ўпісанай у некаторы конус.

26*. У конусе дадзены радыус асновы R і вышыня H. Знайдзіце кант упісанага ў яго куба (рыс. 469).

27*. У конусе дадзены радыус асновы R і вышыня H. У яго ўпісана правільная трохвугольная прызма, у якой бакавыя грані — квадраты. Знайдзіце кант прызмы.

28. Паўшар і ўпісаны ў яго конус маюць агульную аснову і агульную вышыню. Праз сярэдзіну вышыні праведзена плоскасць, паралельная аснове. Дакажыце, што плошча сячэння, якое змешчана паміж бакавой паверхняй конуса і паверхняй паўшара, роўна палавіне плошчы асновы (рыс. 470).

29. Шар, радыус якога 41 дм, перасечаны плоскасцю на адлегласці 9 дм ад цэнтра. Знайдзіце плошчу сячэння.

30. Праз сярэдзіну радыуса шара праведзена перпендыкулярная яму плоскасць. Як адносіцца плошча атрыманага сячэння да плошчы вялікага круга?

31. Радыус шара R. Праз канец радыуса праведзена плоскасць пад вуглом 60° да яго. Знайдзіце плошчу сячэння.

32. Радыус зямнога шара R. Чаму роўна даўжыня паралелі, калі яе шырата 60° (рыс. 471)?

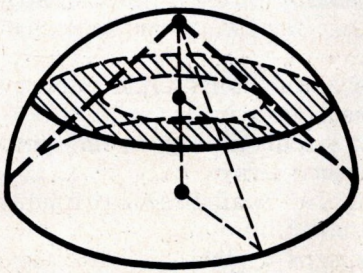
33. Горад N знаходзіцца на 60° паўночнай шыраты. Які шлях робіць гэты пункт на працягу 1 г з прычыны вярчэння Зямлі вакол сваёй восі? Радыус Зямлі прыняць роўным 6000 км.

34. На паверхні шара дадзены тры пункты. Прамалінейныя адлегласці паміж імі 6 см, 8 см і 10 см. Радыус шара 13 см. Знайдзіце адлегласць ад цэнтра да плоскасці, якая праходзіць праз гэтыя пункты.

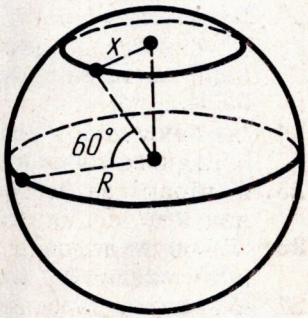
35. Дыяметр шара 25 см. На яго паверхні дадзены пункт A і акружнасць, усе пункты якой аддалены (па прамой) ад A на 15 см. Знайдзіце радыус гэтай акружнасці.

36*. Радыус шара 7 см. На яго паверхні дадзены дзве роўныя акружнасці, якія маюць агульную хорду даўжынёй 2 см. Знайдзіце радыусы акружнасцей, ведаючы, што плоскасці іх перпендыкулярныя (рыс. 472).

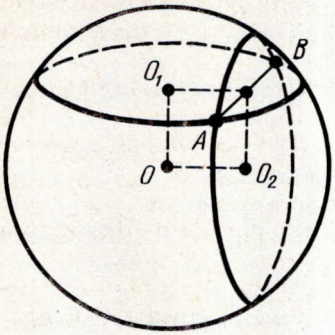
37. Дадзен шар радыуса R. Праз адзін з пунктаў яго паверхні праведзены дзве плоскасці: першая — датычная да шара,



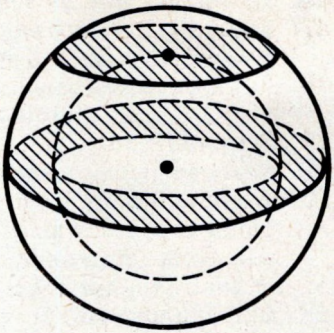
Рыс. 470



Рыс. 471



Рыс. 472



Рыс. 473

другая — пад вуглом 30° да першай. Знайдзіце плошчу сячэння.

38. Цела абмежавана дзвюма канцэнтрычнымі шаравымі паверхнямі (пусты шар). Дакажыце, што яго сячэнне плоскасцю, якая праходзіць праз цэнтр, роўнавялікае сячэнню, датычнаму да ўнутранай шаравой паверхні (рыс. 473).

39. Шар радыуса R датыкаецца да ўсіх старон правільнага трохвугольніка са стараной a. Знайдзіце адлегласць ад цэнтра шара да плоскасці трохвугольніка.

40. Стораны трохвугольніка 13 см, 14 см і 15 см. Знайдзіце адлегласць ад плоскасці трохвугольніка да цэнтра шара, які датыкаецца да ўсіх старон трохвугольніка. Радыус шара 5 см.

41. Дыяганалі ромба 15 см і 20 см. Шаравая паверхня датыкаецца да ўсіх яго старон. Радыус шара 10 см. Знайдзіце адлегласць ад цэнтра шара да плоскасці ромба.

42. Праз датычную да паверхні шара праведзены дзве ўзаемна перпендыкулярныя плоскасці, якія перасякаюць шар па кругах радыусаў r_1 і r_2. Знайдзіце радыус шара R.

43. Шар радыуса R упісан ва ўсечаны конус. Вугал нахілу ўтваральнай да плоскасці ніжняй асновы конуса роўны α. Знайдзіце радыусы асноў і ўтваральную ўсечанага конуса.

44. Два роўныя шары радыуса R размешчаны так, што цэнтр аднаго ляжыць на паверхні другога. Знайдзіце даўжыню лініі, па якой перасякаюцца іх паверхні.

45. Радыусы шароў роўны 25 дм і 29 дм, а адлегласць паміж іх цэнтрамі 36 дм. Знайдзіце даўжыню лініі, па якой перасякаюцца іх паверхні.

46. Знайдзіце радыус шара, апісанага каля куба са стараной a.

47. Дакажыце, што цэнтр шара, апісанага каля правільнай піраміды, ляжыць на яе восі.

48. Дакажыце, што цэнтр шара, упісанага ў правільную піраміду, ляжыць на яе вышыні.

49. Знайдзіце радыус шара, апісанага каля правільнага тэтраэдра з кантам a.

50. У правільнай чатырохвугольнай пірамідзе старана асновы роўна a, а плоскі вугал пры вяршыні роўны α. Знайдзіце радыусы ўпісанага і апісанага шароў.

51*. У шар радыуса R упісана правільная трохвугольная піраміда з плоскімі вугламі α пры яе вяршыні. Знайдзіце вышыню піраміды.

52. Правільныя n-вугольная прызма ўпісана ў шар радыуса R. Кант асновы прызмы роўны a. Знайдзіце вышыню прызмы, пры: 1) $n = 3$; 2) $n = 4$; 3) $n = 6$.

53. Старана асновы правільнай n-вугольнай піраміды роўна a, двухгранны вугал пры аснове роўны φ. Знайдзіце радыус шара, упісанага ў піраміду.

54. Знайдзіце радыус шара, апісанага каля правільнай n-вугольнай піраміды, калі старана асновы роўна a, а бакавы кант нахілены да плоскасці асновы пад вуглом α.

§ 21. АБ'ЁМЫ МНАГАГРАННІКАЎ

194. ПАНЯЦЦЕ АБ'ЁМУ

Падобна да таго, як для фігур на плоскасці ўводзіцца паняцце плошчы, для цел у прасторы ўводзіцца паняцце аб'ёму. Спачатку разгледзім толькі простыя целы. Цела называецца *простым*, калі яго можна разбіць на канечны лік трохвугольных пірамід.

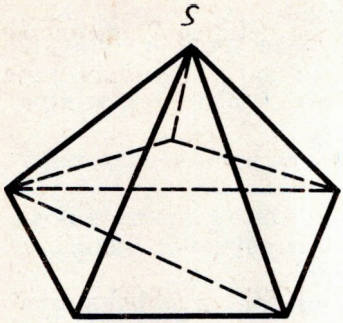
Для простых цел *аб'ём — гэта дадатная велічыня, лікавае значэнне якой мае наступныя ўласцівасці:*

1. Роўныя целы маюць роўныя аб'ёмы.

2. Калі цела разбіта на часткі, якія з'яўляюцца простымі целамі, то аб'ём гэтага цела роўны суме аб'ёмаў яго частак.

3. Аб'ём куба, кант якога роўны адзінцы даўжыні, роўны адзінцы.

Калі куб, аб якім ідзе гаворка ў азначэнні, мае кант 1 см, то аб'ём будзе ў кубічных сантыметрах; калі кант куба роўны 1 м, то аб'ём будзе ў кубічных метрах; калі кант куба роўны 1 км, то аб'ём будзе ў кубічных кіламетрах і г. д.

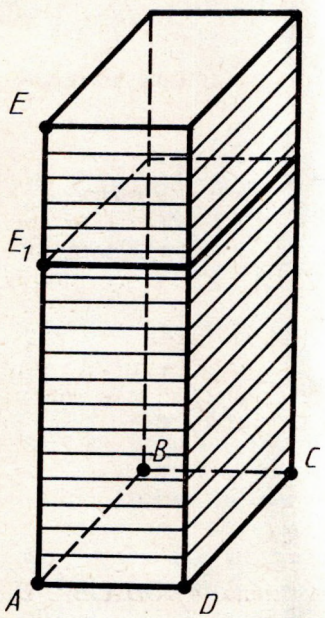


Рыс. 474

Прыкладам простага цела з'яўляецца любы выпуклы мнагаграннік. Яго можна разбіць на канечны лік трохвугольных пірамід наступным чынам. Адзначым якую-небудзь вяршыню S мнагагранніка. Разаб'ём на трохвугольнікі ўсе грані мнагагранніка, якія не змяшчаюць вяршыню S. Тады трохвугольныя піраміды, для якіх асновамі з'яўляюцца гэтыя трохвугольнікі, а агульнай вяршыняй — пункт S, даюць разбіўку мнагагранніка на трохвугольныя піраміды. На рысунку 474 паказана такая разбіўка для адвольнай пірамідy.

195. АБ'ЁМ ПРАМАВУГОЛЬНАГА ПАРАЛЕЛЕПІПЕДА

Знойдзем аб'ём прамавугольнага паралелепіпеда з лінейнымі размерамі a, b, c. Для гэтага спачатку дакажам, што аб'ёмы двух прамавугольных паралелепіпедаў з роўнымі асновамі адносяцца як іх вышыні.



Рыс. 475

Няхай P і P_1 — два прамавугольныя паралелепіпеды з агульнай асновай $ABCD$ і вышынямі AE і AE_1. Будзем лічыць для пэўнасці, што $AE_1 < AE$ (рыс. 475). Няхай V і V_1 — аб'ёмы паралелепіпедаў. Разаб'ём кант AE паралелепіпеда P на вялікі лік n роўных частак. Кожная з іх роўна $\frac{AE}{n}$.

Няхай m — колькасць пунктаў дзялення, якія ляжаць на канце AE_1. Тады

$$\left(\frac{AE}{n}\right)m \leqslant AE_1 \leqslant \left(\frac{AE}{n}\right)(m+1).$$

Адсюль

$$\frac{m}{n} \leqslant \frac{AE_1}{AE} \leqslant \frac{m}{n} + \frac{1}{n}. \qquad (*)$$

Правядзём праз пункты дзялення плоскасці, якія паралельныя аснове. Яны разаб'юць паралелепіпед P на n роўных паралелепіпе-

даў. Кожны з іх мае аб'ём $\frac{V}{n}$. Паралелепіпед P_1 змяшчае першыя m паралелепіпедаў, калі лічыць знізу, і змяшчаецца ў $m+1$ паралелепіпедах. Таму

$$\left(\frac{V}{n}\right)m \leqslant V_1 \leqslant \left(\frac{V}{n}\right)(m+1).$$

Адсюль

$$\frac{m}{n} \leqslant \frac{V_1}{V} \leqslant \frac{m}{n} + \frac{1}{n}. \qquad (**)$$

З няроўнасцей (*) і (**) мы бачым, што абодва лікі $\frac{V_1}{V}$ і $\frac{AE_1}{AE}$ знаходзяцца паміж $\frac{m}{n}$ і $\frac{m}{n}+\frac{1}{n}$. Таму яны адрозніваюцца не больш чым на $\frac{1}{n}$. А паколькі n можна ўзяць неабмежавана вялікім, то гэта можа быць толькі пры $\frac{V_1}{V} = \frac{AE_1}{AE}$, што і патрабавалася даказаць.

Возьмем зараз куб, які з'яўляецца адзінкай вымярэння аб'ёму, і тры прамавугольныя паралелепіпеды з вымярэннямі: a, 1, 1; a, b, 1; a, b, c. Абазначым іх аб'ёмы V_1 і V_2 і V адпаведна. Па даказанаму

$$\frac{V_1}{1} = \frac{a}{1},\ \frac{V_2}{V_1} = \frac{b}{1},\ \frac{V}{V_2} = \frac{c}{1}.$$

Калі памножыць гэтыя тры роўнасці пачленна, то атрымаем:

$$V = abc.$$

Такім чынам, ***аб'ём прамавугольнага паралелепіпеда з лінейнымі размерамі a, b, c вылічваецца па формуле*** $V = abc$.



Задача (3). Калі кожны кант куба павялічыць на 2 см, то яго аб'ём павялічыцца на 98 см^3. Чаму роўны кант куба?

Рашэнне. Абазначым кант куба праз x, тады $(x+2)^3 - x^3 = 98$, г. зн. $x^2 + 2x - 15 = 0$. Ураўненне мае два карані: $x = 3$, $x = -5$. Геаметрычны сэнс мае толькі дадатны корань. Значыць, кант куба роўны 3 см.

196. АБ'ЁМ НАХІЛЕНАГА ПАРАЛЕЛЕПІПЕДА

Знойдзем аб'ём нахіленага паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рыс. 476).

Правядзём праз кант BC плоскасць, перпендыкулярную

аснове $ABCD$, і дапоўнім нахілены паралелепіпед трохвугольнай прызмай $BB_1B_2CC_1C_2$ (рыс. 476, *а*). Адсячом цяпер ад атрыманага цела трохвугольную прызму плоскасцю, якая праходзіць праз кант AD і перпендыкулярная аснове $ABCD$. Тады атрымаем зноў паралелепіпед. Гэты паралелепіпед мае аб'ём, роўны аб'ёму зыходнага паралелепіпеда.

Сапраўды, дабудаваная прызма і адсякаемая сумяшчаюцца паралельным пераносам на адрэзак AB, значыць, маюць аднолькавыя аб'ёмы. Пры апісаным пераўтварэнні паралелепіпеда захоўваюцца плошча яго асновы і вышыня. Захоўваюцца таксама плоскасці дзвюх бакавых граней, а дзве іншыя становяцца перпендыкулярнымі аснове.

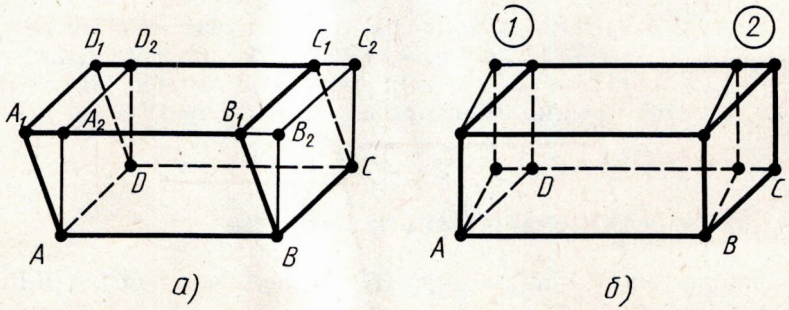
Прымяняючы яшчэ раз такое пераўтварэнне да нахіленых граней, атрымаем паралелепіпед, у якога ўсе бакавыя грані перпендыкулярныя аснове, г. зн. атрымаем прамы паралелепіпед.

Атрыманы прамы паралелепіпед аналагічна пераўтворым у прамавугольны паралелепіпед, дапаўняючы яго спачатку прызмай 1, а затым адсякаючы прызму 2 (рыс. 476, *б*). Гэта пераўтварэнне таксама захоўвае аб'ём паралелепіпеда, плошчу асновы і вышыню.

Аб'ём прамавугольнага паралелепіпеда роўны здабытку яго вымярэнняў. Здабытак двух вымярэнняў ёсць плошча асновы паралелепіпеда, а трэцяе вымярэнне — яго вышыня.

Такім чынам, у прамавугольнага паралелепіпеда аб'ём роўны здабытку плошчы асновы на вышыню. Паколькі пры апісаным вышэй пераўтварэнні дадзенага паралелепіпеда ў прамавугольны кожны раз захоўваюцца аб'ём, плошча асновы і вышыня, то і ў зыходнага паралелепіпеда аб'ём роўны здабытку плошчы асновы на вышыню.

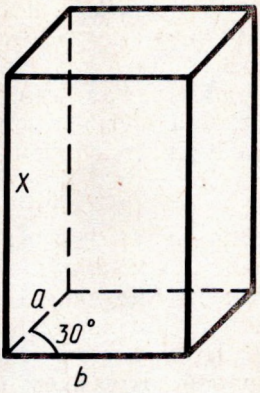
Значыць, ***аб'ём любога паралелепіпеда роўны здабытку плошчы асновы на вышыню.***



Рыс. 476

Задача (11). У прамым паралелепіпедзе стораны асновы a і b утвараюць вугал 30°. Бакавая паверхня роўна S. Знайдзіце яго аб'ём.

Рашэнне. Абазначым вышыню праз x (рыс. 477). Тады $(2a + 2b)x = S$. Адсюль $x = \frac{S}{2(a+b)}$. Плошча асновы паралелепіпеда роўна $ab \sin 30° = \frac{ab}{2}$. Аб'ём роўны $\frac{abS}{4(a+b)}$.



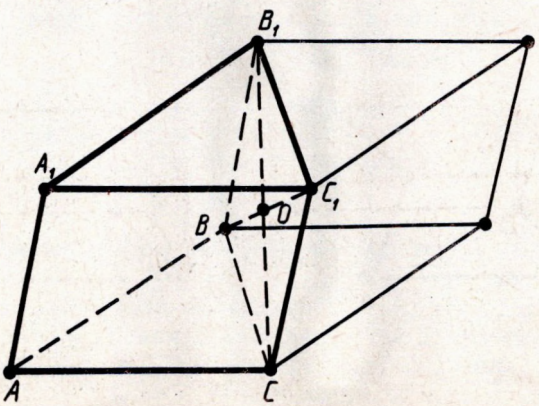
Рыс. 477

197. АБ'ЁМ ПРЫЗМЫ

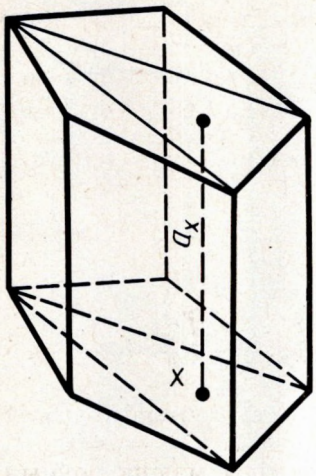
Разгледзім спачатку трохвугольную прызму (рыс. 478). Дапоўнім яе да паралелепіпеда, як паказана на рысунку. Пункт O з'яўляецца цэнтрам сіметрыі паралелепіпеда. Таму дабудаваная прызма сіметрычная зыходнай адносна пункта O, значыць, мае аб'ём, роўны аб'ёму зыходнай прызмы. Такім чынам, аб'ём пабудаванага паралелепіпеда роўны падвоенаму аб'ёму дадзенай прызмы.

