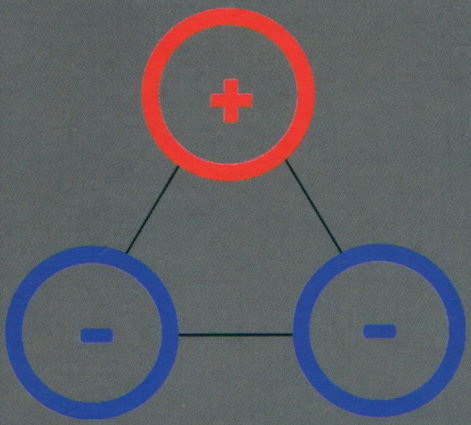
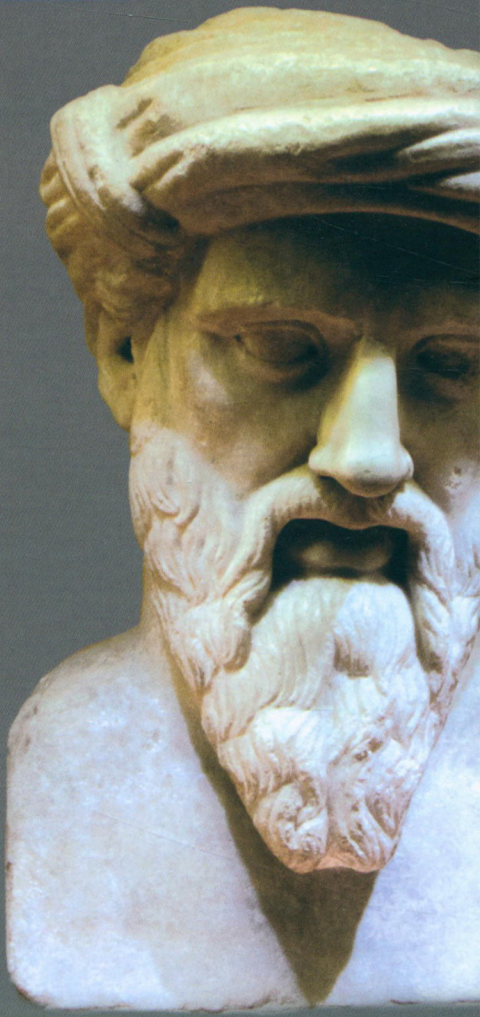
Міхась Булавацкі

Лікі ў нашым жыцці





Кніга –
для настаўнікаў матэматыкі,
для рэпетытараў,
для бацькоў, у каго дзеці да 9 класа,
для цікаўных школьнікаў,
для ўсіх, хто цікавіцца матэматыкай

ЛІКІ
ў нашым
жыцці

Міхась Булавацкі

ЛІКІ ў нашым жыцці

Мінск
“Тэхналогія”
2024

УДК 51
ББК 22.1
Б90

Булавацкі, М. П.

Б90 Лікі ў нашым жыцці / Міхась Булавацкі. – Мінск : Тэхналогія, 2024. – 95 с. : іл.

ISBN 978-985-458-371-6.

У кнізе цікава апавядаецца пра лікавыя множствы. Аўтар багата скарыстоўвае беларускі фальклор, згадвае сімволіку розных краін, паказвае асаблівасці вылічэнняў, пачынаючы ад табліцы множання, і карысныя прыёмы запамінання інфармацыі. Ён знаёміць чытача з новымі ідэямі ў навучанні матэматыцы, з метадычнымі знаходкамі беларускіх настаўнікаў, студэнтаў і нават школьнікаў пры вывучэнні аперацый з рацыянальнымі лікамі і алгебраічнымі выразамі.

Для актыўных настаўнікаў матэматыкі, рэпетытараў і цікаўных школьнікаў, а таксама бацькоў, у каго дзеці да 9-га класа, і ўсіх маладых людзей, зацікаўленых у падвышэнні свайго інтэлектуальнага ўзроўню.

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-985-458-371-6

© Булавацкі М. П., 2024
© Афармленне. НВК "Тэхналогія", 2024

ЗМЕСТ

1. Натуральныя лікі 8
Складанне, множанне натуральных лікаў 27
2. Цэлыя лікі 35
Складанне цэлых лікаў 35
Множанне, дзяленне цэлых лікаў. Схема Гайкова–Крысіна 37
3. Рацыянальныя лікі 44
Складанне звычайных дробаў. Варыянт Мікалая Ламазы 45
Узаемна адваротныя аперацыі 47
4. Рэчаісныя лікі 49
Акругленне лікаў 49
Перыядычныя дробы 50
Ірацыянальныя лікі 52
5. Уяўныя лікі. Камплексныя лікі 60
Стандартны выгляд ліку 61
Развагі для нематэматыкаў 62
Дадатак 1. Задачка з тэорыі імавернасцяў 65
Дадатак 2. Навучанне матэматыцы буйнымі блокамі
(на прыкладзе тэмы “Прагрэсіі”) 67
Прыклады выкарыстання прагрэсій 88

Навука хаця й намучыць,
ды жыць навучыць
(народная прымаўка)

Уменне вылічваць не менш важнае, чым уменне пісаць і чытаць, яно прыйшло да чалавека гістарычна раней. Здавалася б, з прагрэсам гэтае ўменне будзе шліфавацца, удасканальвацца. Але сёння назіраецца адваротнае: не такая ўжо рэдкая з'ява, калі шасцікласнік, каб памножыць 17 на 10, націскае кнопкі калькулятара. І не тое, каб ён не ўмеў сам перамножыць гэтыя лікі, але робіць гэта "на аўтамаце", ён проста не верыць у свае магчымасці вусна перамнажаць двухзнакавыя лікі і, бачачы там па два знакі, бярэцца за калькулятар.

Чалавек перадае адну за адной свае функцыі машынам, і сам страчвае ўменні, раней уласцівыя толькі яму. Адбяры ў яго машыну – і ён становіцца бездапаможным. Але чалавек прыдумляе ўсё новыя машыны, якім зможа перадаць астатнія свае функцыі. І вось ужо прыцэльваецца стварыць машыну, якая ўмее думаць. З жахам уяўляю: а раптам у яго гэта атрымаецца?!

А пакуль такой машыны няма, трэба вучыць думаць чалавека. І тут матэматыка ў авангардзе працэсу. Пачынаць навучанне матэматыцы сёння, як і раней, трэба з навучання вылічэнням: натуральныя лікі – складанне, адыманне; цэлыя лікі – множанне, дзяленне; рацыянальныя лікі – дзеянні з дробамі...

Этымалогія слова "лік" даволі багатая. У ніжнялужыцкай мове "лічы́ць" азначала "рабіць яўным". Яно і сапраўды – вылічэнні робяць яўнымі суадносіны велічынь.

Вось двое чабаноў пасвяць авечак. У аднаго атара белых авечак, у другога – чорных. І паспрачаліся, у каго авечак болей. А лічыць не ўмеюць. Што рабіць? Выйсце знайшлося. Заганяюць у кашару адну белую авечку і адну чорную, потым яшчэ адну белую і адну чорную... І так заганялі па адной, пакуль усе авечкі аднаго чабана

не апынуліся ў кашары, тым часам як у другога яшчэ некалькі авечак засталіся на волі. Атары вялікія, і змарнавалі яны на спрэчку ўвесь дзень. І самі стаміліся, і авечкі галоднымі засталіся. А калі б умелі лічыць, то спрэчка скончылася б нашмат хутчэй.

"Не спрачаймася, лепш вылічым ісціну", – раіў нямецкі матэматык Готфрыд Вільгельм Ляйбніц яшчэ ў XVII стагоддзі.

Дык пачнем жа знаёмства з лікамі, якія суіснуюць побач з намі.

1. НАТУРАЛЬНЫЯ ЛІКІ

Пра натуральныя лікі варта расказваць з павагай да іх, згадваючы прыклады навакольнага асяроддзя і шмат прыказак-прымавак.

Нямецкі матэматык Леапольд Кронэкер так выказаў сваю павагу да гэтых лікаў: “Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk” (“Натуральныя лікі стварыў Бог, усе астатнія – справа чалавека”).

Натуральны лік – панятак неазначальны (тое, паводле Кронэкера, ад Бога). Мы карыстаемся натуральнымі лікамі ў падліку нейкіх рэчаў, напрыклад, кніг на палічцы ці алоўкаў у скрынцы.

І пачынаем з **ліку 1**. Гэта галоўны лік (кароль) Каралеўства натуральных лікаў, хаця ён самы маленькі з іх. З гэтай прычыны ён абазначаецца самым простым знакам (вертыкальнай рыскай) і прыходзіць да маленькага чалавека першым.

Пра **1** маем шмат выслоўяў і прыродных сведчанняў:

адно сонца зямлю грэе; адна галава ў чалавека;
адзін хвост у сабакі;
адно дрэва – не лес;
адна пчала мёду не наносіць;
адной рукой вузла не завяжаш;
адзін у полі не ваяр (але, здараецца, *і адзін у полі ваяр*);
з адной кветкі вянка не спляцеш;
адзін шпак вясны не робіць;
з аднаго гнязда птушкі, з аднаго балота чэрці;
праз аднаго барана ўвесь статак паганы;
адным арэхам падзеліцца (пра шчодрага чалавека).

У музыцы: сола (з лаціны *solus* – адзін) – выкананне музычнага твора ці яго тэматычнай часткі адным голасам або адным інструментам.

Наступны **лік 2** = 1 + 1 (пáра). Пра лік 2 таксама шмат і выслоўяў, і сведчанняў прыроды:

у птушкі два крылы; у ракі два берагі;
у чалавека дзве рукі, дзве нагі, два вокі, два вухі;
двое глядзяць, двое слухаюць, а адзін кажа
(загадка пра чалавека);
двум мядзведзям у адной бярлозе не ўжыцца;
хто два зайцы гоніць – ніводнага не здагоніць (аналагі: *сядзець на двух крэслах; служыць двум гаспадарам*);
скупы двойчы плоціць, а дурань двойчы ходзіць;
за аднаго бітага двух нябітых даюць;
не рабі другому, што не люба самому;
адна галава добра, а дзве лепей;
адно вока бачыць далёка, а два – яшчэ далей;
пасмяяўся гаршчок з катла – абодва чорныя;
сябруюць як два каты ў меху;
падобныя як дзве кроплі вады;
між двух агнёў (так кажуць пра цяжкое, амаль безвыходнае становішча).

Сям'ю ствараюць два чалавекі – мужчына і жанчына.



Інь і ян – ключавыя паняткі даоскай філасофіі, што сімвалізуюць дзве супрацьлегласці, якія непарыўна звязаныя і дапаўняюць адна адну (цемра – святло, вада – агонь, адмоўнае – дадатнае, пасіўнае – актыўнае, жаночае – мужчынскае, мяккае – цвёрдае, ніжняе – верхняе...).

Дуэт – ансамбль з двух выканаўцаў.

Нярэдкі сінонім "пáры" – "дубль" (ад лацінскага *duplex* – падвойны). Калі футбольная каманда выйграе і чэмпіянат, і кубак краіны, то кажуць: "Яна зрабіла залаты дубль".

Дублікат – другі асобнік нейкага дакумента.

Лацінскае *bis* (двойчы) выгукваюць на канцэртах, калі просяць паўтарыць песню, якая спадабалася. Адсюль і прыстаўка "bi-" (біятлон – лыжнае двухборства; у матэматыцы біном – двухсклад,

напрыклад, А + В; білінгвізм, або двухмоўе – папераменнае карыстанне дзвюма мовамі; бінарная аперацыя – нейкая аперацыя з двума элементамі, напрыклад, множанне).

Здабытак двух аднолькавых множнікаў называюць квадратам ліку (36 = 6 × 6, таму 36 ёсць квадрат ліку 6).

Двухгаловыя арлы сустракаюцца на гербах розных краін, напрыклад, Албаніі, Расійскай Федэрацыі, Сербіі, Чарнагорыі. Раней такія істоты былі на гербах некаторых іншых еўрапейскіх краін (напрыклад, Аўстрыі), але ад іх паступова адмаўляюцца.

Ямб і харэй – варыянты двухскладовай рытмікі ў вершах.

Далей – **лік 3** = 1 + 1 + 1. Лік **3** асвечаны Бібліяй ("Святая Тройца").

І тут шмат выслоўяў:

заблукаць у трох соснах (заблытацца ў нечым зусім простым);
дзе двое б'юцца, там трэці карыстаецца;
на рабоце "вой" ды "вох", а за сталом адзін за трох;
уваткнуць свае тры грошы (рэпліка да чыёйсьці прамовы).

Квартал – гэта тры месяцы, чацвертая частка года.

Трыё – ансамбль з трох выканаўцаў.

Народная задача-загадка: два сыны, два бацькі і дзядуля з унукам – колькі ўсіх? Адказ: 3.

"Тры дарожанькі" – знакамітая песня на словы Янкі Купалы. Яе варта б ведаць кожнаму беларусу.



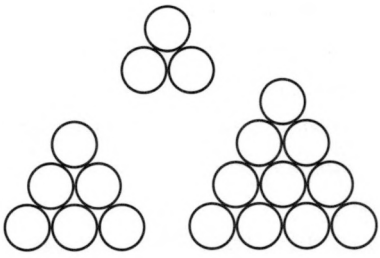
Тры – найменшая колькасць старон многавугольніка. Трохвугольнік, у адрозненне ад іншых многавугольнікаў, фігура жорсткая, г. зн. нельга змяніць вуглы, не змяняючы старон. Менавіта таму трохвугольнік часта скарыстоўваюць, напрыклад, пры будаўніцтве мастоў для большай іх трываласці.

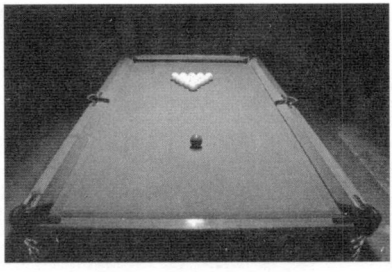
Здабытак трох аднолькавых множнікаў называюць кубам ліку (8 = 2 × 2 × 2, таму 8 ёсць куб ліку 2).

Даўжыня, шырыня і вышыня – вымярэнні трохмернай прасторы, у якой мы існуем. Двухмерная прастора – плоскасць, там размяш-

чаюцца фігуры, што маюць толькі даўжыню і шырыню. Аднамерная прастора – простая лінія, на якой можна змясціць фігуры, што характарызуюцца толькі даўжынёй.

Лік 3 – другі з трохкутных лікаў (першым быў лік 1, наступнымі будуць 6, 10, 15, 21... – г. зн. колькі кружочкаў можна размясціць у выглядзе правільнага трохвугольніка):





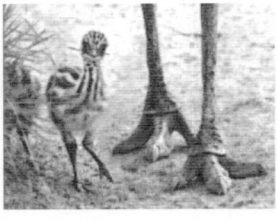
Більярдная піраміда – правільны трохвугольнік з 15 шароў (15 – пяты трохкутны лік, і на кожным баку піраміды – 5 шароў)

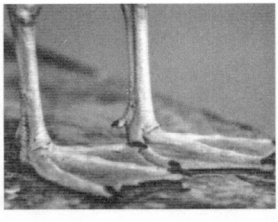
Чарговы трохкутны лік можна вызначыць з формулы $T_n = 0,5 \times \times n \times (n + 1)$, атрыманай па формуле сумы арыфметычнай прагрэсіі. Напрыклад, сямнаццаты трохкутны лік $T_{17} = 0,5 \times 17 \times (17 + 1) = 153$ (на кожным баку такога трохвугольніка будзе па 17 кружочкаў; цікавая задача: а колькі кружочкаў пасярэдзіне, не на краях?).

Дактыль, амфібрахій, анапест – варыянты трохскладовай рытмікі ў вершах.

На лапах птушак наперадзе звычайна тры кіпцюрастыя пальцы і адзін, менш развіты, ззаду.







Сцягі многіх краін маюць тры паласы. Напрыклад, у Еўропе трохпалосныя сцягі ў Аўстрыі, Балгарыі, Бельгіі, Венгрыі, Германіі,

Ірландыі, Іспаніі, Італіі, Латвіі, Літвы, Люксембурга, Малдовы, Нідэрландаў, Партугаліі, Расійскай Федэрацыі, Румыніі, Сербіі, Славакіі, Славеніі, Францыі, Харватыі, Эстоніі. Калі колеры палос розныя, то сцяг называюць трыкалорам.

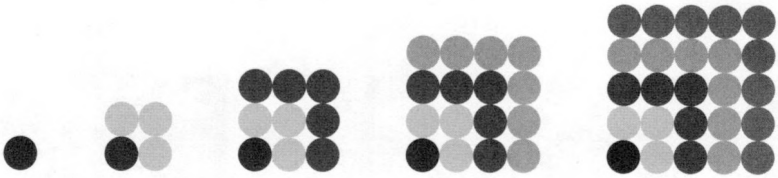
Лік 4 таксама прыкметны і ў прыродзе, і ў выслоўях:

чатыры пары году: зіма, вясна, лета, восень;
чатыры бакі свету – усход, поўнач, захад, поўдзень;
ісці на чатыры бакі (гэта значыць: абы-куды);
чатыры фазы месяца (квадры) – маладзік, поўня, сход, ветах;
конь на чатырох нагах, і той спатыкаецца
(маўляў, не заракайся ад памылкі);
падкаваць на ўсе чатыры нагі (г. зн. добра падрыхтаваць нешта);
сядзець у чатырох сценах (быць ізаляваным ад людзей);
пад адным дахам чатыры браты стаяць (загадка пра стол);
хто раніцай ходзіць на чатырох, днём на двух,
а вечарам на трох? (загадка пра чалавека).

Квартэт – ансамбль з чатырох выканаўцаў.

Квадрат – правільны чатырохвугольнік.

4 – другі з квадратных лікаў, першым быў лік 1, далей будуць 9, 16, 25... (столькі аднолькавых кружочкаў можна размясціць у выглядзе правільнага чатырохвугольніка – квадрата).



Цікава заўважыць, што квадратныя лікі атрымліваюцца складаннем суседніх трохкутных лікаў (1 + 3 = 4; 3 + 6 = 9; 6 + 10 = 16 і г. д.), а таксама складаннем паслядоўных няцотных лікаў, пачынаючы з 1 (1 + 3 = 4; 1 + 3 + 5 = 9; 1 + 3 + 5 + 7 = 16; 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25...). Чаму так будзе заўсёды? – Няхай гэта пакуль застанецца загадкай.

4 – самая малая колькасць граняў мнагагранніка.

З часоў Галена вызначаюць 4 віды тэмпераменту чалавека: халерык, флегматык, сангвінік, меланхолік.

Чатырохканцовы крыж, крыж распяцця – адзін з найбольш старажытных сімвалаў хрысціянства. Ён актыўна выкарыстоўваецца ў каталіцкай рэлігіі, менш выкарыстоўваецца праваслаўнай царквой, але чатырохканцовымі крыжамі пазначаны купалы ўсіх сафійскіх сабораў.



Сафійскі сабор у Полацку

Чатырохканцовыя крыжы ёсць на гербах некаторых краін (Грэцыя, Швайцарыя...).



Чатырохканцовая зорка як сімвал святла, якое паказвае шлях праз начны змрок, – форма, звязаная з крыжам Хрыста, таму выкарыстоўваецца рознымі хрысціянскімі арганізацыямі, якія падкрэсліваюць гэтым, што абіраюць правільны шлях.

Квадрацыкл – чатырохколавы матацыкл, прызначаны для руху па бездарожжы.

Рубаі – чатырохрадковы верш пераважна медытацыйнага ці філасофскага характару з рыфмоўкай ААБА (яркі прадстаўнік такога жанру – Амар Хаям, XI–XII стст.). Надзвычай пашыраны ў цюркамоўнай і персідскамоўнай паэзіі, адкуль прыйшоў і ў паэзію ўсходніх славян.

І ўрэшце, як сведчыць народнае выслоўе, “тры сцяны ў хаце трымае маці, чацвёртая бацькам падпёртая”.

Лік 5 увогуле вельмі блізкі чалавеку: на кожнай руцэ і на кожнай назе па пяць пальцаў.

Ведаць як свае пяць пальцаў (г. зн. ведаць дасканала).

Варона з куста, а пяць на куст.

Пятае кола ў возе (пра нешта непатрэбнае).

Яшчэ пра тое самае: *патрэбен як сабаку пятая нага.*

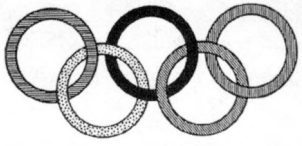
Квінтэт – ансамбль з пяці выканаўцаў.

У баскетбол гуляюць каманды па пяць гульцоў.

Выкарыстоўваецца павелічальная прыстаўка *пента-* ад грэцкага *πέντε* – пяць: напрыклад, пентатлон – пяціборства; у Беларусі, асабліва ў Магілёве, вядомае інтэлектуальнае спаборніцтва пад назвай "Беларускае пяціборства" ("Belarusian pentathlon").

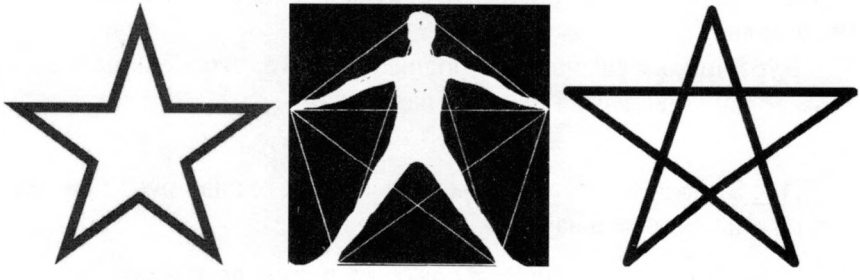
Пентагон – правільны пяцівугольнік. Пентагонам называюць штаб-кватэру міністэрства абароны ЗША, размешчаную ў будынку, які мае форму правільнага пяцівугольніка.

Лічыцца, што ў людзей 5 пачуццяў – зрок, слых, нюх, смак і дотык.



Эмблема алімпійскіх гульняў – 5 злучаных паміж сабой каляровых кольцаў, якія сімвалізуюць 5 заселеных людзьмі кантынентаў: Еўропы – сіняе кольца, Азіі – жоўтае, Афрыкі – чорнае, Аўстраліі з Акіяніяй – зялёнае, Амерыкі – чырвонае (праўда, тое, якому кантыненту адпавядае якое кольца, неафіцыйна вызначана не П'ерам дэ Кубэртэнам, заснавальнікам сучасных алімпійскіх гульняў, а нашмат пазней).

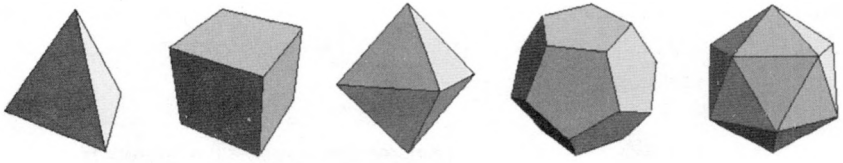
Пяціканцовая зорка (як сімвал чалавека) – папулярны геральдычны знак розных краін. Гэтая пентаграма прысутнічае на гербах Італіі, Кітая, Мазамбіка, Сінгапура, Эфіопіі ды іншых дзяржаваў, ёсць на сцягу ЗША (колькасць зорак адпавядае колькасці штатаў) і на сцягу Еўропы.



Правільная пяціканцовая зорка, намаляваная адным росчыркам, падзяляецца пяццю адрэзкамі на 6 фігур – правільны пяцівугольнік

пасярэдзіне і 5 “залатых” трохвугольнікаў (пра “залатое сячэнне” і звязаныя з ім “залатыя” фігуры размова будзе далей).

Існуе толькі 5 відаў правільных мнагаграннікаў, Платонавых целаў (так называюць выпуклыя мнагагранні, усе грані якіх – аднолькавыя правільныя мнагавугольнікі, і ў кожнай вяршыні сутыкаецца роўная колькасць кантаў): тэтраэдр (чатырохгранніk), гексаэдр, ён жа куб (шасцігранніk), актаэдр (васьмігранніk), дадэкаэдр (дванаццацігранніk), ікасаэдр (дваццацігранніk).



Танка – 5-радковы жанр японскай паэзіі. 31 склад: 5-7-5-7-7.
Хайку (хоку) – трохрадковы (5-7-5) жанр японскай паэзіі.

Лік 6 упадабалі ў старажытным Вавілоне (чаму? – сёння ўжо ў вавілонцаў не запытаешся), ад яго – 60 (6 разоў па 10) і 360 (6 разоў па 60). Пра гэтыя лікі пазней.

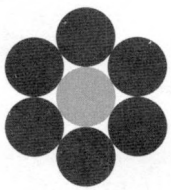
Выслоўе знайшлося адно: *дзе кухараў 6, там няма чаго есць.*

У розных жукоў, мух, пчол ды іншых вусякоў па шэсць ног.

6 – трэці трохкутны лік і першы дасканалы лік (дасканалым у школе Піфагора называлі лік, сума ўласных дзельнікаў якога роўная самому ліку; уласныя дзельнікі – усе дзельнікі, не роўныя самому ліку): $6 = 1 + 2 + 3$ (дарэчы, досыць дзіўная роўнасць $1 + 2 + 3 = 1 \times 2 \times 3$; паспрабуйце знайсці такое для іншых трох цэлых лікаў; хто шукае, той знаходзіць).

Наступным дасканалым лікам будзе $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

6 роўных кружочкаў дакладна запаўняюць прастору вакол кружочка такога ж памеру, з чаго відаць, што лікі 6 і 7 даволі цесна звязаныя.



Гітара можа быць шасціструннай або сямістружнай.

У гандбол гуляюць каманды па 6 гульцоў і брамнік.

Каб выйграць сэт у тэнісе, трэба выйграць 6 (у некаторых выпадках 7) геймаў.

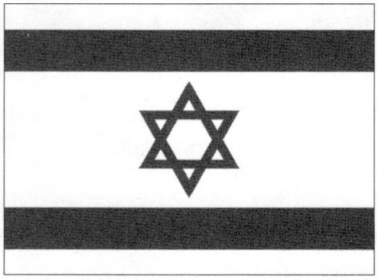
Секстэт – ансамбль з шасці выканаўцаў.

На Зямлі вылучаны 6 кантынентаў (мацерыкоў) – вялікіх прастораў сушы, якая абмываецца морамі і акіянамі: Амерыка Паўднёвая, Амерыка Паўночная, Антарктыда, Аўстралія, Афрыка і Еўразія.

І часткі свету, якіх таксама 6: Амерыка (Паўночная і Паўднёвая разам), Антарктыка, Аўстралія з Акіяніяй, Афрыка, Еўропа, Азія.

Шасціканцовая зорка, створаная з двух правільных трохвугольнікаў – старажытная гексаграма, вядомая з часоў ізраільскага цара Давыда, а з XIX стагоддзя – сімвал габрэйскага народа. Змешчаная на дзяржаўным сцягу Ізраіля.





Шасціканцовы крыж Еўфрасінні Полацкай – нацыянальная святыня Беларусі (на жаль, страчаная ў 1941 годзе). Пра гэтую сакральную рэч у гісторыі нашага народа распавёў Уладзімір Арлоў у кнізе "Жыватворны сімвал Бацькаўшчыны. Гісторыя Крыжа святой Еўфрасінні Полацкай".

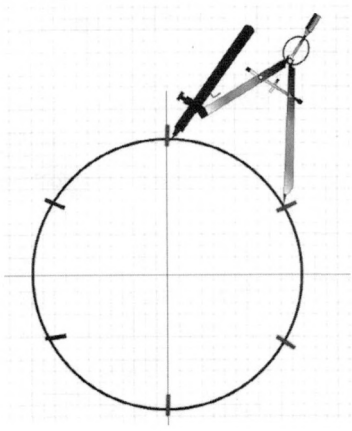


У 1997 годзе берасцейскі мастак-эмальер Мікалай Кузьміч скончыў пяцігадовую працу ўзнаўлення Крыжа. Рарытэт захоўваецца ў Полацку.

Шасціканцовы крыж ёсць на гербах Венгрыі і Славакіі.

Старана правільнага шасцівугольніка роўная радыусу акрэсленай вакол яго акружыны. Таму пабудаваць правільны шасцівугольнік вельмі проста. Трэба пабудаваць акружыну, тым жа ростулам цыркуля адзначыць на акружыне 6 пунктаў і паслядоўна злучыць гэтыя пункты адрэзкамі.

Калі б у чалавека было па тры пальцы на руках (разам шэсць), тады, мабыць, стварылася б не дзесятковая сістэма запісу лікаў, а шасціткавая, дзе было б вызначана 6 знакаў (напрыклад, тыя ж 0, 1, 2, 3, 4, 5), з дапамогай якіх запісваліся б іншыя лікі. Шэсць тады б пісалася як 10, сем – як 11, восем – як 12, дзевяць – як 13, дзесяць – як 14, адзінаццаць – як 15, дванаццаць – як 20, трынаццаць – як 21 і г. д. Гэтак магло б быць, калі б лікі стваралі птушкі.

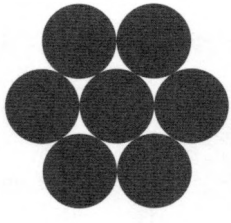


Лік 7: сем дзён тыдня (панядзелак, аўторак, серада, чацвер, пятніца, субота, нядзеля); сем нот музыказапісу (до, рэ, мі, фа, соль, ля, сі); сем знакаў рымскай нумарацыі (I, V, X, L, C, D, M); сем колераў вясёлкі (чырвоны, аранжавы ці памаранчавы, жоўты, зялёны, блакітны, сіні, фіялетавы).

Каб запомніць паслядоўнасць колераў спектру, на які распадаецца белае святло (гэта і ёсць колеры вясёлкі), ёсць запамінальныя сказы з словамі, якія пачынаюцца з літар Ч, А(П), Ж, З, Б, С, Ф:

філасофскі – ***Ч**алавек **а**бірае **ж**ыццё, **з**агадзя **б**ачачы **с**вой **ф**інал* (сказ не зусім праўдзівы, але тут гэта неістотна); для тых, хто мяркуе больш правільным называць другі колер памаранчавым, сказ крыху змяняецца – ***Ч**алавек **п**рымае **ж**ыццё, **з**агадзя **б**ачачы **с**вой **ф**інал*;

або лірычны – ***Ч**ароўныя **а**рыі* (***п**есні*) ***ж**аваронка **з**амінаюць **б**адзёраму **с**кладанню **ф**ормул*.



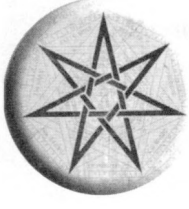
Гандбольную і ватэрпольную каманду складаюць 7 гульцоў.

Сем роўных кружочкаў ствараюць нейкую ідэальную групу.

Мы ўжо згадвалі сакральны лік 6 у старажытным Вавілоне. Тое, што больш за 6, лічылася там за "многа". Адтуль прыйшлі выслоўі, дзе лік 7 выкарыстоўваецца

ў значэнні “многа”; выслоўі, створаныя пазней, захавалі гэтую якасць сямёркі:

да парога – адна дарога, а за парог – сем дарог;
за лыжку яды сем вёрстаў хады, або: сем міль еду
дзеля аднаго абеду (калі на нешта малое траціцца шмат часу і сілы);
сямёра аднаго не чакаюць;
адным махам сямёх пабіяхам, адным стрэлам
сем качак забіў (пра нейкае вельмі ўдалае дзеянне);
сем год мак не радзіў, а голаду не было (пра нейкую драбязу, адсутнасць якой можна і не заўважыць);
за сем работ бярэцца, ды ні адна не ўдаецца;
на сем прыганятых адзін араты;
у калгасе добра жыць – адзін косіць, сем ляжыць;
на сем вокнаў адна шыба;
сем разоў мер і то не вер (добрая парада);
у сямі нянек дзіця без вуха (варыянт: *дзе нянек многа, там дзіця бязнога*);
было б нас сямёра, змаглі б усё ўчора;
адна ліса сем ваўкоў абдурыць;
сямі пядзяў лоб (пра некага разумнага);
сем шкур здзерці;
на сёмым небе (пра некага шчаслівага);
сем карабоў наманіў (пра гаварлівага хлуса);
сем сабак не перабрэшаш.





Сяміканцовая зорка лічыцца зоркай магічнай. Дарэчы, такая зорка з’яўляецца сімвалам Федэрацыі Аўстраліі.

Сямісвечнік – на дзяржаўным гербе Ізраіля.

Шырока вядомыя Сем цудаў свету – дзівосныя старажытныя помнікі. Ад розных людзей можна пачуць пра розныя цуды, але іх называюць заўсёды сем. Лік сем

лічыўся магічным. Свет старажытных людзей будаваўся вакол рэлігійных вераванняў. Таму і лік гэты выбраны невыпадкова. Сем – гэта лік бога Апалона. Яго лічылі самым прыгожым з грэцкіх багоў і заступнікам мастацтваў. А лік сем стаў сімвалам завершанасці і дасканаласці. Першы спіс Сямі цудаў свету склалі грэкі ў III стагоддзі да новай эры. У яго ўвайшлі самыя значныя помнікі архітэктуры, створаныя ў той час і вядомыя грэкам: піраміда Хеопса, вісячыя сады Семіраміды, статуя Зеўса ў Алімпіі, храм Артэміды, маўзалей у Галікарнасе, Калос Радоскі, Александрыйскі маяк. Многія тагачасныя цуды да нашага часу не захаваліся.

Групе школьнікаў у ЗША прапанавалі напісаць – якія сёння, на іхнае меркаванне, існуюць "Сем цудаў свету". Паводле колькасці галасоў атрымаўся такі спіс:

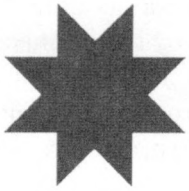
Піраміды Егіпта; Тадж-Махал; Грэнд-Каньён; Панамскі канал; Эмпайр Стэйт Білдынг; Базіліка Святога Пятра; Вялікая Кітайская сцяна.

Збіраючы запісы, настаўніца заўважыла, што адна дзяўчына яшчэ не закончыла. Спытала, ці ёсць у яе праблемы са спісам. "Так, – адказала дзяўчына. – Я доўга не магла вызначыцца, бо іх так шмат". – "Тады раскажы, што ты напісала, і, спадзяюся, мы зможам табе дапамагчы". Дзяўчына крыху задумалася, потым сказала: "Я думаю, што найвялікшыя "Сем цудаў" – гэта здольнасць 1) бачыць, 2) чуць, 3) дакранацца, 4) адчуваць. 5) думаць, 6) смяяцца, 7) любіць..." У класе стала так ціха, што можна было пачуць падзенне пёрка.

Лік 8: *прыйшла восень, з ёю работ восем.*

Дзе-нідзе скарыстоўваецца як частка слова "окта-" (ад лацінскага *okto* – восем). Напрыклад, актаэдр – васьміграннік, актэт – ансамбль з васьмі выканаўцаў. Oktober (у рускай мове – "октябрь") – восьмы месяц лацінскага календара, восьмым ён быў у той час, калі новы год пачынаўся з 1 сакавіка.

У назве адной марской жывёліны зафіксавана колькасць яго канцавін – васьміног. Па восем ног маюць таксама павукі.



Васьмірамянёвая зорка – распаўсюджаны ордэнскі знак у многіх хрысціянскіх дзяржавах. Знак быў пашыраны ў народнай арнаментыцы славянаў – беларусаў, украінцаў (значна радзей, чым у беларусаў, і тым часцей, чым далей на поўнач Украіны), рускіх (радзей, чым ва ўкраінцаў, але даволі часта на поўначы Расіі, асабліва ў Наўгародскай вобласці), балтаў – літоўцаў, латышоў, скандынаваў – шведаў, нарвежцаў, фінауграў – эстонцаў, фінаў, карэлаў, марыйцаў, удмуртаў, мардвінаў, іншых фіна-уграў Паволжа, венграў.



У арнаментах такую зорку вышывалі, часцей чырвонымі ніткамі, на ручніках, абрусах, мужчынскай і жаночай вопратцы ў Цэнтральнай Беларусі, Панямонні, на Палессі; часта выкарыстоўвалі яе ў ткацтве, вырабе рэчаў з саломкі, у аздабленні яек-маляванак.

Старажытны сімвал бясконцасці ∞ нагадвае лічбу 8. Магчыма, не выпадкова. Гэтую крывуліну можна вымалёўваць бясконца, не адрываючы алоўка ад паперы. Таму ў розных краінах лік 8 лічаць сімвалам бясконцай працягласці жыцця. Піфагор лічыў гэты знак сімвалам гармоніі. Жыхары Кітая і сёння лічаць васьмёрку сімвалам поспеху.

8 траўня святкуюць у Еўропе як дзень Перамогі – дзень заканчэння Другой светавой вайны.

Лік 9 – трэці квадратны лік.

Сваякі памерлага збіраюцца на дзявяты дзень па смерці памянуць нябожчыка. На дзявяты дзень пасля Вялікадня – Радаўніца, калі людзі наведваюць магілы блізкіх.

9 траўня святкавалі дзень Перамогі ў Савецкім Саюзе (і сёння працягваюць у некаторых краінах былога СССР). Прычына такога несупадзення з Еўропай у тым, што акт аб капітуляцыі Германіі быў падпісаны ў Рэймсе (Францыя) а 23-й гадзіне 8 траўня, а ў СССР у гэты момант пачыналася 2-я гадзіна 9 траўня.

Лік 10 заўсёды пры чалавеку, бо 10 пальцаў рук былі першым лічыльным інструментам. Ад гэтага і дзесятковая пазіцыйная сістэма лічэння, якой мы, дзякуючы індусам, карыстаемся сёння.

Скарыстоўваецца павелічальная (кратная) прыстаўка "дэка-" (ад грэцкага *δέκα* – дзесяць). Напрыклад, дэкалітр – 10 літраў; дэкада – прамежак 10 дзён; дэкан – начальнік дзясяткі, звычайна камандзір дзесяці ваяроў; цяпер дэкан – кіраўнік факультэта ў вышэйшай навучальнай установе.

Скарыстоўваецца і памяншальная (дольная) прыстаўка "дэцы-" (ад лацінскага *decimus* – дзясятая доля). Напрыклад, дэцыметр – дзясятая доля метра.

Лік 11 прыкметны хіба тым, што ў футбол гуляюць 11 гульцоў (10 на полі і брамнік), і тым, што да ліку 11 (у некаторых выпадках болей) вядзецца гульня ў пінг-понг (настольны тэніс).

Ёсць цікавая прымета падзельнасці на 11, пра якую пазней.

Лік 12, тузін. За той час, як Зямля адзін раз абернецца вакол Сонца, Месяц абернецца вакол Зямлі прыблізна 12 разоў. Таму прамежак 12 месяцаў лічаць роўным году. Гэта недакладна, і, каб выправіць такую недакладнасць, вызначылі розную колькасць дзён у месяцах і ўвялі высакосныя гады.

У Бібліі: Хрыстос сабраў 12 апосталаў на развітальную таемную вячэру.

12 называюць удачлівым, "шчаслівым" лікам. У яго шмат дзельнікаў, больш, чым у папярэдніх лікаў, гэта аблягчае дзеянні з ім.



12 пяціканцовых зорак змешчаныя на сцягу Еўропы.

У кітайскай філасофіі вызначаюць 12-гадовыя цыклы чалавечага жыцця. Кожны год цыкла абазначаны якой-небудзь жывёлінай.

А грэкі разбілі год на 12 частак адпаведна з'яўленню на небе тых ці іншых зорных сістэм, так стварыўся гараскоп (з грэцкай мовы: *ὥρα* – пара́ і *σκοπός* – глядзець), сёння даволі папулярны ў людзей, схільных да містыкі, да астральных прадказанняў.

Па 12 шашак мае кожны з удзельнікаў гульні ў яе пачатку.

Лік 13 чамусьці называюць няўдалым, нешчаслівым лікам. Уяўленне пра шчаслівыя і нешчаслівыя лікі пайшло ад школы Піфагора (школа музыкі і матэматыкі), дзе займаліся ў тым ліку і містыкай. Да містыкаў тады ставіліся людзі яшчэ больш агрэсіўна, чым сёння, і праз гэтую заўзятасць да містыкі Піфагора не любілі і не раз спрабавалі пабіць. Каб бараніцца, ён асвоіў прыёмы кулачнага бою і асвоіў настолькі, што стаў алімпійскім чэмпіёнам у кулачным баі. Невядома, ці перасталі яго пасля гэтага біць. А элементы лікавай містыкі захаваліся дасюль.

15 ліпеня 1410 года адбылася грандыёзная бітва на Грунвальдскім полі, дзе войскі Вялікага Княства Літоўскага і Каралеўства Польскага разбілі крыжакоў. Перамога атрымалася настолькі значнай, што больш чым на паўтысячагоддзя спыніла нямецкую экспансію на ўсход.

Лік 16 – чацвёрты квадратны лік. Ён нават двойчы квадратны (біквадратны), бо 16 – гэта квадрат ліку 4, а 4 – квадрат ліку 2.

Па 16 фігур мае кожны шахматыст у пачатку гульні.

Пуд ≈16 кг (дакладней ≈16,38 кг) – старажытная мера масы.

Ад 1939 года **17 верасня** – дзень яднання Заходняй і Усходняй Беларусі. Дзень і светлы, бо ўсё ж аб'яднанне, і змрочны, бо ў Заходняй Беларусі пачаліся масавыя рэпрэсіі.

Пра **лік 18** (паўтара тузіна) ёсць прымаўка: *адзін – (пра) васямнаццаць, а другі – (пра) без двух дваццаць* (калі абое гавораць пра адно і тое самае, але не разумеюць адно аднога).

Такую прымаўку можна вымаўляць з любым лікам (адзін пра сямнаццаць, а другі – пра без трох дваццаць), але чамусьці ў прымаўку ўвайшоў лік 18. Можна паразважаць, чым гэты лік падаўся людзям тут больш адметным у параўнанні з іншымі.

Магчыма, тым, што 18 гадоў – час паўналецця чалавека ў многіх краінах. Дасягнуўшы такога ўзросту, чалавек набывае ўсе грамадзянскія правы і абавязкі.

21 – так называецца папулярная картачная гульня, звязаную з якой драматычную гісторыю распавёў Аляксандр Пушкін у аповесці “Віновая дама”. Гэты сюжэт скарыстаў Пётр Чайкоўскі для аднайменнай оперы.

24 гадзіны складаюць суткі.

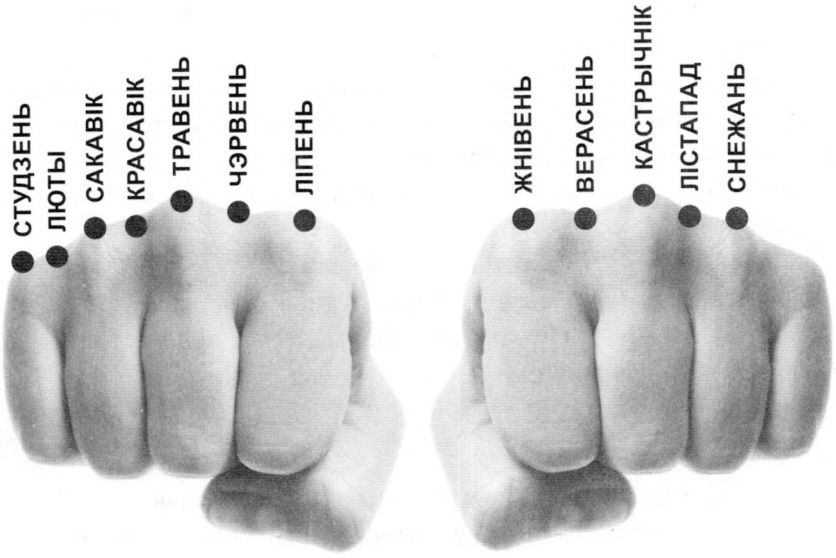
Лік 25 – пяты квадратны лік, чвэртка сотні.

25 ачкоў (у некаторых выпадках болей) павінна набраць каманда, каб выйграць сэт у валейболе.

Лік 28 – другі дасканалы лік (28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14), сёмы трохкутны лік.

У даміно гуляюць 28-ю косткамі.

Лікі 28 і **29** нагадваюць пра колькасць дзён у лютым, самым кароткім месяцы. **Лікі 30** і **31** нагадваюць пра колькасць дзён іншых месяцаў.



Бывае цяжка запомніць, колькі ў якім месяцы дзён. На гэта ёсць добры мнеманічны прыём. Пакладзіце дзве рукі побач, складзеныя ў кулак костачкамі наверх. І пачынайце лічыць па костачках пальцаў і па лагчынках паміж костачкамі (прамежак паміж рукамі прапускайце): студзень, люты, сакавік... (як паказана на малюнку). На костачкі трапляюць самыя доўгія месяцы па 31 дні – студзень, сакавік, травень (май), ліпень, жнівень, кастрычнік, снежань (іх 7), на лагчынкі – кароткія, – красавік, чэрвень, верасень, лістапад па 30 дзён і люты, пра які асобная гаворка, у ім 28 дзён у звычайны год і 29 дзён у высакосны год).

Лік 32 = 2^5. Столькі зубоў у звычайнага здаровага чалавека.

Лік 40 мае дзіўную назву ва ўсходніх славян. Сярод іншых дзясяткавых лікаў (дваццаць – два дзясяткі, трыццаць – тры дзясяткі, пяцьдзясят – пяць дзясяткаў і г. д.) чацвёрка з нулём – гэта не "чатырдзясят" і не "чатырцаць", а **сорак** – зусім асобнае слова, не звязанае з дзясяткай. Выпадкова ці не, але гэты лік назвай выдзелены сярод двухзнакавых лікаў з нулём на канцы.

З Бібліі: Майсей сорак гадоў вадзіў свой народ па пустэльні, пакуль вывеў людзей да зямлі абяцанай.

Паводле Бібліі, узнясенне Хрыста на неба адбылося на саракавы дзень пасля яго ўкрыжавання. З гэтай прычыны хрысціяне адзначаюць і саракавіны па смерці блізкага чалавека.

40 дзён доўжыцца пост перад Хрыстовым нараджэннем і перад Вялікаднем.

Лік 40 адметны і ў мусульманаў, не раз сустракаецца ў Каране.

40 тыдняў – норма выношвання дзіцяці жанчынай.

Хрысціць дзіця, як раяць дасведчаныя людзі, лепш за ўсё на саракавы дзень ад нараджэння.

1 пуд = 40 фунтаў.

Лік 50 лічаць першым прыкметным юбілеем чалавека. Час падводзіць вынікі першага перыяду жыцця і пачаць планаваць, прадумваць яго другі перыяд.

Лік 60 – аснова першай вядомай нам пазіцыйнай сістэмы лічэння, створанай у Вавілоне ў трэцім тысячагоддзі да новай эры. З тых часоў як спадчыну маем: 1 гадзіна = 60 хвілін, 1 хвіліна = 60 секунд, 1 градус = 60 вуглавых мінут, 1 вуглавая мінута = 60 вуглавых секунд.

Лік 64. Столькі клетачак на шахматнай дошцы. Пра стварэнне шахмат ёсць цікавая легенда, расказваць якую вучням варта тады, калі вывучаецца геаметрычная прагрэсія.

Лік 88 музычны, такая звычайна колькасць клавішаў раяля.

Лік 100 – дзясяты квадратны лік. У вымярэннях розных велічынь скарыстоўваецца кратная прыстаўка гекта- (ад грэцкага *ἑκατόν* – сто). Напрыклад, 1 гекталітр = 100 літраў, 1 гектапаскаль = 100 паскаляў, 1 гектар (гекта-ар) = 100 араў. Скарыстоўваецца і дольная прыстаўка "санты-" (правільней было б "цэнты-", бо ад лацінскага *centum* – сто). 1 сантыметр ("цэнтыметр") – сотая доля метра. 1 цэнтнер = 100 кг (тут цэнт не прыстаўка, а корань).

Звычайна ў розных краінах асноўная грашовая адзінка мае дапаможную адзінку, намінал якой у сто разоў меншы. Напрыклад, 1 еўра = 100 еўрацэнтаў, 1 рубель = 100 капеек, 1 долар = 100 цэнтаў, 1 лары = 100 тэтры ў Грузіі, 1 злоты = 100 грошаў у Польшчы, 1 грыўна = 100 капіек ва Украіне, 1 ліра = 100 курушаў у Турцыі, 1 юань = 100 феняў у Кітаі ды інш.

Сотнік – начальнік над сотняй у войску.

Не хваліся ста рублямі, а хваліся ста сяброў.
Лепей адзін раз пабачыць, чым сто разоў пачуць.
Сто сяброў – мала, адзін вораг – ужо шмат.
Разумная галава сто галоў корміць, а дурная і адной не пракорміць.

Лік 360 – таксама спадчына Вавілона. Калі акружыну падзяліць на 360 роўных частак, то адну такую частку (і адпаведны ёй цэнтральны вугал) называюць градусам. Градус як адзінку вымярэння

вуглоў і дуг дасюль шырока выкарыстоўваюць у фізіцы, матэматыцы ды іншых тэхнічных навуках.

Лік 365 – працягласць года ў сутках. Лік недакладны, сапраўдная працягласць года крыху большая за 365 сутак, таму кожны чацвёрты год (з выняткам года з двума нулямі на канцы) мае працягласць **366** сутак. Такі год называюць высакосным.

Лік 1000 – дзясяты кубічны лік (кубічны – атрыманы здабыткам трох аднолькавых множнікаў, $1000 = 10 \times 10 \times 10$). У вымярэннях розных велічынь скарыстоўваюць кратную прыстаўку "кіла-" (ад грэцкага *χίλιοι* – тысяча). 1 кіламетр = 1000 метраў, 1 кілаграм = 1000 грамаў, 1 кілавольт = 1000 вольтаў ды інш. У ІТ-тэхналогіях, якія грунтуюцца на двайковай сістэме запісу лікаў, прыстаўка "кіла-" азначае крыху іншае: 1 кілабайт = 1024 байтаў, бо **лік 1024** блізкі да тысячы і роўны здабытку дзесяці двоек. Скарыстоўваецца і дольная прыстаўка "мілі-" (ад лацінскага *mille* – тысяча). Напрыклад, 1 міліметр – тысячная доля метра, 1 міліграм – тысячная доля грама ды інш.

Лік 1517 варта помніць беларусам. У гэтым годзе 6 жніўня Францішак Скарына выдаў у Празе першую ва Усходняй Еўропе друкаваную кнігу. Ад гэтай даты беларусы адлічваюць пачатак свайго кнігадрукавання. Падобная падзея ў Масковіі адбылася толькі праз 47 гадоў, калі Іван Фёдараў (Федаровіч) і Пётр Мсціславец выдалі "Апостол".

20 004 км – прыблізная даўжыня зямнога мерыдыяна ад Паўночнага полюса да Паўднёвага (звычайна акругляюць да 20 тыс.).

40 075 км – даўжыня экватара Зямлі (звычайна акругляюць да 40 тыс.).

Крыху пра назвы далейшых лікаў:

Мільён = 10^6. Такі лік сустракаецца часта. Ёсць адпаведная яму кратная прыстаўка "мега-" (ад грэцкага *μέγας* – вялікі): 1 мегаджоўль = 1 000 000 джоўляў, 1 мегапарсек = 1 000 000 парсекаў. Але

1 мегабайт крыху большы за мільён байтаў (1 мегабайт = 1024 × × 1024 байтаў – *гл. раней пра кілабайт*).

Більён = 10^9 (гэты лік яшчэ называюць мільярдам, яму адпавядае кратная прыстаўка “гіга-”, якая ў кампутарных тэхналогіях мае крыху іншае значэнне: 1 гігабайт = 1024 × 1024 × 1024 байтаў = 2^{30} байтаў).

Трыльён = 10^{12} (адпаведная прыстаўка “тэра-” або ў кампутарных тэхналогіях “тэбі-”: 1 тэбібайт (не тэрабайт) = 2^{40} байтаў).

Квадрыльён = 10^{15}.

Квінтыльён = 10^{18}.

Секстыльён = 10^{21}.

Септыльён = 10^{24}.

Актыльён = 10^{27}.

Нанільён = 10^{30}.

Дэкальён = 10^{33}.

Існуюць і назвы далейшых лікаў, якія ніякага практычнага значэння не маюць, бо ў практычнай дзейнасці чалавек не працуе з лікамі, дзе шмат лічбаў. Занадта вялікія ці занадта малыя лікі звычайна акругляюцца да патрэбнага разраду і запісваюцца ў **стандартным** выглядзе, пра гэта пазней.

Самы вялікі лік, які мае назву, – **гугол** = 10^{100}.

СКЛАДАННЕ, МНОЖАННЕ НАТУРАЛЬНЫХ ЛІКАЎ

Звычайна з асвойваннем працэсу складання натуральных лікаў вялікіх праблем не ўзнікае. Хіба што варта навучыць карыстацца перамяшчальным і размеркавальным законамі там, дзе яны спрашчаюць вылічэнні.

Перамяшчальны закон: ад перастаноўкі месцамі складнікаў сума не зменіцца; для любых A і B праўдзіцца роўнасць A + B = B + A.

Спалучальны закон: ад змены парадку дзеянняў пры складанні сума не зменіцца; для любых A, B, C праўдзіцца роўнасць A + B + C = = A + (B + C).

Разумеючы такія законы, суму 987 + 309 + 25 + 113 можна атрымаць вусна і нават хутчэй, чым на калькулятары.

З множаннем праблемы ўзнікаюць. Тут дадаюцца яшчэ тры законы, два з якіх аналагічныя законам складання, а трэці звязвае складанне з множаннем.

Перамяшчальны закон: ад перастаноўкі месцамі множнікаў здабытак не зменіцца; для любых A і B праўдзіцца роўнасць $A \times B = B \times A$.

Спалучальны закон: ад змены парадку дзеянняў пры множанні здабытак не зменіцца; для любых A, B, C праўдзіцца роўнасць $A \times (B \times C) = A \times B \times C$.

Размеркавальны закон множання адносна складання: каб памножыць суму на лік, можна памножыць на гэты лік кожны складнік і атрыманыя здабыткі скласці; для любых A, B, C праўдзіцца роўнасць $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$; тое ж для рознасці: $A \times (B - C) = A \times B - A \times C$; і для дзялення на лік: $(A \pm B) : C = A : C \pm B : C$.

Цяпер ужо варта звярнуць увагу на тое, што любая матэматычная формула дазваляе два віды пераўтварэнняў. Вось і тут – формула $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ дазваляе пераўтварэнне, якое называюць раскрыццём дужак, а тая самая формула, запісаная наадварот $A \times B + A \times C = A \times (B + C)$, дазваляе пераўтварэнне, якое называюць вынясеннем за дужкі агульнага множніка. Зноў жа: засваенне гэтых законаў дазваляе спрашчаць вылічэнні і шмат якія з іх выконваць вусна.