Аб'ём паралелепіпеда роўны здабытку плошчы яго асновы на вышыню. Плошча яго асновы роўна падвоенай плошчы трохвугольніка ABC, а вышыня роўна вышыні зыходнай прызмы. Адсюль робім вывад, што аб'ём зыходнай прызмы роўны здабытку плошчы яе асновы на вышыню.

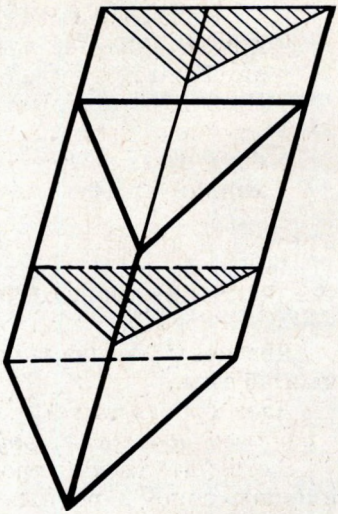
Разгледзім цяпер адвольную прызму (рыс. 479). Разаб'ём



Рыс. 478



Рыс. 479



Рыс. 480

яе аснову на трохвугольнікі. Няхай $\triangle$ — адзін з гэтых трохвугольнікаў. Правядзём праз адвольны пункт X трохвугольніка $\triangle$ прамую, паралельную бакавым кантам. Няхай a_x — адрэзак гэтай прамой, які належыць прызме. Калі пункт x апісвае трохвугольнік $\triangle$, адрэзкі a_x запаўняюць трохвугольную прызму. Пабудаваўшы такую прызму для кожнага трохвугольніка $\triangle$, мы атрымаем разбіўку дадзенай прызмы на трохвугольныя. Усе гэтыя прызмы маюць адну і тую ж вышыню, роўную вышыні зыходнай прызмы.

Аб'ём дадзенай прызмы роўны суме аб'ёмаў трохвугольных прызмаў, складаючых яе. Па даказанаму аб'ём трохвугольнай прызмы роўны здабытку плошчы яе асновы на вышыню. Адсюль вынікае, што аб'ём зыходнай прызмы роўны

$$V = S_1H + S_2H + ... + S_nH = (S_1 + S_2 + ... + S_n)H,$$

дзе S_1, S_2, ..., S_n — плошчы трохвугольнікаў, на якія разбіта аснова прызмы, а H — вышыня прызмы. Сума плошчаў трохвугольнікаў роўна плошчы S асновы дадзенай прызмы. Таму

$$V = SH.$$

Значыць, ***аб'ём любой прызмы роўны здабытку плошчы яе асновы на вышыню.***

З а д а ч а (24). У нахіленай прызме праведзена сячэнне, якое перпендыкулярнае бакавым кантам і перасякае ўсе бакавыя канты. Знайдзіце аб'ём прызмы, калі плошча сячэння Q, а бакавыя канты роўны l.

Р а ш э н н е. Плоскасць праведзенага сячэння разбівае прызму на дзве часткі (рыс. 480). Падвергнем адну з іх паралельнаму пераносу, які сумяшчае асновы прызмы. Пры гэтым атрымаем прамую прызму, у якой асновай служыць сячэнне зыходнай прызмы, а вышыня роўна l. Гэта прызма мае той жа аб'ём. Такім чынам, аб'ём зыходнай прызмы роўны Ql.

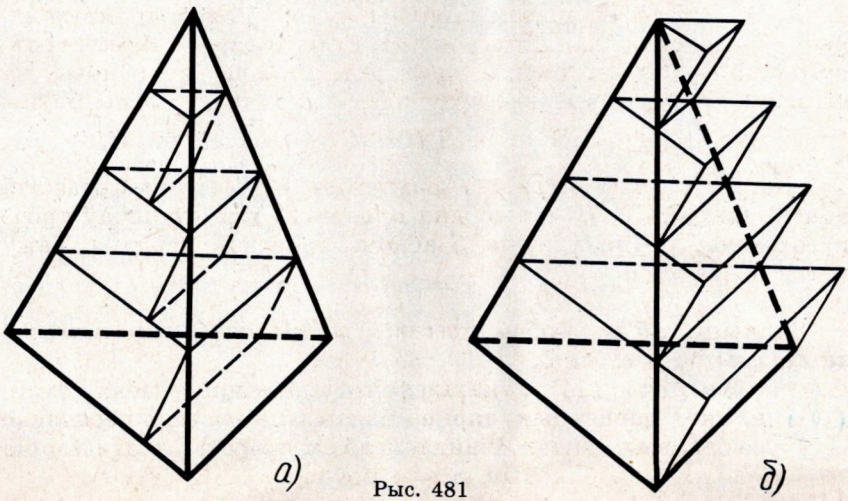
198. РОЎНАВЯЛІКІЯ ЦЕЛЫ

Два целы называюцца *роўнавялікімі*, калі яны маюць роўныя аб'ёмы.

Дзве трохвугольныя піраміды з роўнымі плошчамі асноў і роўнымі вышынямі роўнавялікія.

Сапраўды, няхай трохвугольныя піраміды маюць роўныя плошчы асноў і роўныя вышыні. Дакажам, што яны роўнавялікія, г. зн. маюць роўныя аб'ёмы.

Падзелім вышыню кожнай піраміды на n роўных частак і правядзём праз пункты дзялення плоскасці, паралельныя асновам. Гэтыя плоскасці разбіваюць піраміду на n слаёў. Для кожнага слоя першай піраміды пабудуем прызму, якая ў ёй змяшчаецца, як паказана на рысунку 481, *а*. Для кожнага слоя другой піраміды пабудуем прызму, якая змяшчае слой (рыс. 481, *б*). Прызма у k-м (лічачы ад вяршыні) слоі першай піраміды і прызма, якая змяшчае $(k-1)$-ы слой другой піраміды, маюць роўныя плошчы асноў, паколькі гэтыя асновы падобныя асновам пірамід і каэфіцыент падобнасці адзін



Рыс. 481

і той жа $\left(\frac{k}{n}\right)$. Паколькі ў гэтых прызмаў і вышыні аднолькавыя $\left(\frac{H}{n}\right)$, то яны маюць роўныя аб'ёмы.

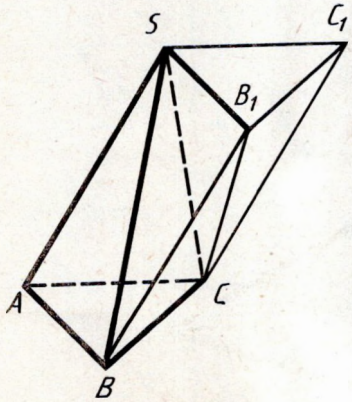
Няхай V_1 і V_2 — аб'ёмы пірамід, а V_1' і V_2' — сумы аб'ёмаў пабудаваных для іх прызмаў. Паколькі аб'ём прызмы ў k-м слоі першай піраміды роўны аб'ёму прызмы $(k-1)$-га слоя другой піраміды, то сума аб'ёмаў усіх прызмаў для першай піраміды роўна суме аб'ёмаў прызмаў усіх слаёў другой піраміды, акрамя апошняга. Аб'ём прызмы апошняга слоя роўны $S \cdot \frac{H}{n}$, дзе S — плошча асновы піраміды, а H — вышыня. Адсюль вынікае, што $V_1' = V_2' - S\frac{H}{n}$. Паколькі, акрамя таго, $V_1 > V_1'$, а $V_2 < V_2'$, то $V_1 > V_2 - \frac{SH}{n}$, ці $V_2 - V_1 \leqslant \frac{SH}{n}$.

Гэта няроўнасць выконваецца пры любым неабмежавана вялікім n. А гэта магчыма толькі пры $V_2 - V_1 \leqslant 0$, г. зн. пры $V_2 \leqslant V_1$. Памяняўшы ролямі піраміды, атрымаем процілеглую няроўнасць $V_2 \geqslant V_1$. А адсюль вынікае, што $V_1 = V_2$. Сцвярджанне даказана.

199. АБ'ЁМ ПІРАМІДЫ

Няхай $SABC$ — трохвугольная піраміда з вяршыняй S і асновай $\triangle ABC$. Дапоўнім гэту піраміду $SABC$ да трохвугольнай прызмы з той жа асновай і вышынёй (рыс. 482). Гэта прызма складзена з трох пірамід: дадзенай піраміды $SABC$ і яшчэ дзвюх трохвугольных пірамід SCC_1B_1 і $SCBB_1$.

У другой і трэцяй пірамід роўныя асновы — $\triangle CC_1B_1$ і $\triangle B_1BC$ і агульная вышыня, праведзеная з вяршыні S. Таму ў іх роўныя аб'ёмы.



Рыс. 482

У першай і трэцяй пірамід таксама роўныя асновы — $\triangle SAB$ і $\triangle BB_1S$ і супадаючыя вышыні, праведзеныя з вяршыні C. Значыць, у іх таксама роўныя аб'ёмы.

Такім чынам, усе тры піраміды маюць адзін і той жа аб'ём. Паколькі сума гэтых аб'ёмаў роўная аб'ёму прызмы, то аб'ёмы пірамід роўны $\frac{SH}{3}$.

Такім чынам, ***аб'ём любой трохвугольнай піраміды роўны адной трэцяй здабытку плошчы асновы на вышыню:***

$$V = \frac{1}{3}SH.$$

Няхай цяпер маем любую, не абавязкова трохвугольную піраміду. Разаб'ём яе аснову на трохвугольнікі $\triangle_1$, $\triangle_2$, ..., $\triangle_n$. Піраміды, у якіх асновамі з'яўляюцца гэтыя трохвугольнікі, а вяршынямі — вяршыня дадзенай піраміды, складаюць дадзеную піраміду. Аб'ём дадзенай піраміды роўны суме аб'ёмаў складаючых яе пірамід. Паколькі ўсе яны маюць тую ж вышыню H, што і дадзеная піраміда, то аб'ём яе роўны:

$$V = \frac{1}{3}H(S_1 + S_2 + ... + S_n) = \frac{1}{3}SH.$$

Такім чынам, ***аб'ём любой піраміды роўны адной трэцяй здабытку плошчы яе асновы на вышыню.***

200. АБ'ЁМ УСЕЧАНАЙ ПІРАМІДЫ

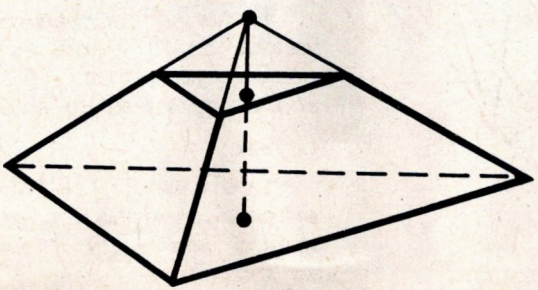
Задача (44). Знайдзіце аб'ём усечанай піраміды з плошчамі асноў Q_1 і $Q_2 (Q_1 > Q_2)$ і вышынёй h.

Рашэнне. Дапоўнім дадзеную ўсечаную піраміду да поўнай (рыс. 483). Няхай x — яе вышыня. Аб'ём усечанай піраміды роўны рознасці аб'ёмаў дзвюх поўных пірамід: адной — з плошчай асновы Q_1 і вышынёй x, другой — з плошчай асновы Q_2 і вышынёй $x - h$.

З падобнасці гэтых пірамід знаходзім x: $\frac{Q_1}{Q_2} = \left(\frac{x}{x-h}\right)^2$. Адсюль $x = \frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1} - \sqrt{Q_2}}$. Аб'ём усечанай піраміды роўны:

$$V = \frac{1}{3}\left[Q_1\frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1} - \sqrt{Q_2}} - Q_2\left(\frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1} - \sqrt{Q_2}} - h\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}h\frac{Q_1\sqrt{Q_1} - Q_2\sqrt{Q_2}}{\sqrt{Q_1} - \sqrt{Q_2}} = \frac{1}{3}h(Q_1 + \sqrt{Q_1 \cdot Q_2} + Q_2).$$



Рыс. 483

201. АБ'ЁМЫ ПАДОБНЫХ ЦЕЛ

Няхай T і T' — два простыя падобныя целы. Гэта значыць, што існуе пераўтварэнне падобнасці, пры якім цела T пераходзіць у цела T'. Абазначым праз k каэфіцыент падобнасці.

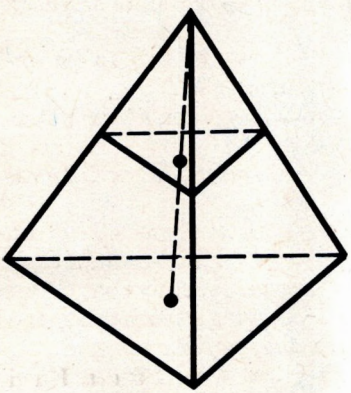
Разаб'ём цела T на трохвугольныя піраміды P_1, P_2, ..., P_n. Пераўтварэнне падобнасці, якое пераводзіць цела T у цела T', пераводзіць піраміды P_1, P_2, ..., P_n у піраміды P'_1, P'_2, ..., P'_n. Гэтыя піраміды складаюць цела T', і таму аб'ём цела T' роўны суме аб'ёмаў пірамід P'_1, P'_2, ..., P'_n.

Паколькі піраміды P'_i і P_i падобныя і каэфіцыент падобнасці роўны k, то адносіна іх вышынь роўна k, адносіна плошчаў іх асноў роўна k^2. Значыць, адносіна аб'ёмаў пірамід роўна k^3. Паколькі цела T складзена з пірамід P_i, а цела T' складзена з пірамід P'_i, то адносіна аб'ёмаў цел T' і T таксама роўна k^3.

Лік k — каэфіцыент падобнасці — роўны адносіне адлегласцей паміж любымі дзвюма адпаведнымі парамі пунктаў пры пераўтварэнні падобнасці. Значыць, гэты лік роўны адносіне любых двух адпаведных лінейных размераў цел T' і T. Такім чынам, мы прыходзім да наступнага вываду:

Аб'ёмы двух падобных цел адносяцца як кубы іх адпаведных лінейных размераў.

З а д а ч а (48). Праз сярэдзіну вышыні піраміды праведзена плоскасць, паралельная аснове. У якой адносіне яна дзеліць аб'ём піраміды?



Рыс. 484

Р а ш э н н е. Як мы ведаем, праведзеная плоскасць адсякае падобную піраміду (рыс. 484). Каэфіцыент падобнасці роўны адносіне вышынь, г. зн. $\frac{1}{2}$. Таму аб'ёмы пірамід адносяцца як $\left(\frac{1}{2}\right)^3 : 1$.

Значыць, плоскасць дзеліць нашу піраміду на часткі, аб'ёмы якіх адносяцца як

$$\frac{1}{8} : \left(1 - \frac{1}{8}\right) = 1 : 7.$$

КАНТРОЛЬНЫЯ ПЫТАННІ

1. Сфармулюйце асноўныя ўласцівасці аб'ёму.
2. Дакажыце, што аб'ём прамавугольнага паралелепіпеда роўны здабытку яго лінейных размераў.
3. Дакажыце, што аб'ём любога паралелепіпеда роўны здабытку плошчы яго асновы на вышыню.
4. Дакажыце, што аб'ём трохвугольнай прызмы роўны здабытку плошчы яе асновы на вышыню.
5. Дакажыце, што аб'ём любой прызмы роўны здабытку плошчы яе асновы на вышыню.
6. Дакажыце, што трохвугольныя піраміды з роўнымі плошчамі асноў і роўнымі вышынямі роўнавялікія.
7. Выведзіце формулу для аб'ёму трохвугольнай піраміды.
8. Дакажыце, што аб'ём любой піраміды роўны адной трэцяй здабытку плошчы яе асновы на вышыню.
9. Дакажыце, што аб'ёмы падобных цел адносяцца як кубы адпаведных лінейных размераў.

ЗАДАЧЫ

1. Тры латунныя кубы з кантамі 3 см, 4 см і 5 см пераплаўлены ў адзін куб. Якую даўжыню мае кант гэтага куба?
2. Металічны куб мае знешні кант 10,2 см і масу 514,15 г. Таўшчыня сценак роўна 0,1 см. Знайдзіце шчыльнасць металу, з якога зроблены куб.
3. Калі кожны кант куба павялічыць на 2 см, то яго аб'ём павялічыцца на 98 $см^3$. Чаму роўны кант куба?
4. Калі кожны кант куба павялічыць на 1 м, то яго аб'ём павялічыцца ў 125 разоў. Знайдзіце кант.
5. Цагліна размерам $25 \times 12 \times 6{,}5$ см мае масу 3,51 кг. Знайдзіце яе шчыльнасць.
6. Трэба ўстанавіць рэзервуар для вады ёмістасцю 10 $м^3$ на прамавугольнай пляцоўцы размерам $2{,}5 \times 1{,}75$ м, якая служыць для яго дном. Знайдзіце вышыню рэзервуара.
7. Вымярэнні прамавугольнага паралелепіпеда 15 м, 50 м і 36 м. Знайдзіце кант роўнавялікага яму куба.
8. Вымярэнні прамавугольнага бруска 3 см, 4 см і 5 см. Калі павялічыць кожны кант на x сантыметраў, то паверхня павялічыцца на 54 $см^2$. Як павялічыцца яго аб'ём?
9. Чыгунная труба мае квадратнае сячэнне, яе знешняя шырыня 25 см, таўшчыня сценак 3 см. Якая маса 1 пагоннага метра трубы (шчыльнасць чыгуну 7,3 $г/см^3$)?
10. Чаму роўны аб'ём прамавугольнага паралелепіпеда, дыяга-

наль якога a складае з плоскасцю асновы вугал α, а з бакавой гранню — вугал β?

11. У прамым паралелепіпедзе стораны асновы a і b утвараюць вугал 30°. Бакавая паверхня роўна S. Знайдзіце яго аб'ём.

12. У прамым паралелепіпедзе стораны асновы $2\sqrt{2}$ см і 5 см утвараюць вугал 45°. Меншая дыяганаль паралелепіпеда роўна 7 см. Знайдзіце яго аб'ём.

13. Аснова прамога паралелепіпеда — ромб, плошча якога 1 м^2. Плошчы дыяганальных сячэнняў 3 м^2 і 6 м^2. Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда.

14. Рашыце папярэднюю задачу ў агульным выпадку, калі плошча ромба Q, а плошчы дыяганальных сячэнняў M і N.

15. Аснова нахіленага паралелепіпеда — квадрат, старана якога роўна 1 м. Адзін з бакавых кантаў роўны 2 м і ўтварае з кожнай з прылеглых старон асновы вугал 60°. Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда.

16*. Грані паралелепіпеда — роўныя ромбы са стараной a і вострым вуглом 60°. Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда.

17*. Кожны кант паралелепіпеда роўны 1 см. У адной з вяршынь паралелепіпеда ўсе тры плоскія вуглы вострыя, па 2α кожны. Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда.

18*. У паралелепіпедзе даўжыні трох кантаў, якія выходзяць з адной вяршыні, роўны a, b і c. Канты a і b узаемна перпендыкулярныя, а кант c утварае з кожным з іх вугал α (рыс. 485). Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда.

19. Па старане асновы a і бакавому канту b знайдзіце аб'ём правільнай прызмы: 1) трохвугольнай; 2) чатырохвугольнай; 3) шасцівугольнай.

20. Драўляная плітка ў форме правільнага васьмівугольніка са стараной 3,2 см і таўшчынёй 0,7 см мае масу 173 г. Знайдзіце шчыльнасць дрэва.

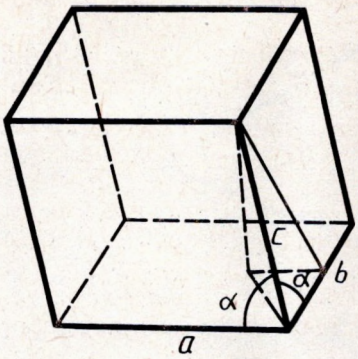
21. Дыяганаль правільнай чатырохвугольнай прызмы роўна 3,5 см, а дыяганаль бакавой грані 2,5 см. Знайдзіце аб'ём прызмы.

22. Старана асновы правільнай трохвугольнай прызмы роўна a, бакавая паверхня роўнавялікая суме асноў. Знайдзіце аб'ём прызмы.

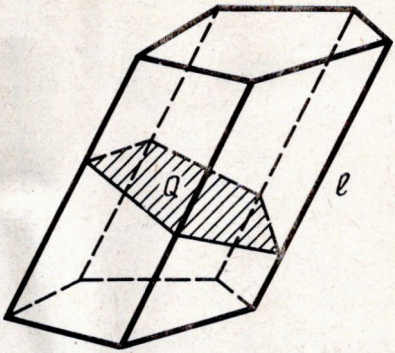
23. У правільнай шасцівугольнай прызме плошча найбольшага дыяганальнага сячэння 4 м^2, а адлегласць паміж дзвюма процілеглымі бакавымі гранямі 2 м. Знайдзіце аб'ём прызмы.

24. У нахіленай прызме праведзена сячэнне, якое перпендыкулярнае бакавым кантам і перасякае ўсе бакавыя канты. Знайдзіце аб'ём прызмы, калі плошча сячэння Q, а бакавыя канты роўны l (рыс. 486).

25. Бакавыя канты нахіленай трохвугольнай прызмы роўны



Рыс. 485



Рыс. 486

15 м, а адлегласці паміж паралельнымі прамымі, якія іх змяшчаюць, 26 м, 25 м і 17 м. Знайдзіце аб'ём прызмы.

26. Вылічыце прапускную здольнасць (у кубічных метрах за 1 г) вадасцёкавай трубы, сячэнне якой мае выгляд раўнабедранага трохвугольніка з асновай 1,4 м і вышынёй 1,2 м. Скорасць цячэння 2 м/с.

27. Сячэнне чыгуначнага насыпу мае выгляд трапецыі з ніжняй асновай 14 м, верхняй 8 м і вышынёй 3,2 м. Знайдзіце, колькі кубічных метраў зямлі прыпаде на 1 км насыпу.

28. У прамой трохвугольнай прызме стораны асноў роўны 4 см, 5 см і 7 см, а бакавы кант роўны большай вышыні асновы. Знайдзіце аб'ём прызмы.

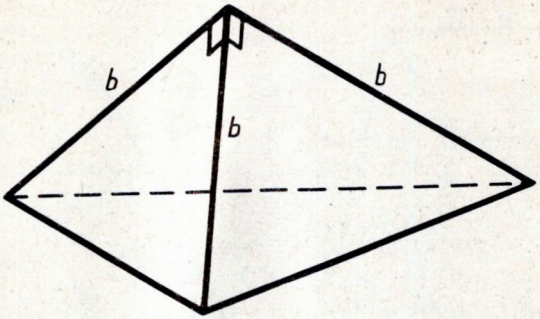
29. Плошча асновы прамой трохвугольнай прызмы роўна 4 см^2, а плошчы бакавых граней 9 см^2, 10 см^2 і 17 см^2. Знайдзіце аб'ём.

30. Аснова прызмы — трохвугольнік, у якога адна старана роўна 2 см, а дзве іншыя па 3 см. Бакавы кант роўны 4 см і складае з плоскасцю асновы вугал 45°. Знайдзіце кант роўнавялікага куба.

31. Асновай нахіленай прызмы з'яўляецца роўнастаронні трохвугольнік са стараной a; адна з бакавых граней перпендыкулярная аснове і ўяўляе сабой ромб, у якога меншая дыяганаль роўна c. Знайдзіце аб'ём прызмы.

32. Чаму роўны аб'ём прамой чатырохвугольнай прызмы, калі яе вышыня h, дыяганалі нахілены да плоскасці асновы пад вуглами α і β і вострый вугал паміж дыяганалямі асновы роўны γ?

33. Па старане асновы a і бакавому канту b знайдзіце аб'ём правільнай піраміды: 1) трохвугольнай; 2) чатырохвугольнай; 3) шасцівугольнай.



Рыс. 487

34. Старана асновы правільнай шасцівугольнай піраміды a, а двухгранны вугал пры аснове роўны $45°$. Знайдзіце аб'ём піраміды.

35. Бакавыя канты трохвугольнай піраміды ўзаемна перпендыкулярныя, кожны з іх роўны b (рыс. 487). Знайдзіце аб'ём піраміды.

36. Чаму роўны аб'ём правільнай трохвугольнай піраміды, у якой старана асновы a, а бакавыя канты ўзаемна перпендыкулярныя?

37. Па канту a правільнага тэтраэдра знайдзіце яго аб'ём.

38. Па канту a актаэдра знайдзіце яго аб'ём.

39. Аснова піраміды — прамавугольнік са старанамі 9 м і 12 м; усе бакавыя канты роўны 12,5 м. Знайдзіце аб'ём піраміды.

40*. Аснова піраміды — раўнабедраны трохвугольнік са старанамі 6 см, 6 см і 8 см. Усе бакавыя канты роўны 9 см. Знайдзіце аб'ём піраміды.

41. Адзін кант трохвугольнай піраміды роўны 4 см, кожны з астатніх 3 см. Знайдзіце аб'ём піраміды.

42. У аснове піраміды ляжыць прамавугольнік. Кожны бакавы кант піраміды роўны l і складае з сумежнымі старанамі прамавугольніка вуглы α і β. Знайдзіце аб'ём піраміды.

43. Знайдзіце аб'ём піраміды, якая мае ў аснове трохвугольнік, два вуглы якога α і β, радыус апісанага круга R. Бакавыя канты піраміды нахілены да плоскасці яе асновы пад вуглом γ.

44. Знайдзіце аб'ём усечанай піраміды з плошчамі асноў Q_1 і $Q_2 (Q_1 > Q_2)$ і вышынёй h.

45. У пірамідзе з плошчай асновы Q_1 праведзена сячэнне, паралельнае аснове, на адлегласці h ад яго. Плошча сячэння роўна Q_2. Знайдзіце вышыню піраміды.

46. У правільнай усечанай чатырохвугольнай пірамідзе сторны ніжняй і верхняй асноў роўны a і b, а двухгранны вугал пры канце ніжняй асновы роўны α. Знайдзіце аб'ём піраміды.

47. Рашыце папярэднюю задачу ў выпадку правільнай усечанай трохвугольнай піраміды.

48. Праз сярэдзіну вышыні піраміды праведзена плоскасць, паралельная аснове. У якой адносіне яна дзеліць аб'ём піраміды?

49. Вышыня піраміды h. На якой адлегласці ад вяршыні знаходзіцца сячэнне, якое паралельнае аснове і дзеліць аб'ём піраміды папалам?

§ 22. АБ'ЁМЫ І ПАВЕРХНІ ЦЕЛ ВЯРЧЭННЯ

202. АБ'ЁМ ЦЫЛІНДРА

Калі цела простае, г. зн. дапускае разбіўку на канечны лік трохвугольных пірамід, то яго аб'ём роўны суме аб'ёмаў гэтых пірамід. Для любога цела аб'ём вызначаецца наступным чынам.

Дадзенае цела мае аб'ём V, калі існуюць простыя целы, якія змяшчаюць яго, і простыя целы з аб'ёмамі, якія змяшчаюцца ў ім і неабмежавана мала адрозніваюцца ад V.

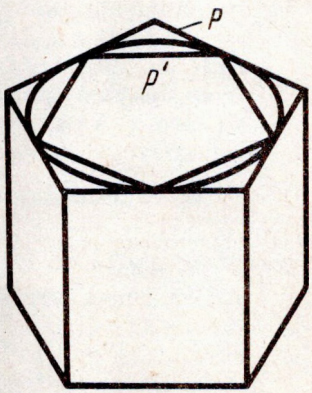
Прыменім гэта азначэнне да знаходжання аб'ёму цыліндра з радыусам асновы R і вышынёй H.

Пры вывадзе формулы для плошчы круга былі пабудаваны такія два n-вугольнікі (адзін — які змяшчае круг, другі — які змяшчаецца ў крузе), што іх плошчы пры неабмежаваным павелічэнні n неабмежавана набліжаліся да плошчы круга.

Пабудуем такія многавугольнікі для круга ў аснове цыліндра. Няхай P — многавугольнік, які змяшчае круг, а P' — многавугольнік, што змяшчаецца ў крузе (рыс. 488).

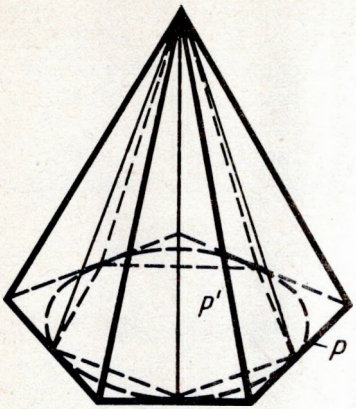
Пабудуем дзве прамыя прызмы з асновамі P і P' і вышынёй H, роўнай вышыні цыліндра. Першая прызма змяшчае цыліндр, а другая прызма змяшчаецца ў цыліндры. Паколькі пры неабмежаваным павелічэнні n плошчы асноў прызмы неабмежавана набліжаюцца да плошчы асновы цыліндра S, то іх аб'ёмы неабмежавана набліжаюцца да SH. Згодна з азначэннем аб'ём цыліндра

$$V = SH = \pi R^2 H.$$



Рыс. 488

Такім чынам, ***аб'ём цыліндра роўны здабытку плошчы асновы на вышыню.***



Рыс. 489

203. АБ'ЁМ КОНУСА

Пабудуем два многавугольнікі ў плоскасці асновы конуса: многавугольнік P, які змяшчае аснову конуса, і многавугольнік P', які змяшчаецца ў аснове конуса (рыс. 489). Пабудуем дзве піраміды з асновамі P і P' і вяршыняй у вяршыні конуса. Першая піраміда змяшчае конус, а другая піраміда змяшчаецца ў конусе.

Як мы ведаем, існуюць такія многавугольнікі P і P', плошчы якіх пры неабмежаваным павелічэнні ліку іх старон n неабмежавана набліжаюцца да плошчы круга ў аснове конуса. Для такіх многавугольнікаў аб'ёмы пабудаваных пірамід неабмежавана набліжаюцца да $\frac{1}{3}SH$, дзе S — плошча асновы конуса, а H — яго вышыня. Згодна азначэнню адсюль вынікае, што аб'ём конуса

$$V = \frac{1}{3}SH = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

Такім чынам, ***аб'ём конуса роўны адной трэцяй здабытку плошчы асновы на вышыню.***

204. АБ'ЁМ УСЕЧАНАГА КОНУСА



З а д а ч а (15). Знайдзіце аб'ём усечанага конуса, у якога радыусы асноў R_1 і $R_2 (R_2 < R_1)$, а вышыня h.

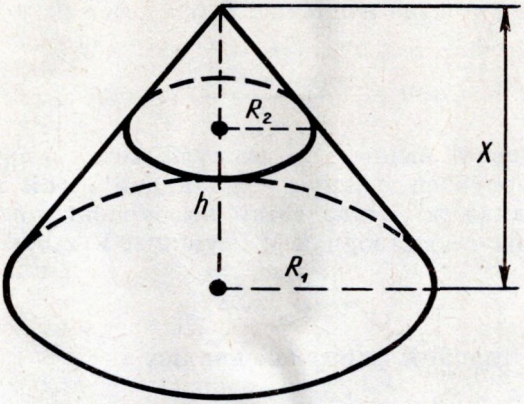
Р а ш э н н е. Дапоўнім дадзены ўсечаны конус да поўнага (рыс. 490). Няхай x — яго вышыня. Аб'ём усечанага конуса роўны рознасці аб'ёмаў двух поўных конусаў: аднаго — з радыусам асновы R_1 і вышынёй x, другога — з радыусам асновы R_2 і вышынёй $x - h$.

З падобнасці конусаў знаходзім x: $\frac{x}{x-h} = \frac{R_1}{R_2}$, $x = \frac{hR_1}{R_1 - R_2}$.

Аб'ём усечанага конуса роўны:

$$V = \frac{1}{3}\left[\pi R_1^2 \frac{hR_1}{R_1 - R_2} - \pi R_2^2 \left(\frac{hR_1}{R_1 - R_2} - h\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\pi h \frac{R_1^3 - R_2^3}{R_1 - R_2} = \frac{1}{3}\pi h (R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2).$$



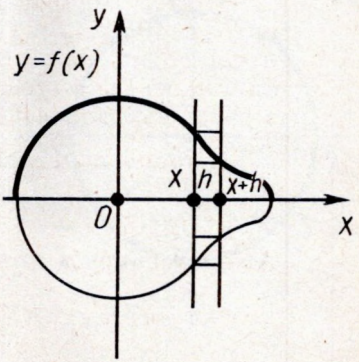
Рыс. 490

205. АГУЛЬНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ АБ'ЁМАЎ ЦЕЛ ВЯРЧЭННЯ

Целам вярчэння ў найпрасцейшым выпадку называецца такое цела, якое плоскасцямі, перпендыкулярнымі некаторай прамой (восі вярчэння), перасякаецца па кругах з цэнтрамі на гэтай прамой. Кругавы цыліндр, конус, шар з'яўляюцца прыкладамі цел вярчэння. Знойдзем формулу для вылічэння аб'ёму цела вярчэння.

Правядзём плоскасць праз вось цела і ўвядзём у гэтай плоскасці дэкартавы каардынаты x, y, а вось цела прымем за вось x (рыс. 491). Плоскасць xy перасякае паверхню цела па лініі, для якой вось x з'яўляецца воссю сіметрыі. Няхай $y = f(x)$ — ураўненне той часткі гэтай лініі, якая размешчана над воссю x.

Правядзём праз пункт $(x, 0)$ плоскасць, перпендыкулярную восі x, і абазначым праз $V(x)$ аб'ём часткі цела, якая ляжыць злева ад гэтай плоскасці; $V(x)$ з'яўляецца функцыяй ад x. Рознасць $V(x+h) - V(x)$ уяўляе сабой аб'ём слоя цела таўшчынёй h паміж дзвюма плоскасцямі, якія перпендыкулярныя восі x і праходзяць праз пункты з абсцысамі x і $x+h$. Няхай M — найбольшае, а m — найменшае значэнне функцыі $f(x)$ на адрэзку $[x, x+h]$. Тады разглядаемы слой цела змяшчае цы-



Рыс. 491

ліндр з радыусам m, вышынёй h і змяшчаецца ў цыліндры з радыусам M і той жа вышынёй h (гл. рыс. 491). Таму

$$\pi m^2 h \leqslant V(x+h) - V(x) \leqslant \pi M^2 h,$$
$$\pi m^2 \leqslant \frac{V(x+h)-V(x)}{h} \leqslant \pi M^2.$$

Пры імкненні вышыні h да нуля левая і правая часткі апошняй няроўнасці імкнуцца да адной і той жа велічыні $\pi f^2(x)$. Сярэдняя ж частка гэтай няроўнасці пры імкненні h да 0 імкнецца да вытворнай V' функцыі $V(x)$.

Значыць,

$$V'(x) = \pi f^2(x).$$

Згодна з вядомай формулай аналізу

$$V(b) - V(a) = \int_a^b V'(x)dx = \int_a^b \pi f^2(x)dx, \quad a < b.$$

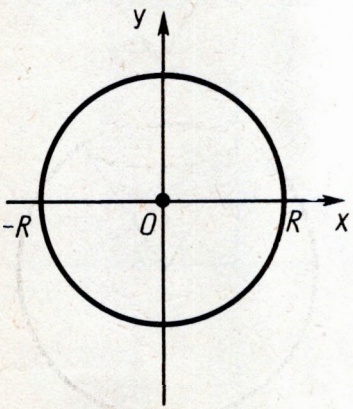
Гэта формула і дае аб'ём часткі цела, змешчанай паміж паралельнымі плоскасцямі $x = a$ і $x = b$.

206. АБ'ЁМ ШАРА

Прыменім атрыманую формулу для аб'ёмаў цел вярчэння да вылічэння аб'ёмаў шара.

Увядзём дэкартавы каардынаты, прыняўшы цэнтр шара за пачатак каардынат (рыс. 492). Плоскасць xy перасякае паверхню шара радыуса R па акружнасці, якая, як вядома, задаецца ўраўненнем

$$x^2 + y^2 = R^2.$$



Рыс. 492

Паўакружнасць, размешчаная над воссю x, задаецца ўраўненнем

$$y = f(x) = +\sqrt{R^2 - x^2},$$
$$-R \leqslant x \leqslant R.$$

Таму аб'ём шара вызначаецца па формуле

$$V = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)dx =$$
$$= \pi\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Такім чынам, ***аб'ём шара роўны*** $\frac{4}{3}\pi R^3$.

207. АБ'ЁМ ШАРАВОГА СЕГМЕНТА І СЕКТАРА

Шаравым сегментам называецца частка шара, якая адсякаецца ад яго плоскасцю.

Формулу для аб'ёму шаравога сегмента атрымліваем аналагічна формуле аб'ёму шара (рыс. 493):

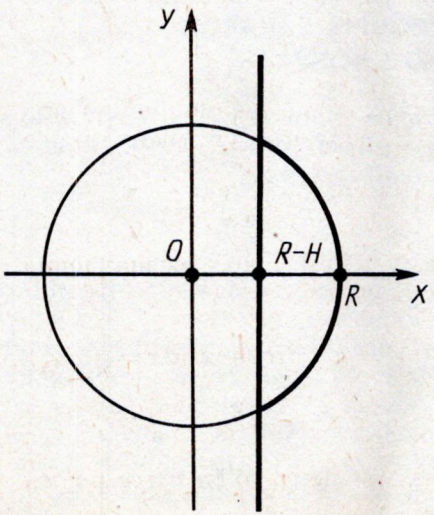
$$V = \pi \int\limits_{R-H}^{R} \left(R^2 - x^2\right)dx = \pi\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{R-H}^{R} = \pi H^2\left(R - \frac{H}{3}\right),$$

дзе R — радыус шара, а H — вышыня шаравога сегмента.

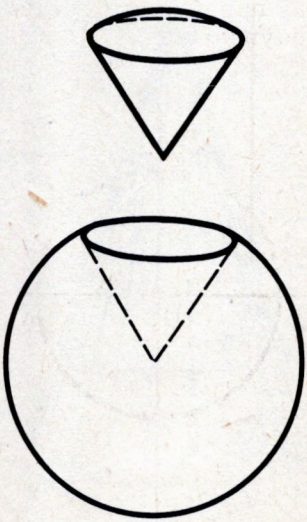
Шаравым сектарам называецца цела, якое атрымліваецца з шаравога сегмента і конуса наступным чынам. Калі шаравы сегмент меншы за паўшар, то шаравы сегмент дапаўняецца конусам, у якога вяршыня ў цэнтры шара, а асновай з'яўляецца аснова сегмента. Калі ж сегмент большы за паўшар, то паказаны конус з яго выдаляецца (рыс. 494). Аб'ём шаравога сектара атрымліваецца складаннем ці адыманнем аб'ёмаў адпаведных сегмента і конуса. Для аб'ёму шаравога сектара атрымліваецца наступная формула:

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H,$$

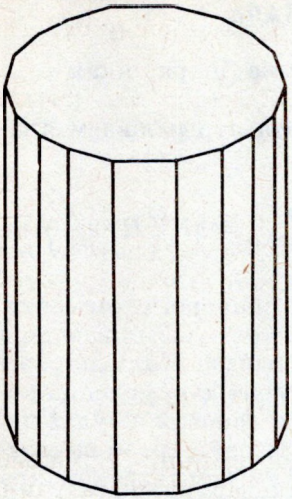
дзе R — радыус шара, а H — вышыня адпаведнага шаравога сегмента.