Прыклады:

$76 \times 88 + 12 \times 76 = 76 \times (88 + 12) = 7600$;

$685 : 5 = (500 + 150 + 35) : 5 = 500 : 5 + 150 : 5 + 35 : 5 = 137$;

$25 \times 48 = 25 \times (4 \times 12) = (25 \times 4) \times 12 = 1200$;

$724 : 18 - 424 : 18 = (724 - 424) : 18 = 300 : 18 = 100 : 6 = 16,(6)$;

$432 \times 25 = 432 : 4 \times 100 = 108 \times 100 = 10\,800$ ды інш.

Табліца множання (табліца Піфагора)

Узброеныя калькулятарамі, сучасныя школьнікі засвойваюць табліцу множання з істотна большымі праблемамі, чым раней. Яна ім нібыта непатрэбная: дастаў калькулятар і націснуў кнопкі. Але веданне табліцы множання паскарае вылічэнні. Да таго ж гэта добрае практыкаванне для трэнінгу памяці. Прыгледзімся да табліцы, створанай яшчэ Піфагорам.

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

З аглядкай на перамяшчальны закон множання можна амаль напалову табліцу зменшыць:

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2		4	6	8	10	12	14	16	18
3			9	12	15	18	21	24	27
4				16	20	24	28	32	36
5					25	30	35	40	45
6						36	42	48	54
7							49	56	63
8								64	72
9									81

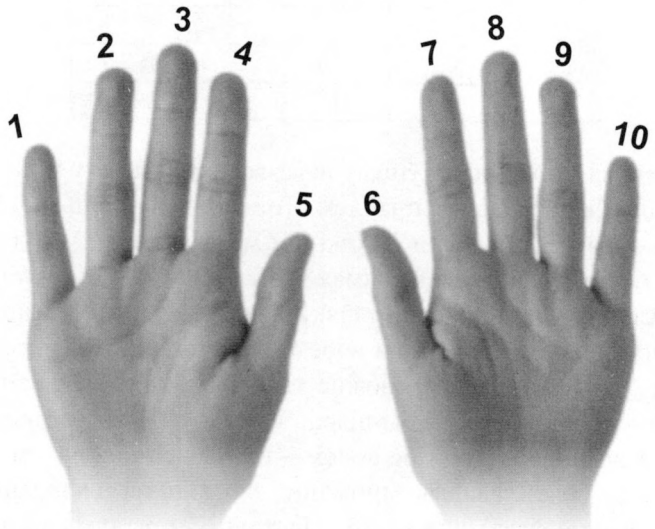
Практыка многіх настаўнікаў паказвае, што да ліку 5 табліца запамінаецца без асаблівых праблем. Тое самае з вершыкам “шэсць на шэсць – трыццаць шэсць”. Адкінем множанне на 9, пра што пагаворым пазней. І застанецца самая праблемная частка табліцы множання. Але тут усяго пяць клетачак! Фактычна можна гаварыць нават пра чатыры, бо “шэсць на восем – сорак восем” запамінаецца рыфмай. Ад гэтага, дарэчы, можна танцаваць далей. Бо калі шэсць на восем – сорак восем, тады шэсць на сем – гэта шэсць на восем без адной шасцёркі, а сем на восем – гэта шэсць на восем з адной лішняй васьмёркай. І задача множання зводзіцца да складання, чым гэтае множанне фактычна і ёсць. Настаўнікі прыдумляюць іншыя

спосабы ўздзеяння на памяць і розум вучня, каб ён урэшце запомніў гэтыя 5 праблемных клетачак табліцы множання.

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									
2									
3									
4									
5									
6							42	48	
7							49	56	
8								64	
9									

З гэтымі пяццю клетачкамі трэба папрацаваць грунтоўна. Да таго нават, што калі сустрэнецца вучань на вуліцы і павітаецца з вамі, вы яму: “А скажы, калі ласка, колькі будзе, калі 8 памножыць на 7?”

А зараз – пра множанне на 9. У чалавека 10 пальцаў на руках. Пакладзем дзве рукі побач і пранумаруем пальцы ад 1 да 10 злева направа, як паказана на малюнку ніжэй. Каб памножыць 9 на 3, загнем трэці палец. Злева ад яго застаецца два пальцы, справа – сем. Такім



чынам, 9 × 3 = 27. Памножым 9 на 6: загнем шосты палец, злева застаецца пяць, справа – чатыры, таму 9 × 6 = 54. І г. д. Пасля трэнавання на пальцах у натуральным выглядзе вучань стане множыць на 9, уяўляючы сабе дзве рукі, а потым і запомніць.

Забаўны эпізод адбыўся на адной маёй лекцыі на курсах павышэння кваліфікацыі настаўнікаў вышэйшай катэгорыі. Гэта настаўнікі з даволі значным досведам працы, якім вядомыя многія сакрэты настаўніцкай працы. Таму, перш чым паказаць ім адмысловы прыём складання звычайных дробаў, падгледжаны ў аднаго з магілёўскіх настаўнікаў, я згадаў, што папярэдне для гэтага патрабуецца. Мімаходзь закрануў і табліцу множання, нагадаўшы пра множанне на 9 на пальцах, мяркуючы не марнаваць час на тое, што ўсе з прысутных ведаюць. Але адна настаўніца перадпенсійнага ўзросту папрасіла расказаць падрабязней, і я зрабіў гэта, выбачыўшыся перад іншымі настаўнікамі за страту гэтай хвілінкі.

– Няўжо гэта праўда? – гучна ўсклікнула настаўніца, пачуўшы маё тлумачэнне, чым развесяліла слухачоў. – Ну чаму ж я гэтага раней не ведала?!

Вось так бывае: працавала ўсё жыццё, пакутуючы з вучнямі пры множанні на 9, а элементарнага сакрэціка, які б палегчыў тыя пакуты, не ведала.

Жанчына скончыла педагагічную ВНУ, дзе ёй гаварылі пра мэты навучання, у прыватнасці навучання матэматыцы, пра прынцыпы, пра розную каляматэматычную і каляпедагагічную філасофію і выціскалі залікамі ды іспытамі, каб студэнты (у недалёкай будучыні настаўнікі) гэтую філасофію ведалі, а на тое, каб паведаміць такія простыя "маленькія сакрэты", не заставалася часу. Дый выкладчыкі (дацэнты, прафесары), хутчэй, самі іх не ведалі ды нават не лічылі патрэбным апускацца з сваіх навуковых вышынь да такіх дробязяў. А ў выніку настаўніца даўно забыла пра тое, што здавала на заліках ды іспытах, яно ёй у практычнай дзейнасці амаль не патрэбнае, а карысныя маленькія прыёмчыкі або сама адкрывала, або запазычвала ў калег, якія аднекуль (адкуль заўгодна, але не з універсітэта) іх ведалі.

Для засваення прыёмаў хуткаснага вылічэння вельмі карысныя формулы скарочанага множання, якія разумныя настаўнікі вытрэніроўваюць у вучняў не толькі на пераўтварэнні літарных выразаў, але і на ліках.

Напрыклад, формула квадрата бінома $\mathbf{(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2}$ дазваляе імгненна ўзводзіць у квадрат лікі з пяцёркай на канцы:

$(10\ A + 5)^2 = 100 \times A^2 + 100 \times A + 25 = 100 \times A \times (A + 1) + 25.$

Прыгледзімся да апошняга выразу: колькасць дзясяткаў А памнажаецца на лік, на адзінку большы, (А + 1), і на сто, атрымаецца лік з двума нулямі на канцы, якія пасля дадавання 25 заменяцца на 25. Адсюль рэкамендацыя: каб узвесці ў квадрат лік з пяцёркай на канцы, трэба лік перад пяцёркай памножыць на лік, на адзінку большы, і дапісаць 25:

$65^2 = 4225 \times (6 \times 7 = 42);$

$115^2 = 13\ 225 \times (11 \times 12 = 132);$

$205^2 = 42\ 025\ (20 \times 21 = 420);$

$195^2 = 38\ 025$ ды інш.

Проста і эканомна, тут і калькулятар не патрэбен.

Карысная і формула рознасці квадратаў $\mathbf{(A - B) \times (A + B) = A^2 - B^2}$.

Напрыклад:

$77 \times 83 = (80 - 3) \times (80 + 3) = 80^2 - 3^2 = 6400 - 9 = 6391;$

$37 \times 33 = (35 + 2) \times (35 - 2) = 35^2 - 2^2 = 1225 - 4 = 1221;$

$125 \times 75 = (100 + 25) \times (100 - 25) = 10\ 000 - 625 = 9375.$

Такія множанні сустракаюцца нярэдка, і адпрацоўванне гэтага прыёму ў вусных вылічэннях дазволіць навучэнцам эканоміць час. Радзей сустракаецца супрацьлеглае дастасаванне формулы:

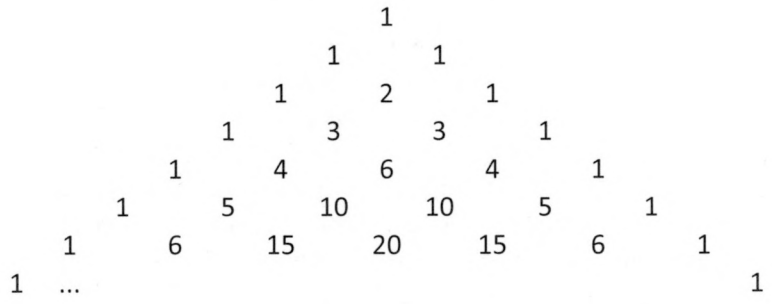
$76^2 - 24^2 = (76 + 24) \times (76 - 24) = 5200;$

$157^2 - 43^2 = (157 - 43) \times (157 + 43) = 114 \times 200 = 22\ 800.$

Формулы з кубамі не такія папулярныя ў вылічальнай практыцы, але яны сустракаюцца ў пераўтварэннях выразаў і праграмай патрабуюцца. Вучні запамінаюць іх кепска. Аднойчы я паказаў сваім вучням лікавы трохвугольнік Паскаля і здзівіў іх прапановай: “Хочаце, я пакажу вам, як узвесці двухсклад А + В у восьмую ці адзінац-

цатую ступень?" І пасля гэтага яны ўзводзілі A + B у куб, малюючы чатыры радкі трохвугольніка Паскаля. Вось так бывае – лягчэй не ад прыватнага да агульнага, а наадварот.

Трохвугольнік Паскаля



У кожным радку тут па краях адзінкі, а іншыя лікі атрымліваюцца складаннем двух лікаў, што над імі.

Выпісваннем такога лікавага трохвугольніка забаўляў сябе французскі хлопчык Блез Паскаль у шасцігадовым узросце. Выявілася, што забава карысная не толькі хлопчыку: у кожным радку гэтага трохвугольніка каэфіцыенты ўзвядзення бінома ў ступень *n*:

$(A + B)^0 = 1$ – першы радок;

$(A + B)^1 = 1 \times A + 1 \times B$ – другі радок;

$(A + B)^2 = 1 \times A^2 + 2 \times A \times B + 1 \times B^2$ – трэці радок;

$(A + B)^3 = 1 \times A^3 + 3\ A^2 \times B + 3 \times A \times B^2 + 1 \times B^3$ – чацвёрты радок...

Для паўнаты карціны тут выпісаны і каэфіцыенты 1, якія звычайна не пішуцца.

Літарныя часткі кожнага складніка маюць тую самую ступень *n*, перацякаючы ад A^n паступовай заменай аднаго A на B да B^n.

$(A + B)^7$ = (дапішыце радок трохвугольніка з другім лікам 7) =
$= A^7 + 7 \times A^6 \times B + 21 \times A^5 \times B^2 + 35 \times A^4 \times B^3 +$
$+ 35 \times A^3 \times B^4 + 21 \times A^2 \times B^5 + 7 \times A \times B^6 + B^7.$

Прыгледзімся да гэтых васьмі складнікаў:

$A^7 \rightarrow A^6 \rightarrow A^5 \rightarrow A^4 \rightarrow A^3 \rightarrow A^2 \rightarrow A^1 \rightarrow A^0$ (A знікае),
B^0 (B адсутнічае) $\rightarrow B^1 \rightarrow B^2 \rightarrow B^3 \rightarrow B^4 \rightarrow B^5 \rightarrow B^6 \rightarrow B^7$.

Мяне такая прыгажосць цешыць не менш, чым таго хлопчыка. А вас?

Для бінома (А – В) будзе тое самае, толькі з чаргаваннем знакаў:

$$(\mathbf{A - B})^{8} = A^{8} - 8 \times A^{7} \times B + 28 \times A^{6} \times B^{2} - 56 \times A^{5} \times B^{3} + \\ + 70 \times A^{4} \times B^{4} - 56 \times A^{3} \times B^{5} + 28 \times A^{2} \times B^{6} - \\ - 8 \times A \times B^{7} + B^{8}.$$

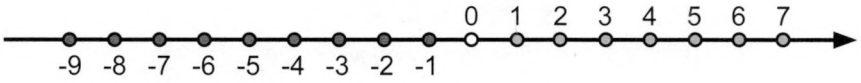
Калі ў класе ёсць разумныя дзеткі (а ў якім класе іх няма?), пакажыце ім гэтую забаву, каб і яны палюбаваліся. Гэта запамінаць не трэба, таму вучні паставяцца з цікавасцю.

"Запамінаць не трэба". Гэтую параду не ўсе прымуць, і час ад часу вы заўважыце, што на перапынку (або нават на ўроку) нехта з вучняў будзе цешыць сябе выпісваннем радкоў трохвугольніка Паскаля і ўзвядзеннем у 15-ю ступень двухсклада (Х + У). А ўзвядзенне ў куб на фоне 15-й ступені – гэта ўжо зусім проста.

2. ЦЭЛЫЯ ЛІКІ

СКЛАДАННЕ ЦЭЛЫХ ЛІКАЎ

З'яўленне адмоўных лікаў як супрацьлеглых натуральным звычайна падаецца праз іх выяву на лікавай (каардынатнай) прамой, што разумна. Таму і складанне-адыманне цэлых лікаў варта напачатку праводзіць на гэтай прамой.



-3 – 5 =

Знаходзім на прамой -3 і рухаемся ўлева (бо мінус) на 5 адзінкавых адрэзкаў. Маем -8.

-3 + 5 =

Знаходзім на прамой -3 і рухаемся ўправа (бо плюс) на 5 адзінкавых адрэзкаў. Маем 2.

Варта выпрацаваць разуменне, што мінус – гэта змена кірунку на прамой. І тут карысныя забавы з мноствам мінусаў:

$$-(-(-10)) + (-(-(-(-(-(-6)))))) - (-(-(-2))) =$$

Змяніць кірунак два разы азначае тое, што й не мяняць яго. Цотная колькасць мінусаў ёсць плюс, няцотная колькасць мінусаў азначае мінус.

Перад першым лікам тры мінусы – гэта тое ж, што адзін мінус. Перад другім 6 мінусаў – гэта плюс. Перад трэцім 4 мінусы (улічваецца і знак дзеяння) – гэта плюс. Тады выраз спрашчаецца:

$$-10 + 6 + 2 = ...$$

І далей – перасоўванне пункта па лікавай прамой.

Правілы (скласці модулі ці ад большага модуля адняць меншы і паставіць знак ліку з большым модулем) з'явяцца пазней, калі

ўзнікне патрэба выконваць такія дзеянні з вялікімі лікамі, яшчэ пазней – з дробнымі лікамі.

Фактычна цяпер знікае дзеянне адымання, бо адыманне – гэта складанне з супрацьлеглым лікам: 6 – 8 = 6 + (-8). І можна забыць правілы "як знайсці невядомы адымнік" ці "як знайсці невядомае меншыва", з чаго відаць, што тыя правілы мелі часовае прызначэнне. Фактычна, усе тыя правілы "як знайсці невядомае" маюць часовы характар і без іх можна ўвогуле абысціся. Адпаведныя раўнанні можна развязваць з апорай на таблічку "Закрый невядомае" (лікі там, натуральна ж, могуць быць іншымі):

3 + 4 = 7

складнік + складнік = сума

8 – 3 = 5

меншыва – адымнік = рознасць

2 × 5 = 10

множнік × множнік = здабытак

6 : 3 = 2

дзеліва : дзельнік = дзель

Калі трэба развязаць раўнанне 831 – X = 512, то зірнем на таблічку, знойдзем там радок з адыманнем і закрыем у тым радку другі лік, бо менавіта другі лік невядомы ў раўнанні, затым падумаем: як гэты лік (3) атрымаць з іншых лікаў (відавочна, ад 8 адняць 5). Таму X = 831 – 512.

Такая аналогія заменіць правілы, якіх "чамусьці" вучні не любяць завучваць. Не любяць з вядомай прычыны: там спачатку трэба запомніць назвы кампанентаў (іх дзесяць), а потым правілы, якіх шэсць і якія блытаюцца ў памяці праз іх падабенства. Тым болей што гэтыя правілы, як ужо сказана, маюць часовае прызначэнне. Гэта як у мове: мала які чалавек помніць правілы правапісу прыназоўнікаў,

прыставак, канчаткаў ды інш., але піша правільна з прычыны іншай – начытаўся-наслухаўся такіх слоў за жыццё і яны натуральным чынам замацаваліся ў памяці.

Адсюль парада настаўніку: калі вучань правільна развязвае раўнанні, але не ведае правілаў "як знайсці...", не трэба яго караць зніжэннем адзнакі.

Праўда, гледзячы на тую таблічку, і правілы можна самому вывесці.

МНОЖАННЕ І ДЗЯЛЕННЕ ЦЭЛЫХ ЛІКАЎ. Схема Гайкова–Крысіна

Гэтыя дзеянні адрозніваюцца ад адпаведных дзеянняў з натуральнымі лікамі толькі правілам знакаў. Вучні звычайна лёгка прымаюць, чаму мінус, памножаны на плюс, дае мінус, але чаму мінус, памножаны на мінус, дае плюс – тут іх свядомасць супраціўляецца. Вось добрая з метадычнага погляду задача.

Уявім (напрыклад, з дапамогай лікавай прамой) човен на рацэ, які плыве з хуткасцю 3 км/гадз (будзем лічыць з адпаведнымі знакамі: +3 км/гадз, калі плыве па цячэнні, традыцыйна направа, або -3 км/гадз, калі плыве супраць цячэння, налева).

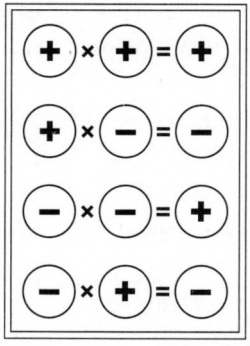
Дзе гэты човен будзе праз 2 гадзіны (можна падкрэсліць: праз плюс дзве гадзіны)? Адказ: на адлегласці 6 км справа, калі плыве па цячэнні, або на адлегласці 6 км злева, калі плыве супраць цячэння. Вынік: $+3 \times (+2) = +6$; $-3 \times (+2) = -6$.

А дзе гэты човен быў праз мінус дзве гадзіны (гэта значыць дзве гадзіны назад, бо мінус змяняе кірунак)? Адказ: на адлегласці 6 км злева, калі плыў па цячэнні, або на адлегласці 6 км справа, калі плыў супраць цячэння. Вынік: $+3 \times (-2) = -6$; $-3 \times (-2) = +6$.

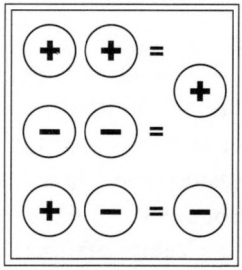
Хачу расказаць пра адну маленькую метадычную знаходку, звязаную з гэтымі дзеяннямі, зробленую маімі вучнямі.

Навучыўшы крыху сваіх пяцікласнікаў працаваць з лістамі апорных сігналаў (ЛАС), я пачаў даваць заданні на іх стварэнне.

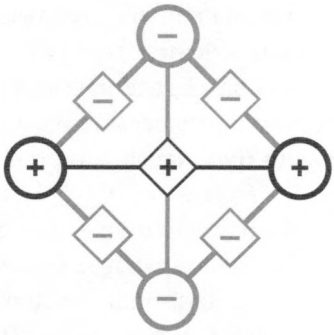
Вось і пры вывучэнні аперацый з дадатнымі і адмоўнымі лікамі прапанаваў скласці апору для множання–дзялення такіх лікаў. Гаворка, натуральна ж, ішла пра множанне знакаў, бо множанне модуляў ужо засвоілі.



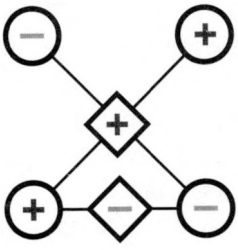
На наступным уроку нехта паказаў просценькую таблічку з трыццаці двух сігналаў. Пашукалі магчымасць спрасціць апору, зменшыць колькасць сігналаў. Заўважылі, што з улікам перамяшчальнага закона множання другі і чацвёрты радок дублююць адзін аднаго і на адным з іх можна зэканоміць. Яшчэ замянілі два выніковыя плюсы адным. Адкінулі знакі множання, бо і для дзялення схема працуе. Ніякага далейшага ўдасканалення не знайшлося. Спыніліся на такім варыянце, які справа (19 сігналаў).



Такое самае заданне даў студэнтам фізічна-матэматычнага факультэта, у якіх выкладаў методыку матэматыкі. Адзін з іх (Алесь Гайкоў) прынёс такую схему (18 сігналаў):

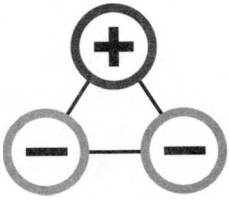


Знакі дадзеных лікаў месцяцца ў кружочках, знак іх здабытку ці дзелі шукаем у квадраціках пры руху насустрач. Схема Гайкова – несумненны крок наперад, яна кампактная і лёгказапамінальная. Гэта я і сказаў сваім "зяблікам" (клас 5-зэ). Вось, маўляў, што значыць думка студэнта. Меркаваў, што гэтым усё тут і закончыцца. Але нечакана адчуў нейкае супраціўленне. "Зяблікі" даволі крытычна паставіліся да схемы Гайкова, сказалі, што там шмат лішніх сігналаў. Напрыклад, множанне плюса на мінус паказана ажно чатыры разы. Вынікам спрашчэння стала вось такая фігура (12 сігна-



лаў). Мне яна падалася менш запамінальнай, але "зяблікі" былі задаволеныя сваім удзелам, і я прызнаў, што для гэтай задаволенасці ёсць падставы.

Назаўтра перад урокам Саша Крысін падышоў і паведаміў, што схему з знакамі можна яшчэ спрасціць. "Прынясеш ідэю на гурток", – спачатку адказаў я, каб не траціць на гэта час урока. Але ўбачыўшы, што таго аж распірае ад жадання выказацца, прапанаваў яму паказаць новую схему на ўроку. Вучань намаляваў на дошцы тры кругі, два сінія і адзін чырвоны, паставіўшы ў сініх кругах мінусы, а ў чырвоным – плюс.



"Мінус на мінус, – ён закрыў рукамі два мінусы, – будзе плюс, мінус на плюс, – закрыў кружочкі з мінусам і плюсам, – будзе мінус. А плюс на плюс мы і ў першым класе ўмелі множыць".

Клас адрэагаваў воплескамі. Не стрымаўся і я, далучыўся да апладысментаў. Так гэтая схема і пачала называцца ў нас схемай Гайкова–Крысіна.

Пазней, калі мы пакруцілі гэтую схему на гуртку, знайшлі ёй яшчэ адно дастасаванне. Акрамя правіла знакаў пры множанні і дзяленні лікаў, тут змяшчаецца правіла модуляў пры складанні такіх лікаў: пры складанні двух адмоўных лікаў (закрываем два мінусы, бачым плюс) іх модулі складваюцца, а пры складанні двух лікаў з рознымі знакамі (закрываем мінус і плюс, бачым мінус) іх модулі адымаюцца – ад большага меншы. А складваць два дадатныя лікі, сказаў бы Саша Крысін, мы і ў першым класе ўмелі. Для знака сумы схема не патрэбная, там заўсёды знак ліку з большым модулем.

Раю настаўнікам на пачатку выканання дзеянняў з дадатнымі і адмоўнымі лікамі павесіць у класе малюнак з схемай Гайкова–Крысіна.
Гэта паскорыць засвойванне гэтых дзеянняў. Праверана!

Дзяленне, як ужо сказана, не заўсёды выконваецца ў мностве цэлых лікаў. І тады ўзнікае пытанне пра распазнаванне такой магчымасці – г. зн. пра прыкметы падзельнасці.

Папулярныя прыкметы – на 2^n, на 5^n (калі лік, утвораны апошнімі n лічбамі дадзенага ліку дзеліцца на 2^n ці на 5^n, то і дадзены лік дзеліцца на той самы лік) і на 3 (калі сума лічбаў дадзенага ліку дзеліцца на 3, то і сам лік дзеліцца на 3, тое самае і пры дзяленні на 9).

Аргументацыя грунтуецца на трох тэарэмах:

Натуральна ж, першыя дзве тэарэмы прыдатныя і для рознасці.

1) **тэарэма падзельнасці сумы** (калі кожны складнік кратны нейкаму ліку, то і сума кратная гэтаму ліку);

2) **тэарэма непадзельнасці сумы** (калі адзін складнік не кратны нейкаму ліку, а ўсе астатнія яму кратныя, то сума не кратная гэтаму ліку);

3) **тэарэма падзельнасці здабытку** (калі адзін з множнікаў кратны нейкаму ліку, то і здабытак кратны гэтаму ліку).

Доказы ў 5 класе можна праводзіць на канкрэтных ліках у варыянце, які прыдатны і для агульных разважанняў. Напрыклад, для падзельнасці на 2 і на 5.

$$8376 = 837 \times 10 + 6$$

Першы складнік дзеліцца на 2 і на 5, бо адзін з множнікаў (10) дзеліцца на гэтыя лікі. Таму паводле тэарэмаў аб падзельнасці-непадзельнасці сумы вынік залежыць ад апошняга складніка. А гэта – апошняя лічба дадзенага ліку.

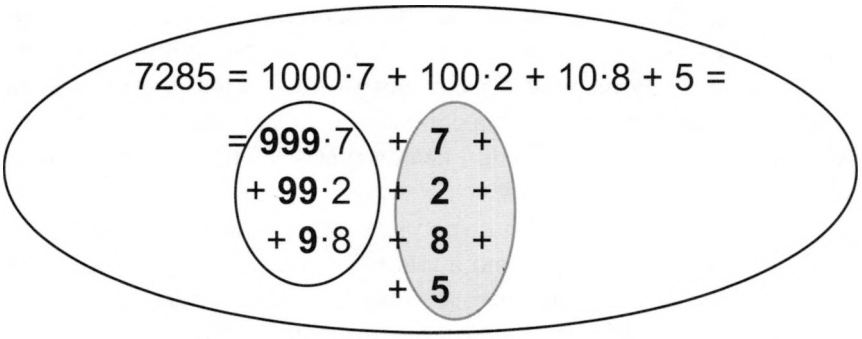
Калі пры вывучэнні тэмы "Дзяленне з астачай" добра адпрацаваны запіс ліку з лічбай m на канцы ($10 \times n + m$), то можна доказ правесці і ў агульным выглядзе.

Увогуле тэма "Прыметы падзельнасці" вельмі прыдатная для таго, каб паказаць вучням сутнасць матэматычных разважанняў, структуру матэматычнай тэорыі, паказаць, як з адных сцверджанняў вынікаюць іншыя, і г. д.

Паглядзім на доказ прыкметы падзельнасці на 3 (на 9). Слова доказ не выдзяляю двукоссем, хаця разважанне будзе паказана на канкрэтным ліку, яно прыдатнае і ў агульным выглядзе пры замене канкрэтных лічбаў на літары.

Адпаведны ліст апорных сігналаў (ЛАС), распрацаваны Віктарам Шаталавым і паказаны ніжэй, можна агучыць прыкладна наступным чынам.

Раскладзём дадзены лік 7285 па разрадах: сем тысяч плюс дзве сотні плюс восем дзясяткаў плюс пяць адзінак. Гэта адпаведна перамяшчальнаму закону множання можна сказаць іначай: 1000 сямёрак (аддзелім адну сямёрку) плюс 100 двоек (аддзелім адну двойку) плюс 10 васьмёрак (аддзелім адну васьмёрку) плюс пяць. І аб'яднаем атрыманыя складнікі ў дзве групы – у адной групе складнікі з дзявяткамі, у другой групе астатнія складнікі. Сума лікаў першай групы кратная тром (і дзевяці), бо кожны яе складнік кратны тром (і дзевяці). Тады выяўляецца, што пытанне пра падзельнасць усёй сумы на 3 або на 9 залежыць ад другой групы, якая ўяўляе сабой суму лічбаў дадзенага ліку. У выніку маем: **калі сума лічбаў дадзенага ліку дзеліцца на 3 (на 9), то і сам лік дзеліцца на 3 (на 9)**.



Можна паведаміць вучням, ужо без доказу, і "сакрэтную" (непраграмную) інфармацыю – прымету падзельнасці на 11: калі сума лічбаў ліку, узятых з пераменнымі знакамі, кратная 11, то і сам лік кратны 11. Напрыклад, каб высветліць падзельнасць на 11 ліку 29 172, трэба вылічыць суму 2 – 9 + 1 – 7 + 2. Яна роўная -11, таму дзеліцца на 11. А значыць, і сам лік 29 172 падзеліцца на 11.

Падзельнасць на іншыя лікі можна высвятляць з апораю на вышэйназваныя тэарэмы. Напрыклад, каб высветліць, ці падзеліцца на 7 лік 855, разаб'ём яго на складнікі 700 + 140 + 15. Два першыя складнікі відавочна на 7 дзеляцца (таму іх і вылучалі), апошні

не дзеліцца, таму 855 на 7 не падзеліцца. Можна нават дадаць, што пры такім дзяленні астачай будзе 1. А таму лік, меншы на 1 ці большы на 6, падзеліцца на 7.

Вучні звычайна лёгка пагаджаюцца з тым, што дзяліць, напрыклад, 5 на нуль нельга. Але нуль на нуль у іх дзеліцца: будзе нуль. Як пераканаць, што і нуль нельга дзяліць на нуль?

Варта тут успомніць азначэнне: каб падзяліць A на B, трэба знайсці лік C, пры множанні якога на B атрымаецца A. Такім чынам, дзяленне правяраецца праз множанне.

$5 : 0 = ? \rightarrow 0 \times ? = 5$. І не існуе ліку, які можна паставіць на месца пытальніка.

$0 : 0 = ? \rightarrow 0 \times ? = 0$. Цяпер жа на месца пытальніка можна паставіць любы лік. І незразумела, які з іх выбраць. Тады лепш не выбіраць ніякі.

Лікі, якія маюць роўна два дзельнікі, называюць **простымі**, а якія маюць больш, чым два дзельнікі, – **састаўнымі**. 1, як кароль гэтага каралеўства, не ўваходзіць ні ў партыю простых, ні ў партыю састаўных лікаў. Кароль (ці прэзідэнт, ці дырэктар, а ўвогуле любы іншы кіраўнік нейкага соцыюму) не павінен уваходзіць ні ў якую партыю (частку гэтага соцыюму), як тут, або ўваходзіць ва ўсе партыі: 1 і трохкутны лік, і квадратны, і кубічны ды іншы ступенны лік.

Простыя лікі: 2 (адзіны цотны і самы меншы сярод іх), 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23... Цікава, які апошні ў гэтым шэрагу? Ёсць прыгожае разважанне пра тое, што апошняга не існуе, г. зн. што шэраг простых лікаў бясконцы. Калі дапусціць, што апошні (самы вялікі) просты лік існуе (назавем яго P), тады разгледзім лік X на 1 большы за здабытак усіх простых лікаў ($X = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times ... \times P + 1$). Паколькі X большы за P, тады X павінен быць састаўным, а значыць павінен дзяліцца на нейкі просты лік. Але пры дзяленні на любы з простых лікаў ён дае астачу 1. Гэты парадокс і прыводзіць да высновы, што наша дапушчэнне непраўдзівае. І таму: найбольшага простага ліку няма.

Некаторы час многія людзі шукалі формулу простых лікаў – формулу, па якой можна разлічыць, які просты лік будзе сотым па ліку ці 397-м. Некаторыя шукаюць такую формулу і цяпер. Але большасць усё ж схіляюцца да таго, што такой формулы не існуе.

Мабыць, у мностве простых лікаў ніякага парадку няма. Ці мы яшчэ таго парадку не заўважылі?

Састаўныя лікі раскладваюцца ў здабытак двух ці болей простых лікаў. Гэтае раскладанне скарыстоўваюць пры знаходжанні найбольшага агульнага дзельніка (НАД) ці найменшага агульнага кратнага (НАК) некалькіх лікаў. А НАК (як найменшы агульны назоўнік) звычайна шукаюць пры складанні звычайных дробаў. Там пра гэта і пагаворым.

3. РАЦЫЯНАЛЬНЫЯ ЛІКІ

У мностве цэлых лікаў заўжды выканальныя аперацыі (дзеянні) складання-адымання і множання. А вось пры дзяленні цэлых лікаў не заўсёды атрымліваецца цэлы лік. Узнікае патрэба пашырыць лікавае мноства, каб стала выканальным і дзяленне.

Лікі, атрыманыя пры дзяленні цэлых m і n (варыянты запісаў – $m : n$, m / n або $\frac{m}{n}$) пры ўмове, што дзельнік не нуль ($n \neq 0$), называюць **рацыянальнымі** лікамі (ад лацінскага *rationalis* – разумны).

У беларусаў ёсць выраз "ты маеш рацыю" – так кажуць, калі пагаджаюцца з суразмоўцам: твая праўда, твае аргументы разумныя.

Лік -5 рацыянальны, бо -5 атрымліваецца дзяленнем цэлых лікаў, напрыклад -5 на 1: $-5 = -5 : 1 = -10 : 2 = 30 : (-6) = ...$ (заўважым, што такіх дзеляў шмат); лік 0 рацыянальны, бо 0 ёсць дзель цэлых лікаў: $0 = 0 : 8 = 0 : 10...$; лік $3\frac{4}{7}$ рацыянальны, бо $3\frac{4}{7} = 25 : 7 = 50 : 14 = ...$; лік -2,73 рацыянальны, бо $-2{,}73 = -273 : 100$. Такім чынам, рацыянальныя лікі – гэта ўсе цэлыя лікі, усе звычайныя і канцыя дзесятковыя дробы.

Самыя знакамітыя дробныя лікі: 36,6 – норма тэмпературы чалавечага цела, -273,15 – абсалютны тэмпературны нуль па шкале Цэльсія (ніжэйшай тэмпературы не існуе). Паводле шкалы Кельвіна гэта і ёсць нуль.

Самыя папулярныя дробныя лікі маюць невялікі назоўнік: 1/2 (палова), 1/3 (траціна), 1/4, 3/4 (чвэртка, тры чвэрткі); або назоўнік выяўлены ступенню дзясяткі: 1/10 (дзесяціна; раней такі падатак з свайго даходу плацілі людзі на карысць царквы; таксама старажытная мера плошчы – квадрат з бакамі па 1/10 вярсты; вярста крыху большая за кіламетр, таму дзесяціна – крыху большая за гектар); 1/100 – адсотак, або працэнт, ад лацінскага *pro zentum* – на сто, абазначаецца знакам %; цэнтыметр, як сотая доля метра, у нашай мове перастварылася ў сантыметр; 1/1000 – праміле, ад лацінскага *pro*

mille – на тысячу, абазначаецца знакам ‰, адсюль міліграм – як тысячная доля грама, міліметр – як праміле метра, 1 мм = 1 ‰ м, 1 мл (мілілітр) = 1 ‰ л.

Пры павелічэнні лічніка дадатны дроб павялічваецца, а пры павелічэнні назоўніка – памяншаецца. Гэтую акалічнасць скарыстаў Леў Талстой у сваім выказванні: "Чалавек ёсць дроб. Лічнік – гэта, параўнальна з іншымі, вартасці чалавека, назоўнік – гэта ацэнка чалавекам самога сябе. Павялічыць свой лічнік – свае вартасці – чалавек не можа, але ўсякі можа зменшыць свой назоўнік – сваё меркаванне пра самога сябе, і гэтым змяншэннем наблізіцца да дасканаласці". Мабыць, трэба разумець, што дасканаласць дробу-чалавека ў разуменні пісьменніка – гэта адзінка, то-бок дроб, у якога лічнік і назоўнік роўныя.

СКЛАДАННЕ ЗВЫЧАЙНЫХ ДРОБАЎ. Варыянт Мікалая Ламазы

Множанне і дзяленне звычайных дробаў засвойваюцца хутчэй, чым іх складанне-адыманне. Там варта толькі навучыць своечасова скарачаць дробы. Таму тут засяродзімся на складанні (яно ж і адыманне).

Пачаць можна з такіх дзіўных пытанняў.

2 кнігі + 5 кніг – гэта 7 кніг. А калі 2 кнігі + 5 альбомаў? Ці 2 асадкі + 5 алоўкаў? Можна для асадкаў і алоўкаў знайсці нейкую агульную назву. Напрыклад, пісальнікі. Тады 2 пісальнікі + 5 пісальнікаў – 7 пісальнікаў. Зразумеем, што складваць (і адымаць) можна толькі падобныя рэчы: яблыкі з яблыкамі, дрэвы з дрэвамі, машыны з машынамі. Адпаведна далей будзе прывядзенне падобных: 2 м + + 5 м = 7 м, 12 x – 9 x = 3 x, 3 *абв* + 2 *абв* = 5 *абв*. Але 2 *ю* + 3 *я* або 7 *ну* – – 5 *но* так і застануцца 2 *ю* + 3 *я* і 7 *ну* – 5 *но*, бо там найменні непадобныя.

Тады 2 сёмыя + 3 сёмыя = 5 сёмых паводле прынцыпу складання падобных. А 2 дзявятых і 1 шостую нельга скласці з прычыны непадобнасці найменняў. Але тут можна пашукаць агульнае найменне (агульны назоўнік), успомніўшы, што кампаненты дробу можна змяняць, не змяняючы велічыні дробу. І далей настаўнік паказвае, як той агульны назоўнік знаходзяць раскладаннем кожнага назоўніка на простыя множнікі.

Здавалася б, якія могуць быць адкрыцці пры навучанні аперацыям са звычайнымі дробамі? Але магілёўскі настаўнік Мікалай Якаўлевіч Ламаза некалі змог здзівіць мяне сваім падыходам.

Гаворка ідзе пра складанне-адыманне звычайных дробаў з вялікімі назоўнікамі. Сама па сабе гэтая аперацыя для масавай практыкі малакарысная, і таму маюць нейкую рацыю настаўнікі, якія не вельмі рупліва адпрацоўваюць гэты навык у сваіх вучняў ці нават цалкам ігнаруюць вялікія назоўнікі. Але некаторым з іхных вучняў, хто намерваецца стаць студэнтам, для чаго ім давядзецца здаваць матэматыку, узнікне патрэба засвоіць аперацыі з алгебраічнымі дробамі на больш грунтоўным узроўні. І тут разуменне сутнасці адпаведных аперацый з лікавымі дробамі вельмі дапаможа. А алгарытм, "сканструяваны" Мікалаем Ламазам, і вылучае гэтую сутнасць, робіць яе відавочнай.

Як звычайна мы выконваем, напрыклад, такія вылічэнні:

$$\frac{11}{72}+\frac{7}{270}-\frac{13}{450}\,?$$

Раскладваем паасобку кожны назоўнік на простыя множнікі і па найбольшых ступенях атрыманых множнікаў збіраем агульны назоўнік. Потым дзяленнем агульнага назоўніка на назоўнік кожнага дробу знаходзім дадатковыя множнікі для лічнікаў і г. д.

М. Ламаза прапануе рабіць тое самае, але не паасобку, а разам.

Паставім пасля апошняга назоўніка вертыкальную рысу і будзем запісваць справа ад яе простыя множнікі, на якія дзеліцца ***хаця б адзін*** з назоўнікаў, а ***насупраць*** злева – вынікі такога дзялення, ставячы прочырк насупраць таго назоўніка, які на пазначаны лік не дзеліцца (гэта можна рабіць і на падкладзенай паперцы). Першае дзяленне – на 2. Вынік дзялення: 36, 135, 225. Другое дзяленне – на 2. Вынік дзялення: 18 і два прочыркі. І гэтак далей, да моманту, калі ў кожным слупку атрымаюцца адзінкі. Атрыманы справа ад вертыкальнай рысы слупок змяшчае ўсе простыя множнікі **агульнага** назоўніка: $2^3 \times 3^3 \times 5^2 = 5400$.

$\frac{11}{72}+\frac{7}{270}-\frac{13}{450}=$

36	135	225	←2
18	–	–	←2
9	–	–	←2
3	45	75	←3
1	15	25	←3
–	5	–	←3
–	1	5	←5
–	–	1	←5

Каб знайсці цяпер дадатковыя множнікі да лічнікаў, не абавязкова

дзяліць 5400 на кожны з назоўнікаў. Знаходзіцца іншае дзеянне – перамножыць тыя лікі правага слупка, насупраць якіх пад дадзеным дробам стаяць прочыркі: да першага лічніка дадатковы множнік – $3 \times 5 \times 5 = 75$, да другога – $2 \times 2 \times 5 = 20$, да трэцяга – $2 \times 2 \times 3 = 12$. Атрымалі:

$$\frac{11}{72} + \frac{7}{270} - \frac{13}{450} = \frac{11 \cdot 75 + 7 \cdot 20 + 13 \cdot 12}{5400} =$$

Далей – традыцыйна...

Ці ж не праўда, зручней? І шмат што спрашчаецца.

Гэткім чынам мы знаходзім найменшае агульнае кратнае дадзеных лікаў.

НАК (72; 270; 450) = 5400.

Калі ж паўстане пытанне пра найбольшы агульны дзельнік, то дастаткова выбраць лікі з правага слупка, насупраць якіх няма прочыркаў.

НАД (72; 270; 450) = $2 \times 3 \times 3 = 18$.

Падзякуем разумнаму настаўніку за цікавую і карысную ідэю.

УЗАЕМНА АДВАРОТНЫЯ АПЕРАЦЫІ

Для кожнай матэматычнай аперацыі (матэматычнага дзеяння) звычайна разглядаюць аперацыі адваротныя. Для складання адваротная аперацыя – адыманне. Для адымання адваротная аперацыя?.. Хочацца сказаць: складанне. Але спачатку засяродзімся на тым, што такое адваротная аперацыя.

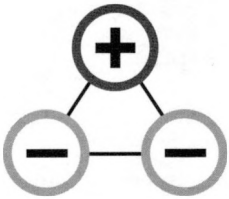
Калі ў аперацыі ўдзельнічаюць толькі два аб'екты, то тут усё проста. Напрыклад, стаіць чарга ў касу (у краме, у тэатры, у цырку...). І трэба вызначыць, хто за кім або (адваротна) хто перад кім, то зразумела: калі А за Б, то адваротна Б перад А.

Але пры складанні ўдзельнічаюць тры лікі (два складнікі і сума). Адваротным дзеяннем будзе пошук невядомага складніка пры вядомых суме і другім складніку. Тут неістотна, які з складнікаў невядомы, бо іх можна мяняць месцамі, сума ад гэтага не зменіцца. У любым выпадку адваротным дзеяннем будзе адыманне.

А цяпер прыгледзімся да адымання.

$8 - 5 = 3$. Тут 8 і 5 месцамі не памяняеш. Таму пошук невядомага кампанента адымання мае два варыянты: $\blacksquare - 5 = 3$ або $8 - \blacksquare = 3$.

У першым выпадку невядомы лік знаходзіцца складаннем, у другім – адыманнем. Такім чынам, для адымання адваротных аперацый існуе дзве – складанне і адыманне.



Успомнім схему Гайкова–Крысіна, якая і тут прыдасца:

Для складання (закрываем плюс, бачым два мінусы) адваротныя дзеянні – адыманне і адыманне. Для адымання (закрываем мінус, бачым плюс і мінус) адваротныя дзеянні – складанне і адыманне.

Аналагічна атрымаем: адваротныя дзеянні для множання – дзяленне і дзяленне, для дзялення – множанне і дзяленне.

Калі з'явіцца аперацыя ступенявання (узвядзення ў ступень), то ў ёй таксама бяруць удзел тры лікі (аснова, паказнік, ступень). Таму аперацыямі, адваротнымі для ступенявання, будуць дзве: пошук невядомай асновы = здабыванне кораня і пошук невядомага паказніка = лагарыфмаванне.

$$2^3 = 8 \rightarrow \blacksquare^3 = 8 \ (\sqrt[3]{8} = 2); \ 2^{\blacksquare} = 8 \ (\lg_2 8 = 3).$$

Тады для здабывання кораня адваротнымі аперацыямі стануць ступеняванне і лагарыфмаванне, а для лагарыфмавання адваротныя аперацыі – ступеняванне і здабыванне кораня.

Гэтыя тры аперацыі ўзаемазвязаныя, таму вывучэнне іх карысна рабіць паралельна. Здабыванне кораня і знаходжанне лагарыфмаў варта паказаць амаль адразу, як пачалося вывучэнне ступеняў і іх уласцівасцяў.

Разумную ідэю супольнага вывучэння ўзаемна адваротных аперацый вылучыў і адстойваў у свой час калмыцкі прафесар, доктар педагагічных навук Пюрвя Эрдніеў.

4. РЭЧАІСНЫЯ ЛІКІ

Трэба памераць таўшчыню стальніцы (крышкі стала). Прыкладваем лінейку і вызначаем: 2,6 см. Калі скарыстаем больш дакладны вымяральны інструмент (напрыклад, штангенцыркуль), то атрымаем яшчэ адну лічбу: 2,63 см. Калі ў руках з'явіцца яшчэ больш дакладны інструмент, то лік дапоўніцца яшчэ адной лічбай, напрыклад, 2,628 см. І з кожным усё больш дакладным вымярэннем будзем атрымліваць новыя лічбы ліку, сярод якіх можа быць і нуль, але і ён не будзе апошнім. Такім чынам, лічбы, якія з'яўляюцца ў чалавечай вымяральнай практыцы, уяўляюць сабой бясконцыя дзесятковыя дробы. Цалкам іх запісаць немагчыма. Але і не трэба. Бо чалавеку ўсе тыя лічбы непатрэбныя. Ён працуе з нейкімі іх прыбліжанымі значэннямі. Для таўшчыні стальніцы звычайна дастаткова адной лічбы пасля коскі, у асобных выпадках – дзвюх. Далейшыя лічбы чалавека не цікавяць. Ён іх адкідае па правілах акруглення лікаў.

Распрацавана грунтоўная тэорыя прыбліжаных вылічэнняў, якая дазваляе сачыць за магчымымі адхіленнямі ад дакладнага значэння велічыні, бо пры выкананні дзеянняў з прыбліжанымі лікамі, асабліва пры множанні і дзяленні хібнасць істотна нарастае. Пры множанні двухскладаў $(X \pm \Delta X)$ і $(Y \pm \Delta Y)$ атрымаем чатырохсклад, у якім гэтае Δ (дэльта, магчымае адхіленне) будзе прысутнічаць ажно ў трох складніках.

Але тут гэтую тэорыю разглядаць не будзем. Закранем толькі лікавыя акругленні.

АКРУГЛЕННЕ ЛІКАЎ

Калі пры акругленні адкідаюцца лічбы, першая з якіх 5 ці вышэй, то да апошняй лічбы з тых, што застаюцца, дадаецца 1. У іншых выпадках апошняя лічба дый усе іншыя не змяняюцца. Адкінутыя лічбы **знікаюць**, а не замяняюцца нулямі, як гэта дзе-нідзе ў падручніках паказваецца.

Прыклады:

28 950,972 ≈ 28 950,97 (акруглена да сотых) ≈ 28 951,0 (акруглена да дзясятых, і тут апошні нуль адкідаць нельга, бо тады лік стане акругленым да адзінак: 28 951) ≈ 2 895 дзяс. (акруглена да дзясяткаў, нельга тут напісаць ≈ 28 950, бо тады гэта стане няправільным акругленнем да адзінак) ≈ 290 сот. (акруглена да сотняў, адкінутыя лічбы заменены словам, нельга іх замяніць нулямі) ≈ 29 тыс. (а не 29 000) ≈ 3 дзяс. тыс.

У сродках масавай інфармацыі і ў рознай літаратуры часта падаюцца лікі з словамі.

Напрыклад, насельніцтва Францыі складае 67 млн чалавек – тут лік пададзены з акругленнем да мільёна, г. зн. памылка ў адзін ці другі бок можа быць не болей за 500 000; так у матэматыцы, але на практыцы лічаць дапушчальным адхіленне ў 1 мільён, бо колькасць насельніцтва лік рухомы, зменлівы.

Або: насельніцтва Магілёва складае 3814 сот. чалавек – тут лік пададзены з дакладнасцю да сотні, магчымае адхіленне не можа перавышаць 50 (на практыцы ±100). Нельга запісаць, што насельніцтва Магілёва складае 381 400 чалавек, бо гэта выглядае на дакладны лік, а не прыбліжаны. А як прачытаць такі запіс? У Магілёве жыве 381 тысяча і 4 сотні чалавек.

У гаспадарцы сабрана 126,0 тон бульбы. Тут нуль дарэчы, бо ён паказвае акругленне да дзясятых (±0,1 т), гэта значыць, што лік, паказаны ў справаздачы гаспадаркі, дапускае памылку не болей за 1 цэнтнер. Калі яго не напісаць (сабрана 126 тон бульбы), то лік ужо паказаны менш дакладна, з больш грубым акругленнем да тоны (±1 т).

Акругляйце правільна.

ПЕРЫЯДЫЧНЫЯ ДРОБЫ

Бясконцыя дзесятковыя дробы могуць быць перыядычнымі, калі нейкая група лічбаў, названая перыядам, паўтараецца бясконца. Перыядычныя дробы могуць быць чыстымі, калі перыяд пачынаецца адразу пасля коскі, або змешанымі, калі паміж коскай і перыядам ёсць некалькі іншых лічбаў.

Прыклады:

0,7777777..., 15,375375375..., 6,142857142857142857... – чыстыя перыядычныя дробы.

0,127777..., 15,0375375..., 6,140142857142857142... – змешаныя перыядычныя дробы.

Для спрашчэння запісу перыядычных дробаў перыяд (паўтаральную групу лічбаў) запісваюць адзін раз, узяўшы ў дужкі. Для паказаных вышэй лікаў гэты выглядае так: 0,(7); 15,(375); 6,(142857); 0,12(7); 15,0(375); 6,140(142857).

У кожным разе перыядычны дроб з'яўляецца рацыянальным лікам, яго можна пераўтварыць у звычайны дроб з цэлымі лічнікам і назоўнікам. Чыстыя перыядычныя дробы пераводзяцца ў звычайныя дробы проста: перыяд запісваюць у лічніку, а ў назоўніку запісваюць дзявяткі паводле колькасці, роўнай колькасці лічбаў у перыядзе.

$$0,(7) = \frac{7}{9} \text{ (праверце, падзяліўшы 7 на 9);}$$

$$15,(375) = 15\frac{375}{999} = 15\frac{125}{333} = \frac{5120}{333};$$

$$6,(142857) = 6\frac{142857}{999999} = ...$$

Абгрунтаванне такога працэсу будзе дадзена пры вывучэнні геаметрычнай прагрэсіі.

Адзначым, што 0,(9) – гэта адзінка: $0,(9) = \frac{9}{9} = 1$, таму 9 у перыядзе звычайна не сустракаецца. 6,26(9) = 6,27; 51,00(9) = 51,01.

Змешаныя перыядычныя дробы пераводзяцца ў звычайныя дробы крыху даўжэй (праз выхад на чыстыя перыядычныя дробы):

$$0,12(7) = 12,(7) : 100 = 12\frac{7}{9} : 100 = \frac{115}{9} : 100 = \frac{115}{900} = \frac{23}{180}.$$

$$15,0(375) = 150,(375) : 10 = 150\frac{375}{999} : 10 = 150\frac{125}{333} : 10 = \frac{50075}{3330} = \frac{10015}{666}$$

Любы канцы дзесятковы дроб можна лічыць перыядычным дробам з нулём або дзявяткай у перыядзе: 4,25 = 4,25000... = 4,25(0) = = 4,24(9). І нават цэлы лік можна лічыць бясконцым перыядычным дробам: 5 = 5,(0) = 4,(9).

ІРАЦЫЯНАЛЬНЫЯ ЛІКІ

Але калі дзесятковы дроб бясконцы і неперыядычны, то яго ўжо нельга паказаць звычайным дробам з цэлымі лічнікам і назоўнікам. Такія лікі называюць ірацыянальнымі (неразумнымі).

Пазнаёмімся з адным такім лікам, каб пераканацца, што такія лікі існуюць. Няхай трэба вылічыць даўжыню X дыяганалі квадрата з стараной 1. Адпаведна тэарэме Піфагора (квадрат гіпатэнузы прамавугольнага трохвугольніка роўны суме квадратаў яго катэтаў) атрымаем $X^2 = 2$.

Калі дапусціць, што X – лік рацыянальны і такім чынам можа быць запісаны звычайным дробам $\frac{m}{n}$ з цэлымі лічнікам і назоўнікам, то выберам з такіх дробаў (іх жа шмат: $\frac{m}{n}$, $\frac{2m}{2n}$, $\frac{3m}{3n}$...) той, які нескарачальны. $(\frac{m}{n})^2 = 2$. Тады атрымаем: $m^2 = 2 \times n^2$, адкуль вынікае, што m – цотны лік, г. зн. $m = 2 \times k$, дзе k – цэлы. Маем: $(2 \times k)^2 = 2 \times n^2$ і пасля скарачэння роўнасці на 2 атрымаем $2 \times k^2 = n^2$, з чаго вынікае, што і n – цотны лік. Калі m і n – цотныя лікі, тады дроб $\frac{m}{n}$ можна скараціць хаця б на 2. Але ж мы выбіралі дроб нескарачальны. Гэты парадокс сведчыць пра тое, што наша дапушчэнне непраўдзівае, а таму лік X не можа быць рацыянальным.

Досыць прыгожае разважанне. І яго варта паказаць вучням менавіта дзеля таго, каб яны адчулі прыгажосць мыслення. Тое самае датычыць і тэарэмы пра бясконцасць мноства простых лікаў. Увогуле прыгожыя разважанні (кароткія, імклівыя, з празрыстай даходлівай аргументацыяй) варта паказваць вучням нават тады, калі тыя разважанні не прадугледжаны праграмай. І тут настаўнік павінен стаць крыху артыстам, ён сам павінен любавацца на такое цячэнне думкі, здзіўляцца фіналу, нібыта для яго нечаканаму. Гэтыя эмоцыі вучні могуць заўважыць, адчуць і захапіцца імі.

Такім чынам, знайшоўся адзін ірацыянальны лік

$\sqrt{2}$ = 1,414 213 562 373 095 048 801 688 724...

Можна прапанаваць вучням самім даказаць па аналогіі, што $\sqrt{3}$ ці $\sqrt{10}$ не з'яўляюцца рацыянальнымі лікамі.