Рыс. 493



Рыс. 494



Рыс. 495

208. ПЛОШЧА БАКАВОЙ ПАВЕРХНІ ЦЫЛІНДРА

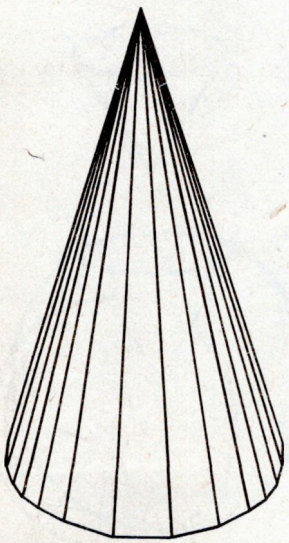
Упішам у цыліндр правільную n-вугольную прызму (рыс. 495). Плошча бакавой паверхні гэтай прызмы $S_n = P_nH$, дзе P_n — перыметр асновы прызмы, а H — яе вышыня.

Як мы ведаем, пры неабмежаваным павелічэнні n перыметр P_n неабмежавана набліжаецца да даўжыні C акружнасці асновы цыліндра. Значыць, плошча бакавой паверхні цыліндра неабмежавана набліжаецца да CH. Таму велічыня CH прымаецца за плошчу бакавой паверхні цыліндра.

Такім чынам, ***плошча бакавой паверхні цыліндра вылічваецца па формуле***

$$S = CH = 2\pi RH,$$

дзе R — радыус цыліндра, а H — яго вышыня.



Рыс. 496

209. ПЛОШЧА БАКАВОЙ ПАВЕРХНІ КОНУСА

Упішам у конус правільную n-вугольную піраміду (рыс. 496). Плошча яе бакавой паверхні

$$S_n = \frac{1}{2}P_n l_n,$$

дзе P_n — перыметр асновы піраміды, а l_n — апафема.

Пры неабмежаваным павелічэнні n перыметр асновы P_n неабмежавана набліжаецца да даўжыні C акружнасці асновы конуса, а апафема l_n — да даўжыні l утваральнай. Адпаведна, бакавая паверхня піраміды неабмежавана набліжаецца да $C\frac{l}{2}$.

У сувязі з гэтым велічыня $C\frac{l}{2}$ прымаецца за плошчу бакавой паверхні конуса.

Такім чынам, ***плошча бакавой паверхні конуса вылічваецца па формуле***

$$S = \frac{1}{2}Cl = \pi Rl,$$

дзе R — радыус асновы конуса, а l — даўжыня ўтваральнай.

Аналагічна для плошчы бакавой паверхні ўсечанага конуса радыусамі асноў R_1, R_2 і ўтваральнай l атрымліваецца формула

$$S = \pi(R_1 + R_2)l.$$

210. ПЛОШЧА СФЕРЫ

Апішам каля сферы выпуклы мнагаграннік з малымі гранямі (рыс. 497). Няхай S' — плошча паверхні мнагагранніка, г. зн. сума плошчаў яго граней. Знойдзем прыбліжанае значэнне плошчы паверхні мнагагранніка, мяркуючы, што лінейныя размеры граней, г. зн. адлегласць паміж любымі двума пунктамі любой грані, меншая за ε.

Аб'ём мнагагранніка роўны суме аб'ёмаў пірамід, якія маюць сваімі асновамі грані мнагагранніка, а вяршыняй — цэнтр сферы (рыс. 498). Паколькі ўсе піраміды маюць адну і тую ж вышыню, роўную радыусу R сферы, то аб'ём мнагагранніка

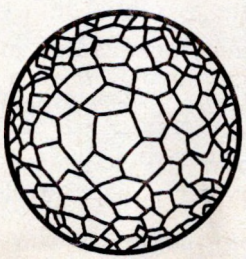
$$V = \frac{1}{3}S'R.$$

Аб'ём мнагагранніка большы за аб'ём шара, які абмежаваны сферай, але меншы за аб'ём шара з тым жа цэнтрам і з радыусам $R + \varepsilon$. Такім чынам,

$$\frac{4}{3}\pi R^3 < \frac{1}{3}S'R < \frac{4}{3}\pi(R + \varepsilon)^3.$$

Адсюль

$$4\pi R^2 < S' < 4\pi(R + \varepsilon)^2\left(1 + \frac{\varepsilon}{R}\right).$$



Рыс. 497



Рыс. 498

Мы бачым, што плошча паверхні апісанага мнагагранніка пры неабмежаваным памяншэнні размераў яго граней, г. зн. пры неабмежаваным памяншэнні ε, імкнецца да $4\pi R^2$. У сувязі з гэтым велічыня $4\pi R^2$ прымаецца за плошчу сферы.

Такім чынам, ***плошча сферы радыуса R вылічваецца па формуле***

$$S = 4\pi R^2.$$

Аналагічна вызначаецца плошча сферычнай часткі паверхні шаравога сектара, г. зн. плошча сферычнага сегмента, для яе атрымліваецца формула

$$S = 2\pi RH \ (H \text{ — вышыня сегмента}).$$

КАНТРОЛЬНЫЯ ПЫТАННІ

1. Выведзіце формулу для аб'ёму цыліндра.
2. Выведзіце формулу для аб'ёму конуса.
3. Выведзіце формулу для аб'ёму цел вярчэння.
4. Выведзіце формулу для аб'ёму шара.
5. Што такое шаравы сегмент? Выведзіце формулу для аб'ёму шаравога сегмента.
6. Што такое шаравы сектар? Па якой формуле вылічваецца аб'ём шаравога сектара?
7. Па якой формуле вылічваецца плошча бакавой паверхні цыліндра?
8. Па якой формуле знаходзіцца плошча бакавой паверхні конуса (бакавой паверхні ўсечанага конуса)?
9. Па якой формуле вылічваецца плошча сферы?

ЗАДАЧЫ

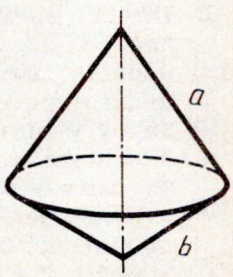
1. 25 м меднага дроту маюць масу 100,7 г. Знайдзіце дыяметр дроту (шчыльнасць медзі 8,94 г/см^3).
2. Помпа, якая падае ваду ў паравы кацёл, мае два вадзяныя цыліндры. Дыяметры цыліндраў 80 мм, а ход поршня 150 мм. Чаму роўна гадзінная прадукцыйнасць помпы, калі кожны поршань робіць 50 рабочых хадоў у мінуту?
3. У колькі разоў трэба павялічыць вышыню цыліндра, не змяняючы асновы, каб аб'ём павялічыўся ў n разоў? У колькі разоў трэба павялічыць радыус асновы цыліндра, не змяняючы вышыні, каб аб'ём павялічыўся ў n разоў?
4. У цыліндр упісана правільная трохвугольная прызма,

а ў прызму ўпісан цыліндр. Знайдзіце адносіну аб'ёмаў цыліндраў.

5. Знайдзіце аб'ём цыліндра, упісанага ў правільную шасцівугольную прызму, у якой кожны кант роўны a.
6. Свінцовая труба (шчыльнасць свінцу 11,4 г/см^3) з таўшчынёй сценак 4 мм мае ўнутраны дыяметр 13 мм. Якая маса 25 м гэтай трубы?
7. Куча шчэбеню мае канічную форму, радыус асновы якой 2 м, а ўтваральная 2,5 м. Знайдзіце аб'ём кучы шчэбеню.
8. Восевым сячэннем конуса з'яўляецца раўнабедраны прамавугольны трохвугольнік, плошча якога 9 м^2. Знайдзіце аб'ём конуса.
9. Даўжыня ўтваральнай конуса роўна l, а даўжыня акружнасці асновы c. Знайдзіце аб'ём конуса.
10. Утваральная конуса l складае з плоскасцю асновы вугал α. Знайдзіце аб'ём конуса.
11. Стог сена мае форму цыліндра з канічным верхам. Радыус яго асновы 2,5 м, вышыня 4 м, прычым цыліндрычная частка стога мае вышыню 2,2 м. Шчыльнасць сена 0,03 г/см^3. Вызначце масу стога сена.
12. Вадкасць, налітая ў канічны сасуд вышынёй 0,18 м і дыяметрам асновы 0,24 м, пераліваецца ў цыліндрычны сасуд, дыяметр асновы якога 0,1 м. Як высока будзе стаяць узровень вадкасці ў сасудзе?
13. Роўнастаронні трохвугольнік верціцца вакол сваёй стараны a. Знайдзіце аб'ём атрыманага цела вярчэння.
14. Прамавугольны трохвугольнік з катэтамі a і b верціцца вакол гіпатэнузы. Знайдзіце аб'ём атрыманага цела (рыс. 499).

15*. Знайдзіце аб'ём усечанага конуса, у якога радыусы асноў R_1 і $R_2 (R_2 < R_1)$, а вышыня h.

16. Сасновае бервяно даўжынёй 15,5 м мае дыяметры канцоў 42 см і 25 см. Якую памылку (у працэнтах) робяць пры вылічэнні аб'ёму бервяна, калі памнажаюць яго даўжыню на плошчу папярочнага сячэння ў сярэдзіне бервяна?
17. Радыусы асноў усечанага конуса R і r, утваральная нахілена да плоскасці асновы пад вуглом 45°. Знайдзіце аб'ём.
18. Плошча восевага сячэння ўсечанага конуса роўна рознасці плошчаў асноў, а радыусы асноў R і r. Знайдзіце аб'ём конуса.
19. Усечаны конус, радыусы асноў якога



Рыс. 499

4 см і 22 см і роўнавялікі цыліндр маюць адну і тую ж вышыню. Чаму роўны радыус асновы гэтага цыліндра?

20. Па дадзеных радыусах асноў R і r вызначце адносіну аб'ёмаў усечанага конуса і поўнага конуса.

21. Чыгунны шар рэгулятара мае масу 10 кг. Знайдзіце дыяметр шара (шчыльнасць чыгуну 7,2 г/см^3).

22. Трэба пераплавіць у адзін шар два чыгунныя шары з дыяметрамі 25 см і 35 см. Знайдзіце дыяметр новага шара.

23. Ёсць кавалак свінцу масай 1 кг. Колькі шарыкаў дыяметрам 1 см можна адліць з кавалка? (Шчыльнасць свінцу 11,4 г/см^3.)

24. З драўлянага цыліндра, вышыня якога роўна дыяметру асновы, вытачаны найбольшы шар. Колькі працэнтаў матэрыялу сточана?

25. Знешні дыяметр пустога шара 18 см. Таўшчыня сценак 3 см. Знайдзіце аб'ём матэрыялу, з якога выраблены шар.

26. Пасудзіна мае форму паўшара радыуса R, дапоўненую цыліндрам. Якой вышыні павінна быць цыліндрычная частка, каб пасудзіна мела аб'ём V?

27. Плоскасць, перпендыкулярная дыяметру шара, дзеліць яго на часткі 3 см і 9 см. На якія часткі дзеліцца аб'ём шара?

28. Якую частку аб'ёму шара складае аб'ём шаравога сегмента, у якога вышыня роўна 0,1 дыяметра шара?

29. Два роўныя шары размешчаны так, што цэнтр аднаго ляжыць на паверхні другога. Як адносіцца аб'ём агульнай часткі шароў да аб'ёму цэлага шара?

30. Дыяметр шара, роўны 30 см, з'яўляецца воссю цыліндра, у якога радыус асновы роўны 12 см. Знайдзіце аб'ём часткі шара, якая змяшчаецца ўнутры цыліндра.

31. Чаму роўны аб'ём шаравога сектара, калі радыус акружнасці яго асновы роўны 60 см, а радыус шара роўны 75 см?

32. Кругавы сектар з вуглом 30° і радыусам R верціцца вакол аднаго з бакавых радыусаў. Знайдзіце аб'ём атрыманага цела.

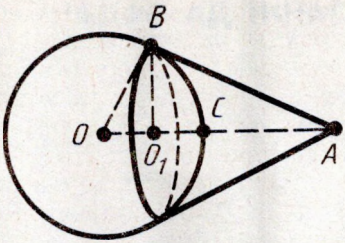
33. Паверхні двух шароў адносяцца як $m:n$. Як адносяцца іх аб'ёмы?

34. Гіпатэнуза і катэты з'яўляюцца дыяметрамі трох шароў. Якая існуе залежнасць паміж іх паверхнямі?

35. Паверхня цела, якое ўтвараецца вярчэннем квадрата вакол стараны, роўнавялікая паверхні шара, што мае радыусам старану квадрата. Дакажыце.

36. Радыус шара 15 см. Якую плошчу мае частка яго паверхні, бачная з пункта, аддаленага ад цэнтра на 25 см (рыс. 500)?

37. Шар радыуса 10 см цыліндрычна прасвідраваны па восі. Дыяметр адтуліны 12 см. Знайдзіце поўную паверхню цела.



Рыс. 500

38. Цыліндрычная дымавая труба з дыяметрам 65 см мае вышыню 18 м. Колькі бляхі трэба для яе вырабу, калі на заклёпку расходуецца 10 % матэрыялу?

39. Паўцыліндрычнае скляпенне падвала мае 6 м даўжыні і 5,8 м у дыяметры. Знайдзіце поўную паверхню падвала.

40. З круглага ліста металу выштампаваны цыліндрычны стакан дыяметрам 25 см і вышынёй 50 см. Мяркуючы, што плошча ліста пры штампоўцы не змянілася, знайдзіце дыяметр ліста.

41. У цыліндры плошча асновы роўна Q, а плошча восевага сячэння M. Чаму роўна поўная паверхня цыліндра?

42. Конусападобная палатка вышынёй 3,5 м з дыяметрам асновы 4 м пакрыта парусінай. Колькі квадратных метраў парусіны пайшло на палатку?

43. Дах сіласнай вежы мае форму конуса. Вышыня даху 2 м, дыяметр вежы 6 м. Знайдзіце паверхню даху.

44. Плошча асновы конуса S, а ўтваральныя нахіленыя да асновы пад вуглом α. Знайдзіце бакавую паверхню конуса.

45. Як адносяцца паміж сабой бакавая і поўная паверхні роўнастаронняга конуса (у сячэнні — правільны трохвугольнік)?

46. Поўная паверхня роўнастаронняга конуса роўнавялікая паверхні шара, пабудаванага на яго вышыні як на дыяметры. Дакажыце.

47. Паўкруг згорнуты ў канічную паверхню. Знайдзіце вугал паміж утваральнай і воссю конуса.

48. Радыус кругавога сектара роўны 3 м, яго вугал 120°. Сектар згорнуты ў канічную паверхню. Знайдзіце радыус асновы конуса.

49. Колькі квадратных метраў латуннага ліста трэба будзе, каб зрабіць рупар, у якога дыяметр аднаго канца 0,43 м, другога канца 0,036 м і ўтваральная 1,42 м?

50. Колькі аліфы трэба будзе для афарбоўкі знешняй паверхні 100 вёдзер, якія маюць форму ўсечанага конуса з дыяметрамі асноў 25 см і 30 см, утваральная 27,5 см і калі на 1 м^2 трэба 150 г аліфы?

АДКАЗЫ І ЎКАЗАННІ ДА ЗАДАЧ

§ 1.

4. Праз два пункты можна правесці толькі адну прамую. **7.** 1) 6 см; 2) 7,7 дм; 3) 18,1 м. **10.** Не належыць. **11.** Не можа. **12.** Не могуць. **13.** Не могуць. **14.** 0,5 м ці 5,9 м. **15.** 1) $AC = 9$ м, $BC = 6$ м; 2) $AC = 10$ м, $BC = 5$ м; 3) $AC = BC = 7{,}5$ м; 4) $AC = 6$ м, $BC = 9$ м. **18.** 1), 4), 6) Перасякае; 2), 3), 5) не перасякае. **19.** 6 адрэзкаў. **24.** 1) 110°; 2) 119°; 3) 179°. **25.** 2), 3) Не можа. **26.** 1) $\angle(ac) = 45°$, $\angle(bc) = 15°$; 2) $\angle(ac) = 40°$, $\angle(bc) = 20°$; 3) $\angle(ac) = \angle(bc) = 30°$; 4) $\angle(ac) = 24°$, $\angle(bc) = 36°$. **29.** Не існуе. **31.** 1) 1,2 м; 2) 2,4 см. **33.** 11 см. **34.** 100°. **36.** $PQ = 5$ см, $QR = 6$ см, $PR = 7$ см. **37.** $\angle A = 40°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 80°$. **39.** У $\triangle ABC$ $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 7$ см. **40.** Існуе. **42.** Нельга. **43.** Не можа. **49.** 2) Указанне. Злучыце адрэзкам пункты A і C і скарыстайце сцверджанне задачы 49, 1). **51.** 1) Гл. рашэнне задачы 30 у тэксце; 2) правядзіце праз пункт A прамую, якая адрозніваецца ад a.

§ 2.

1. 150°, 135°, 120°, 90°. **2.** 1), 2) Не могуць; 3) могуць. **4.** 1) 105° і 75°; 2) 110° і 70°; 3) 45° і 135°; 4) 90° і 90°. **5.** 180°; 90°; 120°. **6.** 1) 72° і 108°; 2) 54° і 126°; 3) 55° і 125°; 4) 88° і 92°. **7.** 150°, 150°, 30°. **8.** 130°. **10.** 144° і 36°. **11.** 65° і 115°. **12.** Усе вуглы прамыя. **15.** 1) 15°; 2) 26°; 3) 86°. **16.** 1) 120°; 2) 150°; 3) 178°. **18.** Указанне. Стораны вугла ляжаць у розных паўплоскасцях адносна прамой, часткай якой з'яўляецца дадзены прамень. **19.** 90°. **20.** Указанне. Скарыстайце вынікі задачы 19 і тэарэму 2.3. **21.** 1) 155°; 2) 135°; 3) 105°. **22.** Указанне. Скарыстайце тэарэму 1.1. **23.** 1) 20°; 2) 60°; 3) 90°. **24.** $\angle(a_1 b) = 120°$, $\angle(a_1 c) = 150°$, $\angle(bc) = 30°$. **25.** 1) 110°; 2) 175°; 3) 170°; 4) 130°. **26.** 1) Не праходзіць; 2) не можа.

§ 3.

7. Указанне. Прадоўжыце медыяны на іх даўжыню. **9.** 0,3 м. **10.** 3,5 м. **11.** 1) 3,2 м, 6,2 м, 6,2 м; 2) 7,2 м, 4,2 м, 4,2 м. **22.** Указанне. Скарыстайце ўласцівасць медыяны ў раўнабедраным трохвугольніку. **25.** 3) Указанне. Прадоўжыце бісектрысу BD на яе даўжыню. **27.** 15 м. **30.** Указанне. Скарыстайце сцверджанне задачы 29. **39.** Указанне. Прадоўжыце медыяны на іх даўжыню.

§ 4.