І ўзнікае пытанне: а колькі іх, ірацыянальных? Адказ у матэматыцы ёсць: іх шмат, іх бясконца многа, іх болей, чым рацыянальных лікаў, хаця колькасць рацыянальных лікаў таксама бясконцая. Выяўляецца, што некаторыя бясконцасці можна параўноўваць. Але пра тое вучні даведаюцца тады, калі стануць студэнтамі адпаведных факультэтаў.

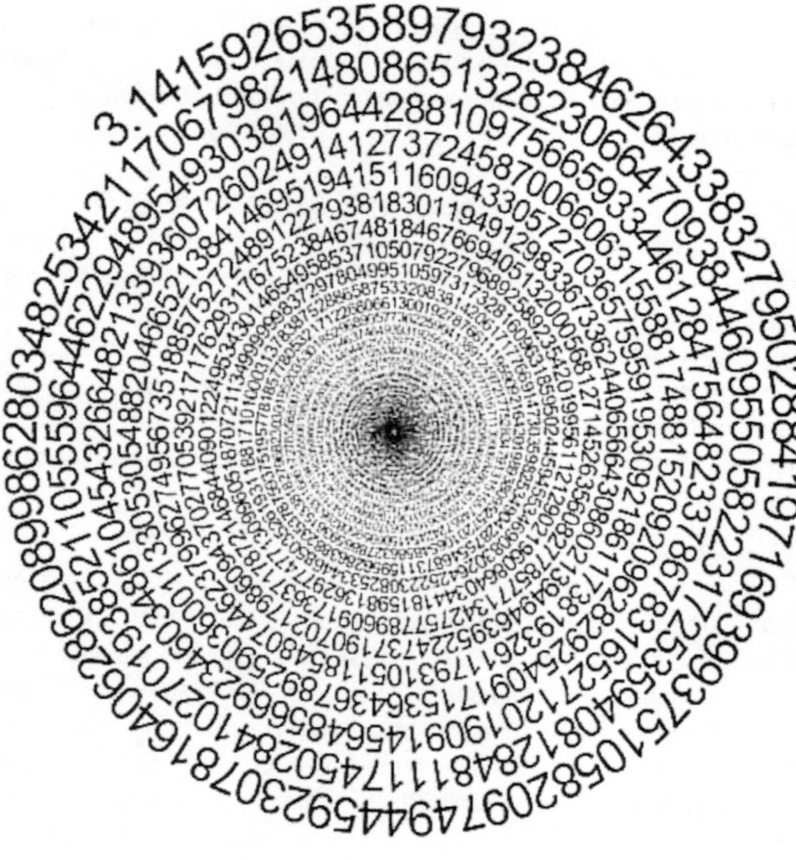
Самы знакаміты ірацыянальны лік абазначаецца грэцкай літарай π (пі), першай літарай імя Піфагора, які ўважліва і доўга даследаваў гэты лік, спрабуючы знайсці яму рацыянальны адпаведнік. Не знайшоў.

Адкуль гэты лік з'явіўся? Рэч у тым, што ён звязвае крывое з прамым. Дзель даўжыні С любой акружыны на даўжыню d яе дыяметра заўсёды роўна π (C : d = π або C = πd = 2 πR, дзе R – даўжыня радыуса). Апошняй формулай часцей карыстаюцца для вылічэння даўжыні акружыны пры дадзеным яе радыусе.

Лік π = 3,141 592 653 589 793 238 462 643 383 2795...

Цяпер вядомыя два квадрыльёны лічбаў гэтага ліку. Іх вызначылі японскія аператары з дапамогай сістэмы кампутараў. Такія веды для чалавечай практыкі не патрэбныя. Не толькі два квадрыльёны, нават сто знакаў ліку чалавек не будзе скарыстоўваць у сваёй практыцы. Сёння ў касмічных даследаваннях і пры разліку траекторый руху касмічных апаратаў выкарыстоўваюць 12 лічбаў. Магчыма, некалі будуць выкарыстоўваць 20-25. А навошта два квадрыльёны? Проста на вылічэнні ўсё больш дакладных значэнняў ліку π вызначаюць магутнасць кампутараў.

Шмат хто з матэматыкаў (не толькі Піфагор) шукалі рацыянальнае значэнне ліку π. Доўжылася гэта тысячагоддзі. Піфагор (следам за Франконам з Егіпта) лічыў такім значэннем дроб $\frac{22}{7}$ = 3,14285714... Потым пераканаўся, што гэта недакладна. Як бачна, тут толькі тры лічбы правільныя. Індускі матэматык V стагоддзя Ар'ябхата называў лік $\frac{377}{120}$ = 3,14166... У XII стагоддзі італьянец Леанарда Пізанскі (вядомы як Фібаначы) прымаў за π лік $\frac{864}{275}$ = 3,14181818... Адрыян Антоніс з Галандыі (XVI ст.) скарыстоўваў дроб $\frac{355}{113}$ = 3,1415929...



(тут, бачым, ужо 6 лічбаў правільных). У тым самым XVI стагоддзі Франсуа Віет назваў 9 дакладных лічбаў ліку π, а крыху пазней фламандзец Адрыян ван Ромэн ведаў ужо 15 дакладных лічбаў. На мяжы XVI і XVII стагоддзяў нідэрландскі матэматык Людольф ван Кёлен з дапамогай сваёй жонкі Адрыяны Сыманс разлічыў 35 правільных знакаў π і пакінуў запавет, каб іх высеклі на яго надмагільным камені. І толькі ў XVIII стагоддзі была даказана бясконцасць ліку π.

Калі паглядзець на геаграфію мясцін, дзе працавалі названыя матэматыкі (Егіпет, Грэцыя, Індыя, Францыя, Галандыя...) і на пазначаныя стагоддзі, то можна зразумець, якую ролю ў навуцы адыгрываў гэты інтрыгоўны лік, лік акружыны. Штогод 14 сакавіка адзначаецца

міжнародны дзень ліку "пі" (чаму 14 сакавіка? – бо яго традыцыйнае акругленне 3,14 і тут 3 – трэці месяц, 14 – чатырнаццаты дзень).

У рускай мове ёсць вершык, які дазваляе запомніць некалькі лічбаў ліку π, больш чым у традыцыйна школьным акругленні 3,14. У паказаным ніжэй варыянце паводле колькасці літар у слове:

Это (3) *я* (1) *знаю* (4) *и* (1) *помню* (5) *прекрасно* (9),
но (2) *многие* (6) *цифры* (5) *мне* (3) *лишни* (5), *напрасны* (8)...

Ведаючы гэты вершык, настаўнік можа здзіўляць вучняў сваёй нібыта незвычайнай памяццю.

Магчыма, нехта створыць штосьці падобнае ў беларускай мове. Пакуль такога аўтар гэтага тэксту не сустракаў.

Шмат цікавага пра гэты лік знойдзеце ў кнізе румынскага папулярызатара навукі Флорыкі Кымпана "Гісторыя ліку π" (Флорика Кымпан. История числа π. Москва: Наука, 1971).

Яшчэ адзін прыкметны ірацыянальны лік –

лік e = 2,718281 828 459 045 235 360...

Ён вызначаецца як ліміт n-й ступені дробу $(1 + \frac{1}{n})$ пры бясконцым павелічэнні ліку n. Гэты лік вызначыў швейцарскі матэматык Якаб Бэрнулі напрыканцы XVII стагоддзя пры разлічванні складаных працэнтаў для атрымання найбольшага даходу. Літару e для абазначэння ліку (першую літару свайго прозвішча) скарыстаў Леанард Ойлер (Euler; дыфтонг ***еи*** у нямецкай мове чытаецца як ***ой***) і гэты лік некаторы час называлі лікам Ойлера. Лік ***е*** стаўся вельмі зручным пры экспаненцыйных і лагарыфмічных вылічэннях і пераўтварэннях. Але пра гэта вучні даведаюцца, стаўшы студэнтамі.

І яшчэ адзін цікавы ірацыянальны лік, гучна названы "залатым сячэннем" або "боскай прапорцыяй".

Лік φ (фі) = 1,618 033 988 749 894 848...



Калі падзяліць адрэзак на часткі X і Y так, каб адносіна большай яго часткі да меншай была роўнай адносіне ўсяго адрэзка да

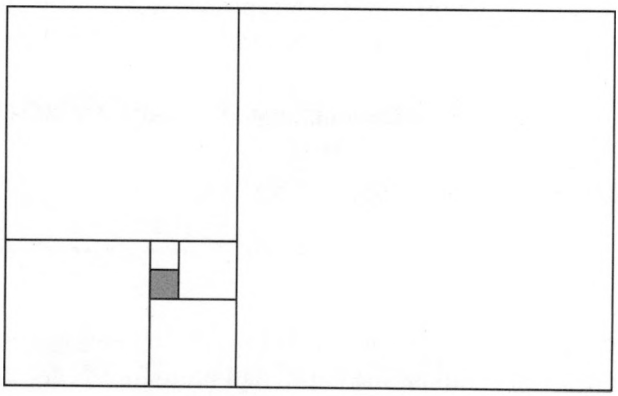
большай часткі, то такое дзяленне (адпаведна і лік $\frac{X}{Y}$) называюць "залатым сячэннем".

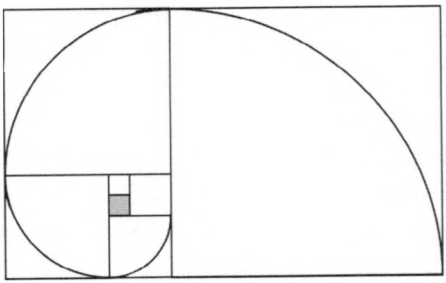
$\frac{X}{Y} = \frac{X+Y}{X} \rightarrow \frac{X}{Y} = 1 + \frac{Y}{X}$. Калі тут $\frac{X}{Y}$ абазначыць φ, то атрымаем раўнанне $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} \rightarrow \varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, адкуль $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Гэта і ёсць той "залаты" лік. Пра гэты ўнікальны лік вы знойдзеце шмат цікавай інфармацыі ў сеціве. "Залатое сячэнне" скарыстоўваецца і ў архітэктуры, і ў мастацтве (нездарма ж на яго звярталі ўвагу і Леанарда да Вінчы, і Сальвадор Далі, і Ле Карбюзье), і ў іншых сферах творчасці.

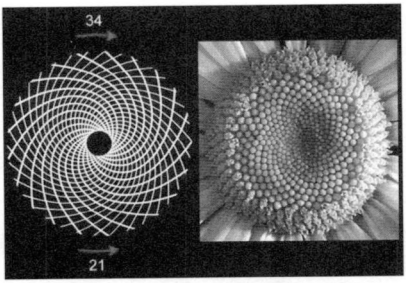
Прамавугольнік з суадносінай старон, роўнай φ, называюць залатым прамавугольнікам. Прыемна глядзяцца вокны менавіта з такой суадносінай старон (парада для тых, хто збіраецца будаваць свой дом). Калі ад такога прамавугольніка адрэзаць квадрат, то застанецца прамавугольнік з такой жа суадносінай старон.

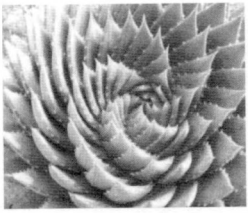
Залатым трохвугольнікам называюць раўнабокі трохвугольнік з суадносінай бакавой стараны да асновы, роўнай φ. Велічыні вуглоў такога трохвугольніка: 36° і два па 72°. Бісектрысай вугла пры аснове такі трохвугольнік падзяляецца на два раўнабокія трохвугольнікі, адзін з якіх зноў жа залаты. Залатыя трохвугольнікі ёсць на канцах правільнай пяціканцовай зоркі.

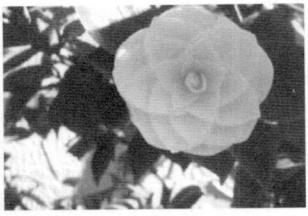
Возьмем квадрат з стараной 1 (на малюнку ніжэй ён выдзелены шэрым). Далучым да яго такі ж квадрат. Атрымаем прамавугольнік 1×2. Да большай яго стараны далучым квадрат.

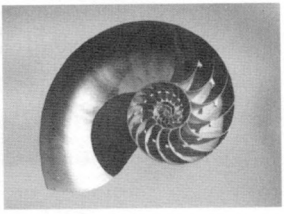




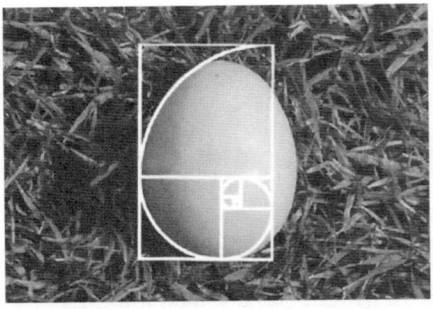


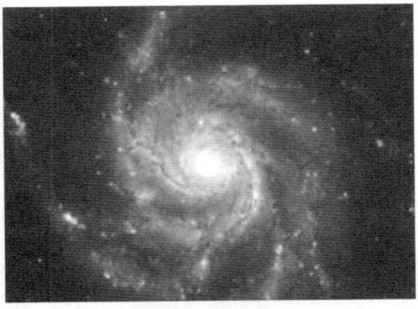






Залатыя спіралі ў прыродзе





Атрымаем прамавугольнік 2 × 3. Зноў да большай стараны атрыманага прамавугольніка далучым квадрат. І г. д.

Стораны атрыманых такім чынам квадратаў утвараюць паслядоўнасць: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21... Кожны лік у гэтай паслядоўнасці, пачынаючы з трэцяга, роўны суме двух папярэдніх.

Гэты лікавы шэраг, вядомы яшчэ індусам, заўважыў Леанарда Фібаначы Пізанскі (Фібаначы – сын Баначы, Пізанскі – бо з горада Пізы), калі спрабаваў падлічыць рост папуляцыі трусоў, пра што напісаў у кнізе "Liber Abaci" ("Кніга абака" або "Кніга арыфметыкі") у 1202 годзе. З тых часоў гэты лікавы шэраг носіць імя "шэраг Фібаначы". Адсюль і літара φ – першая літара прозвішча даследніка.

Пазней высветлілася, што гэты шэраг сустракаецца ў прыродзе неаднакроць.

Спіраль, утвораная чвэрткамі акружын, умежаных у такія квадраты, называюць спіраллю Фібаначы, ці залатой спіраллю.

Такую спіраль можна заўважыць на розных прыродных з'явах. Спіралі на большасці шышак, на ананасах адпавядаюць спіралі Фібаначы. Дзве спіралі, закручаныя ў супрацьлеглыя бакі, якія ўтвараюць семкі сланечніка, нагадваюць залатую спіраль.

Разгалінаванне дрэва і яго каранёвай сістэмы адбываецца ў паслядоўнасці, блізкай да паслядоўнасці Фібаначы. Абрысы птушынага яйка ўтвораны элементамі залатой спіралі. Прырода досыць багатая на такую спіральнасць.

Спіраль Фібаначы скарыстоўваюць мастакі і асабліва фотамастакі для стварэння найлепшага візуальнага эфекту ад кампазіцыі.

Прыгледзімся да шэрагу Фібаначы ўважлівей. Ацэнім суадносіну суседніх лікаў:

$$1 : 1 = 1;$$
$$2 : 1 = 2;$$
$$3 : 2 = 1{,}5;$$
$$5 : 3 = 1{,}666...;$$
$$8 : 5 = 1{,}6;$$
$$13 : 8 = 1{,}625;$$
$$21 : 13 = 1{,}615...$$

Можна заўважыць, што гэтая суадносіна з кожным крокам становіцца ўсё бліжэй да ліку φ. Ужо даказана, што ліміт бясконцай паслядоўнасці такіх суадносін сапраўды роўны φ. Цяпер становіцца зразумелым, чаму гэты лік так узнёсла названы: боская прапорцыя, залатое сячэнне. Ён звязаны з прыродай, з мастацтвам, з тым, што чалавек лічыць прыгожым.

Вось табе і "неразумныя" лікі!

Боскую прапорцыю можна знайсці і ў выяве чалавека, у структуры ягонага вуха, твару, пальца, фігуры. Паводле старажытных скульптураў, якія захаваліся, можна вызначыць, што адлегласць ад пяткі да пупка чалавека стасуецца з астатняй часткай яго росту ў боскай прапорцыі. Або так: стасунак росту чалавека да вышыні яго пупка ёсць залатое сячэнне. Калі гэтая прапорцыя парушана, то фігура чалаве-

ка выглядае менш прыгожа. На гэтай падставе адзін з выкладчыкаў некалі вучыў сваіх студэнтак правільна падбіраць вышыню абцаса – для кожнай сваю.

Выяўляецца, што "звяраць алгебрай гармонію" калі-нікалі і магчыма, і варта.

Вельмі багаты лік φ сваімі вартасцямі.

Пра яго больш падрабязна прачытаеце ў кнізе Мікалая Васюцінскага "Залатая прапорцыя" (Н. Васютинский. Золотая пропорция. Москва: Молодая гвардия, 1990).

Іншыя ірацыянальныя лікі не такія адметныя, як названыя тры.

Узнікае праблема: калі лік мае бясконцае мноства лічбаў, то яго цалкам нават запісаць немагчыма – і як тады выконваць дзеянні з такімі лікамі? Справа ў тым, што ўсе лічбы ліку чалавеку для яго практычнай дзейнасці непатрэбныя. Чалавек працуе з нейкімі прыбліжанымі значэннямі лікаў, якія атрымліваюцца акругленнем ліку да патрэбнага разраду і запісваюцца ў стандартным выглядзе, пра што асобны раздзел.

Аб'яднанне рацыянальных і ірацыянальных лікаў стварае мноства лікаў, якія называюць рэчаіснымі або сапраўднымі. А што, – спытаеце вы, – ёсць і несапраўдныя? Ёсць. Іх называюць уяўнымі. Але пра іх вучні даведаюцца стаўшы студэнтамі. Тут пра іх зусім коратка, каб паказаць як далей ідзе развіццё паняцця аб лікавых мноствах.

5. УЯЎНЫЯ ЛІКІ. КАМПЛЕКСНЫЯ ЛІКІ

Разгледзім аперацыю квадратавання (узвядзення ў квадрат) як прыватны выпадак ступенявання. Адваротнай ёй аперацыяй будзе здабыванне квадратнага кораня. Але калі квадратаванне выконваецца заўсёды, бо гэта множанне двух аднолькавых лікаў, а на множанне ніякіх абмежаванняў няма, то здабыванне квадратнага кораня мае абмежаванні: квадратны корань здабываецца толькі з неадмоўных лікаў. Таму ў мноства рэчаісных лікаў раўнанне $X^2 = -1$ не мае развязкаў.

Тады ўзнікае патрэба пашырыць лікавае мноства. Лік, квадрат якога роўны -1, назвалі ўяўнай адзінкай, гэты лік сталі абазначаць літарай ***i***.

$i = \sqrt{-1}$, тады $\sqrt{-9} = \sqrt{9} \times \sqrt{-1} = 3i$; $\sqrt{-5} = \sqrt{5} \times \sqrt{-1} = i\sqrt{5}$...

Увогуле ўсе ўяўныя лікі роўныя $c \times i$, дзе c – лік рэчаісны. А суму $a \times 1 + c \times i$, дзе a і c – рэчаісныя лікі, называюць камплéксным лікам.

Італьянскія матэматыкі XVI стагоддзя, якія сутыкнуліся з неабходнасцю скарыстаць такія лікі пры развязванні раўнанняў 3-й і 4-й ступеняў, усё ж лічылі іх бескарыснымі, нікому не патрэбнымі, нават лічылі іх сафістычнымі, містычнымі. Але здзіўляла тое, што іх выкарыстанне прыводзіць да правільных высноў, напрыклад, да праўдзівых каранёў раўнання, якія без выкарыстання новых лікаў знайсці не ўдавалася. Пазней матэматыкі XVIII–XIX стагоддзяў вынайшлі шэраг карысных уласцівасцяў камплексных лікаў, якія дазволілі скарыстоўваць іх у розных галінах – фізіцы, геадэзіі, гідрадынаміцы ды інш. І сёння матэматычная тэорыя камплексных лікаў – даволі развіты і шырока дастасавальны раздзел матэматыкі.

Ёсць цікавая роўнасць (надзіва дакладная), якая звязвае некалькі знакамітых лікаў: $e^{i\pi} = -1$ (тоеснасць Ойлера).

Ірландскі матэматык, фізік, астраном XIX стагоддзя Уільям Гамільтан пашырыў лікавае мноства да гіперкамплексных лікаў, бо

калі могуць быць лікавыя мноствы з дзвюма адзінкамі, то чаму б не быць лікавым мноствам з трыма, чатырма рознымі адзінкамі...

Гэтай заўвагай і спынім наша знаёмства з лікавымі мноствамі.

СТАНДАРТНЫ ВЫГЛЯД ЛІКУ

Бываюць лікі даволі вялікія, найперш у астраномаў (напрыклад, маса Зямлі 5 973 600 000 000 000 000 000 000 кг або адлегласць ад Зямлі да Сонца 150 000 000 км; тут нулямі заменены іншыя лічбы, якія або невядомыя, або змяняюцца). А бываюць вельмі маленькія (напрыклад, маса атама вадароду 0,00000000000000000000000167 г). Такія лікі і прачытаць цяжка, тым болей выконваць з імі якія-небудзь дзеянні. Для спрашчэння гэтых праблем уведзена стандартная форма запісу лікаў.

Стандартным запісам ліку называюць здабытак $\mathbf{A} \times \mathbf{10}^{n}$, дзе першы множнік, названы асновай ліку, знаходзіцца паміж 1 і 10 (дакладней так: $1 \leq A < 10$), а n – цэлы лік, названы парадкам дадзенага ліку.

Прыклады:

$572\,000 = 5{,}72 \times 10^{5}$ – лік пятага парадку;

$0{,}068 = 6{,}8 \times 10^{-2}$ – лік мінус другога парадку.

Каб запісаць лік у стандартным выглядзе, трэба паставіць коску пасля першай ненулявой лічбы і палічыць лічбы да ранейшай коскі (калі ўлева, то са знакам мінус, калі ўправа, то са знакам плюс).

$5{,}863 = 5{,}863 \times 10^{0}$ – гэты лік нулявога парадку.

Толькі адзін лік (0) у стандартным выглядзе не запішацца.

Для цэлых лікаў парадак на 1 меншы за колькасць іх лічбаў. 1000 – чатыры лічбы, таму гэта лік трэцяга парадку ($1000 = 1 \times 10^{3}$). 999 – тры лічбы, таму гэты лік другога парадку ($9{,}99 \times 10^{2}$).

Паказаныя вышэй вельмі вялікія ці вельмі малыя лікі цяпер будуць запісаны так: маса Зямлі $= 5{,}973 \cdot 10^{27}$ кг, адлегласць да Сонца $= 1{,}5 \times 10^{8}$ км, маса атама вадароду $= 1{,}67 \times 10^{-24}$ г. Запіс і карацейшы і лепш успрымаецца. І дзеянні з такімі лікамі прасцей выконваць:

$0{,}0525 \times 0{,}00024 = 5{,}25 \times 10^{-2} \times 2{,}4 \times 10^{-4} = 5{,}25 \times 4 \times 0{,}6 \times 10^{-6} =$
$= 21 \times 0{,}6 \times 10^{-6} = 12{,}6 \times 10^{-6} =$ (першы множнік атрымаўся нестандартны, ён павінен быць паміж 1 і 10, таму пераводзім у стандарт) $= 1{,}26 \times 10 \times 10^{-6} = 1{,}26 \times 10^{-5}$.

На гэтым тут можна было б і спыніцца з гледзішча матэматыкі. Але варта сказаць не пра матэматыку.

РАЗВАГІ ДЛЯ НЕМАТЭМАТЫКАЎ

Выраз “на парадак болей” стаў папулярным у журналістаў, пісьменнікаў, дыктараў ды іншых словакарыстальнікаў.

“У гэтым годзе ў гаспадарцы сабралі 643 т бульбы. Гэта на парадак болей, чым у мінулым годзе.” Колькі ж было ў мінулым годзе? Выяўляецца: 487 т. Добра, што сабралі болей. Але ж не на парадак. У лікаў 643 і 487 аднолькавы парадак. Чалавек ляпнуў, не разумеючы таго, што ён ляпнуў.

Але што такое “на парадак болей”? Прыгледзімся і ўдумаемся.

Лік 100 большы за лік 99 на парадак, бо 100 – лік другога парадку (1×10^2), а 99 – лік першага парадку ($9{,}9 \times 10^1$). Лік 999 (лік другога парадку) большы за лік 10 (лік першага парадку) таксама на парадак. Але ў першым выпадку лікі амаль роўныя, а ў другім адзін лік амаль у сто разоў большы за другі. Таму панятак “на парадак большы” вельмі размыты, і яго выкарыстанне ў літаратуры ці журналістыцы бессэнсоўнае.



Не трэба выкарыстоўваць тэрмін, сэнсу якога не разумееце. Замест “на парадак болей” скажыце прасцей, без мудрагелістых вычварэнстваў: “нашмат болей”, “у некалькі разоў болей” ці “шматкроць болей”.

Вельмі часта людзі, далёкія ад матэматыкі, трапляюць з выкарыстаннем лікаў і матэматычных тэрмінаў у недарэчныя сітуацыі. Бывае такое нават у самых знакамітых пісьменнікаў.

Прывяду некалькі прыкладаў.

Чытаю ў аповесці расійскага пісьменніка Уладзіміра Цендракова: “Сталі яны ў калону па чатыры ў рад і пайшлі. Чалавек трыста іх было, вось і расцягнулася калона на паўкіламетра”. Нематэматык гэта прыме і будзе чытаць далей. А чалавек, блізкі да матэматыкі, спыніцца і пралічыць: трыста чалавек у калоне па чатыры – гэта 75 радоў; прамежкі паміж радамі ў калоне крыху болей за метр, ну няхай паўтара метра; памножым паўтара на 74 (калі радоў 75, то пра-

межкаў паміж імі 74) – атрымаем крыху болей за сто метраў; дзе ж тыя паўкіламетра?! Каб атрымалася калона ў паўкіламетра з трохсот салдат, трэба каб прамежкі паміж радамі былі прыблізна па сем метраў – тады што ж гэта за калона?

А вось цытата з аповесці Васіля Быкава "Воўчая зграя": "На першай пляцоўцы было чатыры кватэрныя нумары – ад 40-га да 44-га". Але ж ад 40-га да 44-га – гэта пяць нумароў. У пяціпавярховых дамах звычайна па чатыры кватэры на пляцоўцы, у пад'ездзе 20 кватэр. Таму кватэры трэцяга пад'езда пачынаюцца ад нумара 41.

Дакараць пісьменніка не варта. У школьныя гады яму трапіўся няўдалы настаўнік матэматыкі, і на ўроках матэматыкі ён чытаў прыгодніцкія кнігі, пра што і расказаў у "Пункцірах жыцця". У выніку сярод усіх адзнак "выдатна" зеўрала адна "пасрэдна", натуральна ж, па матэматыцы.

Трэ было б паправіць адну лічбу ў аповесці, але дзве карэктаркі таксама не звярнулі ўвагу на гэтую драбязу, якая мне ці іншаму чалавеку, блізкаму да матэматыкі, адразу кідаецца ў вочы. На жаль, і іх, мабыць, вучыў няўдалы настаўнік матэматыкі.