5. Вуглы AB_1C_1 і AC_1B_1 і вуглы BB_1C_1 і CC_1B_1 унутраныя аднастароннія, а вуглы AB_1C_1 і CC_1B_1 і вуглы BB_1C_1 і AC_1B_1 унутраныя накрыж ляжачыя. **7.** Вуглы BCA і DBC унутраныя накрыж ляжачыя, вуглы CAB і DBA ўнутраныя аднастароннія. **14.** 1) 105° і 75°; 2) 75°. **15.** Тры вуглы па 72° кожны і чатыры вуглы па 108° кожны. **16.** Не можа. **18.** 1) 100°; 2) 65°; 3) 35°; 4) 35°. **19.** 1) 30°, 60°, 90°; 2) 40°, 60°, 80°; 3) 45°, 60°, 75°; 4) 48°, 60°, 72°; 5) 50°, 60°, 70°. **20.** Не можа. **21.** Не можа. **22.** 1) 100°; 2) 70°; 3) 36°. **23.** 1) 50°; 2) 30°; 3) 75°. **24.** 40°, 40°. **25.** 70° і 40° ці 55° і 55°. **27.** 1) 80°, 80°, 20°; 2) 70°, 70°, 40°; 3) два вуглы роўны $120° - \frac{2}{3}\alpha$ і адзін $\frac{4}{3}\alpha - 60°$. **29.** 1) 105°; 2) $180° - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$; 3) 155°; 4) $90° + \frac{\gamma}{2}$. **31.** 90°. **32.** 110°, 35°, 35°. **33.** 60°, 30° і 90°. **34.** 110°. **36.** Пункт A. **38.** 60°. **39.** $\angle D = \frac{\angle A}{2}$, $\angle E = \frac{\angle C}{2}$, $\angle DBE = \angle B + \frac{\angle A + \angle C}{2}$. **40.** 140°, 10°. **41.** 1) 20°; 2) 65°; 3) α. **42.** Вуглы $\triangle ABD$: $\angle A = \alpha$, $\angle D = 90°$, $\angle B = 90° - \alpha$; вуглы $\triangle CBD$: $\angle D = 90°$, $\angle B = \alpha + \beta - 90°$, $\angle C = 180° - \alpha - \beta$. **44.** 90°, 45°, 45°. **45.** $\angle D = 90°$, $\angle B = 60°$, $\angle A = 30°$. **46.** 150°. **47.** 90°.

§ 5.

1. Указанне. Адкладзіце на прамені адрэзак, роўны радыусу. **2.** Указанне. Гл. задачу 1. **5.** 1) 60°; 2) 120°. **7.** Не можа. **9.** 30°. **10.** 60° і 120°. **11.** 70 см, 10 см. **12.** Не могуць. **13.** 1) Не могуць; 2) не могуць. **14.** 2) Указанне. Скарыстайце доказ ад процілеглага. **15.** 2) Указанне. Скарыстайце доказ ад процілеглага; 3) Указанне. Дакажыце спачатку, што агульны пункт дадзеных акружнасцей ляжыць на прамой, якая праходзіць праз іх цэнтры. **16.** 2) Указанне. Скарыстайце доказ ад процілеглага. **18.** Указанне. Скарыстайце сцверджанне задачы 16, 1). **28.** Указанне. Пачніце з пабудавання роўнастаронняга трохвугольніка. **32.** Указанне. У шукаемым трохвугольніку прадоўжыце медыяну на яе даўжыню. **36.** Указанне. Гл. задачу 35. **37.** Указанне. Гл. задачу 35. **38.** Указанне. Гл. задачу 35. **39.** Указанне. Пачніце з пабудавання вышыні. **41.** Указанне. Гл. задачу 50 § 4. **42.** Указанне. Гл. задачу 41. **46.** Указанне. Пабудуйце спачатку трохвугольнік, у якога адна старана роўна зададзенай старане шукаемага трохвугольніка, другая старана — суме дзвюх іншых яго старон і вугал паміж імі роўны зададзенаму вуглу. **47.** Указанне. Скарыстайце ўказанне да папярэдняй задачы з той розніцай, што замест сумы дзвюх старон шукаемага трохвугольніка трэба ўзяць іх рознасць. **48.** Гл. указанне да задачы 46. **50.** Указанне. Звядзіце рашэнне задачы да папярэдняй, пабудаваўшы дапаможную акружнасць, якая канцэнтрычна адной з дадзеных, з радыусам, роўным суме ці рознасці радыусаў дадзеных акружнасцей.

§ 6.

3. Тры. **4.** 10 м. **5.** 3 см і 4 см. **7.** $BC = AD = 4{,}8$ м. **8.** $AD = 15$ см, $CD = 10$ см. **9.** $\angle B = \angle D = 150°$, $\angle C = 30°$. **10.** 3 см. **11.** 40°, 140°, 140°. **12.** 115° і 65°. **13.** Не могуць. **14.** 60°, 60°, 120°, 120°. **15.** 1) 40°, 40°, 140°, 140°; 2) 50°, 50°, 130°, 130°; 3) 80°, 80°, 100°, 100°. **16.** 1) 55°, 55°, 125°, 125°; 2) 35°, 35°, 145°, 145°; **3)** 20°, 20°, 160°, 160°. **19.** $BE = 9$ см, $CE = 6$ см. Указанне. Дакажыце, што $\triangle ABE$ раўнабедраны з асновай AE. **20.** 0,6 м і 0,8 м. **21.** $AB = BD = 1{,}1$ м; $AD = 0{,}8$ м. **28.** 60 см. **29.** 10 см і 18 см.

30. 12 см, 20 см. **31.** 12 см. **32.** 10 см і 25 см ці 7,5 см і 18,75 см. **35.** 80° і 100°. **37.** 60° і 120°. **41.** 4 м. **43.** 2 м. **44.** 2 м. **45.** 4 м, 8 м. **46.** 1 м. **47.** 10 см. **50.** 4 см, 5 см, 6 см. **51.** 6 см. **52.** 6 см, 5 см, 5 см. **56.** 5 м, 6 м. **57.** $a+b$. **59.** 3 м, 4 м. **61.** 70° і 110°. **62.** 1,7 м. **63.** 24 см, 36 см. **64.** 60° і 120°. **65.** 15 м. **66.** 3 см. **67.** 4 м, 6 м. **68.** 2,2 м. **69.** 9 см і 5 см. **70.** *a*. **71.** Указанне. Пабудуйце спачатку трохвугольнік, у якога дзве стараны роўны бакавым старанам трапецыі, а трэцяя — рознасці асноў. **72.** Указанне. Пабудуйце спачатку трохвугольнік, у якога дзве стараны роўны дыяганалям трапецыі, а трэцяя — суме яе асноў. **73.** Пабудуйце спачатку адрэзак $x=\frac{ab}{d}$, пры гэтым карыстайцеся рашэннем задачы 6.1.

§ 7.

2. 1) 5; 2) $\sqrt{2}\approx 1{,}4$; 3) $\sqrt{61}\approx 7{,}8$. **3.** 1) 4; 2) 12; 3) $\sqrt{11}\approx 3{,}3$. **4.** 5 м ці $\sqrt{7}$ м $\approx 2{,}6$ м. **5.** Не могуць. **6.** 1) 5 см; 2) 17 дм; 3) 6,5 м. **7.** 109 см. **8.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **9.** Нельга. **10.** $\sqrt{7}$ м $\approx 2{,}6$ м. **12.** 15 см. **13.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **15.** Указанне. Пабудуйце спачатку адрэзкі $c=\frac{a+b}{2}$ і $d=\frac{|a-b|}{2}$. Тады шукаемы адрэзак $x=\sqrt{c^2-d^2}$. **16.** $\sqrt{116}$ м $\approx 10{,}8$ м. **18.** 90°. **20.** Указанне. Злучыце адзін з пунктаў з вяршыняй трохвугольніка адрэзкам і скарыстайце вынік задачы 19. **22.** Указанне. Скарыстайце вынік задачы 21. **26.** Не можа. **27.** 2 м. **28.** Указанне. Прадоўжыце медыяну на яе даўжыню. **31.** 2) Указанне. Звядзіце рашэнне гэтай задачы да папярэдняй у адпаведнасці з рысункам 165, *б*. **32.** Не могуць. **34.** $R-d$, $R+d$. Указанне. Скарыстайце няроўнасць трохвугольніка. **35.** $d+R$, $d-R$. Указанне. Скарыстайце няроўнасць трохвугольніка. **36.** Не могуць. **37.** Не могуць. **38.** Указанне. Параўнайце адлегласць паміж цэнтрамі акружнасцей з іх радыусамі. **39.** Не могуць. **41.** Указанне. Дадзеныя лікі задавальняюць умовам задачы 40. **42.** 1), 3), 4) Нельга; 2) можна. **43.** Скарыстайце вынік задачы 41. **44.** 10 см, 6 см. **45.** $90°-\alpha$, $a\cos\alpha$, $a\sin\alpha$. **46.** $90°-\alpha$, $\frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$, $\frac{a}{\sin\alpha}$. **49.** 1) $\sin 16°=0{,}2756$, $\cos 16°=0{,}9613$; 2) $\sin 24°36'=0{,}4163$, $\cos 24°36'=0{,}9092$; 3) $\sin 70°32'=0{,}9428$, $\cos 70°32'=0{,}3333$; 4) $\sin 88°49'=0{,}9998$, $\cos 88°49'=0{,}0206$. **50.** 1) $x=1°$; 2) $x=30°6'$; 3) $x=47°3'$; 4) $x=86°9'$. **51.** 1) $\operatorname{tg}10°=0{,}1763$; 2) $\operatorname{tg}40°40'=0{,}8591$; 3) $\operatorname{tg}50°30'=1{,}213$; 4) $\operatorname{tg}70°15'=2{,}785$. **52.** 1) $x=17°53'$; 2) $x=38°7'$; 3) $x=80°46'$; 4) $x=83°50'$. **53.** 31°25′; 31°25′; 117°10′; 23,8 м. **54.** 34°10′ і 55°50′. **55.** 51°. **56.** 116°16′ і 63°44′. **57.** 29°52′ і 150°8′. **58.** 12 м, 45°14′. **59.** 60°16′. **60.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **61.** 1) а) 5; 36°52′; 53°8′; б) 41; 12°41′; 77°19′; в) 29; 43°36′; 46°24′; г) 61; 10°23′; 79°37′; 2) а) 12; 22°37′; 67°23′; б) 24; 16°16′; 73°44′; в) 15; 28°4′; 61°56′; г) 13; 81°12′; 8°48′; 3) а) 70°; 0,68; 1,88; б) 39°40′; 3,08; 2,55; в) 19°24′; 7,55; 2,66; г) 13°39′; 15,55; 3,78. 4) а) 59°33′; 5,92; 5,10; б) 49°12′; 7,65; 5,79; в) 29°25′; 8,04; 3,95; г) 22°; 9,71; 3,64. **62.** 1) $\cos^2\alpha$; 2) $\sin^2\alpha$; 3) 2; 4) $\sin^3\alpha$; 7) 1; 8) $\sin^2\alpha$; 9) $1+\operatorname{tg}^6\alpha$. **63.** 1) $\sin\alpha=\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{12}{15}$; 2) $\sin\alpha=\frac{8}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{8}{15}$; 3) $\sin\alpha=0{,}8$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}$. **64.** 1) $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$; 2) $\cos\alpha=\frac{9}{41}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{40}{9}$; 3) $\cos\alpha=0{,}6$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}$. **66.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **67.** $r=\frac{a}{2\sqrt{3}}$, $R=\frac{a}{\sqrt{3}}$. **68.** 29 см ці $\sqrt{882}$ см $\approx$

$\approx 29{,}7$ м. **69.** $(\sqrt{3}-1)$ м $\approx 0{,}732$ м; $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}517$ м. **70.** 60° і 120°. **71.** 60°, 60°, 120°, 120°. **72.** 1), 6) α; 2), 3), 4), 5) β. **73.** BC. **74.** $\angle A$.

§ 8.

3. 2. **4.** 3. **5.** (2; 0). **6.** (0; 3). **7.** Прамая, паралельная восі y. **8.** Дзве прамыя $x=3$ і $x=-3$. **10.** Дадатную. **11.** 4; 3. **12.** 1) (3; 2); 2) (−1; 3); 3) (1; 1). **13.** 1) (−2; 3); 2) (3; −5); 3) (−4; 4). **16.** (0; 1), (−2; 0), (−2; 1). **17.** $AB=5$, $AC=10$, $BC=5$. **18.** Пункт B. **20.** (3; 3) і (15; 15). **23.** (3; 4), (−4; 3), (0; 5). **24.** (5; 12) і (5; −12); (5; −12) і (−5; −12). **25.** $x^2+(y-3)^2=13$. **26.** $(x+4)^2+(y-3)^2=25$. **27.** (−2; 0) ці (4; 0). **28.** $(x-1)^2+(y-2)^2=4$. **29.** $(x+3)^2+(y-4)^2=25$. **31.** (0; 1) і $\left(-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right)$. **32.** (7; 0) і (1; 0). **36.** 1) $x+y-5=0$; 2) $3x+10y-2=0$; 3) $x+6y+13=0$. **37.** $x=0$, $y=0$, $x+2y-4=0$. **38.** $a=b=\frac{1}{3}$. **39.** 1) (−3; 0) і $\left(0; -\frac{3}{2}\right)$; 2) (4; 0) і (0; 3); 3) (−2; 0) і (0; 3); 4) (2,5; 0) і (0; −5). **40.** 1) (1; −2); 2) (2; 4); 3) (0,5; −2). **41.** Указанне. Знайдзіце пункт перасячэння дзвюх прамых і праверце, ці ляжыць ён на трэцяй прамой. **42.** $\left(2; \frac{5}{3}\right)$. **43.** 1) і 6), 2) і 3), 4) і 5). **45.** $x=2$. **46.** $y=3$. **47.** $3x-2y=0$. **48.** 1) $k=-\frac{1}{2}$; 2) $k=-\frac{3}{4}$; 3) $k=\frac{3}{2}$; 4) $k=2$. **49.** 1) 45°; 2) 60°; 3) 30°. **50.** 2) (0; 1) і (−1; 0); 3) (0; 1) і $\left(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$; 4) (0; 1) і $\left(-\frac{2k}{k^2+1}; \frac{1-k^2}{k^2+1}\right)$. **51.** Прамая датыкаецца да акружнасці пры $c=\pm\sqrt{2}$, перасякае яе пры $|c|<\sqrt{2}$ і не перасякае пры $|c|>\sqrt{2}$. Указанне. Прамая, якая датыкаецца да акружнасці, мае з ёй адзіны агульны пункт, г. зн. карані адпаведнага квадратнага ўраўнення павінны супадаць. **52.** $\sin 120°=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 120°=-\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} 120°=-\sqrt{3}$; $\sin 135°=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 135°=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg} 135°=-1$; $\sin 150°=\frac{1}{2}$, $\cos 150°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} 150°=-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **53.** $\sin 160°=0{,}3420$; $\cos 140°=-0{,}7660$; $\operatorname{tg} 130°=-1{,}192$. **54.** 1) $\sin 40°=0{,}6428$; $\cos 40°=0{,}7660$; $\operatorname{tg} 40°=0{,}8391$; 2) $\sin 14°36'=0{,}2521$; $\cos 14°36'=0{,}9677$; $\operatorname{tg} 14°36'=0{,}2605$; 3) $\sin 70°20'=0{,}9417$; $\cos 70°20'=0{,}3365$; $\operatorname{tg} 70°20'=2{,}798$; 4) $\sin 30°16'=0{,}5040$; $\cos 30°16'=0{,}8637$; $\operatorname{tg} 30°16'=0{,}5836$; 5) $\sin 130°=0{,}7660$; $\cos 130°=-0{,}6428$; $\operatorname{tg} 130°=-1{,}192$; 6) $\sin 150°30'=0{,}4924$; $\cos 150°30'=-0{,}8704$; $\operatorname{tg} 150°30'=-0{,}5658$. **55.** $\alpha_1\approx 11°32'$ ці $168°28'$; $\alpha_2\approx 134°26'$; $\alpha_3\approx 158°12'$. **56.** 1) $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha=2\sqrt{2}$; 2) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\sqrt{3}$; 3) $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg}\alpha=1$; 4) $\sin\alpha=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **57.** 1) $\cos\alpha=0{,}8$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$; 2) $\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$; 3) $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\operatorname{tg}\alpha = -1$ ці $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg}\alpha = 1$. **58.** $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$. **61.** Указанне. Разгледзьце спачатку выпадак, калі абодва вуглы α і β вострыя. **62.** Гл. указанне да задачы 61.

§ 9.

2. У квадрат. **4.** Указанне. Пабудуйце паслядоўна вяршыні C, D і E роўнастаронніх трохвугольнікаў ABC, ACD, ADE. Пункт E шукаемы. **7.** Не можа. **9.** Указанне. Вяршыні дадзенага чатырохвугольніка пераходзяць пры сіметрыі адносна яго цэнтра ў вяршыні. **10.** Указанне. Скарыстайце сіметрыю адносна дадзенага пункта. **11.** 1) Адрэзак; 2) вугал; 3) трохвугольнік. **14.** 1) $(-3; -4)$; 2) $(3; 4)$; 3) $(3; -4)$. **19.** Тры. **24.** Указанне. Скарыстайце сіметрыю адносна прамой b. **28.** $(1; -1)$, $(2; -1)$, $(1; 1)$. **29.** 1) $a = b = 2$; 2) $a = -3$, $b = 8$; 3) $a = b = 1$. **31.** 1) Не існуе; 2) існуе. **34.** Аднолькава накіраваныя прамені: AB і DC, AD і BC, CD і BA, DA і CB. Процілегла накіраваныя прамені: AB і CD, BC і DA, DC і BA, AD і CB.

§ 10.

1. $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ аднолькава накіраваныя, $\overline{BA}$ і кожны з вектараў $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{BC}$ процілегла накіраваныя. **4.** $(2; 4)$, $(-1; 2)$ і $(c_1; c_2)$. **5.** $m = \pm 12$, $n = \pm 7$. **8.** 1) $\bar{c}(-3; 4)$, $|\bar{c}| = 5$; 2) $\bar{c}(6; 8)$, $|\bar{c}| = 10$. **10.** 1) $\bar{c}(5; -12)$, $|\bar{c}| = 13$; 2) $\bar{c}(-6; 8)$, $|\bar{c}| = 10$. **12.** $\overline{AB} = \bar{a} - \bar{b}$, $\overline{CD} = \bar{b} - \bar{a}$. **14.** 2) Указанне. Пабудуйце $\triangle ABC$, у якога $\overline{AB} = \bar{a}$, $\overline{BC} = \bar{b}$. Тады $\overline{AC} = \bar{a} + \bar{b}$. **15.** $\frac{P}{\sqrt{3}}$. **19.** $\bar{c}(-6; -8)$, $|\bar{c}| = 10$. **20.** 1) $\pm\frac{1}{2}$; 2) ± 1; 3) $\pm\frac{5}{13}$. **23.** $\overline{AB} = \frac{1}{2}(\bar{a} + \bar{b})$, $\overline{CD} = -\frac{1}{2}(\bar{a} + \bar{b})$, $\overline{CB} = \frac{1}{2}(\bar{b} - \bar{a})$, $\overline{AD} = \frac{1}{2}(\bar{a} - \bar{b})$. **25.** $\bar{a}$ і $\bar{c}$, $\bar{b}$ і $\bar{d}$. Вектары $\bar{a}$ і $\bar{c}$ аднолькава накіраваныя, а $\bar{b}$ і $\bar{d}$ — процілегла накіраваныя. **26.** $m = 2$. **27.** $\lambda = -1$, $\mu = 0$. **28.** Указанне. Скарыстайце тэарэму 10.3. **29.** $90°$. **30.** $\sqrt{3}$. Указанне. $|\bar{a} + \bar{b}|^2 = (\bar{a} + \bar{b})^2$. **31.** $30°$. **32.** $\cos A = 0{,}6$, $\cos B = 0$, $\cos C = 0{,}8$. **33.** $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 90°$. **35.** $m = -\frac{8}{3}$. **36.** $\lambda = -1$. **39.** $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$, $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}$, $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$. **40.** Указанне. Скарыстайце задачу 38. **45.** Адзінкавыя вектары $\bar{a}$, $\bar{c}$ і $\bar{d}$, векторы $\bar{a}$ і $\bar{d}$ калінеарныя. **46.** $\bar{e}(0{,}6; 0{,}8)$. **47.** 2; -3. **48.** 1) $\overline{OX} = \frac{\mu\bar{a} + \lambda\bar{b}}{\mu + \lambda}$.

§ 11.

5. Трохвугольнік. **6.** $\angle A = 30°$, $A_1B_1 = 1{,}5$ м. **8.** Указанне. Пабудуйце спачатку якую-небудзь акружнасць, якая датыкаецца да старон вугла, і скарыстайце гаматэтыю адносна вяршыні вугла. **9.** Указанне. Скарыстайце гаматэтыю адносна адной з вяршынь трохвугольніка. **11.** 13,6 см. **12.** $AC = 4$ м, $B_1C_1 = 14$ м. **13.** $AC = 24$ см, $A_1C_1 = 18$ см, $B_1C_1 = 15$ см. **16.** $\frac{ah}{a + h}$. **17.** $\frac{m}{n}$. **18.** 4 см. **19.** $\frac{276}{28}$. **20.** 1) 14 см; 2) 6 дм. **22.** $m : n$. **23.** $n : m$. **24.** $AC = 18$ м. Указанне. Трохвугольнікі ACD і CBA падобныя.

25. $m:n$. **26.** 15 см, 18 см. **27.** 4,5 см. **29.** $\frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}$. **30.** $A_1C_1 = 1{,}2$ м; $AC = 3$ м. **32.** $\angle D = 180° - 2\angle A$, $\angle E = 180° - 2\angle B$, $\angle F = 180° - 2\angle C$. **34.** Падобныя. **35.** 1) Падобныя; 2) падобныя; 3) не. **37.** 1 м, 2 м, 2,5 м. **38.** 6,5 м, 5,5 м. **39.** 1) Падобныя; 2) не падобныя. **40.** 15 см, 20 см, 25 см. **41.** 21 см. **43.** $m^2:n^2$. **44.** ≈ 42 м. **45.** $\frac{bc}{b+c}$. **46.** Указанне. Правядзіце праз пункт B прамую, паралельную прамой DC. **47.** Указанне. Скарыстайце папярэднюю задачу. **48.** 10 см. **49.** 5 см. **50.** 30° ці 150°. **52.** Указанне. Гл. задачу 51. **54.** α ці $180° - \alpha$. **55.** 50°. **56.** Указанне. Дакажыце спачатку, што процілеглыя вяршыні ўпісанага чатырохвугольніка ляжаць па розныя бакі ад прамой, якая праходзіць праз дзве другія процілеглыя вяршыні. **60.** Указанне. Скарыстайце дзве папярэднія задачы. **63.** $\approx 225{,}8$ км. Указанне. Гл. задачу 62. **64.** $\approx 82{,}7$ км.

§ 12.

1. $\frac{5}{7}$, $\frac{19}{35}$, $\frac{1}{5}$. **2.** $\sqrt{13}$ ці $\sqrt{109}$ м. **4.** $\frac{1}{2}\sqrt{c^2+d^2 \pm 2cd\cos\alpha}$. **5.** $\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}$. **6.** 2,25 м, 3,75 м. **8.** $\frac{12\sqrt{6}}{5}$ м, $2\sqrt{6}$ м, $\frac{12\sqrt{6}}{7}$ м. **9.** $\frac{\sqrt{145}}{2}$ м, $2\sqrt{7}$ м, $\frac{\sqrt{73}}{2}$ м. **10.** $\frac{12\sqrt{42}}{13}$ м, $\frac{\sqrt{105}}{2}$ м, $\frac{12\sqrt{15}}{11}$ м. **11.** Старана AB павялічваецца. **12.** Не можа. **14.** $\frac{35}{2\sqrt{6}}$ м. **15.** $AB = \frac{AC\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **16.** $x = \frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$. **18.** Старана AB найбольшая, старана BC найменшая. **19.** Вугал B найбольшы, вугал C найменшы. **20.** Бакавая старана большая. **24.** Указанне. Прадоўжыце медыяну CD за пункт D на яе даўжыню. **25.** Указанне. Скарыстайце ўласцівасць перпендыкуляра і нахіленых, якія праведзены да прамой з аднаго пункта, і сцверджанне папярэдняй задачы.

26. 1) $\alpha = 105°$, $b \approx 2{,}59$, $c \approx 3{,}66$;
2) $\gamma = 45°$, $b \approx 17{,}9$, $c \approx 14{,}6$;
3) $\alpha = 20°$, $b \approx 65{,}8$, $c \approx 88{,}6$;
4) $\gamma = 119°$, $a \approx 16{,}7$, $c \approx 24{,}8$;
5) $\gamma = 68°$, $a \approx 13{,}6$, $b \approx 11{,}2$.

27. 1) $\alpha \approx 79°$, $\beta \approx 41°$, $c \approx 10{,}6$;
2) $\alpha \approx 11°$, $\beta \approx 39°$, $c \approx 28$;
3) $\beta \approx 27°$, $\gamma \approx 58°$, $a \approx 19{,}9$;
4) $\beta \approx 21°$, $\gamma \approx 15°$, $a \approx 22{,}9$;
5) $\alpha \approx 16°$, $\gamma \approx 12°$, $b \approx 53{,}4$;
6) $\alpha \approx 130°$, $\gamma \approx 35°$, $b \approx 8{,}09$.

28. 1) $c \approx 8{,}69$, $\beta \approx 21°$, $\gamma \approx 39°$;
2) $c \approx 19{,}6$, $\beta \approx 13°$, $\gamma \approx 29°$;
3) $c \approx 22{,}3$, $\beta \approx 6°$, $\gamma \approx 10°$;
4) рашэння не мае;
5) $c \approx 11{,}4$, $\beta \approx 42°$, $\gamma \approx 108°$ ці $c \approx 2{,}49$, $\beta \approx 138°$, $\gamma \approx 12°$.

29. 1) $\alpha \approx 29°$, $\beta \approx 47°$, $\gamma \approx 104°$;
2) $\alpha \approx 54°$, $\beta \approx 13°$, $\gamma \approx 113°$;
3) $\alpha \approx 34°$, $\beta \approx 44°$, $\gamma \approx 102°$;
4) $\alpha \approx 39°$, $\beta \approx 93°$, $\gamma \approx 48°$;
5) $\alpha \approx 15°$, $\beta \approx 11°$, $\gamma \approx 154°$;
6) $\alpha \approx 136°$, $\beta \approx 15°$, $\gamma \approx 29°$.

§ 13.

2. $R_1 + R_2 + d$, $R_1 - R_2 - d$. **6.** Не можа. **8.** $\frac{1}{2}n(n-1)$. **10.** 36°, 72°, 108°, 144°. **12.** 1) 8; 2) 12. **13.** 1) 10 старон; 2) 15 старон. **14.** Указанне. У гэтага n-вугольніка ўсе стораны роўныя, усе вуглы роўныя. **15.** Указанне. У гэтага n-вугольніка ўсе стораны роўныя, усе вуглы роўныя. **18.** Указанне. Выразіце абодва радыусы праз старану трохвугольніка. **19.** $a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Указанне. Знайдзіце спачатку радыус акружнасці. **20.** $2\sqrt{6}$ дм. **21.** $2\sqrt{2}$ см. **22.** $\sqrt{3}$ см. **24.** **Указанне.** Скарыстайце тэарэму косінусаў. **25.** **Указанне.** Спачатку з дапамогай задачы 29 § 11 знайдзіце старану 10-вугольніка, а затым па тэарэме косінусаў — старану 5-вугольніка: $a_{10} = \frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}$, $a_5 = R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$. **26.** $\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$. **27.** $\sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4}}$. **28.** $b = \frac{2aR}{\sqrt{4R^2 - a^2}}$. **29.** $a = \frac{2bR}{\sqrt{4R^2 + b^2}}$. **30.** **Указанне.** Упішыце спачатку правільны шасцівугольнік. **32.** $\frac{R_1 r_2}{r_1}$. **33.** $a : b$. **34.** 1) 62,8 м; 2) 94,2 м. **35.** 6,28 мм. **36.** $\approx 3{,}06$. **Указанне.** Скарыстайце вынік задачы 23. **37.** $\approx 3{,}11$. **Указанне.** Скарыстайце вынік задачы 24. **38.** $\approx 6366{,}2$ км. **39.** $\approx 6{,}3$ см. **40.** 1) $\frac{R\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$; 2) $\frac{R}{1+\sqrt{2}}$; 3) $\frac{R}{8}$. **Указанне.** Цэнтры кругоў з'яўляюцца вяршынямі правільнага n-вугольніка. **41.** 1) $R(3+2\sqrt{3})$; 2) $R(1+\sqrt{2})$; 3) R. **Указанне.** Цэнтры кругоў з'яўляюцца вяршынямі правільнага n-вугольніка. **42.** $\approx 351{,}9$ м/мін. **43.** 1) 300° і 60°; 2) 230° і 130°; 3) 190° і 170°. **44.** 1) 120°; 2) 90°; 3) 72°; 4) 60°; 5) 240°; 6) 270°. **45.** $\approx 31''$. **46.** 1) $\approx 0{,}79$ м; 2) $\approx 0{,}52$ м; 3) $\approx 2{,}09$ м; 4) $\approx 0{,}80$ м; 5) $\approx 1{,}06$ м; 6) $\approx 2{,}63$ м. **47.** 1) $\frac{\pi a}{3}$; 2) $\frac{\pi a}{2\sqrt{2}}$; 3) $\frac{2\pi a}{3\sqrt{3}}$. **Указанне.** Па хордзе і адпаведнаму цэнтральнаму вуглу знайдзіце радыус акружнасці. **48.** 1) $\frac{3l}{\pi}$; 2) $\frac{2\sqrt{2}\,l}{\pi}$; 3) $\frac{3\sqrt{3}\,l}{2\pi}$. **Указанне.** Знайдзіце спачатку радыус акружнасці. **49.** 1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{3}$;

§ 14.

1. **Указанне.** Прымяніце тэарэму Піфагора. **2.** ≈ 180 м. **3.** $S = \frac{a^2}{2}$. **4.** У 2 разы. **5.** Плошча павялічыцца ў 9 разоў. **6.** У 5 разоў. **7.** 8 м, 18 м. **8.** 12 дм, 25 дм. **9.** 30°. **10.** Квадрат. **11.** 200 см^2. **12.** 202,8 см^2. **14.** $\sqrt{15}$ см. **17.** 4800 м^2. **18.** $\frac{a^2}{4}$. **19.** 6 см. **21.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **22.** $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$. **23.** 600 см^2. **24.** 55 см, 48 см. **25.** $\angle C = 90°$. **26.** $\approx 0{,}47$ м^2. **27.** 5,64 м^2. **28.** $\frac{a^2 \sin\alpha \cdot \sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$. **30.** 1) 84; 2) 12; 3) 288; 4) 10; 5) $\frac{2520}{13}$; 6) 1,4. **31.** $\frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. **32.** 1) 24 см; 2) 24 см. **33.** 13,44 см. **34.** 12 см; 11,2 см; $\frac{168}{13}$ см. **35.** 1,344. **36.** 1) 4; 2) 7,2; 3) 4,8; 4) $\frac{5040}{169}$. **37.** 480 см^2. **38.** 408 см^2. **39.** 540 м^2. **43.** 1) $R = \frac{65}{8}$, $r = 4$; 2) $R = \frac{65}{8}$, $r = 1{,}5$; 3) $R = \frac{145}{6}$, $r = \frac{7}{3}$; 4) $R = \frac{35}{4\sqrt{6}}$,

$r=\frac{\sqrt{6}}{2}$. **44.** 4,5 см. **45.** $R=\frac{b^2}{\sqrt{4b^2-a^2}}$, $r=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{2b-a}{2b+a}}$. **46.** $R=\frac{169}{24}$ см, $r=\frac{10}{3}$ см. **47.** У к а з а н н е. Скарыстайце ўласцівасць датычных, якія праведзены з аднаго пункта да акружнасці. **48.** $R=29$ см, $r=12$ см. **50.** 1 : 4. **51.** $\frac{h}{\sqrt{2}}$. **52.** $a^2:b^2$. **53.** $\frac{l^2}{4\pi}$. **54.** 1) 20π см^2; 2) 12π м^2; 3) $\pi(a^2-b^2)$. **55.** 1) У 4 разы; 2) у 25 разоў; 3) у m^2 разоў. **56.** 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$; 3) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. **57.** $\frac{1}{4}$. **58.** 2. **59.** 1) $\frac{\pi R^2}{9}$; 2) $\frac{\pi R^2}{4}$; 3) $\frac{5\pi R^2}{12}$; 4) $\frac{2\pi R^2}{3}$; 5) $\frac{5\pi R^2}{6}$; 6) $\frac{11\pi R^2}{2}$. **60.** 1) $\frac{R^2}{2}$; $\frac{Rl}{2}$. **61.** $a^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. **62.** 1) $(\pi-2)R^2$; 2) $\left(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)R^2$; 3) $\left(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)R^2$.

§ 15.

2. Можна. **8.** У к а з а н н е. Вазьміце пункт у другой плоскасці і правядзіце праз яго і дадзеную прамую плоскасць. Прымяніце да гэтай плоскасці аксіёму паралельных. **12.** Чатыры плоскасці. **14.** У к а з а н н е. Выкарыстайце доказ ад процілеглага.

§ 16.

2. Нельга. **5.** 1) 6 м; 2) 4,2 дм; 3) 6,2 см; 4) $\frac{a+b}{2}$. **6.** 1) 1 м; 2) 0,6 дм; 3) 2,1 см; 4) $\frac{|a-b|}{2}$. **7.** 1) 37,6 см; 2) 9,9 см; 3) 15 см; 4) $c\left(1+\frac{b}{a}\right)$. **8.** 1) 7 м; 2) 2 м; 3) $a+c-b$. **9.** Нельга. **13.** 1) 5 см; 2) 3 см; 3) 8 см; 4) $\frac{bc}{a+c}$. **19.** У к а з а н н е. Гл. задачу 16. **20.** Не заўсёды. У к а з а н н е. Гл. задачу 16. **26.** Рашэння няма, калі пункт ляжыць у плоскасці прамых. **32.** $A_1B_1=a$. **35.** У к а з а н н е. Параўнайце адносіну адрэзкаў дзвюх адвольных прамых: $X_1X_2X_3$ і $Y_1Y_2Y_3$. **38.** Сярэдняй лініяй. **39.** Не можа. **40.** Можа. **41.** У к а з а н н е. Адносіна адрэзкаў захоўваецца. **42.** У к а з а н н е. Праекцыя перпендыкулярнага дыяметра праходзіць праз сярэдзіны хорд, якія паралельныя праекцыі дадзенага дыяметра.

§ 17.

2. У к а з а н н е. Гл. задачу 1. **3.** 1) 6,5 см; 2) 15 см; 3) $\sqrt{a^2-b^2+d^2}$; 4) $\sqrt{a^2-c^2+2d^2}$. **7.** 2 м. **8.** $BD=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, $CD=\sqrt{a^2+c^2}$. **14.** 2,6 м. **15.** $\approx 3{,}9$ м. **16.** 9 м. **17.** $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. **19.** 1 м. **20.** 6,5 м. **21.** $\sqrt{a^2-\frac{b^2}{2}}$. **22.** Акружнасць. **23.** 6 см, 15 см. **24.** 1) 15 см, 41 см; 2) 4 см, 8 см. **25.** 9 см. **27.** 6 м. **28.** 5 м, 3 м. **29.** $\sqrt{a^2+c^2-b^2}$. **31.** $\sqrt{b^2-a^2}$. **32.** $\sqrt{b^2+c^2-a^2}$. **33.** 0,36 м ці 0,44 м. **36.** 1) 4,25 см; 2) 6,75 см; 3) $\frac{a+b}{2}$. **37.** 1) 1,05 см; 2) 0,65 см; 3) $\frac{|a-b|}{2}$. **38.** 0,6 м. **39.** $\frac{am}{m+n}$ (m адпавядае аснове, праз якую праведзена плоскасць). **40.** $\frac{a}{2}$. **41.** Даўжыня перпендыкуляра $\sqrt{2a^2-b^2}$, даўжыня стараны $\sqrt{b^2-a^2}$.

42. $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$, $\sqrt{c^2-a^2}$, $\sqrt{c^2-b^2}$. **43.** $\sqrt{2}$ м. **44.** $2\sqrt{2}$ м. **46.** 2,5 м. **47.** 6 м. **48.** 14 см. **49.** $\sqrt{a^2+b^2}$. **50.** $\sqrt{a^2-\frac{d^2}{8}}$. **51.** $\sqrt{2b^2-a^2}$. **52.** 2,5 м. **53.** $\sqrt{b^2+c^2-\frac{b^4}{a^2}}$. **55.** Указанне. Прамыя, перпендыкулярныя плоскасці, паралельныя. **56.** $\sqrt{23}$ м. **57.** 4 м. **59.** 1) 11 м; 2) 13 м; 3) 8 м; 4) 7 м; 5) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; 6) $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$. **60.** $\sqrt{a^2+b^2}$. **61.** 1,3 м. **62.** 1,7 м.

§ 18.

1. На восі z. **3.** (1; 0; 0), (0; 2; 0), (0; 0; 3); (1; 2; 0), (1; 0; 3), (0; 2; 3). **4.** Адлегласць ад плоскасці xy роўна 3, ад плоскасці xz роўна 2, ад плоскасці yz роўна 1; адлегласці ад восей x, y, z адпаведна роўны $\sqrt{13}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{5}$; адлегласць ад пачатку каардынат роўна $\sqrt{14}$. **6.** (2; 2; 2) і (−2; −2; −2). **7.** $C(0; 0; 0)$. **8.** $x+2y+3z=7$. **12.** $B(0; -1; 3)$. **13.** 1) $D(6; 2; -2)$; 2) $D(0; -2; 2)$; 3) $D(-1; 7; -2)$. **18.** (−1; −2; −3); (0; 1; −2); (−1; 0; 3). **20.** Указанне. Гл. задачу 16. **24.** (−1; −2; 1). **25.** 1), 2), 4) Не існуе; 3) існуе. **30.** 90°. **31.** $\alpha+\beta$ ці $|\alpha-\beta|$. **32.** 40° ці 20°. **36.** 1) $\frac{a}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{a}{2}$; 3) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **37.** 30°. **38.** $a\sqrt{6}$. **39.** $a\sqrt{2}$. **40.** $3a$. **41.** 30°. **44.** 30°. **45.** 13 м; $\sqrt{409}$ м. **46.** 1) $\cos\alpha=\frac{1}{14}$; 2) $\cos\alpha=\frac{2}{21}$. **47.** 3,36 м. **48.** 1) $\frac{3a^2}{8}$; 2) $\frac{a^2\sqrt{6}}{8}$; 3) $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. **49.** 1) $\frac{30}{7}$ м^2 ці 48 м^2; 2) 2,5 м^2 ці $\frac{128}{7}$ м^2. **51.** $D(-2; 3; 0)$. **52.** $D(2; 1; -2)$. **53.** $n=\frac{4}{3}$, $m=\frac{3}{2}$. **55.** 1) $u=\frac{1}{3}$; 2) $n=-1$; 3) $n=2$; 4) $n=4$. **56.** $c=1$. **57.** $\sqrt{|\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2+|\bar{c}|^2+|\bar{a}|\,|\bar{b}|}$. **58.** 1) $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\varphi=90°$. **60.** $\cos C=-\sqrt{\frac{2}{15}}$. **62.** $\cos\varphi=\cos\alpha\cos\beta$. **63.** 60°. **64.** $\cos\varphi=\frac{\cos\beta-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$.