Некалі глядзеў на расійскім тэлебачанні праграму "Назад в будущее". У адным з заданняў удзельнікам гульні прапаноўвалі адгадаць год падзеі, паказанай на фотаздымку. "Я дазваляю вам памыліцца на тры гады ў адзін бок, – казаў вядоўца, – і на тры гады ў другі бок. Вы павінны ўкласціся ў гэты прамежак з шасці гадоў". І гэты чалавек не ўмее лічыць. Прамежак не з шасці, а з сямі гадоў. Бо калі, напрыклад, правільным адказам будзе 2010 год, то гулец павінен патрапіць у прамежак з 2007 да 2013 года (2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013 – сем!). Вядоўца палічыў толькі памылковыя шэсць гадоў, якія ўваходзяць у гэты прамежак, але забыў прылічыць дакладны год.

З такой памылкай крыху звязана забаўная задача: колькі гадоў пражыў чалавек, які нарадзіўся 1 ліпеня саракавога года да новай эры і памёр 1 ліпеня саракавога года новай эры? Адказ: 79 гадоў.

А вось чалавек у газеце дзеліцца сваім досведам здабывання цукровага сіропу з буракоў, якія ён вырошчвае на лецішчы. Гэтым сіропам ён з мэтай эканоміі замяняе цукар. Сіроп змяшчае каля 70 %

цукру, таму для прыгатавання жэле, варэння, мармеладу ды іншых прысмакаў, як раіць аматар-гароднік, яго трэба браць на 30 % болей, чым патрабуецца цукру. Нематэматык прачытае і стане так рабіць. І будзе здзіўлены, што яго прысмакі, на якія ён страціў шмат часу, не захоўваюцца, скісаюць. А матэматык пралічыць.

Няхай на прыгатаванне варэння патрабуецца 10 кг цукру. Прыслухаўшыся да парады з газеты, ён возьме 13 кг сіропу, атрыманага ад здабытых на сваіх градках буракоў (на 30 % болей). Але ж – стоп! Колькі ў тым сіропе цукру? Лічым: 70 % ад 13 – гэта 0,7 × 13 = 9,1. Усяго 9 кг і 100 г. Такім чынам, цукру ў яго страве акажацца амаль на кілаграм менеў, чым трэба. Вось як!

Каб зразумець, колькі цукровага сіропу спатрэбіцца ў гэтай сітуацыі, варта развязаць раўнанне $0{,}7x = 10$, адкуль выявіцца, што $x \approx 14{,}3$. Замест 10 кг цукру трэба ўзяць 14 кг 300 г цукровага сіропу, а не 13 кг. Памылка на 1 кг і 300 г.

Правільная парада: цукровага сіропу трэба ўзяць на 43 % болей, чым патрабуецца цукру.

Людцы! Сябруйце з матэматыкай хаця б на ўзроўні 6-7 класаў! Яна стане надзейнай памочніцай ва ўсіх вашых справах. Паважайце лікі! І яны ўпрыгожаць ваша жыццё.

Шаноўны(ая) чытач(ка)! Калі вы дабраліся да гэтай старонкі, то віншую. Спадзяюся, што страцілі час недарэмна і, магчыма, знайшлі нешта карыснае для сябе і сваіх дзетак.

А калі захочацца выказаць якія думкі, заўвагі, парады ці задаць пытанні, то гэта можна зрабіць на e-mail: ***bulavacki@gmail.com***

Няхай дапамагае вам Бог і створаныя ім лікі.

А для тых, хто асабліва зацікавіўся, яшчэ два дадаткі.

ДАДАТАК 1

ЗАДАЧКА З ТЭОРЫІ ІМАВЕРНАСЦЯЎ

Як, напрыклад, падлічваюць колькасць рыб у нейкім вадаёме ці колькасць зайцоў у лесе? Тыя ж зайцы на заклік сабрацца на нейкай палянцы і пашыхтавацца для падліку, бадай, не адгукнуцца. Але на тое ёсць прыёмы тэорыі імавернасцяў. Ловяць, скажам, дваццаць зайцоў у розных кутках лесу, пазначаюць ім вуха незмывальнай фарбай і выпускаюць. Па нейкім часе ловяць яшчэ, напрыклад, пяцьдзясят зайцоў. Сярод іх могуць апынуцца зайцы з пазначаным вухам. Ну няхай іх будзе чатыры. Такім чынам, усіх злоўленых прыблізна ў 12 разоў болей за фарбаваных. Калі лічыць, што пазначаныя фарбай зайцы вольна перамяшчаюцца па лесе і размеркаваліся ў ім адносна раўнамерна, то і там колькасць усіх зайцоў недзе ў 12 разоў болей за ўсіх фарбаваных, якіх, помнім, было 20. Памнажаем 20 на 12 – атрымліваем, што ў лесе жыве прыблізна дзве з паловай сотні зайцоў.

Некалі пра такі прыём падліку рыб у сажалцы напісаў казанскі прафесар Уладзімір Скварцоў у сваёй кнізе, прысвечанай тэорыі імавернасцяў. І прапанаваў удзельнікам навуковай канферэнцыі, якая праходзіла ў Казані, прыдумаць адпаведную вершаванку. Лепшыя вершаванкі ён збіраўся змясціць у кнізе ў якасці эмацыйнага антуражу. У мяне атрымалася вось такая задачка.

В пруду ловили рыбу к царскому столу.
***Сто** штук надёргал рыболов-мечтатель*
И краской золотой плавник у каждой метил.
Хотел, видать, чтоб царь его усердие заметил.

Иные рыбаки ловили без художеств,
И каждого улов количеством подобным
Везли на царский двор, где повара пыхтели,
Гостей заморских яством удивить хотели.

...В разгаре пир! Гостям стараются ***сто*** *слуг*
Всем угодить. Для самой важной знати –
Звезда из ***сотни*** *рыб на блюде из драгкамня,*
И ***пять*** *из них сверкали плавниками...*

Всё съедено! – Как смерч пронёсся по столу...
А ты скажи, о вдумчивый читатель,
Пока тебя внимать не проняла усталость:
По сколько царских рыб прислуге-то досталось?

Ещё скажи, коль думать ты готов:
А сколько рыбаков добыли тот улов?

Мая вершаваная задачка ў кнігу не трапіла, бо я спазніўся яе даслаць. Але для выкладчыка тэорыі імавернасцяў яна прыдасца.

Вось яе развязак.

Пяць рыб з той сотні, што на талерцы (дваццатая частка), зіхацелі плаўнікамі, таму разумеем, што ўсіх злоўленых рыб было ў 20 разоў болей, прыблізна дзве тысячы. Мы пры гэтым разумеем, што кухары спяшаліся і не адбіралі рыбу, а бралі з прывезеных наўздагад (гэта істотна). Такім чынам, 100 рыб было з'едзена, астатнія 1900 засталіся слугам, якіх было сто. Калі да слуг адносіць і кухараў, бо, несумненна, і яны бралі ўдзел у падзеле рыб, то кожнаму дасталося па 19 рыбін. Праўда, калі слугі не роўныя па статусе, то старшыя атрымалі болей, іншыя меней. Колькі ж было рыбакоў? Калі ўзгадаць, што ўсе рыбакі налавілі прыблізна пароўну ("количеством подобным"), гэта значыць па 100 рыбін, то дзве тысячы маглі налавіць 20 рыбакоў.

Вось такі маленькі вершаваны ўрок тэорыі імавернасцяў атрымаўся.

ДАДАТАК 2
(для настаўнікаў,
якія шукаюць новае ў навучанні)

НАВУЧАННЕ МАТЭМАТЫЦЫ БУЙНЫМІ БЛОКАМІ

(на прыкладзе тэмы "Прагрэсіі")

Працэс навучання ўяўляе сабой пераважна працэс перадачы інфармацыі. Калі нехта захоча паспрачацца са мною пра гэта, то я гатовы выслухаць яго аргументы, але пакуль спынімся на гэтай тэзе. З такога гледзішча навучэнец павінен:

1) успрыняць інфармацыю;
2) асэнсаваць яе;
3) запомніць;
4) узнаўляць запомненае ў патрэбны момант;

і

5) выкарыстоўваць
   – у стандартных сітуацыях,
   – у нестандартных сітуацыях,
   – і творча (г. зн. перапрацоўваць інфармацыю, здабываць з набытай інфармацыі новую інфармацыю).

Не абавязкова гэтыя дзеянні адбываюцца ў пазначаным парадку. Досыць часта ўспрыняцце і асэнсаванне адбываюцца адначасова. Здараецца, што запамінанне папярэднічае асэнсаванню (гэтая з'ява ў школьным асяроддзі набыла назву "зуброжка" і пераважная большасць настаўнікаў успрымае яе з'едліва-іранічна, але ў асобных выпадках згодныя пагадзіцца хаця б на такое). Я не стаў бы кпіць з "зуброжкі" хаця б таму, што ведаю, як наша славутая зямлячка Соф'я Корвін-Крукоўская (па мужу – Кавалеўская) стала матэматыкам. Сцены яе дзіцячага пакоя пад час рамонту былі папярэдне абклееныя старонкамі старога падручніка матэматыкі. І незразумелыя

значкі інтэгралаў і дыферэнцыялаў штодзень былі перад вачыма малой дзяўчынкі. Учэпістая дзіцячая памяць адзін за адным паглынала гэтыя значкі без аніякага іх асэнсавання. Але калі Соф'я выросла і пачала займацца матэматыкай, запомненае, хоць і не асэнсаванае ў дзяцінстве значна дапамагала ёй разумець мудрагелістасці высокай навукі.

Таму я дапускаю як адзін з магчымых варыянтаў навучання ў асобных выпадках пачатковае запамінанне інфармацыі без яе асэнсавання.

Такім чынам, пералік этапаў навучання не трэба прымаць у жорстка зададзеным парадку; варыянтаў, як бачым, шмат, і для кожнага з навучэнцаў трэба шукаць свой найбольш прыдатны варыянт (дый сам ён інтуітыўна шукае гэткі варыянт). Настаўнік павінен накіроўваць і рэгуляваць гэты працэс, імкнучыся рабіць гэта як мага менш прыкметна.

У савецкай сістэме адукацыі (не толькі матэматычнай) лічылася, што для найлепшага ўспрыняцця і ўсведамлення матэрыял павінен падавацца вучню дробненькімі "порцыямі", з якіх потым і ўтворыцца сістэма неабходных ведаў. Кожная такая "порцыя" павінна грунтоўна засвойвацца, чаму павінны былі спрыяць сістэма выбарачнага вуснага кантролю і набор практыкаванняў на ўроку з дапамогай настаўніка і дома, якія павінны былі падрыхтаваць вучня да завяршальнай дзеі – кантрольнай працы. Па напісанні кантрольнай працы лічылася, што матэрыял вучнем засвоены. І настаўнік пераходзіў да наступнай тэмы...

Вынікам такой сістэмы было тое, што на вывучэнне кожнай такой "порцыі" вучэбнага матэрыялу затрачваўся значны час (да прыкладу, 2-3 урокі на вывучэнне тэарэмы аб суме вуглоў трохвугольніка, калі гэта можна без цяжкасцяў усвядоміць за 15-20 хвілін), і веды ў свядомасці вучня заставаліся наборам адасобленых звестак, не прыведзеных у больш-менш стройную сістэму.

Неразумнасць такой сістэмы навучання затуманьвалася не менш неразумнай сістэмай дзяржаўнага ўпарадкавання, пры якой важней было заявіць пра поспехі, чым іх мець (такая сістэма набыла пазней назвы "паказуха" ці "очковтирательство").

Тым не менш, на фоне гэтага трыумфу паказушнасці ў працы лепшых настаўнікаў зараджалася іншая сістэма навучання, заснава-

ная на супрацьлеглых падыходах. Напрыклад, вядомы ўкраінскі настаўнік Віктар Шаталаў сцвярджаў, што навучальны матэрыял трэба даваць буйнымі блокамі, не патрабуючы на першым этапе грунтоўнага і глыбокага яго засваення. Тут важнейшая шырыня ахопу тэмы, калі вучань бачыць яе часткі ва ўзаемасувязях (пакуль што без дэталёвага ўсведамлення, якое прыйдзе пазней). Далей праз ***сістэму шматразовага паўтарэння*** і прадуманую ***сістэму заданняў*** нарастальнай складанасці дэталі навучальнага матэрыялу пачынаюць праяўляцца ў свядомасці вучняў і паступова замацоўвацца.

Новая сістэма перадачы інфармацыі патрабуе і новых метадычных падыходаў. Якім чынам даваць вучню буйны блок інфармацыі, каб ён не "спалохаўся", а зацікаўлена ўспрымаў яе, спрабуючы ўсвядоміць і запомніць?

Па-першае, настаўнік павінен падаваць вучэбны матэрыял так, каб вучню было цікава яго ўспрымаць, каб ён выклікаў у вучня нейкія станоўчыя эмоцыі (пазначым гэтае патрабаванне як *прынцып 1*). Эмацыйнае ўспрыняцце больш выніковае, чым безэмацыйнае, – гэта ўжо неаспрэчны факт псіхалогіі. Сваю ролю тут адыгрываюць і бадзёры ўпэўнены голас настаўніка, і яго жарты, жэсты, міміка, і гістарычныя ці міфалагічныя адступленні, і нечаканыя вобразы і параўнанні, ды шмат чаго іншага. Праўда, пры гэтым пажадана не пераступіць мяжы, калі ў шматлікіх жартоўных паралелях і вобразных параўнаннях губляецца сутнасць разгляданай тэмы, калі вучань пасля ўрока можа перадаць змест нейкай расказанай настаўнікам цікавай гісторыі і не можа распавесці пра тое, якая тэма на гэтым уроку вывучалася.

І яшчэ: захапленне настаўнікам эмацыйнымі дадаткамі можа прывесці да значнага падаўжэння часу на перадачу вучню патрэбнай інфармацыі, што зноў жа толькі на шкоду, а не на карысць працы. Чалавек звычайны пасля 13-14 гадоў можа больш-менш уважліва ўспрымаць інфармацыю на працягу прыблізна 17 хвілін (менавіта гэтым абгрунтоўваў Міхаіл Шчацінін мэтазгоднасць пераходу ў школах на 35-хвілінныя ўрокі: два разы па 17 хвілін з невялічкім перапынкам для адпачынку мозгу; тут яму, праўда, можна запярэчыць, што гэтая мэтазгоднасць датычыць толькі тых урокаў, на якіх адбываецца ўспрыняцце вучнямі новай інфармацыі; да ўрокаў трэнажу ў выкарыстанні новай інфармацыі, да ўрокаў справаздачных, кантрольных

ды іншых гэта не адносіцца). І калі настаўнік зацягвае ў часе свае тлумачэнні, то вучань можа ў канцы проста забыць пра тое, з чаго ўсё пачыналася, і гэта значна абцяжарыць усведамленне інфармацыі.

Таму істотна для настаўніка – перадаць інфармацыю як мага карацей па часе! (*прынцып 2*) Непрацяглая ў часе прамова настаўніка, складзеная з кароткіх сказаў, у якіх выкарыстаныя добра знаёмыя слухачам словы, выклікае ў вучня адчуванне лёгкасці, дасягальнасці разумення ім гэтага вучэбнага матэрыялу. Калі ж настаўнік няўдала падбірае фразы, якія гучаць доўга і ствараюць уражанне слоўнага нагрувашчвання, то вучань хутка траціць цікавасць да такой інфармацыі, бо яна здаецца яму занадта складанай і недасягальнай для яго разумення.

Выкажу яшчэ адно спрэчнае сцверджанне (спрэчнае таму, што, як паказвае мой досвед кантактавання з настаўнікамі, сярод іх знаходзіцца шмат нязгодных з ім). Пры тлумачэнні новага матэрыялу настаўніку пажадана або цалкам адмовіцца ад формы дыялогу з вучнямі, або значна абмежаваць гэты варыянт. Прычын для таго некалькі. Па-першае, дыялогавая форма перадачы інфармацыі падаўжае час на яе ўспрыняцце і ўсведамленне вучнямі (што супярэчыць выказанаму тут прынцыпу 2). Па-другое, настаўнік можа прыгожа і дакладна сфармуляваць пытанне, але вучань наўрад ці зможа даць гэткі ж прыгожы і дакладны адказ. Таму інфармацыя, атрыманая з адказаў вучняў, даходзіць да іх аднакласнікаў не ў лепшым выглядзе. І нават калі настаўнік "перакладзе" пачуты адказ, удакладніць і эмацыйна ўпрыгожыць яго, то для вучняў застаецца няпростая псіхалагічная праблема: забыць першы адказ, пачуты з вуснаў аднакласніка, і запомніць, другі, апрацаваны настаўнікам.

Гэтая праблема цікава абыграная ў легендзе пра Насрэдына. Калі захварэламу шаху не змаглі дапамагчы прыдворныя лекары, то паклікалі Насрэдына і шах сказаў яму: "Ці ты мяне вылечыш, ці памрэш раней за мяне!" Бачыць Насрэдын, што выбар невялікі і кажа: "Я вылечу цябе, але пры адной умове: пакуль буду лячыць, ты не павінен думаць пра белую малпу!.." Паспрабуйце зараз паставіць сябе на месца шаха, паспрабуйце забыць пра нейкую белую малпу, не думаць пра яе.

Не менш важны фактар – запісы настаўніка на дошцы. Яны таксама не павінны ствараць уражання нагрувашчвання. У запісах павінен быць парадак, паслядоўнасць, выкарыстаная сімволіка павінна быць добра патлумачанай і зразумелай вучням, найбольш істотныя элементы пажадана вылучыць колерам ці якім іншым чынам. І! – настаўнік павінен добра ўсведамляць, **што** застанецца на дошцы пры заключным слове яго тлумачэння (*прынцып 3*). Гэты канчатковы выгляд запісаў павінен быць загадзя прадуманым і вывераным. В. Шаталаў называе такі канчатковы выгляд запісу **лістом апорных сігналаў** (ЛАС).

ЛАС – гэта зрокавы вобраз пэўнага блока інфармацыі. Чалавек прывыкае большую частку інфармацыі атрымоўваць праз зрок, таму гэты вобраз становіцца істотным фактарам якасці ўспрыняцця інфармацыі. На гэтым вобразе грунтуецца значная частка далейшай працы па ўсведамленні і запамінанні атрыманай вучнем інфармацыі.

ЛАС да вывучáнай тэмы вучань атрымае адразу пасля таго, як настаўнік закончыць свой расповед. Вучань ведае пра гэта і таму не запісвае следам за настаўнікам, а толькі глядзіць і слухае, спрабуючы зразумець. Адсутнасць патрэбы весці запісы за настаўнікам вырашае некалькі пытанняў. Па-першае, вучань не рассейвае сваёй увагі паміж рознымі дзеяннямі (слухаць, успрымаць і запісваць). Па-другое, настаўнік мае магчымасць не замаруджваць сваю гаворку, каб вучні паспелі запісаць, а гаварыць з імі на звычайнай хуткасці, да ўспрыняцця якой людзі досыць рана прывыкаюць (гэта таксама ў рэчышчы прынцыпу 2). Акрамя таго, "шпаргалка" да тэмы, падрыхтаваная дасведчаным настаўнікам, будзе несумненна больш якаснай, чым тая ж "шпаргалка", зробленая вучнем. (Пра мастацтва складання ЛАС гаворка асобная.)

Разгледзім гэты падыход на прыкладзе тэмы "Прагрэсіі".

Папярэднічае знаёмству з тэмай серыя традыцыйных тэставых заданняў на падаўжэнне лікавых паслядоўнасцяў, у якіх можна заўважыць тую ці іншую заканамернасць (23; 19; 15... або: 4; 9; 16; 25... або: 5; 6; 8; 11; 15... або: 1; 1; 2; 3; 5; 8...). Калі вучні крыху прыстасуюцца заўважаць наяўныя заканамернасці і, магчыма, выражаць некаторыя з іх формуламі, то гэта можна лічыць дастатковым для падрыхтоўкі ўсведамлення тэмы "Прагрэсіі". На такія заданні не трэба адводзіць цэлы ўрок. Лепш рассыпаць іх па некалькіх

папярэдніх уроках, і чым раней такія заданні будуць прапаноўвацца вучням, тым лепш. Па дзве-тры хвіліны на 2-3 такія заданні.

На чарговым уроку настаўнік адразу пераходзіць да сутнасці новай тэмы. Ён гаворыць пра тое, што некаторыя лікавыя паслядоўнасці атрымоўваюцца дадаваннем аднаго і таго ж ліку да папярэдняга або множаннем папярэдняга на адзін і той жа лік. Першы ж лік выбіраецца адвольна (у другім выпадку не роўны нулю). Такія паслядоўнасці называюць прагрэсіямі, у першым выпадку – **арыфметычнай**, у другім – **геаметрычнай**. На дошцы, падзеленай папалам вертыкальнай рысай, паказваюцца прыклады прагрэсій:

ПРАГРЭСІІ

арыфметычная	*геаметрычная*
23; 16; 9; 2; -5; -12; -19; -26; -33; -40; -47...	0,25; -0,5; 1; -2; 4; -8; 16; -32; 64; -128; 256...

Прыкладаў можа быць некалькі з розным характарам манатоннасці, але ўсе, акрамя загадзя запланаванай, настаўнік пазней выцірае. Для ўсведамлення далейшага даволі аднаго прыкладу.

Далей настаўнік распавядае пра **рознасць** арыфметычнай і **назоўнік** геаметрычнай прагрэсіі і звязаны з гэтым характар манатоннасці прагрэсій. Запіс на дошцы папаўняецца:

ПРАГРЭСІІ

арыфметычная	*геаметрычная*
23; 16; 9; 2; -5; -12; -19; -26; -33; -40; -47...	0,25; -0,5; 1; -2; 4; -8; 16; -32; 64; -128; 256...
рознасць $d=-7\ (<0)$, $d>0$, $d=0$	***назоўнік*** $q=\pm1$ $q\neq0$
спадае *нарастае*	$q=-2$; $q=5$ *нарастае па модулі*: $\lvert q\rvert>1$ $q=0{,}7$; $q=-0{,}5$ *спадае па модулі*: $\lvert q\rvert<1$

Формула агульнага элемента звычайна не выклікае праблем пры яе ўсведамленні. Тут настаўнік можа перайсці на невялічкі дыялог: “Каб атрымаць другі элемент арыфметычнай прагрэсіі, трэба да першага дадаць d, каб атрымаць трэці, трэба да першага дадаць $2d$, чацвёрты – да першага дадаць $3d$, пяты – $4d$... А каб атрымаць трыццаць трэці элемент?..” Звычайна вучні адразу знаходзяць патрэбны адказ і, маючы хаця б невялікі досвед абагульненняў (пра што гаварылася

на пачатку артыкула), хутка абагульняюць яго формулай $a_n = a_1 + (n-1) \times d$, якую карысна даабагульніць у такім выглядзе: $a_n = a_k + (n-k) \times d$. Можна звярнуць увагу на тое, што апошняя формула справядлівая нават калі $n < k$. Адпаведны працэс паўтараецца і пры атрыманні формулы агульнага элемента геаметрычнай прагрэсіі $a_n = a_1 \times q^{n-1} = a_k \times q^{n-k}$.

Цяпер натуральна перайсці да характарыстычнай уласцівасці адной і другой прагрэсій, паказаўшы яе спачатку на лікавым прыкладзе з наступным абагульненнем, падмацаваным адпаведным разважаннем. "Возьмем які-небудзь элемент арыфметычнай прагрэсіі, напрыклад $a_5 = -5$. Сума суседніх яго элементаў: $a_4 + a_6 = 2 + (-12) = -10$. Гэта падвоены лік -5. Такую ж суму атрымаем і пры складанні трэцяга і сёмага элементаў, другога і восьмага элементаў. Увогуле, кожны падвоены элемент арыфметычнай прагрэсіі роўны суме суседніх або роўнаадлеглых элементаў: $2 \times a_n = a_{n-k} + a_{n+k}$, бо для атрымання першага складніка трэба ад a_n адняць $k \times d$, а для атрымання другога трэба да a_n дадаць $k \times d$, сума пры такім змяненні складнікаў не зменіцца.

Цяпер возьмем які-небудзь элемент геаметрычнай прагрэсіі, напрыклад $a_5 = 4$. Здабытак суседніх з ім элементаў: $a_4 \cdot a_6 = (-2) \cdot (-8) = 16$. Гэта квадрат ліку 4. Такі ж здабытак атрымаем і пры множанні трэцяга элемента на сёмы элемент, другога на восьмы і г. д. Увогуле, квадрат любога элемента геаметрычнай прагрэсіі роўны здабытку суседніх або роўнаадлеглых элементаў ($a_n^2 = a_{n-k} \times a_{n+k}$), бо для атрымання першага множніка трэба a_n падзяліць на q^k (памножыць на q^{-k}), а для атрымання другога трэба a_n памножыць на q^k, здабытак пры такім змяненні множнікаў не зменіцца".

Істотна тут тое, што тэкст, які прагаворвае настаўнік для арыфметычнай і геаметрычнай прагрэсій збудаваны амаль аднолькава, каб вучні маглі звяртаць увагу на адрозненні.

П Р А Г Р Э С І І

арыфметычная	***геаметрычная***
23; 16; 9; 2; -5; -12; -19; -26; -33; -40; -47...	0,25; -0,5; 1; -2; 4; -8; 16; -32; 64; -128; 256...
розпасць $d = -7\ (<0)$, *спадае* — $d > 0$, *нарастае* — $d = 0$	***назоўнік*** $q = \pm 1$; $q = -2$, $q = 5$ } *нарастае па модулі:* $\lvert q\rvert > 1$; $q = 0{,}7$, $q = -0{,}5$ } *спадае па модулі:* $\lvert q\rvert < 1$; $q \neq 0$
$a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d$... $a_n = a_1 + (n-1)d = a_k + (n-k)d$	$a_2 = a_1 \cdot q$, $a_3 = a_1 \cdot q^2$... $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = a_k \cdot q^{n-k}$
$2a_n = a_{n-k} + a_{n+k} = (a_n - kd) + (a_n + kd)$	$a_n^2 = a_{n-k} \cdot a_{n+k} = (a_n q^{-k}) \cdot (a_n q^k)$

Засталося расказаць пра сумаванне элементаў арыфметычнай і геаметрычнай прагрэсій. І адказ на пытанне, ці трэба гэта рабіць на дадзеным уроку, настаўнік павінен убачыць па паводзінах вучняў і сваіх адчуваннях. Калі вучням тэма не падалася складанай, калі яны не трацяць увагі і актыўна (без стомы!) успрымаюць новыя звесткі (што якраз і будзе выразна праглядвацца ў іх вачах) і калі пададзеная вышэй інфармацыя не заняла больш за дзесяць хвілін, то настаўнік мае ўсе козыры, каб раскрыць перад вучнямі апошнія аспекты тэмы. Калі ж настаўнік не адчувае патрэбнай увагі і дастатковай актыўнасці ўспрыняцця ад вучняў, калі яму даводзіцца раз-пораз рабіць паўзы, каб вярнуць страчаную ўвагу асобных вучняў, і гэтыя паўзы падоўжылі яго расповед болей як на дзесяць хвілін, то варта тут спыніцца, адклаўшы знаёмства з астатняй часткай тэмы на другі дзень (вельмі пажадана, калі б гэты дзень быў назаўтра, каб уражанні ўспрыняцця першай часткі былі яшчэ дастаткова свежымі).

Перад пачаткам гаворкі пра сумаванне элементаў арыфметычнай прагрэсіі настаўнік можа расказаць эпізод з дзяцінства Карла Гаўса.

Настаўнік матэматыкі, прапанаваўшы вучням на ўроку паскладваць лікі ад 1 да 100, думаў, што заняў гэтай задачай іх час надоўга, і быў вельмі здзіўлены, калі праз хвіліну адзін з іх падняў руку і назваў правільны адказ. А вучань проста заўважыў аднолькавыя папарныя сумы (1 + 100 = 2 + 99 = = 3 + 98 = ...), якіх тут налічваецца роўна 50.