§ 19.

1. 2) 60°. **4.** $\cos\varphi=\frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\alpha}$, $\cos\beta=\frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\gamma}{2}}$. **6.** $n(n-3)$. **9.** Указанне. Скарыстайце тэарэму 17.3. **10.** 144 см^2. **11.** 7,5 см. **12.** 12 см. **13.** $a\sqrt{5}$, $2a$, $2a^2$, $a^2\sqrt{3}$. **14.** $3a^2$. **15.** $\cos x=\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **16.** $\frac{7a^2}{8\cos\alpha}$. **17.** 22 см. **18.** $Q\sqrt{2}$. **19.** 12. **20.** 2 м. **21.** 4 м. **23.** 45 см^2. **24.** 1) $3ab+\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; 2) $4ab+2a^2$; 3) $6ab+3a^2\sqrt{3}$. **25.** $3l^2\sqrt{3}$. **26.** 12 м^2. **29.** 188 м^2. **30.** ≈ 262 см^2. **31.** 10 см^2. **32.** $2a$, $a\sqrt{2}$. **33.** 13 м, 9 м. **34.** 2м^2, 3 м^2. **35.** 1) 3; 2) 7; 3) 11. **36.** $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. **37.** 2 м^2. **38.** 1464 см^2.

39. $2\sqrt{M^2+2Qh^2}$. **40.** $\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}}$, $\sqrt{\frac{a^2+c^2-b^2}{2}}$, $\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}$. **41.** 3 см. **42.** 12 см. **43.** $\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha_2=\operatorname{tg}\alpha_3=\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha$. **44.** $\frac{a\operatorname{tg}\beta}{2}$. **45.** $2\sqrt{3}$ см. **46.** 5 см, 6 см. **47.** 26 м^2. **48.** 540 см^2. **49.** 10 м^2. **53.** $\frac{35}{6}$ см, $\frac{20}{3}$ см, $\frac{15}{2}$ см. **55.** 11 м. **56.** $\frac{3a^2h}{4\sqrt{a^2+3h^2}}$. **57.** 9 см. **58.** $\cos x=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **59.** 1) $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}$; 2) $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{2}}$; 3) $\sqrt{b^2-a^2}$. **60.** 1) $\sqrt{h^2+\frac{a^2}{12}}$; 2) $\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}$; 3) $\sqrt{h^2+\frac{3a^2}{4}}$.

61. 1) $\frac{a\sqrt{3}}{4}\left(a^2+\sqrt{a^2+12h^2}\right)$; 2) $a\left(a+\sqrt{a^2+4h^2}\right)$; 3) $\frac{3a}{2}\left(a\sqrt{3}+\sqrt{3a^2+4h^2}\right)$.

62. $2r\left(r\sqrt{3}+\sqrt{3a^2-r^2}\right)$. **63.** 1,8 м, 4 м. **64.** $3a^2$. **65.** $\frac{Q}{\cos\varphi}$. **66.** $\cos\varphi=\frac{Q}{5}$. **67.** 16 см і 6 см ці 12 см і 8 см. **68.** $\sqrt{2}$ см. **70.** 9 см. **71.** 1 дм. **72.** 6 см. **73.** 2 см. **74.** $\frac{a^2-b^2}{4}$. **75.** $20\sqrt{2}$. **76.** 24 м^2, 30°. **77.** 168 м^2. **78.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+$ $+b^2+(a+b)\sqrt{12h^2+(a-b)^2}$; 2) $a^2+b^2+(a+b)\sqrt{4h^2+(a-b)^2}$; 3) $\frac{2}{3}\left(\sqrt{3}(a^2+b^2)+(a+b)\sqrt{4h^2+3(a-b)^2}\right)$. **82.** 109°28′. Указанне. Дакажыце спачатку, што ў кожнай вяршыні актаэдра зыходзяцца дзве пары перпендыкулярных кантаў. Затым скарыстайце формулу задачы 4.

§ 20.

1. 5 м. **3.** 36 см^2. **4.** 3 дм. **5.** 3 дм. **6.** $\operatorname{tg}x=\frac{1}{2}$. **8.** 10 м. **9.** 5 м. **10.** $\frac{l}{2}$. **11.** R^2. **12.** $2R^2\sin\alpha$. **13.** 500. **14.** $\frac{R^2\operatorname{tg}\alpha}{\cos\varphi}\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\varphi}$, калі $\alpha+\varphi<90°$. **16.** $\frac{H}{\sqrt{2}}$. **17.** $\frac{3l}{4}$. **18.** 3 см. **19.** 5 м. **20.** $R-r$. **21.** a, $2a$. **22.** 30 дм^2. **23.** 9 дм^2. **24.** $\frac{1}{4}\left(\sqrt{M}+\sqrt{m}\right)^2$. **26.** $\frac{HR\sqrt{2}}{H+R\sqrt{2}}$. **27.** $\frac{HR\sqrt{3}}{H+R\sqrt{3}}$. **29.** 16π м^2. **31.** $\frac{\pi R^2}{4}$. **32.** πR. **33.** ≈ 785 км. **34.** 12 см. **35.** 12 см. **36.** 5 см. **37.** $\frac{\pi R^2}{4}$. **40.** 3 см. **41.** 8 см. **42.** $\sqrt{r_1^2+r_2^2}$. **43.** $R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; $\frac{R}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$; $\frac{2R}{\sin\alpha}$. **45.** 4π М. **46.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **49.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **50.** $R=$

$=\frac{a}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}}$, $r=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}}$. **51.** $2R\left(1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$. **52.**

1) $2\sqrt{R^2-\frac{a^2}{3}}$; 2) $2\sqrt{R^2-\frac{a^2}{2}}$; 3) $2\sqrt{R^2-a^2}$. **53.** $\frac{a\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{180°}{n}}$. **54.** $R=$

$=\frac{a}{2\sin 2\alpha\sin\frac{180°}{n}}$.

§ 21.

1. 6 см. **2.** $\approx 8{,}4$ г/см^3. **4.** 25 см. **5.** 1,8 г/см^3. **6.** $\approx 2{,}29$ м. **7.** 30 м. **8.** У два разы. **9.** $\approx 192{,}72$ кг. **12.** 60 см^3. **13.** 3 м^3. **14.** $\sqrt{\frac{MNQ}{2}}$. **15.** $\sqrt{2}$ м^3. **16.** $\frac{a^3}{\sqrt{2}}$. **17.** $2\sqrt{\sin 3\alpha \sin^3\alpha}$. **18.** $abc\sqrt{-\cos 2\alpha}$. **19.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2b$; 2) a^2b; 3) $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2b$. **20.** 0,5 г/см^3. **21.** 3 см^3. **22** $\frac{a^3}{8}$. **23.** 6 м^3. **25.** 3060 м^3. **26.** 6048 м^3/г. **27.** 35 200 м^3. **28.** 48 см^3. **29.** 12 см^3. **30.** 2 см. **31.** $\frac{1}{8}ac\sqrt{12a^2-3c^2}$. **32.** $\frac{h^3\sin\gamma}{2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$. **33.** 1) $\frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2-a^2}$; 2) $\frac{a^2}{6}\sqrt{4b^2-2a^2}$; 3) $\frac{a^2}{2}\sqrt{3(b^2-a^2)}$. **34.** $\frac{3a^3}{4}$. Указанне. Вышыня піраміды роўна радыусу акружнасці, якая ўпісана ў аснову. **35.** $\frac{1}{6}b^3$. **36.** $\frac{a^3}{12\sqrt{2}}$. **37.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **38.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. Указанне. Разбіце актаэдр на дзве правільныя чатырохвугольныя піраміды. **39.** 360 м^3. **40.** 48 см^3. Указанне. Аснова вышыні піраміды супадае з цэнтрам акружнасці, якая апісана каля асновы піраміды. **41.** $\sqrt{11}$ см^3. **42.** $\frac{4}{3}l^3\cos\alpha\cos\beta\sqrt{\sin^2\alpha-\cos^2\beta}$. **43.** $\frac{2}{3}R^3\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\gamma$. **45.** $\frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q}-\sqrt{Q_2}}$. **46.** $\frac{1}{6}(a^3-b^3)\operatorname{tg}\alpha$. Указанне. Скарыстайце формулу задачы 44. **47.** $\frac{1}{24}(a^3-b^3)\operatorname{tg}\alpha$. **49.** $\frac{h}{\sqrt[3]{2}}$.

§ 22.

1. $\approx 0{,}75$ мм. **2.** ≈ 4500 л. **3.** У n разоў; у $\sqrt{n}$ разоў. **4.** 4 : 1. **5.** $\frac{3}{4}\pi a^3$. **6.** ≈ 61 кг. **7.** $\approx 6{,}3$ м^3. **8.** 9π м^3. Указанне. Вышыня конуса роўна радыусу яго асновы. **9.** $\frac{c^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2l^2-c^2}$. **10.** $\frac{1}{3}\pi l^3\sin\alpha\cos^2\alpha$. **11.** $\approx 1{,}6$ т. **12.** $\approx 0{,}35$ м. **13.** $\frac{\pi a^3}{4}$. **14.** $\frac{\pi a^2b^2}{3\sqrt{a^2+b^2}}$. **16.** ≈ 2 %. **17.** $\frac{\pi}{3}|R^3-r^3|$. **18.** $\frac{\pi^2}{3}|R^3-r^3|$. **19.** 14 см. **20.** $1-\left(\frac{r}{R}\right)^3$, калі $r<R$. **21.** ≈ 14 см. **22.** ≈ 39 см. **23.** 167. **24.** $33\frac{1}{3}$ %. Указанне. Дыяметр шара роўны дыяметру цыліндра. **25.** ≈ 2148 см^3. **26.** $\frac{V}{\pi R^2}-\frac{2}{3}R$. **27.** 45π см^3, 243π см^3. **28.** 0,028. **29.** 5 : 16. **30.** 3528π см^3. Указанне. Разбіце ўказаную частку шара на цыліндр і два сегменты. **31.** $112{,}5\pi$ дм^3 ці 450π дм^3. **32.** $\frac{1}{3}\pi R^3(2-\sqrt{3})$. Указанне. Цела з'яўляецца шаравым сектарам. **33.** $\sqrt{m^3}:\sqrt{n^3}$. **34.** Большая паверхня роўнавяліка суме дзвюх другіх. **35.** Указанне. Выразіце абедзве паверхні праз старану квадрата. **36.** 180π см^2. **37.** 512π см^2. **38.** $\approx 40{,}4$ м^2. **39.** ≈ 116 м^2. **40.** 75 см. **41.** $\pi M+2Q$. Указанне. Па плошчы асновы знайдзіце яго радыус. **42.** $\approx 25{,}3$ м^2. **43.** $\approx 33{,}98$ м^2. **44.** $\frac{S}{\cos\alpha}$. Указанне. Па плошчы асновы знайдзіце яго радыус. **45.** 2 : 3. **46.** Выразіце паверхню шара і конуса праз даўжыню ўтваральнай конуса. **47.** 30°. **48.** 1 м. Указанне. Даўжыня акружнасці асновы роўна даўжыні дугі сектара. **49.** $\approx 1{,}04$ м^2. **50.** $\approx 4{,}3$ кг.

ПРАДМЕТНЫ ПАКАЗАЛЬНІК

А

Аб'ём 339
— конуса 354
— нахіленага паралелепіпеда 342
— піраміды 347
— прызмы 344
— прамавугольнага паралелепіпеда 341
— цыліндра 353
— шара 356
— шаравога сегмента 357
— — сектара 357
Аб'ёмы падобных цел 348
Абсцыса 120
Агульны перпендыкуляр прамых, якія скрыжоўваюцца 262
Адлегласць ад пункта да плоскасці 258
— ад пункта да прамой 59
— паміж паралельнымі прамымі 59
— — — плоскасцямі 259
— — прамымі, якія скрыжоўваюцца 262
— — пунктамі 7, 106, 123
Адрэзак 6
Адрэзка дзяленне папалам 72
— канцы 6
Азначэнне 18
Акружнасць 65, 74
— апісаная каля трохвугольніка 66
— упісаная ў трохвугольнік 69
Аксіёмы 18
— паралельных 16
Апафема піраміды 309
— — усечанай 309
Ардыната 121
Аснова перпендыкуляра 27, 258

Б

Бакавая паверхня конуса 322, 358
— — піраміды 309
— — прызмы 297, 300
— — цыліндра 320, 358
Бісектрыса вугла 29
— трохвугольніка 38

В

Вектар 155
— адзінкавы 167
— нулявы 155
Вектара абсалютная велічыня і напрамак 155
— каардынаты 157
Вектары калінеарныя 163
Восі каардынат 120, 270
Вось вярчэння 320, 322, 327, 355
— прамога конуса 322
— сіметрыі 142
— цыліндра 320
Вугал 10
— выпуклага многавугольніка 203
— — — знешні 203
— паміж вектарамі 165
— — плоскасцямі 282
— — прамой і плоскасцю 281
— — прамымі 280
— — прамымі, якія скрыжоўваюцца 280
— востры 25
— плоскі 182

— прамы 25
— разгорнуты 11
— трохвугольніка 14
— — знешні 55
— тупы 25
— цэнтральны 182
— упісаны ў акружнасць 183
Вуглавы каэфіцыент прамой 129
Вуглы вертыкальныя 25
— адпаведныя 52
— дадатковыя (плоскія) 182
— сумежныя 24
— унутраныя накрыж ляжачыя і аднастароннія 50
Вышыня конуса 322
— паралелаграма 218
— піраміды 305
— прызмы 297
— трапецыі 221
— трохвугольніка 38
— цыліндра 320

Г

Гаматэтыя 174
Геаметрычнае месца пунктаў 74
Геаметрыя 3
Гіпатэнуза 57
Градусная мера дугі акружнасці 182
Грань мнагагранніка 296

Д

Датыканне дзвюх акружнасцей 69
Датычная плоскасць конуса 325
— — цыліндра 322
— — шара 329
Датычная прамая да акружнасці 68
— — да шара 329
Даўжыня акружнасці 209
Двухгранны вугал 293
Дзяленне адрэзка папалам 72
Доказ 17
— ад адваротнага 28
Дуга акружнасці 182
Дыяганаль многавугольніка 202
— прызмы 297
— чатырохвугольніка 82
Дыяганальнае сячэнне піраміды 306
— — прызмы 298
Дыяметр акружнасці 66
— шара 327
Дыяметральная плоскасць шара 327
Дэкартавы каардынаты ў прасторы 270
— — на плоскасці 120

К

Каардынаты сярэдзіны адрэзка 122
Канцы адрэзка 6
Катэт 57
Квадрат 88
Конус 322
— прамы 322
— усечаны 324
Конуса восевае сячэнне 323
Косінус вугла 102
Круг 224
— вялікі (акружнасць) 326
Кругавы сегмент 225
— сектар 225
Куб 309

Л

Лінейны вугал двухграннага вугла 293
Ломаная 200
— замкнутая 202
— простая 201

М

Маштаб 174
Медыяна трохвугольніка 38
Мнагаграннік 296
— выпуклы 296
— правільны 309
Мнагаграннікі ўпісаныя і апісаныя 331
Мнагагранны вугал 295
Многавугольнік 202
— апісаны каля акружнасці 204
— выпуклы 203

— плоскі 202
— правільны 204
— упісаны ў акружнасць 204
Множанне вектара на лік 161

Н

Нахіленая 105, 258
Няроўнасць трохвугольніка 106

О

Орт 167

П

Пабудаванне бісектрысы вугла 72
— вугла, роўнага дадзенаму 71
— перпендыкулярнай прамой 73
— трохвугольніка з дадзенымі старанамі 70
Паварот 143
Паверхня цела 332
Паралелаграм 83
Паралелепіпед 301
— прамавугольны 303
Паралельнасць плоскасцей 242
— прамой і плоскасці 241
Паралельны пераност 145
Перасячэнне прамой з акружнасцю 130
Пераўтварэнне падобнасці 173, 279
Пераўтварэнне фігур 137
Перпендыкуляр да плоскасці 258
— да прамой 27
Перпендыкуляра існаванне і адзінасць 58
Перпендыкулярнасць плоскасцей 260
— прамой і плоскасці 253
Піраміда 305
— апісаная каля конуса 325
— правільная 308
— упісаная ў конус 325
— усечаная 307
Планіметрыя 4
Плоскасць 231
Плошча 216
— артаганальнай праекцыі многавугольніка 283
— круга 224
— кругавога сегмента 225
— — сектара 225
— паралелаграма 218
— прамавугольніка 218
— сферы 259
— трапецыі 221
— трохвугольніка 219, 220
Плошчы падобных фігур 223
Правіла паралелаграма 159
— трохвугольніка 159
Праекцыя вектара на вось 161
— нахіленай 105, 258
— прамой на плоскасць 281
Прамавугольнік 86
Прамая 4
Прамень (паўпрамая)
— праходзіць паміж старанамі вугла 11
Прамыя паралельныя 16
— перпендыкулярныя 27
— якія скрыжоўваюцца 239
Прамені дадатковыя 9
Прызма 297
— апісаная каля цыліндра 322
— нахіленая 300
— правільная 300
— прамая 300
— упісаная ў цыліндр 321
Прызнак паралельнасці плоскасцей 242
— — прамой і плоскасці 241
— перпендыкулярнасці плоскасцей 261
— — прамой і плоскасці 254
— роўнасці прамавугольных трохвугольнікаў 57
Прызнакі паралельнасці прамых 49, 51, 240
— падобнасці трохвугольнікаў 176, 177, 179
— роўнасці трохвугольнікаў 32, 35, 40
Пункт 4
— дотыку 68, 329

— ляжыць паміж пунктамі 6
Пункты, сіметрычныя адносна пункта 140
— — — прамой 142

Р

Радыус акружнасці 65
— круга 224
— цыліндра 320
— шара 326
Радыян 211
Рознасць вектараў 159
Ромб 87
Роўнавялікія целы 345
Роўнасць адрэзкаў 14
— трохвугольнікаў 14
— вуглоў 14
— фігур 149
Роўнасць вектараў 156
Рух 137, 277

С

Сіметрыя адносна плоскасці 274
— — прамой 142
— — пункта 140
Сінус вугла 108
Скалярны здабытак вектараў 164
Стэрэаметрыя 231
Сума вектараў 158
Сфера 326
Сярэднія прапарцыянальныя адрэзкі ў прамавугольным трохвугольніку 180
Сярэдняя лінія трапецыі 92
— — трохвугольніка 91

Т

Тангенс вугла 108
Трапецыя 92
— раўнабокая 92
Трохвугольнік 14
— прамавугольны 57
— раўнабедраны 36
— роўнастаронні 36
Трохгранны вугал 294
Тэарэма 17
— аб трох перпендыкулярах 259
— адваротная 37
— косінусаў 191
— сінусаў 193
— Піфагора 103
— Фалеса 89
Тэарэмы ўмова і заключэнне 17
Тэтраэдр 305

У

Уласцівасці вуглоў, упісанных у акружнасць 183, 184
— знешняга вугла трохвугольніка 56
— пар унутраных накрыж ляжачых і ўнутраных аднастаронніх вуглоў 51
— паралельнага пераносу 145, 146, 278
— — праектавання 246
— пераўтварэння падобнасці 176
— перпендыкуляра і нахіленых 105
— руху 138, 139
Уласцівасць вертыкальных вуглоў 26
— дыяганалей паралелаграма 83
— — прамавугольніка 86
— — ромба 87
Уласцівасць даўжыні ломанай 201
— вуглоў паралельных з сякучай 53
— калінеарных вектараў 163
— медыяны ў раўнабедраным трохвугольніку 39
— сярэдняй лініі трапецыі 92
— пасярэдняга перпендыкуляра 74
— — — трохвугольніка 91
Умова перпендыкулярнасці вектараў 166
Ураўненне акружнасці 124
— прамой 125

Ф

Фігура цэнтральна-сіметрычная 141
Фігуры падобныя 175
Формула Герона 220
— для аб'ёму цела вярчэння 355

Х

Хорда акружнасці 66

Ц

Цела 332
— вярчэння 355
Цэнтр акружнасці 65
— гаматэты 174
— круга 224
— сіметрыі 141
— — паралелепіпеда 303
Цыліндр 319

Ч

Чатырохвугольнік 81

Ш

Шар 326
Шаравы сегмент 357
— сектар 357

ЗМЕСТ

7 КЛАС

Планіметрыя

§ 1. Асноўныя ўласцівасці найпрасцейшых геаметрычных фігур. **1.** Геаметрычныя фігуры 3. **2.** Пункт і прамая 4. **3.** Адрэзак 6. **4.** Вымярэнне адрэзкаў 7. **5.** Паўплоскасці 8. **6.** Паўпрамая 9. **7.** Вугал 10. **8.** Адкладванне адрэзкаў і вуглоў 12. **9.** Трохвугольнік 14. **10.** Існаванне трохвугольніка, роўнага дадзенаму 15. **11.** Паралельныя прамыя 16. **12.** Тэарэмы і доказы 17. **13.** Аксіёмы 18. Кантрольныя пытанні 18. Задачы 19.