Праз гэтую гісторыю ямчэй успрымаецца вывад формулы сумы арыфметычнай прагрэсіі.

З геаметрычнай прагрэсіяй так проста не атрымаецца, але й там знаходзіцца цікавы і лёгкаўспрымальны падыход да спрашчэння патрэбнага вылічэння. І грэх зробіць настаўнік, калі не раскажа пасля з'яўлення гэтай формулы легенду пра стварэнне шахматаў з падрабязным матэматычным каментаром старажытнай гісторыі (тое, што вучні будуць гэта зацікаўлена слухаць, няма сумнення, але гэта можна адкласці і на наступны ўрок).

Калі індускаму цару Шэрáму паказалі гульню ў шахматы, то цар вельмі ўпадабаў новую гульню і ўрэшце загадаў прывесці да яго стваральніка гульні, каб шчодра ўзнагародзіць таго. Мудрага Сету прывялі да цара і цар сказаў ганарліва: "Прасі ў мяне, што хочаш, – я выканаю любую тваю просьбу!" Усміхнуўся мудрэц з гэткай пыхі і сказаў: "Шахматная дошка мае 64 клеткі. Дай мне за першую клетку адно пшанічнае зярнятка, за другую – два, за трэцюю – чатыры, за чацвёртую – восем, і так за кожную наступную ўдвая болей". – "І гэта ўсё, што ты ў мяне просіш?!" – здзівіўся цар. "Усё. Мне гэтага хопіць". Разгневаны з такой малой просьбы цар загадаў выштурхаць мудраца з царскіх палатаў і выкінуць яму той мех пшаніцы, папярэдне дакладна падлічыўшы зярняткі. Назаўтра запытаўся, ці выкананы яго загад. Але царскі міністр кінуўся яму ў ногі і праенчыў, што не ў волі цара выканаць тую просьбу, бо, каб выканаць яе, трэба...

"А вось што трэба, давайце падлічым мы з вамі. Сума 64-х элементаў такой геаметрычнай прагрэсіі роўна $2^{64} - 1$. Накінем яшчэ адно зярнятка – колькі мяшкоў спатрэбіцца для 2^{64} зярнятак? Улічым, што $2^{10} = 1024 \approx 10^3$. Тады $2^{64} = 2^4 \cdot 2^{60} = 16 \cdot (2^{10})^6 \approx 16 \cdot (10^3)^6 =$ $= 16\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000 – 16$ квінтыльёнаў! (нават болей, бо $2^{10} > 10^3$). Будзем лічыць, што ў адным коласе ў сярэднім па 50 зярнятак і каласы растуць праз кожныя пяць сантыметраў, г. зн. на адным квадратным метры $20 \times 20 = 400$ каласоў або 5 тысяч зярнятак (такая прыкідка нават з перавышэннем звычайнай ураджайнасці). 1 км^2 = 1 000 000 м^2, таму на адным квадратным кіламетры вырастае 5 000 000 000 (5 більёнаў) зярнятак. Значыць, каб выканаць просьбу мудрага Сеты, яму павінны аддаць ураджай, сабраны з (16 квінтыльёнаў : 5 більёнаў =) 3 200 000 000 квадратных кіламетраў. А плошча паверхні зямнога шара (разам з гарамі і акіянамі) ≈ 500 000 000 км^2.

Вось так і сказаў міністр цару: "... трэба высекчы ўсе лясы, растапіць ільды, асушыць моры і акіяны, зраўняць горы і ўсю цалкам паверхню зямлі засеяць пшаніцай. І калі яна вельмі добра ўродзіць, то за 6-7 гадоў такой ураджайнасці можна назбіраць патрэбную колькасць зярнятак". Так мудры Сета паказаў пыхліваму Шэраму на абмежаванасць яго ўлады.

Гісторыя заслугоўвае таго, каб яе пакінуць у памяці. Яна ўжо як-ніяк элемент агульначалавечай культуры. Таму ў лісце апорных сігналаў застаецца адлюстраванне гэтай гісторыі ў некалькіх знаках "Сета S_{64} =". Натуральна, што любая суправаджальная эмацыйная інфармацыя, як і гэтая, не з'яўляецца абавязковай для разумення тэмы, таму адсутнасць гэтай інфармацыі ў адказе вучня не павінна прыводзіць да зніжэння адзнакі за адказ. У ЛАС такая інфармацыя звычайна адлюстроўваецца асобным колерам (не чырвоным).

Трэба сказаць, што разгляданая тэма вельмі багатая на суправаджальную інфармацыю. У настаўніка раз-пораз узнікае спакуса скарыстаць яшчэ штосьці і яшчэ. Напрыклад, вельмі просіцца сюды расповед пра сутнасць фінансавых пірамід кшталту скандальна вядомай расійскай кампаніі "МММ". Тым болей што ведаць пра гэта не толькі цікава, але й карысна, каб не трапіць у пастку чарговай такой хвалі, якія раз-пораз баламуцяць малаадукаваныя грамадствы не вельмі развітых краін. Але не трэба тут паддавацца такім спакусам: для гэтай інфармацыі знойдзецца час іншым разам. Шахматнай легенды цалкам дастаткова, каб даць крыху адпачыць мозгу вучня, пераключыць яго ўвагу, ажывіць успрыняцце, дастатковае для ўсведамлення апошняй цікавай акалічнасці.

"Разгледжаныя формулы сумавання прагрэсій, – паведамляе настаўнік, – дазваляюць складваць пэўную колькасць элементаў той ці іншай прагрэсіі. Але бываюць выпадкі, калі можна складваць **бяскон-**

цую колькасць лікаў і атрымаць у выніку не бясконцасць, а пэўны лік. Гэта можна ў тым выпадку, калі складваюцца элементы спадальнай па модулі геаметрычнай прагрэсіі... Чаму гэта можна, – давайце разбярэмся. Калі $|q| < 1$, то пры ўзвядзенні ліку q у ступень n атрымаем лік з меншым модулем. І калі n (натуральны паказнік ступені) стане вельмі вялікім, то q^n становіцца амаль нулём. На мове матэматыкі гэтую з'яву фармулююць так: калі n імкнецца да бясконцасці ($n \to \infty$), то q^n імкнецца да нуля ($q^n \to 0$). Гэта азначае, што ў формуле складання элементаў геаметрычнай прагрэсіі адымнік q^n знікае (замяняецца на нуль) і формула набывае такі выгляд: $S = \frac{a_1}{1-q}$".

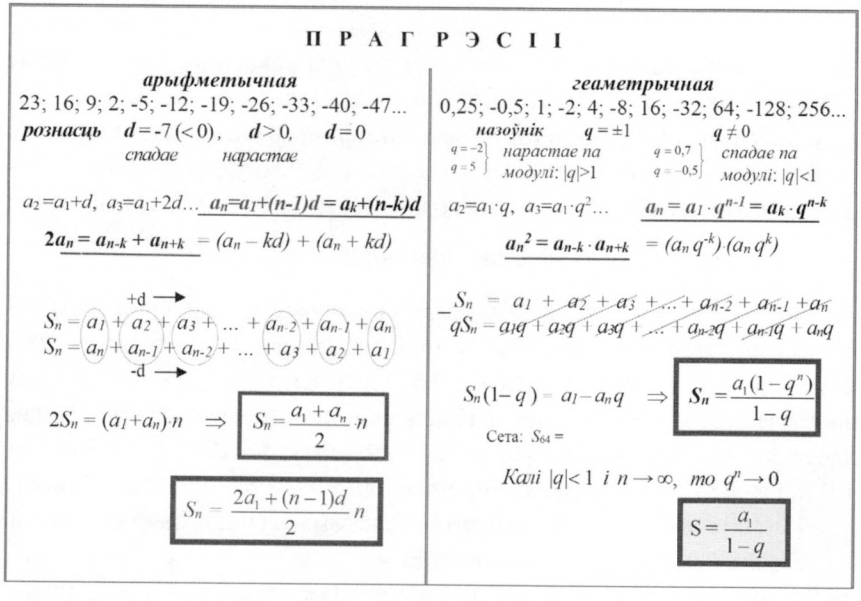
Зноў жа я адчуваю сверб настаўніка, якому хочацца адразу ж паказаць, як гэтая цікавая формула проста вырашае знакамітыя і некалі невырашальныя апорыі Зянона. Але і тут: пакіньце гэта да лепшых часоў. На гэты раз дастаткова абмежавацца просценькім прыкладам дастасавання атрыманай формулы – кшталту: $9 + 6 + 4 + 8/3 + ... = 9 : (1 - 2/3) = 27$. Прыведзены прыклад затым выціраецца з дошкі.

Канчаткова ЛАС прымае выгляд, паказаны на наступнай старонцы.

Адзначым: у ЛАС змяшчаецца не "асноўная", не "галоўная", не "самая важная" інфармацыя па тэме (як гэта памылкова лічаць асобныя настаўнікі), а **ўся** інфармацыя, якую навучэнец павінен успрыняць, усвядоміць, запомніць і навучыцца карыстацца ёю ў стандартных і (пажадана) нестандартных сітуацыях.

Такім чынам, за адзін урок (у кагосьці за два) вучні атрымаюць поўную інфармацыю па тэме, на якую традыцыйна адводзіцца мінімум 12 гадзін. Як усё гэта можна выкласці за 15-17 хвілін?! – здзіўляюцца некаторыя настаўнікі. Ну што ж, той, хто не верыць, што так можна, зробіць гэта за два разы па 15-17 хвілін. Зробіць так першы-другі раз. А на трэці яму самому захочацца паспрабаваць выдаць усё на адным уроку. Выгоды відавочныя. Бо калі разбіваць гэтую інфармацыю на дзве часткі, то траціцца цэласнасць успрымання. І яшчэ пытанне – як разбіваць? Калі на адным уроку выкласці арыфметычную прагрэсію, а на другім геаметрычную, то не так выразна праглядваюцца іх падабенства і адрозненні. Ужо ж лепш спачатку даць азначэнні разгляданых паняццяў, класіфікацыю прагрэсій, вывад формул агульных элементаў і іх характарыстычных уласцівасцяў. А на другім – формулы сумавання. Але на гэтым другім (асабліва калі ён не назаўтра,

а праз некалькі дзён) давядзецца страціць час на паўтор раней выкладзенага і ўжо паўзабытага і на ўзнаўленне першай часткі ЛАС.



Каляровы варыянт можна пабачыць на вокладцы

Як бы там ні было, вучні ўспрымуць гэтую інфармацыю з часткавым яе асэнсаваннем і частковым запамінаннем. І далей пойдзе праца па больш глыбокім асэнсаванні тэмы і больш поўным і надзейным запамінанні яе структуры і дэталяў. Гэтая праца пачынаецца ўжо на тым самым уроку.

Пакуль настаўнік распавядаў класу пра сутнасць і асаблівасці прагрэсій, вучні ніякіх запісаў не рабілі. Ім не трэба траціць час і разумовыя намаганні на гэта, бо той самы загадзя прадуманы і вывераны ЛАС, які настаўнік паказаў на дошцы, кожны з іх атрымае на асобным аркушыку для далейшай працы з ім. Гэтыя аркушыкі настаўнік раздае вучням пасля кароткага паўторнага агляду толькі што выкладзенай інфармацыі. Далей вучням прапануецца расфарбаваць атрыманыя ЛАС адпаведна таму, што на дошцы, – выдзеліць чырвоным самую важную інфармацыю, сінім – неабавязковую інфармацыю (магчымы іншыя колеры дзеля пэўных мэтаў). Расфарбоўван-

не – гэта працэс дадатковага ўспрыняцця і асэнсавання. Менавіта тут узнікаюць пытанні – ці нязначныя (кшталту "трэба прыводзіць прыклады прагрэсій з тымі ж лікамі ці можна з іншымі?"), ці глыбінныя ("ці можна разглядаць прагрэсіі як паслядоўнасці бясконцыя ў абодва бакі?", "а як складваць элементы прагрэсій, пачынаючы не з першага, а, напрыклад, з дзясятага да дваццатага?" ды інш.).

З гэтымі аркушыкамі ў дадатак да падручніка вучні будуць працаваць дома. Бо на наступным (магчыма, і не на наступным – варыянты і тут ёсць) уроку ім трэба будзе паказаць, як добра яны засвоілі тэму. Паказаць, намаляваўшы ЛАС па памяці (на гэта будзе адведзена каля 15 пачатковых хвілін урока) і расказаўшы яго змест. Першае – ад усіх, другое – выбарачна (зноў жа ў В. Шаталава на гэтае "выбарачна" процьма варыянтаў, пра якія можна прачытаць у яго кнігах) з адпаведнымі адзнакамі і за адно, і за другое.

Пасля гэтага настаўнік мае права перайсці да трэнінгу навучэнцаў у выкарыстанні нованабытай інфармацыі. Нагадаем: па праграме ён мае яшчэ мінімум 10 урокаў. 10 урокаў інтэнсіўнага паўтарэння і развязвання задач паступова нарастальнай складанасці. Задач, не прывязаных да адпрацоўвання формулы агульнага элемента, ці формулы сумавання элементаў арыфметычнай прагрэсіі, ці якойсьці іншай **адной** формулы, а задач у прасторы ўсёй тэмы – ва ўсёй яе шматстайнасці. Праз такія задачы, дзе дастасоўваюць не адну формулу, зафіксаваную ў назве ўрока, а некалькі формул, якія трэба выбраць з пэўнага мноства наяўных, і фармуюцца навыкі разгалінаванага мыслення.

Тэма не вельмі багатая на формулы, таму для іх засваення да ўзроўню актыўнага выкарыстання задач патрабуецца няшмат. Прапанова для самастойнага развязвання задач (ці як называюць гэта настаўнікі: хатняе заданне; мы ж будзем называць ***самазадачы***) можа змяшчаць 25-30 заданняў. Гэтыя прадумана адабраныя настаўнікам заданні вучні могуць развязваць як дома, так і на ўроках (калі настаўнік выдзяляе час на самастойную працу).

Натуральна, настаўнік непрыкметна рэгулюе і кантралюе гэты працэс. На наступным уроку, калі вучні атрымаюць адзнакі за веданне зместу тэмы, пачынаецца калектыўнае развязванне задач па тэме. Каля дошкі настаўнік (! – бо першыя запісы афармлення павінны быць узорнымі), але ў працэсе пошуку развязку задачы бяруць удзел

усе. Ніякіх адзнак пры гэтым не ставіцца (так званыя "бягучыя адзнакі", яшчэ адно няўдалае параджэнне савецкай школы, Шаталаў цалкам адкідае), думка вучня павінна быць вольнай, не абцяжаранай клопатам "а што мне за сказанае будзе?".

Вучні развязкі задач не запісваюць – зноў жа, каб запіс не адцягваў увагі ад працэсу мыслення. Таму задач паспяваюць нарашаць шмат. Напрыканцы ўрока настаўнік можа выдзеліць пэўны час (10-15 хвілін) на запіс **некаторых** з развязаных задач. Гэта як варыянт чарговага інтэнсіўнага паўтарэння з разлікам на бліжэйшы час, бо задачы, падобныя запісаным, ёсць сярод самазадач.

Самазадачы вучні атрымоўваюць усе адразу (а не па дзве-тры пасля кожнага ўроку) і тым самым маюць магчымасць выбару тэмпу і характару працы з імі. Нехта паспрабуе паразвязваць іх усе сам, не чакаючы дапаможных задач, паказаных настаўнікам на ўроку. Як ні дзіўна, такія ахвотнікі амаль заўсёды знаходзяцца. Іншы будзе развязваць па дзве-тры, хто па парадку, хто не па парадку (звычайна знаходзяцца такія, хто імкнецца пачаць развязванне самазадач з самай апошняй). Некаторых магчыма давядзецца падштурхоўваць. Але пакуль развязванне гэтых задач не будзе закончана і вучань не напіша **рэлейную** працу (кшталту кантрольнай працы, у якую ўключаюцца заданні, выбраныя настаўнікам з самазадач), да кантрольнай працы ён не дапускаецца і адзнакі за тэму не атрымае. Выходзіць так, што завяршэнне тэмы напісаннем кантрольнай працы адбываецца ў навучэнцаў не адначасова. Паразважаем над гэтым.

Вось перад настаўнікам клас – два-тры дзясяткі вучняў. Два-тры дзясяткі згусткаў маладой энергіі людзей, якія ўсё ж вельмі адрозніваюцца адзін ад аднаго – і талентамі, і схільнасцямі, і хуткасцю мыслення, і асаблівасцямі псіхафізіялагічных працэсаў, і нават адчуваннем патрэбы ці непатрэбы для іх той навукі, якую настаўнік імкнецца давесці да іх розуму. І гэтыя адрозненні ён павінен паважаць і ўлічваць у сваёй працы.

Калі, напрыклад, некаму для засваення пэўнай тэмы дастаткова трох урокаў, а другому трэба дзесяць, то настаўнік павінен знайсці яму гэтыя дзесяць урокаў. А што калі на тэму праграмай адводзіцца пяць урокаў, па заканчэнні якіх плануецца кантрольная праца? А далей – іншыя тэмы... Але ж паміж заданнямі іншых тэмаў можна раз-пораз устаўляць заданні з тэмаў ранейшых – і паступова гэ-

тыя шматразовыя мініпаўтарэнні дапамогуць чалавеку ўсвядоміць напачатку незразумелае. І таму ў гэтай сістэме вучань піша кантрольную працу не тады, калі захацеў настаўнік, а тады, калі ён сам лічыць, што гатовы да яе. Але тэрмін напісання кантрольнай працы вучань ведае, і калі гэты дзень мінае, насупраць кожнага прозвішча ў ведамасці з'явіцца адзнака. У радках тых, хто працу не выконваў, будзе зіхацець нуль, напісаны алоўкам. Але гэты нуль вучня не палохае, бо ён ведае, што некалі гэты нуль заменіцца больш прыстойнай адзнакай.

Яшчэ пра адзнакі. Веды вучня – велічыня зменная. І калі адзнака адлюстроўвае гэтую велічыню (а на мой погляд, менавіта так і павінна быць), то адзнака па той ці іншай тэме таксама павінна змяняцца. Чалавек за веданне, скажам, тэмы "Прагрэсіі" атрымаў адзнаку "6". Адзнака яго не задавальняе і ён, падрыхтаваўшыся больш грунтоўна, змог даказаць настаўніку, што ведае тэму на адзнаку "9". Новая адзнака павінна быць выстаўлена **не побач** з ранейшай, а **замест** яе. Ранейшая адзнака павінна знікнуць. Знікнуць назусім, каб ніякім чынам не ўплываць на выніковую адзнаку. У гэтым кантэксце трацяць сэнс класныя журналы як дакументы строгай справаздачнасці, дзе ніякія выпраўленні не дапускаюцца. Іх павінны замяніць ведамасці (у кожнага настаўніка свая), у якіх адзнакі выстаўляюцца алоўкам, каб можна было пры патрэбе выцерці гумкай і замяніць на большую.

Тут мы падступаем да вельмі істотнай праблемы грамадскай адукацыі. Стваральнікі савецкай сістэмы адукацыі пазначылі, што мэтай адукацыі (іхняй адукацыі!) ёсць чалавек гарманічны, усебакова развіты. "Усебакова" – але колькі гэтых бакоў? І ці раўназначныя яны? І ці дасягальная гэтая "ўсебаковасць"? А яшчэ насцярожвае завершанасць другога азначальнага слова: развіты. Нібыта ў чалавечым развіцці ёсць мяжа, да якой чалавека можна развіць і спыніцца.

На думку аўтара гэтых радкоў, мэтай адукацыі павінен быць **чалавек свабодны**, калі свабоду разумець як усвядомленую чалавекам неабходнасць дзейнічаць у адпаведнасці з законамі, што аб'ектыўна існуюць у прыродзе і грамадстве. Адсюль, дарэчы, вынікае, што чым болей законаў прыроды і грамадства здолеў усвядоміць чалавек, тым болей свабодны ён у сваіх дзеяннях.

Чалавек свабодны сам плануе, арганізуе і рэгулюе сваю дзейнасць. Таму і вучань сам павінен планаваць сваю выніковую адзнаку і сам шукаць шляхі для дасягнення гэтай мэты. Натуральна, з дапамогай настаўніка, якая павінна быць як мага менш прыкметнай. Сёння ж навучэнец беларускай школы, якая ў значнай ступені захавала недарэчныя традыцыі школы савецкай, такой магчымасцю не валодае. Бо калі чалавек атрымае за нейкі адказ нізкую адзнаку (тым болей на кантрольнай працы), то выніковая "дзявятка-дзясятка" яму ўжо не дастанецца. Нават калі ён паглыбіць свае веды ў тэме і дакажа настаўніку, што ведае тэму на высокім узроўні, і нават калі настаўнік паставіць гэтую высокую адзнаку ў класны журнал, то яна будзе пастаўлена там побач з ранейшай, а не наўзамен яе. І выстаўляючы адзнаку за чвэрць ці за год, настаўнік усё ж азірнецца на тую маленькую лічбачку і крыху знізіць адзнаку выніковую.

А дзіця, у прыродзе якога закладзена імкненне да самых высокіх вяршынь, зразумеўшы, што самы высокі бал для яго ўжо недасягальны, адпаведна зменшыць сваю вучэбную актыўнасць па гэтым навучальным прадмеце. Тады нізкія адзнакі стануць часцейшымі і ўжо нават сярэдняя выніковая адзнака становіцца пад пытаннем. Тады чалавек пачынае думаць: ай, гэтая матэматыка (хімія, гісторыя, біялогія...) занадта складаныя для маёй галавы. І... (далей можна не працягваць). Праблема вельмі знаёмая настаўнікам. А яна развязваецца сістэмай ***рухомых*** адзнак.

Вучань – і толькі ён! – вырашае, якую адзнаку па нейкай там гуміарабіцы мець на выхадзе з навучальнай установы. Вось ён падыходзіць да настаўніка з пытаннем: што мне будзе за чвэрць?

– Лічым разам, – кажа настаўнік, – у цябе сярэдні бал па выстаўленых адзнаках роўны 6,4. Пры акругленні гэта "6". Ты хочаш "7"? Тады глядзі – вось гэтыя два раздзелы засвоены табой слаба. Калі ты зможаш даказаць мне, што ведаеш іх хаця б на бал вышэй, то сярэдні бал падымецца на адну дзясятую – і гэта ўжо акругляецца як "7". Падняць адзнаку ўсяго на адзін бал па двух нескладаных раздзелах – праблема лёгкавырашальная, і вучань звычайна ахвотна бярэцца за яе вырашэнне і амаль заўсёды з станоўчым вынікам.

На погляд аўтара гэтых радкоў, настаўнік пры выстаўленні адзнакі (думаю, што любой) павінен дзейнічаць (вонкава!) як бяздушны кампутар. Калі вучань зарабіў адзнаку меншую, чым

ён меркаваў, то настаўнік, спакойна выстаўляючы гэтую адзнаку ў ведамасць (натуральна ж, алоўкам), у душы паспачувае вучню і нават можа выказаць гэтае спачуванне. Хаця выказваць і неабавязкова – у такім спачуванні часовая няўдача вучня агучваецца на ўвесь клас, што можа быць нават непрыемным для яго, а вучні і без таго добра адчуваюць, з якімі пачуццямі настаўнік ставіць тую адзнаку. Але гэтыя спачуванні ніколі не павінны прыводзіць да завышэння адзнакі.

І яшчэ адну (на мой погляд, важную) акалічнасць хочацца тут закрануць.

У гісторыі расійскай адукацыі ёсць адзін вельмі прывабны для мяне эпізод. Гэта Царскасельскі ліцэй, дзе ў свой час вучыўся Саша Пушкін, будучае свяціла рускай паэзіі. Сярод іншых навук яго вучылі і геаметрыі. Але ці праз няздольнасць да гэтай навукі, ці праз нежаданне траціць на гэта свой час Пушкін ніяк не мог засвоіць сутнасці нескладаных геаметрычных сцверджанняў і логікі ўзаемасувязяў паміж імі. Настаўнік геаметрыі ставіў яму самыя нізкія адзнакі, што зусім не замінала ім паважаць адзін аднаго і не перашкаджала Пушкіну з павагай ставіцца да самой гэтай мудрай навукі. І сёння досыць часта ў школьных кабінетах матэматыкі можна сустрэць выказванне "В геометрии вдохновение нужно не меньше, чем в поэзии. А. С. Пушкин". У гэтых словах – вялікая перамога настаўніка, які так і не змог навучыць недурнога хлопца геаметрыі.

У савецкай сістэме адукацыі ("роўнай для ўсіх") такая вольнасць ужо не прадугледжвалася, тут лічылася, што **ўсе павінны ведаць усё**. Таму ўсе вучыліся па аднолькавых праграмах у аднолькавых школах. Права вучня на нейкі "ўхіл", на нейкую спецыялізацыю заціскалася і толькі ў старшых класах давалі сякую-такую нібыта аддушыну ў форме факультатыўных заняткаў. А тры двойкі па любых прадметах пакідалі вучня на другі год у тым жа класе, што толькі пладзіла людзей, якія адчувалі сябе выгнаннікамі грамадства і пачыналі ў адказ пагарджаць гэтым грамадствам і знаходзіць свае "нестандартныя" формы самасцвярджацца ў ім.

Але ўжо нават у савецкай школе перадавыя настаўнікі пачыналі гаварыць пра неразумнасць аднолькавасці. В. Сухамлінскі, напрыклад, гаварыў аб праве вучня на няведанне, аб паважлівым стаўленні да вучнёўскага няведання. Калі чалавек не хоча "развівацца ва

ўсе бакі", дык пакіньма яго ў спакоі, – няхай ён развіваецца ў адзін бок, цікавы для яго. У гісторыі навукі і мастацтва колькі заўгодна прыкладаў, калі чалавек займаўся толькі нечым адным, дасягаючы ў гэтым адным вялікіх вышынь, будучы зусім недасведчаным у іншых галінах, будучы нават ганебна непісьменным у справах самых звычайных.

Варта скончыць гэтыя разважанні цытатай з вядомага расійскага філосафа Мікалая Бярдзяева: "Свабода ёсць права на няроўнасць. Роўнасць (калі яна разумеецца шырэй, чым фармальна-юрыдычная раўнапраўнасць) і свабода – рэчы несумяшчальныя. Паводле сваёй прыроды людзі не роўныя. Дасягнуць роўнасці магчыма толькі гвалтоўна, але гэта заўсёды будзе выроўніванне "па ніжнім ўзроўні". Выраўняць беднага з багатым можна толькі адабраўшы ў багатага яго багацце. Выраўняць слабога з дужым можна толькі адабраўшы ў дужага яго сілу. Выраўняць дурнога з разумным можна толькі зрабіўшы розум не вартасцю, а недахопам. Грамадства ўсеагульнай роўнасці – гэта грамадства бедных, слабых і неразумных, заснаванае на гвалце".

Тут яшчэ трэба прызнаць, што ў навучальных праграмах мы недалёка адышлі ад савецкай аднолькавасці. У нас ёсць класы гуманітарнага профілю, гуманітарныя ліцэі, гімназіі, але і там вывучаюць матэматыку, фізіку, хімію амаль у тым жа аб'ёме, як і ў іншых класах ці навучальных установах, робячы сякія-такія "абразанні". Хаця чалавек ужо ўсведамляе сябе як будучага журналіста, лінгвіста, спевака ці танцора, але мы яму ўпарта і зацята тлумачым законы роўнапаскоранага руху ці праблему вылічэння плошчы крывалінейнай трапецыі, якія ён з палёгкай забудзе, як толькі атрымае атэстат аб сярэдняй адукацыі. Праблема "чаму вучыць у школе?" (якая з кожным годам абвастраецца) яшчэ чакае разумнага дзяржаўнага вырашэння.