§ 2. Сумежныя і вертыкальныя вуглы

14. Сумежныя вуглы 24. **15.** Вертыкальныя вуглы 25. **16.** Перпендыкулярныя прамыя 26. **17.** Доказ ад адваротнага 28. **18.** Бісектрыса вугла 29. **19.** Што трэба рабіць, каб добра паспяваць па геаметрыі 29. Кантрольныя пытанні 30. Задачы 30.

§ 3. Прызнакі роўнасці трохвугольнікаў

20. Першы прызнак роўнасці трохвугольнікаў 32. **21.** Выкарыстанне аксіём пры доказе тэарэм 34. **22.** Другі прызнак роўнасці трохвугольнікаў 35. **23.** Раўнабедраны трохвугольнік 36. **24.** Адваротная тэарэма 37. **25.** Вышыня, бісектрыса і медыяна трохвугольніка 38. **26.** Уласцівасць медыяны раўнабедранага трохвугольніка 39. **27.** Трэці прызнак роўнасці трохвугольнікаў 40. **28.** Як рыхтавацца па падручніку самастойна 41. Кантрольныя пытанні 43. Задачы 43.

§ 4. Сума вуглоў трохвугольніка

29. Паралельнасць прамых 49. **30.** Вуглы, утвораныя пры перасячэнні дзвюх прамых сякучай 50. **31.** Прызнак паралельнасці прамых 51. **32.** Уласцівасць вуглоў, утвораных пры перасячэнні паралельных прамых сякучай 53. **33.** Сума вуглоў трохвугольніка 54. **34.** Знешнія вуглы трохвугольніка 55. **35.** Прамавугольны трохвугольнік 57. **36.** Існаванне і адзінасць перпендыкуляра да прамой 58. **37.** З гісторыі ўзнікнення геаметрыі 59. Кантрольныя пытанні 60. Задачы 61.

§ 5. Геаметрычныя пабудаванні

38. Акружнасць 65. **39.** Акружнасць, апісаная каля трохвугольніка 66. **40.** Датычная да акружнасці 68. **41.** Акружнасць, упісаная ў трохвугольнік 69. **42.** Што такое задачы на пабудаванне 70. **43.** Пабудаванне трохвугольніка з дадзенымі старанамі 70. **44.** Пабудаванне вугла, роўнага дадзенаму 71. **45.** Пабудаванне бісектрысы вугла 72. **46.** Дзяленне адрэзка папалам 72. **47.** Пабудаванне перпендыкулярнай прамой 73.

48. Геаметрычнае месца пунктаў 74. **49.** Метад геаметрычных месц 75. Кантрольныя пытанні 76. Задачы 76.

8 КЛАС

§ 6. Чатырохвугольнікі

50. Азначэнне чатырохвугольніка 81. **51.** Паралелаграм 83. **52.** Уласцівасць дыяганалей паралелаграма 83. **53.** Уласцівасць процілеглых старон і вуглоў паралелаграма 85. **54.** Прамавугольнік 86. **55.** Ромб 87. **56.** Квадрат 88. **57.** Тэарэма Фалеса 89. **58.** Сярэдняя лінія трохвугольніка 91. **59.** Трапецыя 92. **60.** Тэарэма аб прапарцыянальных адрэзках 93. **61.** Пабудаванне чацвёртага прапарцыянальнага адрэзка 95. Кантрольныя пытанні 96. Задачы 96.

§ 7. Тэарэма Піфагора

62. Косінус вугла 102. **63.** Тэарэма Піфагора 103. **64.** Егіпецкі трохвугольнік 104. **65.** Перпендыкуляр і нахіленая 105. **66.** Няроўнасць трохвугольніка 106. **67.** Суадносіны паміж старанамі і вугламі ў прамавугольным трохвугольніку 107. **68.** Асноўныя трыганаметрычныя тоеснасці. 109. **69.** Значэнні сінуса, косінуса і тангенса некаторых вуглоў 111. **70.** Змяненне сінуса, косінуса і тангенса пры ўзрастанні вугла 112. Кантрольныя пытанні 113. Задачы 114.

§ 8. Дэкартавы каардынаты на плоскасці

71. Вызначэнне дэкартавых каардынат 120. **72.** Каардынаты сярэдзіны адрэзка 122. **73.** Адлегласць паміж пунктамі 123. **74.** Ураўненне акружнасці 124. **75.** Ураўненне прамой 125. **76.** Каардынаты пункта перасячэння прамых 126. **77.** Размяшчэнне прамой адносна сістэмы каардынат 127. **78.** Вуглавы каэфіцыент ва ўраўненні прамой 128. **79.** Графік лінейнай функцыі 130. **80.** Перасячэнне прамой з акружнасцю 130. **81.** Вызначэнне сінуса, косінуса і тангенса для любога вугла ад 0° да 180°. 132. Кантрольныя пытанні 133. Задачы 134.

§ 9. Рух

82. Пераўтварэнні фігур 137. **83.** Уласцівасці руху 138. **84.** Сіметрыя адносна пункта 140. **85.** Сіметрыя адносна прамой 141. **86.** Паварот 143. **87.** Паралельны пераносі яго ўласцівасці 144. **88.** Існаванне і адзінасць паралельнага пераносу 147. **89.** Сунакіраванасць паўпрамых 148. **90.** Роўнасць фігур 149. Кантрольныя пытанні 151. Задачы 152.

§ 10. Вектары

91. Абсалютная велічыня і напрамак вектара 155. **92.** Роўнасць вектараў 156. **93.** Каардынаты вектара 157. **94.** Складанне вектараў 158. **95.** Складанне сіл 160. **96.** Множанне вектара на лік 161. **97.** Раскладанне вектара па двух некалінеарных вектарах 163. **98.** Скалярны здабытак вектараў 164. **99.** Раскладанне вектара па каардынатных восях 167. Кантрольныя пытанні 167. Задачы 169.

9 КЛАС

§ 11. Падобнасць фігур

100. Пераўтварэнне падобнасці 173. **101.** Уласцівасці пераўтварэння падобнасці 175. **102.** Падобнасць фігур 175. **103.** Прызнак падобнасці

трохвугольнікаў па двух вуглах 176. **104.** Прызнак падобнасці трохвугольнікаў па дзвюх старанах і вуглу паміж імі 177. **105.** Прызнак падобнасці трохвугольнікаў па трох старанах 179. **106.** Падобнасць прамавугольных трохвугольнікаў 180. **107.** Вуглы, упісаныя ў акружнасць 182. **108.** Прапарцыянальнасць адрэзкаў хорд і сякучых акружнасці 184. Кантрольныя пытанні 185. Задачы 186.

§ 12. Рашэнне трохвугольнікаў

109. Тэарэма косінусаў 191. **110.** Тэарэма сінусаў 193. **111.** Суадносіна паміж вугламі трохвугольніка і процілеглымі старанамі 195. **112.** Рашэнне трохвугольнікаў 196. Кантрольныя пытанні 197. Задачы 198.

§ 13. Многавугольнікі

113. Ломаная 200. **114.** Выпуклыя многавугольнікі 202. **115.** Правільныя многавугольнікі 204. **116.** Формулы для радыусаў упісаных і апісаных акружнасцей правільных многавугольнікаў 205. **117.** Пабудаванне некаторых правільных многавугольнікаў 206. **118.** Падобнасць правільных выпуклых многавугольнікаў 207. **119.** Даўжыня акружнасці 209. **120.** Радыянная мера вугла 210. Кантрольныя пытанні 211. Задачы 212.

§ 14. Плошчы фігур

121. Паняцце плошчы 215. **122.** Плошча прамавугольніка 216. **123.** Плошча паралелаграма 218. **124.** Плошча трохвугольніка 219. **125.** Формула Герона для плошчы трохвугольніка 220. **126.** Плошча трапецыі 221. **127.** Формулы для радыусаў упісанай і апісанай акружнасцей трохвугольніка 222. **128.** Плошчы падобных фігур 222. **129.** Плошча круга 223. Кантрольныя пытанні 226. Задачы 226.

10 КЛАС

Стэрэаметрыя

§ 15. Аксіёмы стэрэаметрыі і іх найпрасцейшыя вынікі

130. Аксіёмы стэрэаметрыі 231. **131.** Існаванне плоскасці, якая праходзіць праз дадзеную прамую і дадзены пункт 233. **132.** Перасячэнне прамой з плоскасцю 234. **133.** Існаванне плоскасці, якая праходзіць праз тры дадзеныя пункты 235. **134.** Заўвага да аксіёмы I 236. **135.** Разбіўка прасторы плоскасцю на дзве паўпрасторы 236. Кантрольныя пытанні 237. Задачы 237.

§ 16. Паралельнасць прамых і плоскасцей

136. Паралельныя прамыя ў прасторы 239. **137.** Прызнак паралельнасці прамых 240. **138.** Прызнак паралельнасці прамой і плоскасці 241. **139.** Прызнак паралельнасці плоскасцей 242. **140.** Існаванне плоскасці, паралельнай дадзенай плоскасці 243. **141.** Уласцівасці паралельных плоскасцей 244. **142.** Паказ прасторавых фігур на плоскасці 245. Кантрольныя пытанні 247. Задачы 247.

§ 17. Перпендыкулярнасць прамых і плоскасцей

143. Перпендыкулярнасць прамых у прасторы 252. **144.** Прызнак перпендыкулярнасці прамой і плоскасці 253. **145.** Пабудаванне перпендыкулярных прамой і плоскасці 255. **146.** Уласцівасці перпендыкулярных прамой і плоскасці 256. **147.** Перпендыкуляр і нахіленая 258. **148.** Тэа-

рэма аб трох перпендыкулярах 259. **149.** Прызнак перпендыкулярнасці плоскасцей 260. **150.** Адлегласць паміж прамымі, якія скрыжоўваюцца 262. **151.** Прымяненне артаганальнага праектавання ў тэхнічным чарчэнні 262. Кантрольныя пытанні 263. Задачы 264.

§ 18. Дэкартавы каардынаты і вектары ў прасторы

152. Увядзенне дэкартавых каардынат у прасторы 270. **153.** Адлегласць паміж пунктамі ў дэкартавых каардынатах 271. **154.** Каардынаты сярэдзіны адрэзка 272. **155.** Пераўтварэнне сіметрыі ў прасторы 273. **156.** Сіметрыя ў прыродзе і на практыцы 274. **157.** Рух у прасторы 277. **158.** Паралельны перанос у прасторы 278. **159.** Падобнасць прасторавых фігур 279. **160.** Вугал паміж прамымі, якія скрыжоўваюцца 280. **161.** Вугал паміж прамой і плоскасцю 281. **162.** Вугал паміж плоскасцямі 282. **163.** Плошча артаганальнай праекцыі многавугольніка 283. **164.** Вектары ў прасторы 285. **165.** Дзеянні над вектарамі ў прасторы 285. Кантрольныя пытанні 286. Задачы 287.

11 КЛАС

§ 19. Мнагаграннікі

166. Двухгранны вугал 293. **167.** Трохгранны і мнагагранны вуглы 294. **168.** Мнагаграннік 296. **169.** Прызма 297. **170.** Паказ прызмы і пабудаванне яе сячэнняў 298. **171.** Прамая прызма 300. **172.** Паралелепіпед 301. **173.** Цэнтральная сіметрыя паралелепіпеда 303. **174.** Прамавугольны паралелепіпед 303. **175.** Сіметрыя прамавугольнага паралелепіпеда 304. **176.** Піраміда 305. **177.** Пабудаванне піраміды і яе плоскіх сячэнняў 306. **178.** Усечаная піраміда 307. **179.** Правільная піраміда 308. **180.** Правільныя мнагаграннікі 309. Кантрольныя пытанні 311. Задачы 312.

§ 20. Целы вярчэння

181. Цыліндр 319. **182.** Сячэнні цыліндра плоскасцямі 320. **183.** Упісаная і апісаная прызмы 321. **184.** Конус 322. **185.** Сячэнні конуса плоскасцямі 323. **186.** Упісаная і апісаная піраміды 325. **187.** Шар 326. **188.** Сячэнне шара плоскасцю 327. **189.** Сіметрыя шара 328. **190.** Датычная плоскасць да шара 329. **191.** Перасячэнне дзвюх сфер 330. **192.** Упісаныя і апісаныя мнагаграннікі 331. **193.** Аб паняцці цела і яго паверхні ў геаметрыі 332. Кантрольныя пытанні 333. Задачы 334.

§ 21. Аб'ёмы мнагаграннікаў

194. Паняцце аб'ёму 339. **195.** Аб'ём прамавугольнага паралелепіпеда 340. **196.** Аб'ём нахіленага паралелепіпеда 341. **197.** Аб'ём прызмы 343. **198.** Роўнавялікія целы 345. **199.** Аб'ём піраміды 346. **200.** Аб'ём усечанай піраміды 347. **201.** Аб'ёмы падобных цел 348. Кантрольныя пытанні 349. Задачы 349.

§ 22. Аб'ёмы і паверхні цел вярчэння

202. Аб'ём цыліндра 353. **203.** Аб'ём конуса 354. **204.** Аб'ём усечанага конуса 354. **205.** Агульная формула для аб'ёмаў цел вярчэння 355. **206.** Аб'ём шара 356. **207.** Аб'ём шаравога сегмента і сектара 357. **208.** Плошча бакавой паверхні цыліндра 358. **209.** Плошча бакавой паверхні конуса 358. **210.** Плошча сферы 359. Кантрольныя пытанні 360. Задачы 360. Адказы і ўказанні да задач 364. Прадметны паказальнік 375.

Вучэбнае выданне

ПАГАРЭЛАЎ Аляксей Васільевіч

ГЕАМЕТРЫЯ

Падручнік для 7—11 класаў
сярэдняй школы

Загадчык рэдакцыі *Л. І. Мінько*
Рэдактар *Л. М. Ясніцкая*
Вокладка мастака *С. М. Пчалінцава*
Мастацкі рэдактар *Л. У. Паўленка*
Тэхнічны рэдактар *М. І. Чаплавоцкая*
Карэктары *Р. С. Ахрэмчык, І. С. Яромчык*

Падпісана ў друк з дыяпазітываў 03.11.94. Фармат 60×90 1/16. Папера кніжна-часопісная. Гарнітура школьная. Афсетны друк. Умоўн. друк. арк. 24+0,25 форз. Умоўн. фарба-адбіт. 49. Ул.-выд. арк. 19,83+0,42 форз. Тыраж 64 100 экз. Заказ 1432.

Выдавецтва «Народная асвета» Міністэрства культуры і друку Рэспублікі Беларусь. Ліцэнзія ЛВ № 4. 220600, Мінск, праспект Машэрава, 11.

Мінскі ордэна Працоўнага Чырвонага Сцяга паліграфкамбінат МВПА імя Я. Коласа. 220005, Мінск, Чырвоная, 23.

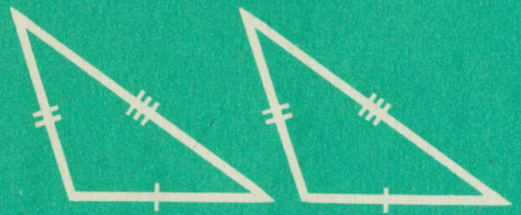
ПРЫЗНАКІ РОЎНАСЦІ ТРОХВУГОЛЬНІКАЎ



1. ПА ДЗВЮХ СТАРАНАХ І ВУГЛУ ПАМІЖ ІМІ

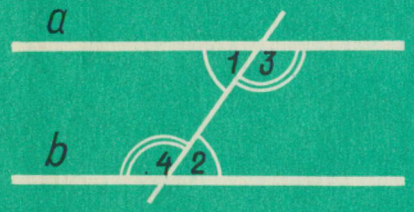


2. ПА СТАРАНЕ І ПРЫЛЕГЛЫХ ДА ЯЕ ВУГЛАХ



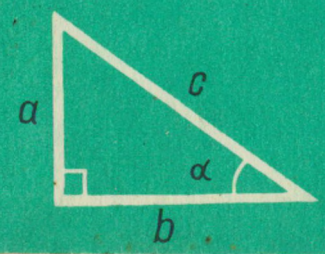
3. ПА ТРОХ СТАРАНАХ

ПРЫЗНАКІ ПАРАЛЕЛЬНАСЦІ ПРАМЫХ



$a \parallel b$, калі
$\angle 1 = \angle 2$ ($\angle 3 = \angle 4$)
ці
$\angle 1 + \angle 4 = 180°$
($\angle 2 + \angle 3 = 180°$)

СУАДНОСІНЫ Ў ПРАМАВУГОЛЬНЫМ ТРОХВУГОЛЬНІКУ



$a^2 + b^2 = c^2$ (ТЭАРЭМА ПІФАГОРА)

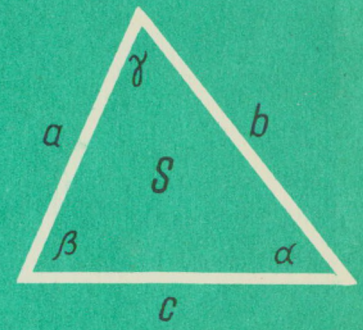
$a = c \sin \alpha$, $b = c \cos \alpha$, $a = b \operatorname{tg} \alpha$

СУАДНОСІНЫ Ў АДВОЛЬНЫМ ТРОХВУГОЛЬНІКУ

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

(ТЭАРЭМА СІНУСАЎ)



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$

(ТЭАРЭМА КОСІНУСАЎ)

$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, дзе $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$

(ФОРМУЛА ГЕРОНА)

РАДЫУС АПІСАНАЙ АКРУЖНАСЦІ $R = \frac{abc}{4S}$

РАДЫУС УПІСАНАЙ АКРУЖНАСЦІ $r = \frac{2S}{a+b+c}$

ЗНАЧЭННІ СІНУСА, КОСІНУСА І ТАНГЕНСА НЕКАТОРЫХ ВУГЛОЎ

функцыі	вуглы					
	0°	30°	45°	60°	90°	180°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	−1
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	0

(1995) ГЕАМЕТРЫЯ 7·11