Але вернемся да разгляданай тэмы. Якія адзнакі можа атрымаць вучань па тэме "Прагрэсіі"?

Першая – адзнака за ўзнаўленне ЛАС. Запомніць ЛАС чыста візуальна, нічога там не разумеючы, нерэальна (хаця нават і такое запамінанне ў некаторых выпадках, як ужо гаварылася, мае сэнс), таму пра чалавека, які дакладна ўзнавіў ЛАС па памяці, можна сказаць, што ён "увайшоў у тэму".

Другая – адзнака за вусны адказ па ЛАС. Настаўнік натуральна не зможа заслухаць вусныя адказы ўсіх вучняў нават па фрагментах тэмы, але В. Шаталаў раіць далучаць сістэму вучнёўскага ўзаемакантролю. Трэба адзначыць, што, паводле назіранняў аўтара, гэтым тонкім педагагічным інструментам не ўсе настаўнікі ўмеюць карыстацца.

Трэцяя – заліковая адзнака па тэме (зноў жа з элементамі ўзаемакантролю). Да заліку рыхтуюць дакладна і эканомна сфармуляваныя пытанні. Кожнае лішняе слова патрабуе лішняй секунды на яго агучванне, а гэтых секундаў настаўніку заўсёды не стае. Таму не "Якая лікавая паслядоўнасць называецца арыфметычнай прагрэсіяй?", а проста "Арыфметычная прагрэсія".

Вось магчымы варыянт аркушыка з пытаннямі па тэме "Прагрэсіі":

	Пытанні да заліку па тэме "Прагрэсіі" (алгебра, 9 клас)	**18**
	1. Арыфметычная прагрэсія і яе рознасць.	
	2. Геаметрычная прагрэсія і яе назоўнік.	
	3. Манатоннасць арыфметычнай прагрэсіі.	
	4. Манатоннасць геаметрычнай прагрэсіі.	
	5. Тры прыклады спадальнай па модулі геаметрычнай прагрэсіі.	
	6. Формула агульнага элемента арыфметычнай прагрэсіі.	
	7. Формула агульнага элемента геаметрычнай прагрэсіі.	
	8. *Характарыстычная ўласцівасць арыфметычнай прагрэсіі.*	
	9. *Характарыстычная ўласцівасць геаметрычнай прагрэсіі.*	
	10. Сума ***n*** элементаў арыфметычнай прагрэсіі*.	
	11. Сума ***n*** элементаў геаметрычнай прагрэсіі*.	
	12. *Сума элементаў спадальнай па модулі бясконцай геаметрычнай прагрэсіі**.	
	13. *Прыклад вылічэння сумы элементаў спадальнай па модулі геаметрычнай прагрэсіі.*	

Зверху – нумар вучня адпаведна спісу. Кожны вучань атрымае такі аркушык са сваім нумарам. Настаўніку такім чынам не трэба траціць час на падпісванне аркушыкаў. Вучні ўжо ведаюць, што кур-

сівам выдзелены неабавязковыя пытанні (на ўзроўні дзвюх самых высокіх адзнак яны абавязковыя), а зорачкай пазначаны пытанні, адказы на якія павінны быць лагічна абгрунтаваныя, г. зн. патрабуецца прывесці формулу з яе доказам.

На адным з урокаў, калі настаўнік пераканаўся, што асновы тэмы засвоены амаль усімі вучнямі класа, ён раздае гэтыя аркушыкі. Адзін з вучняў, што сядзяць далей ад настаўніка, чытае пытанні, а настаўнік сам адказвае на іх, нагадваючы яшчэ раз вывучанае і даючы ўзор правільнага адказу. Па заканчэнні ён на просьбу вучняў паўтарае адказы на асобныя пытанні. Не выключаны варыянт, што паўтарае некалькі разоў.

Па гэтых пытаннях вучні рыхтуюцца да наступнага ўрока, калі ўжо ім самім давядзецца адказваць на тыя самыя пытанні з адзнакамі. Лепшы варыянт, калі рыхтуюцца не кожны паасобку, а парамі ці маленькімі групкамі. Асобна вучань рыхтуецца моўчкі (прачытаў і ўспамінае: здаецца, ведаю), потым ужо на ўроку гэтае "здаецца, ведаю" ніяк не складваецца ў прымальны адказ. А ў парах адказы агучваюцца, "кладуцца на язык": адзін чытае пытанні, другі адказвае, потым мяняюцца ролямі. На ўроку застанецца толькі паўтарыць тое самае. Тут ужо настаўнік задае пытанні, нехта адказвае, для пытанняў з доказам адказы рыхтуюцца на дошцы. І пасля кожнага адказу настаўнік аб'яўляе адзнаку, якую вучань алоўкам заносіць у выдзеленую злева клетачку каля пытання, на якое адказваў. За нядоўны ўрок настаўнік можа пракруціць гэтыя пытанні чатыры разы, аб'явіўшы не 52 адзнакі, а болей, бо па некаторых пытаннях адзнакі могуць атрымаць некалькі вучняў. Напрыклад, адзін запісаў на дошцы вывад формулы, другі пачаў агучваць, трэці закончыў. Такім чынам, у кожнага вучня будзе выстаўлена ў клетачках 4-6 адзнак, сярэдняе арыфметычнае якіх і будзе адзнакай па заліку.

Чацвёртая адзнака – за выкананне рэлейнай працы. Пасля таго, як вучань заявіў, што развязаў самазадачы па пэўнай тэме, настаўнік рыхтуе для яго на адзін з наступных урокаў рэлейную работу, выбраўшы для яе некалькі самазадач. Аб'ём рэлейнай працы прыкладна ў паўтара раза большы за аб'ём адпаведнай кантрольнай працы, бо тут чалавеку трэба проста ўзнавіць развязкі раней развязаных задач, а не развязваць новыя. І патрабаванні да адзнак за рэлейную працу больш высокія: пры невыкананні паловы заданняў рэлейная

праца ацэньваецца "нулём". Такое бывае толькі калі вучань развязваў задачы не самастойна, а няўдумліва перапісваў чужыя развязкі. Пасля адной-дзвюх такіх няўдач вучні пачынаюць разумець, што прымітыўнае перапісванне бессэнсоўнае, што трэба або развязваць задачы самому, або, перапісваючы, разбірацца ў развязках і запамінаць іх. Усё гэта прынцыпова змяняе характар стаўлення да самазадач.

Пятая адзнака – за кантрольную працу.

Па гэтых адзнаках і будзе вызначана агульная адзнака кожнаму вучню за валоданне тэмай "Прагрэсіі".

Натуральна, што выстаўленнем такой адзнакі праца над тэмай не канчаецца. Праз заданні, дзе пытанні гэтай тэмы будуць дапасоўвацца да пытанняў іншых раздзелаў матэматыкі і сумежных навук, тэма пачне "абрастаць" сувязямі з іншымі раздзеламі і далучацца да сістэмы ведаў, якімі вучні ўжо валодаюць ці будуць авалодваць далей.

На заканчэнне прывядзём прыклады выкарыстання ўласцівасцяў прагрэсій у іншых раздзелах школьнай матэматыкі і ў жыццёвых сітуацыях.

1. Сума першых паслядоўных няцотных лікаў роўна квадрату іх колькасці. Няцотныя натуральныя лікі задаюцца формулай $X_n = 2n - 1$. Яны ўтвараюць арыфметычную прагрэсію з першым элементам 1 і рознасцю 2. Таму для таго, каб скласці першыя няцотныя лікі, скарыстаем формулу сумы арыфметычнай прагрэсіі, дзе сярэдняе арыфметычнае першага і апошняга элементаў памнажаецца на колькасць элементаў:

$$S_n = (1 + 2 \times n - 1) : 2 \times n = n^2.$$

Атрыманы вынік вельмі выразна падмацоўваецца карцінкай на с. 12.

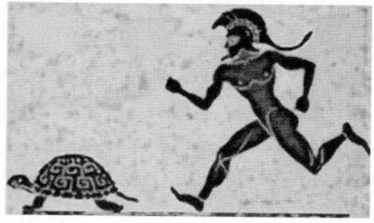
2. Бясконцы перыядычны дзесятковы дроб ёсць лік рацыянальны. На ўроку можна паказаць канкрэтныя прыклады, агульнае разважанне – для самых уніклівых.

$0{,}676767... = 0{,}67 + 0{,}0067 + 0{,}000067 + ...$ (тут выяўляецца бясконцая спадальная па модулі геаметрычная прагрэсія з назоўнікам $0{,}01$) $= \frac{0{,}67}{1-0{,}01} = \frac{0{,}67}{0{,}99} = \frac{67}{99}$.

$$0{,}1236767676... = 123{,}6767... : 1000 = 123\frac{67}{99} : 1000 = \frac{123 \times 99 + 67}{99000} = ...$$

3. Апорыі (парадаксальныя разважанні) Зянона Элейскага.

Зянон Элейскі – грэцкі філосаф V стагоддзя да новай эры праславіўся сваімі парадаксальнымі разважаннямі пра рухі і мноствы, названыя апорыямі.



Апорыя пра Ахілеса і чарапаху. Па дарозе рухаецца чарапаха, за ёю ідзе Ахілес. Паміж імі 1000 ярдаў. Ахілес ідзе ў 10 разоў хутчэй за чарапаху. Але Ахілес ніколі не дагоніць чарапаху.

Аргументацыя: пакуль Ахілес пройдзе 1000 ярдаў, чарапаха прапаўзе 100 ярдаў, пакуль Ахілес пройдзе гэтыя 100 ярдаў, чарапаха адпаўзе яшчэ на 10 ярдаў, пакуль Ахілес пройдзе гэтыя 10 ярдаў, чарапаха аддаліцца яшчэ на 1 ярд, пакуль Ахілес пройдзе гэты ярд, чарапаха адпаўзе на 0,1 ярда і г. д. да бясконцасці. Таму Ахілес чарапаху ніколі не дагоніць.

Так у разважанні. Але на практыцы Ахілес без цяжкасці даганяе тую чарапаху. Парадокс! – над якім кіпелі мазгі старажытных грэкаў.

Прасочым за рухам Ахілеса: ён прайшоў 1000 ярдаў, потым яшчэ 100 ярдаў, і яшчэ 10 ярдаў... Заўважаем бясконцую спадальную па модулі геаметрычную прагрэсію з назоўнікам 0,1. Яе сума =

$$1000 : (1 - 0{,}1) = 10\,000 : 9 = 1111\frac{1}{9}.$$

Адказ: Ахілес сапраўды не дагоніць чарапаху, прайшоўшы адлегласць у 1111 (крыху болей) ярдаў.

Калі перайсці на меры часу, тады адказ стане больш выразным. Прымем, што хуткасць Ахілеса 3 ярды за секунду (ярд крыху меншы за метр; такая звычайна хуткасць кроку чалавека), і выявім, што Ахілес не дагоніць чарапаху на працягу 370,(370) секунд, гэта 6 мінут і крыху больш за 10 секунд. Але яшчэ праз секунду Ахілес будзе наперадзе чарапахі.

4. Як не спакусіцца лёгкай "эканомікай". У сваёй кнізе "Займальная матэматыка" Якаў Перэльман распавёў такую гісторыю. На адным велазаводзе прыдумалі, як паскорыць продаж веласіпедаў. Веласіпед каштаваў 50 рублёў. Жыхарам горада прапаноўвалася набыць веласіпед за 10 рублёў. Пачуўшы пра такое, чалавек прыходзіў на завод і яму за 10 рублёў выдавалі 5 квіткоў, якія ён павінен быў распаўсюдзіць сярод сваіх знаёмых па 10 рублёў за квіток. Прыносіў тыя 50 рублёў на завод і атрымоўваў веласіпед. Той, хто набыў квіток, ішоў на завод, там мянялі квіток на пяць новых, якія ён павінен быў распрадаць па 10 рублёў. Прыносіў 50 рублёў на завод і вяртаўся з веласіпедам. І так далей.

Прыгледзімся да працэсу. Найперш заўважым, што завод нічога не губляў, бо прадаваў веласіпеды за тыя ж 50 рублёў. А як з людзьмі? Няхай гэта будзе ў горадзе з насельніцтвам у мільён аматараў веласіпедных прагулак. 1 чалавек уцягнуў у "забаву" 5 чалавек. Тыя ўцягнулі яшчэ 25 новых (бо таму, хто набыў веласіпед, квіток ужо непатрэбны), ад іх квіткі набылі яшчэ 125 чалавек. І так працэс ідзе з нарастаннем паводле геаметрычнай прагрэсіі з назоўнікам 5. Сумаванне ідзе па формуле $\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$, дзе $q = 5$, $a_1 = 1$. І гэтая сума не павінна перавышаць мільён: $0{,}25 \times (5^n - 1) < 1\,000\,000 \Rightarrow 5^n < 4\,000\,001$. Максімальнае n у гэтым выпадку роўнае 9. На восьмым кроку з веласіпедамі будуць ужо 97 656 чалавек. Апошняя група з 78 125 чалавек яшчэ змогуць "ашчаслівіць" квіткамі за 10 рублёў чарговых 390 625. Але тыя ўжо не змогуць прадаць свае квіткі, бо практычна ўжо няма каму. Такім чынам, хто выйграў і хто прайграў? Завод змог распрадаць каля ста тысяч веласіпедаў, не зніжаючы кошту, таму выйграў. Каля ста тысяч жыхароў займелі па веласіпедзе, заплаціўшы толькі па 10 рублёў, яны несумненна выйгралі. Магчыма, да іх далучыцца яшчэ пятая частка шчасліўцаў апошняй групы, тым самым колькасць гэтых шчасліўцаў узрасце да 170-180 тысяч. А ўсе астатнія застануцца ў пройгрышы, бо набытыя імі квіткі ніхто не будзе купляць, і іх дзесяцірублёўкі страчаныя незваротна. Атрымліваецца, што 800 тысяч жыхароў горада дапамаглі заводу збыць сваю прадукцыю і падарылі па веласіпедзе астатнім жыхарам. Іх агульныя страты – каля васьмі мільёнаў рублёў.

Прыблізна тое самае адбывалася з сумна вядомай расійскай кампаніяй "МММ" на пачатку 90-х гадоў мінулага стагоддзя.

Падагрэтыя даходамі першых (успомніце першыя хвалі пакупнікоў веласіпедаў, якія сапраўды набылі веласіпеды па 10 рублёў) і адпаведнай назойлівай рэкламай, людзі ўкладвалі вялікія (хтоніхто нават апошнія) сродкі ў білеты МММ. А ў выніку пацярпелі каля 10 мільёнаў расійскіх грамадзян, каля 50 з іх скончылі жыццё самагубствам.

Падобная эканамічная бурбалка, так і названая "Бурбалкай Паўднёвых мораў" здарылася на пачатку XVIII стагоддзя ў Вялікабрытаніі. "Кампанія Паўднёвых мораў" хацела разбагацець продажам афрыканскіх рабоў у Паўднёвай Амерыцы і на выспы Паўднёвых мораў. На гэты гандаль кампанія атрымала ад дзяржавы манапольнае права, і яе акцыі імкліва выраслі. Людзі, прывабленыя вялікімі прыбыткамі, укладвалі вялікія сродкі, якія на пачатку акупляліся. Але Паўднёвыя моры кантралявалі Іспанія і Партугалія, да таго ж Вялікабрытанія была ўцягнута ў вайну за іспанскую спадчыну. Кампанія не атрымала дый не магла атрымаць прыбытку ад сваёй манаполіі і доўгі час (некалькі гадоў) трымалася на ўкладах інвестараў. Але ўсё скончылася як і павінна быць. Акцыі кампаніі ўрэшце сталі непрыбытковымі. Тысячы інвестараў апынуліся ў галечы. Нібыта адным з акцыянераў кампаніі быў і Ісаак Ньютан, які ўкладваў свае сродкі двойчы. Першы раз атрымаў прыбытак, а другі раз увесь свой немалы ўнёсак страціў. І да канца сваіх дзён не мог слухаць ні пра якія акцыі: "Я магу прадказваць рух нябесных целаў, але не глыбіню чалавечага вар'яцтва".

Варта ведаць пра такое, каб чарговы раз не карміць сваімі сродкамі новых авантурыстаў.

5. Гуляйце з дзецьмі!

Аднойчы да мяне прывялі хлопчыка, пяцікласніка, у якога былі вельмі нізкія адзнакі па матэматыцы. Непрацяглая гутарка выявіла, што дома з ім ніхто не займаецца. Ён не ведае ніводнага вершыка, мае праблемы з табліцай множання нават на ўзроўні 3 на 6. "У якія гульні вы з ім гуляеце?" – пытаюся. "Няма ў нас часу на гульні!" Яны, мабыць, думаюць пра шашкі ці нават шахматы. Але ж ёсць гульні, для якіх хапае пяці-дзесяці хвілін.

"Вось кучка з дзесяці гузікаў, – прапаную яму. – За адзін раз можна ўзяць з кучкі 1, або 2, або 3 гузікі. Выйграе той, хто забярэ апошні гузік. Хто пачне?" – "Пачынайце вы." Пачынаю і хутка выйграю. "Ну што, яшчэ раз? Хто пачне?" Ён пачынае і прайграе. Згулялі разоў дзесяць, і ўсе ён прайграў. І нават не задумаўся пра тое, як тут можна выйграць. Мысленне ў чалавека на ўзроўні дашкольніка.

Хлопцу 11 гадоў. Бацькі не ведаюць, што фарміраванне клетак кары галаўнога мозгу чалавека заканчваецца недзе ў 12-13 гадоў. Пасля гэтага паправіць нешта ў мысленні чалавека амаль немагчыма. Над хлапцом навісла рэальная пагроза застацца ў жыцці дурнем з усімі адпаведнымі наступствамі. Чым гэта можна хаця б крыху выправіць? Просценькімі задачкамі, рэбусамі, галаваломкамі (у тым ліку дротавымі), лабірынтамі... І абавязкова гульнямі, на якія варта знаходзіць хаця б паўгадзіны на дзень. І назіраць, як чалавек шукае ў гульні выйгрышную стратэгію.

Розных настольных гульняў (крыжыкі-нулікі, марскі бой, нескладаныя крыжаванкі ды іншыя гульні з словамі...) шмат. Я памянуў адну з іх. Гэтая просценькая гульня з гузікамі (каменьчыкамі, палачкамі) называецца **нім**. Тут не трэба вялікіх мазгавых звілін, каб здагадацца, што для выйгрышу варта пакінуць партнёру 4 гузікі. А гэта лёгка зрабіць, калі ў кучцы застанецца 8 гузікаў. І першы крок ужо бачны. Тут хто пачне (разумна пачне), той і выйграе.

Але памяняем колькасць гузікаў у кучцы. Няхай іх стане 17, 27, 111 і г. д. (можна гуляць з віртуальнымі гузікамі, запісваючы астатнюю пасля хода колькасць гузікаў на паперы). Варта гуляць да таго часу, калі ваш маленькі партнёр зможа сказаць, як выйграць, калі ў кучцы 1523 гузікі.

4, 8, 12, 16... Усе лікі, кратныя чатыром. Добра, калі ён гэта заўважыў. Тады падзяліць 1523 на 4... Атрымаецца неістотна колькі, а істотна – якая будзе рэшта. Яе і забраць першым ходам.

Далей памяняць крыху сітуацыю. Адным ходам можна забраць ад 1 да 5 гузікаў. Як тут выйграць?

А калі адным ходам можна забраць ад двух да чатырох гузікаў?..

І ўрэшце новае правіла: хто забярэ апошні гузік, той прайграе. Тут сітуацыя істотна змяняецца. Пачаць зноў жа з дзесяці гузікаў. І забіраць 1-2-3. Ці здагадаецца ваш гулец, што цяпер трэба пакінуць партнёру пад канец 5 гузікаў. А перад гэтым 9, а перад дзявяткай 13.

1, 5, 9, 13, 17... Гэта арыфметычная прагрэсія з рознасцю 4 (якой была і папярэдняя). Чалавек яшчэ не ведае пра прагрэсіі, але можа заўважыць, што кожны лік гэтай паслядоўнасці на 1 большы за лік, кратны чатыром. І тады ў кучцы трэба пакідаць колькасць гузікаў, якая пры дзяленні на 4 дасць рэшту 1.

І далей зноў – мяняць колькасць гузікаў у кучцы, мяняць велічыню хода. Да поўнага разумення: як выйграць у такой сітуацыі, калі ў кучцы 987 гузікаў, а браць за адзін ход можна ад 1 да 5 (ад 2 да 4)? Давесці да таго, каб чалавек мог сфармуляваць выйгрышную стратэгію.

Натуральна, гэта ўсё не за адзін дзень. Па 5-10 хвілін у дзень можна знайсці.

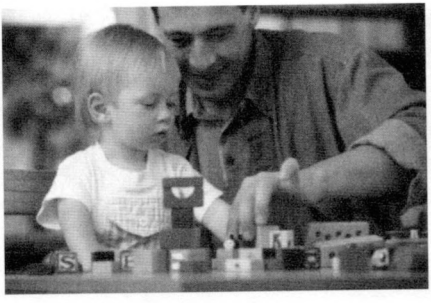
А ў выніку і мозг трэніруецца (яго ж трэба трэніраваць не менш, чым цела!), і калі дойдзе справа на ўроках матэматыкі да вывучэння прагрэсій, – для яго гэтая тэма будзе выглядаць даступнай і лёгка зразумелай.

Пазней, калі вучні на тых уроках навучацца ўзводзіць у ступень, настаўнікам карысна прапаноўваць сваім выхаванцам задачкі: якой лічбай закончыцца лік 5^{117}? Адказ тут зусім просты, як і з лікам 6^{38}. Крыху складаней з лікам 9^{284}. А вось цяпер – якая апошняя лічба ў ліку 2^{331} ці ў ліку 3^{705}? Тут таксама знойдзецца прагрэсія.

Ці вось такая задача: колькі часу быў у дарозе цягнік, які выйшаў з Масквы а 14-й гадзіне і прыбыў у Хабараўск а 7-й гадзіне па мясцовым часе? (Вялікія прасторы Расійскай Федэрацыі дазваляюць ставіць такія задачы. Неабходныя велічыні ўзяць з інтэрнэта.)

Такімі пытаннечкамі-задачкамі вы рыхтуеце маленькіх людзей да перыядычных працэсаў, што асабліва ўзгадаецца пры вывучэнні трыганаметрыі. Але пра тое будзе іншая кніга.

Таты і мамы! Бабулі і дзядулі!
Гуляйце з сваімі дзецьмі і ўнукамі
ў разумовыя гульні!
Дапамагайце ім стаць разумнымі.

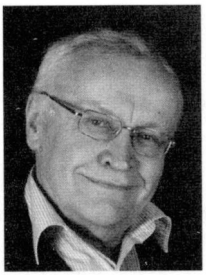




Скарыстаная ў кнізе матэматычная тэрміналогія адпавядае наступным крыніцам:

Русско-белорусский математический словарь. Под редакцией доктора физико-математических наук, профессора Я. Радыно. Минск: Вышэйшая школа, 1993;

Матэматычная энцыклапедыя. Галоўны рэдактар В. Бернік. Мінск: Тэхналогія, 2001.



Міхась Булавацкі
вядомы ў Беларусі і за яе межамі настаўнік. Выкладаў матэматыку ў школах, гімназіях, ліцэі, чытаў курс методыкі выкладання матэматыкі студэнтам фізічна-матэматычнага факультэта. Шмат падарожнічаў па Савецкім Саюзе, вывучаючы досвед розных настаўнікаў, потым ездзіў з лекцыямі і семінарамі, распавядаючы настаўнікам пра новыя ідэі ў навучанні матэматыцы. Удзельнік некалькіх міжнародных канферэнцый, прысвечаных праблемам навучання. Аўтар падручнікаў "Матэматыка: 5-бг" для пятых класаў беларускіх гімназій і "Цалкам зразумелая трыганаметрыя", а таксама шматлікіх публікацый у метадычных часопісах.

Навукова-папулярнае выданне

Булавацкі Міхась Пятровіч

ЛІКІ ў нашым жыцці

Рэдактар *Зьміцер Санько*
Шыхтаванне *Уладзя Губіч*
Дызайн вокладкі *Аляксей Кандакоў*
Карэктарка *Наста Качан*

Падпісана да друку 26.04.24. Фармат 60×90 $^{1}/_{16}$.
Папера афсетная. Друк афсетны.
Ум. друк. арк. 6,0. Ул.-выд. арк. 6,2.
Наклад 350 паас. Замова 1117.

12+

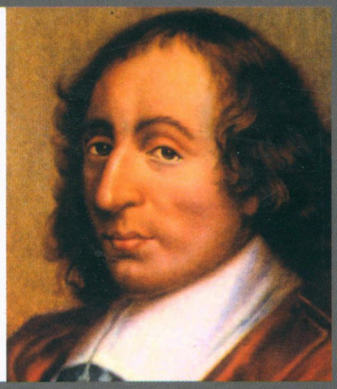
Навукова-вытворчы кааператыў «Тэхналогія».
Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца,
вытворцы, распаўсюдніка друкаваных выданняў
№ 1/379 ад 01.07.2014.
Вул. Ляўкова, 19, оф. 2н, 220007, Мінск, Беларусь.
e-mail: technalohija@gmail.com. www.tn.by.

Вытворчае даччынае ўнітарнае прадпрыемства
«Друкарня Федэрацыі прафсаюзаў Беларусі».
Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца,
вытворцы, распаўсюдніка друкаваных выданняў
№ 2/18 ад 26.11.2013.
Пл. Свабоды, 23-103, 220030, Мінск, Беларусь.

ISBN 978-985-458-371-6



1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 ...



лікі ў нашым жыцці

П Р А Г Р Э С І І

арыфметычная

23; 16; 9; 2; -5; -12; -19; -26...

рознасць $d = -7 (< 0)$ $d > 0$

спадае *нарастае*

$d = 0$

$a_2 = a_1+d$, $a_3 = a_1+2d$, $a_4 = ...$

$a_n = a_1 + (n-1)d = a_k + (n-k)d$

$2a_n = a_{n-k} + a_{n+k} = (a_n-kd)+(a_n+kd)$

$+d \rightarrow$

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$

$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_3 + a_2 + a_1$

$\leftarrow -d$

$2S_n = (a_1+a_n)\cdot n \Rightarrow S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n$

геаметрычная

0,25; -0,5; 1; -2; 4; -8; 16; -32...

назоўнік $q = \pm 1$ $q \neq 0$

$q=-2$, $q=5$ } *нарастае па модулі:* $|q| > 1$

$q=0,5$, $q=-0,7$ } *спадае па модулі:* $|q| < 1$

$a_2 = a_1\cdot q$, $a_3 = a_1\cdot q^2$, $a_4 = ...$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = a_k \cdot q^{n-k}$

$a_n^2 = a_{n-k}\cdot a_{n+k} = (a_n\cdot q^{-k})\cdot(a_n\cdot q^k)$

$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$

$-$

$qS_n = a_1q + a_2q + ... + a_{n-2}q + a_{n-1}q + a_nq$

$S_n(1-q) = a_1 - a_nq \Rightarrow S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

Калі $|q| < 1$ *і* $n \rightarrow \infty$, *то* $q^n \rightarrow 0$

$S = \frac{a_1}{1-q}$

Сета: $S_{64} =$

ЛІКІ Ў НАШЫМ ЖЫЦЦІ